53

BURMESTER.

Kinematik,

1.

LEHRBUCH

DER

KINEMATIK.

FÜR STUDIRENDE
DER MASCHINENTECHNIK, MATHEMATIK UND PHYSIK

GEOMETRISCH DARGESTELLT

VON

Ludwig

Dr. L. BURMESTER,

ORDENTLICHER PROFESSOR DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE UND DER KINEMATIK
AN DER KÖNIGLICHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZU MÜNCHEN.

ERSTER BAND.

DIE EBENE BEWEGUNG.

MIT EINEM ATLAS VON 57 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG,

VERLAG VON ARTHUR FELIX.

1888.

VORWORT.

Die Kinematik ist aus der Verbindung des Begriffs der Bewegung mit der Geometrie hervorgegangen und hat sich durch die folgenreichen Ergebnisse vielseitiger Forschung in den letzten Jahrzehnten zu einer selbständigen Disciplin erhoben. Demnach musste als nothwendige Folge dieses erste Lehrbuch der Kinematik entstehen, welches auf geometrischer Grundlage durch methodisch begründete Darlegungen zur Erkenntniss und praktischen Verwerthung der vielen in der Literatur vorhandenen fruchtbaren Ergebnisse führt, welches die Pfade zur Gewinnung neuer Resultate, zur geometrischen Lösung praktischer Aufgaben ebnet, und durch sorgfältige Klärung der literarischen Quellen die geschichtliche Entwickelung erhellt. Erfüllt von dem Bestreben die Kinematik zu fördern und die praktische Anwendung derselben zu erweitern, habe ich mir die mühevolle Arbeit auferlegt, dieses Werk der systematischen Gestaltung der Kinematik selbstschöpferisch zu vollbringen. In neuer Methode und durch neue Resultate vervollkommt, habe ich die Fülle des theoretischen Lehrstoffes leicht fasslich entwickelt und durch praktische Anwendungen veredelt. Mit der im Lehrberufe gereiften Einsicht, dass das Verständniss der mannigfaltigen Beziehungen bei den Bewegungsvorgängen durch constructive Ausführungen erleichtert und befestigt wird, sind die erforderlichen Constructionen in vorbildgebender Vollständigkeit sorgfältig zeichnerisch dargelegt und bei vielen Beispielen zur steten Einübung wiederholt. Um den höchsten Anforderungen der graphischen Klarheit zu genügen, wurden die erläuternden Darstellungen und die vieldurchdachten Constructionen in übersichtlicher Anordnung nur aus den wesentlichen Linien lehrreich gebildet und mit grosser Genauigkeit in die lithographirten Tafeln übertragen. Gemäss der alten geometrischen Theilung der Beziehungen der Gebilde in der Ebene und in dem Raume, sind in diesem Lehrbuche auch die Beziehungen der Bewegung der Gebilde in der Ebene und in dem Raume getrennt, so dass der erste Band die ebene Bewegung, der zweite abschliessende Band die räumliche Bewegung behandelt. Denn durch die vorher erlangte klare Vorstellung der anschaulicheren Bewegungsvorgänge in der Ebene wird das Verständniss der Bewegungsvorgänge im Raume erleichtert.

Im ersten Bande werden mit steter Rücksicht auf die praktische Anwendung die Bewegungsvorgänge der ebenen Gebilde und der verschiedenartig gestalteten Mechanismen, welche ebene Bewegungen vollziehen, ausführlich untersucht. Gestützt auf die Grundlehren der Geometrie mit Einschluss der Projectivität werden die fundamentalen Beziehungen der Bewegung ebener Systeme und Gebilde entwickelt, die Constructionen der Tangenten und Krümmungsmittelpunkte an den erzeugten Bahnen und die Bestimmungen der Geschwindigkeiten ausgeführt. Auf die in neuer Weise ausführlich behandelten cyclischen Curven gründen sich die wichtigen Constructionen der verschiedenen Verzahnungsarten der Stirnräder und der Kapselräder in allen Einzelheiten der praktischen Anforderungen. Die Lehre von der Stützung und zwangläufigen Bewegung bildet den Uebergang zu den Mechanismen, für welche gemäss den wissenschaftlichen Fortschritten strengere Definitionen gegeben sind. Die einfachen ebenen Mechanismen erforderten eine systematische Eintheilung und entsprechende Namengebung; ihre Bewegungsvorgänge und ihre Geschwindigkeits-Verhältnisse finden eingehende Betrachtung; die Diagramme für Weg und Geschwindigkeit werden in allen Fällen construirt. Bei den wichtigsten zusammengesetzten ebenen Mechanismen werden die Geschwindigkeiten bestimmt und die zweckmässigsten geometrischen Anordnungen ausgeführt, welche durch praktische Anforderungen bedingt sind. Ferner werden diejenigen Mechanismen behandelt, die erst durch bestimmte freie Führung Zwangläufigkeit erlangen, und solche zwangläufige Mechanismen erörtert, die durch Einfügung neuer Glieder ihre Zwangläufigkeit bewahren. Vermittelst geometrischer Untersuchungen ergeben sich die Mechanismen, welche eine möglichst angenäherte Geradführung erzeugen. Die Bewegungsvorgänge der Mechanismen bewährter Schiebersteuerungen mit einem Schieber sowie mit zwei Schiebern werden in geometrischer Klarheit dargelegt. Eine ausführliche Behandlung ist den Beschleunigungen gewidmet, welche bei den bewegten Punkten und Systemen, sowie bei den einfachen und zusammengesetzten Mechanismen auftreten. Und mit den wichtigsten Beziehungen der Bewegung veränderlicher Systeme schliesst der erste Band.

Der zweite später erscheinende Band enthält die analoge Untersuchung der bewegten Systeme im Raume und der Mechanismen, welche räumliche Bewegungen vollziehen, lehrt die Constructionen der Kegelräder, Schraubenräder, sowie der hyperbolischen Räder und behandelt die Geschwindigkeiten nebst Beschleunigungen, welche bei diesen Systemen und Mechanismen auftreten.

München, den 20. October 1887.

Dr. L. Burmester.

INHALTSVERZEICHNISS

des ersten Bandes.

ERSTER ABSCHNITT.

Grundlegende Beziehungen der Bewegungen.

Begriff der Geschwindigkeit.

Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten.

Von der Bewegung des starren ebenen Systems.

Zwangläufige Bewegung der Gebilde in der Ebene.

SECHSTER ABSCHNITT.

Einfache ebene Mechanismen.

Einfache ebene Mechanismen mit vier Drehpaarungen.
Kurbelmechanismus und Kurbelgetriebe.

Specielle Kurbelgetriebe.

SIEBENTER ABSCHNITT.

Zusammengesetzte ebene Mechanismen.

ACHTER ABSCHNITT.

Geführte Mechanismen und übergeschlossene Mechanismen.

Mechanismen für Erzeugung ähnlicher Bewegungen.

Mechanismen für Erzeugung inverser Bewegungen.

Mechanismen für Erzeugung gesetzmässig entsprechender Bewegungen.

Mehrfach geführte Mechanismen.

Uebergeschlossene Mechanismen.

NEUNTER ABSCHNITT.

Mechanismen für angenäherte Geradführung.

Ableitung geometrischer Hülfsbeziehungen.

Seite

Construction angenähert geradführender Mechanismen.

ZEHNTER ABSCHNITT.

Mechanismen bewährter Schiebersteuerungen.

Steuerungen mit einem Schieber.

Steuerungen mit zwei Schiebern.

Umsteuerungen.

Seite

ELFTER ABSCHNITT.

Die Lehre von der Beschleunigung und ihre Anwendung auf die Mechanismen.

Begriff der Beschleunigung.

Bewegung eines Punktes durch gesetzmässig wirkende Beschleunigung.

Zusammensetzung und Zerlegung der Beschleunigungen.

Construction der Beschleunigung zusammengesetzter Bewegungen.

ZWÖLFTER ABSCHNITT.

Bewegung gesetzmässig-veränderlicher ebener Systeme.

Allgemeine Betrachtungen gesetzmässig-veränderlicher ebener Systeme.

Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme.

Bewegung affin-veränderlicher ebener Systeme.

Einleitung.

Als Newton auf den fundamentalen Erfahrungssätzen mit dem mächtigen Werkzeuge der Geometrie die Mechanik erbaute[1]), entfaltete die höhere analytische Methode ihre souveräne Gewalt, und schuf in bewunderungswürdig raschem Fortschritte die analytische Mechanik, welche die schwierigsten Probleme mit geistvoller Lösung krönte. Während diese erhabene Geistesschöpfung sich kräftig entwickelte, begannen D'Alembert[2]), Euler[3]) und Kant[4]) die Bewegungen an sich unabhängig von ihren Ursachen, in abstracter Weise auf rein geometrischer Grundlage zu behandeln. Dadurch wurde die Lehre von den nach Carnot[5]) benannten „geometrischen" Bewegungen, die durch geometrische Bedingungen bestimmt sind, auf reiner Anschauung gegründet, und für die geometrische Forschung eine selbständige Disciplin geschaffen, die als geometrische Bewegungslehre bezeichnet wird[6]). Die neuere synthetische Geometrie, welche die Lagenbeziehungen der geometrischen Gebilde behandelt, erweiterte sich durch den Begriff der Bewegung. In vielen verdienstvollen Arbeiten[7]) wurden die Bewegungen der starren, sowie der gesetzmässig veränderlichen, geometrischen Gebilde mit grossem Erfolge untersucht, die Verhältnisse der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen bestimmt. So wurden viele wichtige Ergebnisse gewonnen, welche über die Beziehungen der Bewegungen geometrische Klarheit verbreiten und vielen wichtigen Aufgaben geometrische Lösung verleihen.

Durch die Erkenntniss, dass die Bewegungen, die bei den vielgestaltigen Maschinen auftreten, innerhalb eines weit umgrenzten Bereiches, durch geometrische Bedingungen bestimmbar sind, fand die geometrische Bewegungslehre weitgehende Anwendung in der Untersuchung der Bewegungsvorgänge der Maschinen. Infolge dieser Erweiterung bildete sich neben der hochentwickelten

Mechanik eine selbständige Disciplin: die geometrische Bewegungslehre und ihre Anwendung auf die Maschinen; und für dieselbe hatte Ampère[8]) prophetisch voraussehend den Namen Kinematik (von κίνημα, Bewegung) bestimmt.

Die Verwirklichung gedachter geometrischer Bewegungen erfordert, dass die bestimmenden geometrischen Bedingungen durch physikalische Bedingungen ersetzt werden, und dass die geometrischen Beziehungen der Bewegungen in der Anwendung ihre volle Richtigkeit bewahren. Die Kinematik muss sich deshalb auch besonders mit der Formgestaltung der Bestandtheile der Mechanismen beschäftigen, um jene geometrischen Bedingungen zu verwirklichen; sie muss die geometrischen Bewegungsvorgänge auf Thatsachen der Erfahrung stützen, damit die Resultate der Entwickelungen bei der Untersuchung der Mechanismen mit der Wirklichkeit übereinstimmen. Das Gebiet der Kinematik, die noch in voller Bildung begriffen ist, darf noch nicht mit festen Grenzen umzogen werden; denn weil sich mit der praktischen Anwendung physikalische Eigenschaften verknüpfen, die den Begriff der Kraft enthalten, so muss die Kinematik, wie sie die Zeit als Maass zur Vergleichung der Bewegungen gebraucht, auch die Kraft in geometrischem Gewande als Hülfsmittel verwenden.

In vielen alten Werken[9]) sind die in den vorigen Jahrhunderten gebauten Maschinen nach willkürlicher Ordnung ohne Methodik beschrieben, zwar sind die Mechanismen in einzelnen Fällen auch getrennt behandelt, aber eine wissenschaftliche Untersuchung und eine systematische Eintheilung ist nirgends erstrebt. Aus dem zunächst liegenden Bedürfniss, eine Uebersicht der verschiedenartigen Mechanismen zu erlangen, entstand, angeregt durch Monge, fortgeführt durch Hachette und bearbeitet von Lanz und Bétancourt[10]), eine mangelhafte Eintheilung der Maschinen nach der Verwandlungsart ihrer Bewegungen. Aber diese Eintheilung, wenn auch später oft modificirt, war unhaltbar; denn das Eintheilungsprincip ist nicht in der Art der Bewegungen und deren Verwandlungen begründet, sondern es muss aus dem innersten Wesen der Mechanismen erspriessen. Daher musste auch die von Borgnis[11]) befolgte Systematisirung der Maschinen nach den Wirkungsweisen der Organe derselben und nach den Verwandlungsarten der Bewegungen fruchtlos verwelken. Die Mängel dieser Classificationen wurden bald empfunden, aber eine lange Zeit ergebnissreicher kinematischer Forschung ist verflossen, bis eine tiefere Einsicht zur vollen Reife gelangte. Die Nützlichkeit der Kinematik wurde zuerst in Frankreich erkannt, wo Poncelet schon im Jahre 1838 mit energischem Bemühen den Unterricht der Kinematik an der Sorbonne einführte; und nun entstand in rascher Folge eine Fülle bedeutsamer selbständiger Werke, in denen die Kinematik mit regem Eifer gepflegt und mit grossem Erfolge gefördert wurde.

Zuerst beleuchtet Willis[12]) in seinem ausgezeichneten, lehrreichen Werke die Mechanismen mit theoretischer Klarheit und eröffnet den verheissungsvollen Pfad der kinematischen Untersuchungen. Ihm folgt auf gleicher Bahn Giulio[13]), der in seinem leicht verständlichen Buche die Mechanismen mit den Hülfsmitteln der elementaren Geometrie behandelt, die Beziehungen der Bewegungen vorzugsweise durch graphische Darstellungen veranschaulicht; und ferner folgt ihm in gleicher Richtung Laboulaye[14]), der durch seine viel umfassende Arbeit das Gebiet der Anwendung mit reifer praktischer Kenntniss vergrössert, aber mit kaum erkennbaren Grenzen umzieht. Fast gleichzeitig giebt dann Morin[15]) in beschreibender Weise eine kurze, für den elementaren Unterricht bestimmte Behandlung der kinematischen Grundlehren. Nach diesen verdienstvollen wichtigsten Werken, die dem freien Dienste der Praxis gewidmet sind, bewirken die allmählich auf geometrischem Grunde geernteten Resultate eine volle Wendung der Forschung ins theoretische Gebiet. In Girault's Schrift[16]) beginnt die Theorie sich in geometrischer Richtung zu entwickeln, und in Resal's reichhaltigem Werke[17]) wird die Theorie mit den höchsten mathematischen Hülfsmitteln in mannigfacher Erweiterung entfaltet; aber in den vortrefflichen Werken von Belanger[18]), Haton[19]) und Bour[20]) dringen Theorie und Praxis wieder einheitlich in einander und bekunden, dass in ihrer innigen Vereinigung die Selbständigkeit der Kinematik wurzelt. Anregend und vorbildgebend hat Reuleaux in seinem originellen Werke[21]) die Verwirklichung gedachter geometrischer Bewegungen durch die Formung der materiellen Körper nach ihrem Gesetze der Undurchdringlichkeit behandelt; und ihm gebührt das Verdienst, dem folgenreichen Begriff des Mechanismus die erste praktische Prägung verliehen zu haben. Durch diesen Begriff hat Reuleaux das Unhaltbare der Eintheilungsprincipien der Mechanismen in den Werken seiner Vorgänger aufgedeckt, und seinen Nachfolgern eine Richtschnur gespannt, nach welcher das Praktische in der Kinematik sich systematisch entwickeln muss. Aber das von Ampère gelegte feste mathematische Fundament der Kinematik nicht beachtend, setzt Reuleaux selbst sich enge Schranken, indem er die segensreiche Hülfe der thatkräftigen geometrischen Forschung verschmäht und in die Mechanik verweist. Erst durch diese schöpferische Hülfe wird die Lehre von den Mechanismen verklärt und das Feld befruchtet, auf dem wir praktischen Nutzen ernten.

Nach all diesen schwankenden raschen Entwickelungsphasen muss mit zwingender, wissenschaftlicher Nothwendigkeit die Kinematik eine feste Gestaltung empfangen, in welcher die Läuterung des mannigfachen Lehrstoffes sich folgerichtig vollzieht. So musste aus der Resultatenfülle der Forschungen als nothwendige Folge dieses Lehrbuch der Kinematik hervorgehen, welches auf geometrischem Grunde durch die harmonische Vereinigung der Theorie und Praxis den Reichthum fruchtbarer Ergebnisse entfaltet und die praktische Verwerthung derselben in voller Klarheit offenbart.

Um die Lehren der Kinematik den Studirenden der Maschinentechnik, der Mathematik und der Physik in leichtfasslicher Weise darzulegen, und um das Interesse für die Kinematik in weiteren Kreisen zu erwecken, haben wir bei der Entwickelung dieser Disciplin nur die Hülfsmittel der Geometrie und den unentbehrlichen Begriff des Unendlich-Kleinen verwendet. Damit ist dann auch die Form und das Maass unserer Darlegungen bestimmt.

Behufs der begrifflichen Erörterung des Unendlich-Kleinen geht man von der Vorstellung einer veränderlichen Grösse aus. Wenn die auf einander folgenden Werthe einer veränderlichen Grösse sich der Null derart nähern, dass die Abweichung von der Null kleiner wird als irgend welche angebbare Grösse, so sagt man, dass die veränderliche Grösse nach dem Grenzwerth Null convergirt und unendlich klein wird. Demnach verschwindet eine unendlich kleine Grösse gegen eine endliche; und die Summe von einer endlichen Anzahl unendlich kleiner Grössen ist auch eine unendlich kleine Grösse. Hieraus folgt ferner, dass eine unendlich kleine Grösse auch gleich gesetzt werden kann dem Product aus einer unendlich kleinen Grösse und einer endlichen Zahl. Bei dem Auftreten mehrerer unendlich kleiner Grössen wird eine ausgewählt, die man als unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrachtet, beispielsweise mit dt bezeichnet, um dieselbe mit den anderen zu vergleichen. Wenn eine Grösse ds mit dt in einem endlichen Verhältnisse steht, der Quotient $ds:dt$ gleich einer von Null verschiedenen endlichen Zahl v ist, so ist auch ds eine unendlich kleine Grösse. Ist aber v selbst eine unendlich kleine Grösse, dann ist ds gleich dem Producte zweier unendlich kleiner Grössen erster Ordnung und wird eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung genannt. Dieselbe verschwindet gegen eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung. In derselben Beziehung wie die unendlich kleinen Grössen erster Ordnung zu endlichen Grössen stehen, befinden sich die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung zu denen der ersten Ordnung; und das Analoge gilt von den successive folgenden höheren Ordnungen.

Um die Bewegungsvorgänge methodisch zu untersuchen, ist es nothwendig und zweckmässig, die Betrachtung mit der Bewegung eines nach allen Dimensionen unendlich kleinen Körpers, der ein materieller Punkt genannt wird, zu beginnen. Sofern aber die Ursachen der Bewegungen bei unseren Darlegungen nicht in Betracht kommen, können wir einen materiellen Punkt durch einen geometrischen Punkt ersetzen. Bei der momentanen Bewegung ist der Begriff der Zeit entbehrlich. Die Vergleichung dauernder Bewegungen erfordert aber als Hülfsmittel die Zeitmessung; und behufs Feststellung derselben wird angenommen: zwei Bewegungsvorgänge, die sich durch nichts anderes unterscheiden als dadurch, dass sie zu verschiedenen Zeiten stattfinden, haben gleiche Dauer.[22)]

Die Lagen eines bewegten Punktes werden auf ein bestimmtes Raumsystem bezogen. Derjenige Punkt dieses Raumsystems, der in einem Momente mit dem bewegten Punkte coincidirt, heisst der Ort dieses Punktes in dem gedachten Raumsystem. Die Gesammtheit aller Orte des bewegten Punktes bilden in diesem Raumsystem seine Bahn. Dieselbe ist, wenn alle ihre Punkte in einer Ebene liegen, eine ebene Curve oder eine Gerade; anderen Falls aber ist sie eine unebene oder doppelt gekrümmte Curve, d. h. eine Raumcurve. Hierauf gründet sich die Eintheilung der Bewegung eines Punktes in ebene und räumliche Bewegung. Wir nennen daher auch die Bewegung eines Punktgebildes: erstens eine ebene Bewegung, wenn die Punkte desselben Bahnen durchlaufen, die in einer Ebene oder in parallelen Ebenen liegen; zweitens eine räumliche Bewegung, wenn die Punkte desselben Bahnen durchschreiten, die nicht in einer Ebene und nicht in parallelen Ebenen liegen, die zwar in besonderen Fällen einen Theils ebene Curven sein können, anderen Theils aber Raumcurven sind; in allgemeinen Fällen jedoch sämmtlich Raumcurven sind.

Die Kinematik zerfällt dem gemäss in zwei Haupttheile, von denen der erste die ebene Bewegung, der zweite die räumliche

Bewegung enthält. Diese Zweitheilung erhält ihre Berechtigung auch noch dadurch, dass die Beziehungen der Bewegung in der Ebene im Allgemeinen nicht übertragbar sind auf die in dem Raum, und dass eine vorhergehende Behandlung der anschaulicheren Bewegung in der zweimaassigen Ebene die schwierigeren Untersuchungen der Bewegungen in dem dreimaassigen Raum erleichtert. Daher wird der erste Band dieses Lehrbuches der Kinematik die **ebene Bewegung**, und der zweite abschliessende Band die **räumliche Bewegung** enthalten.

Quellen- und Literatur-Nachweisungen.

1. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica. 1686.

2. D'Alembert, Traité de dynamique. 1743.

3. Euler, Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum. 1765; deutsch von Wolfers. 1853.

4. Kant, Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft. 1786.

5. Carnot, Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement. 1803. — Géométrie de position. 1803. Art. 298; deutsch von Schuhmacher. 1810. II. Th. Art. 298.

6. Die geometrische Bewegungslehre hat Kant a. a. O., und später auch Wronski (Hoene) in der von ihm redigirten Zeitschrift Sphinx, 1818. Nr. 1. Phoronomie (von φέρειν, tragen) genannt. Diese Benennung, welche in anderer Bedeutung von Hermann's Phoronomia seu de viribus et motibus corporum solidorum et liquidorum, 1716, stammt, wird jetzt wenig angewendet. In neuerer Zeit wird für die geometrische Bewegungslehre auch die Bezeichnung Geometrie der Bewegung vereinzelt gebraucht; entlehnt aus J. Ceva's Geometria motus, 1692, welche die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten nach der damals schon bekannten von Roberval gegebenen Methode enthält, die später abgedruckt ist in den Mémoires de l'Académie. 1730. T. 6. p. 1.

7. Cauchy, Sur les mouvements que peut prendre un système invariable, libre etc.: Exercices de Mathématiques. Seconde année. 1827. p. 70. Chasles, Mémoire de géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques vom Jahre 1829; abgedruckt in dem Bulletin de la Société mathématique de France. 1878. T. VI. p. 208. — Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr'eux et placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini, ou infiniment petit d'un corps solide libre: Bulletin des sciences mathématiques par Ferussac. 1830. T. XIV. p. 322. Steiner, Von dem Krümmungsschwerpunkte ebener Curven: Journal für reine und angewandte Mathematik. 1840. B. 21. S. 33 und 101. Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps. 1834; deutsch von Schellbach 1851; auch in Poinsot, Élément de statique. 1842. Möbius, Ueber Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen: Journal für reine und angewandte Mathematik. 1836. B. 18. S. 189. Breton, Application d'un principe de mécanique rationelle à la solution de quelques problèmes de géométrie: Journal de Mathématiques. 1838. T. III. p. 488. Chasles, Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace: Comptes rendus. 1843. T. XVI. p. 1420. Transon, Methode géométrique pour les rayons de courbure d'une certaine classe de courbes: Journal de Mathématiques. 1845. T. X. p. 148. p. 154. Stegmann, Geometrische Untersuchungen über Dreh-

ungen. 1853. Bresse, Mémoire sur un théorème nouveau concernant les mouvements plans, et sur l'application de la cinématique à la determination des rayons de courbure: Journal de l'Ecole polytechnique. 1853. Cah. 35. p. 89. Jonquières, Mélange de géométrie pure. 1856. Lamarle, Théorie géométrique des rayons et centres de courbure: Bulletins de l'Académie royale des sciences etc. Belgique. 26me année. 2me sér. T. II. (1857). pp. 33. 307. 528. T. III. (1857). p. 295. T. V. (1858). p. 5. T. VI. (1859). p. 11. — Théorie des centres et axes instantanés de rotation. Daselbst T. V. p. 340. T. VI. pp. 23. 412. T. VII. p. 7. Mannheim, Construction des centres de courbure des lignes décrites dans le mouvement d'une figure plane qui glisse sur son plan: Journal de l'Ecole polytechnique. 1858. Cah. 37. p. 179. Resal, Mémoire sur les propriétés géométriques du mouvement le plus général du corps solide: daselbst p. 227. Chasles, Propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable: Comptes rendus. 1860. T. LI. pp. 855. 905; ferner daselbst 1861. T. LII. p. 487, wo sich auch eine vortreffliche Darlegung wichtiger historischer Notizen befindet. Gilbert, Recherches sur les propriétés géométriques des mouvements plans: Mémoires couronnés publiés par l'Académie royale de Belgique. 1861. T. XXX. p. 1. Nicolaidès, Théorie du mouvement d'une figure plane dans son plan; Application aux organes des machines. 1er mémoire 1863. 2me et 3me mémoire 1869. Küpper, Einleitung in die Mechanik durch rein geometrische Betrachtungen. 1866. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. 1870. 2. Aufl. 1879. II. Theil, Kinematik. Somoff, Theoretische Mechanik, I. Theil, Kinematik, (russisch 1871), deutsch von Ziwet. 1878. Collignon, Traité de mécanique; I. Cinématique. 1873. Diese drei Autoren betrachten die Kinematik im engeren Sinne als eine Vorstufe der analytischen Mechanik. Aronhold, Grundzüge der kinematischen Geometrie: Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses in Preussen. 1872. Jahrg. 51. S. 129. Proell, Versuch einer graphischen Dynamik. 1874. Sylvester, Transformation du mouvement circulaire en mouvement rectiligne: Revue scientifique. 1874. 2me série, 4me année, p. 490. Dieselbe Abhandlung, aber mit Weglassung des Anhanges, ist auch abgedruckt in: Les Mondes. 1875. T. XXXVII. p. 623. Saint-Loup, Systèmes articulés simples et multiples et leurs applications: Mémoires de la Société d'émulation du Doubs. 1875. 4me série, 10me V. p. 17. Liguine, Sur les systèmes de tiges articulées: Nouvelles Annales de Mathématiques. 1875. 2me série. T. XIV. p. 529. Ball, Theory of screws; a study in dynamics of a rigid body. 1876. Kempe, On Conjugate Fourpiece Linkages: Proceedings of the London Mathematical Society. 1878. V. 9. p. 133. Burmester, Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme: Zeitschrift f. Math. u. Physik. 1874. B. 19. S. 154. — Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung affin-veränderlicher und collinear-veränderlicher ebener Systeme: daselbst. S. 465. — Kinematisch-geometrische Untersuchung der Bewegung gesetzmässig veränderlicher Systeme: daselbst. B. 20. S. 381. — Ueber die Geradführung durch das Kurbelgetriebe: Civilingenieur. 1876. B. 22. S. 597; B. 23. S. 227 u. 319. — Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme: Zeitschrift für Math. u. Physik. 1878. B. 23. S. 108. — Ueber den Beschleunigungszustand ähnlich-veränderlicher und starrer ebener Systeme: Civilingenieur. 1878. B. 24. S. 145. — Ueber die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten: daselbst. 1880. B. 26. S. 247. —

Ueber das bifocal-veränderliche System: Mathematische Annalen. 1880. B. 16. S. 89. Rittershaus, Zur heutigen Schule der Kinematik: Civilingenieur. 1875. B. 21. — Die kinematische Kette: daselbst. 1876. B. 22. S. 559. — Das Kurbelgetriebe und seine Anwendungen: daselbst. 1878. B. 24. S. 171. — Kinematisch-geometrische Theorie der Beschleunigung für die ebene Bewegung: daselbst. 1878. B. 24. S. 1. — Construction der Beschleunigung am Kurbelgetriebe: daselbst. 1879. B. 25. S. 461. — Die Interferenzkurbelkette: daselbst. 1880. B. 26. S. 233. Schadwill, Das Gliederviersei̇t als Grundlage der Kinematik: Verhandlungen des Vereins zur Förderung des Gewerbefleisses in Preussen. 1876. Jahrg. 55. S. 378. Mohr, die geometrische Construction der Beschleunigungen der ebenen Bewegung: Civilingenieur. 1879. B. 25. S. 613. Geisenheimer, Untersuchungen der Bewegung ähnlich-veränderlicher Systeme: Zeitschrift für Math. u. Physik. 1879. B. 24. S. 129. Habich, Étude cinématique. 1879. Mannheim, Géométrie descriptive comprenant les éléments de la géométrie cinématique. 1880. Helm, Beiträge zur geometrischen Behandlung der Mechanik: Zeitschrift für Math. u. Physik. 1880. B. 25. S. 217. Schumann, Beiträge zur Kinematik ähnlich-veränderlicher und affin-veränderlicher Gebilde: daselbst. 1881. B. 26. S. 157. Grübler, Allgemeine Eigenschaften der zwangläufigen ebenen kinematischen Ketten: Civilingenieur. 1883. B. 29. S. 167; und Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen 1885. S. 179. Mehmke, Ueber die Geschwindigkeiten beliebiger Ordnung eines in seiner Ebene bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen Systems: Civilingenieur. 1883. B. 29. S. 487; ferner S. 581. Kraft, Sammlungen von Problemen der analytischen Mechanik. 1884. Rittershaus giebt eine vortreffliche geschichtliche Entwickelung der Kinematik in Ersch und Gruber, Allgemeine Encyklopädie. 1884. 2. Section, 36. Theil, 87. Art. „Kinematik". Eine reiche Fülle von Literatur-Angaben enthält das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Capitel „Kinematik", in allen Bänden. Ausser diesen Quellen-Angaben und Literatur-Nachweisungen sind noch viele Citate an den Bezugstellen in die Textanmerkungen eingetragen.

8. Ampère, Essai sur la philosophie des sciences. 1834; 2me édition identique à la première. 1856. Ire partie. p. 48. Nachdem Ampère die Benennung „Kinematik" eingeführt hatte, wurde von vielen Autoren, gegen seine Definition, hiermit auch die reine geometrische Bewegungslehre bezeichnet, die auch im engeren Sinne, unabhängig von der Zeit betrachtet, nach Mannheim kinematische Geometrie genannt wird.

9. Besson, Theatrum instrumentorum et machinarum. 1582. Ramelli, Le diverse et artificiose machine. 1588. — Schatzkammer mechanischer Künste. 1620. Zonca, Novo teatro di machine. 1607. Salomon de Caus, Les raisons des forces mouvantes avec diverses machines. 1615. Zucchi, Nova de machini philosophia. 1669. Perrault, Recueil de plusieurs machines. 1700. Zeising, Theatrum machinarum. 1708. Grollier de Servière, Recueil d'ouvrages curieux de mathématiques et de mécanique. 1719. Leupold, Theatrum machinarum generale. 1724.

10. Lanz et Bétancourt, Essai sur la composition des machines. 1808; 2me éd. 1819. Vergl. Hachette, Traité élémentaire des machines. 4me éd. 1828. p. 25.

11. Borgnis, Traité complet de mécanique appliquée aux arts. I. Composition des machines. 1818.

12. Willis, Principles of Mechanism. 1841; sec. ed. 1870.

13. Giulio, Elementi di cinematica applicata alle arti. 1847; ed. sec. 1854.

14. Laboulaye, Traité de cinématique, 1ère éd. 1849. 2me éd. 1864; 3me éd. 1878.

15. Morin, Notions géométriques sur les mouvements et leurs transformations, ou éléments de cinématique. 1851; 3me éd. 1861.

16. Girault, Éléments de géométrie appliquée à la transformation du mouvement dans les machines. 1858.

17. Resal, Traité de cinématique pure. 1862.

18. Belanger, Traité de cinématique. 1864.

19. Haton de la Goupillière, Traité de mécanismes. 1864.

20. Bour, Cours de mécanique et machines, 1er fasc. Cinématique. 1865.

21. Reuleaux, Theoretische Kinematik. 1875.

22. Streintz, Physikalische Grundlagen der Mechanik. 1883. S. 81.

ERSTER ABSCHNITT.

Grundlegende Beziehungen der Bewegungen.

Begriff der Geschwindigkeit.

1. Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung. In der Vorstellung von Raum und Zeit ist die Auffassung der Bewegung begründet. Die Bewegung ist Aenderung des Ortes mit der Zeit; und diese Aenderung des Ortes bezieht sich auf ein gedachtes bestimmtes Raumsystem. Behufs der Vergleichung der Bewegungen postuliren wir die Bewegung eines Punktes, bei welcher dieser Punkt in gleichen Zeiten von beliebiger Kürze gleiche Längen seiner Bahn durchläuft, und nennen diese Bewegung eine gleichförmige.

Bewegt sich ein Punkt T in Fig. 1, Taf. I gleichförmig auf einer Geraden τ, und bezeichnet in derselben T_0 die Lage dieses Punktes in einem bestimmten Zeitmomente, den wir als Anfang für die Zeitmessung betrachten, so wird durch eine bestimmte Wegstrecke $T_0 T_v$ des Punktes T die Zeit graphisch dargestellt, während welcher derselbe diese Wegstrecke zurücklegt, und wir nennen eine solche angenommene bestimmte Wegstrecke $T_0 T_v$ die kinematische Zeiteinheit. Ist diese Strecke insbesondere gleich derjenigen Strecke genommen, die der gleichförmig bewegte Punkt T in einer Secunde mittlerer Zeit durchläuft, dann wird durch diese Strecke eine Secunde mittlerer Zeit graphisch dargestellt. Jede auf der Geraden τ im Sinne der Bewegung mit dem Maasse $T_0 T_v$ gemessene Strecke repräsentirt die Zeit, während welcher der gleichförmig bewegte Punkt T diese Strecke durchschreitet; und wird insbesondere als Maass diejenige Strecke genommen, der eine Secunde mittlerer Zeit entspricht, dann bestimmt die Messung die verflossenen Secunden mittlerer Zeit, die auch Secunden einer richtig gehenden Uhr sind.

Bewegt sich gleichzeitig mit dem Punkte T ein Punkt A in Fig. 2 gleichförmig auf einer Curve α oder auf einer Geraden; sind in bestimmten Zeitmomenten mit T_0, T_v, T_x, T_y . . die Lagen des Punktes T und ferner mit A_0, A_v, A_x, A_y . . die entsprechenden Lagen des Punktes A bezeichnet, so besteht nach obigem Postulate die Proportion der Weglängen:

$$\frac{\overset{\frown}{A_x A_y}}{T_x T_y} = \frac{\overset{\frown}{A_0 A_v}}{T_0 T_v}.$$

Zur Abkürzung setzen wir den Weg $A_x A_y = s$, die entsprechende Zeit $T_x T_y = t$ und schreiben:

$$\frac{s}{t} = \frac{\overset{\frown}{A_0 A_v}}{T_0 T_v} = v.$$

Wird insbesondere $T_0 T_v$ als Einheit des Längenmaasses genommen, dann ist:

$$v = \overset{\frown}{A_0 A_v}.$$

Die constante Maasszahl v wird die Geschwindigkeit des gleichförmig bewegten Punktes A genannt, wenn wir die Strecke $T_0 T_v$, welche die kinematische Zeiteinheit darstellt, als Längeneinheit betrachten. Bei der gleichförmigen Bewegung ist demnach die Geschwindigkeit auch der Weg, welchen der Punkt während der kinematischen Zeiteinheit zurücklegt. Wie die gleichförmige Bewegung auf der Geraden, so kann auch die gleichförmige Bewegung auf dem Kreise zur graphischen Darstellung der Zeit dienen.

Es ist die Weglänge:

$$s = v \, . \, t;$$

und diese Gleichung sagt aus, dass bei der gleichförmigen Bewegung der durchlaufene Weg der entsprechenden Zeit proportional ist.

2. Geschwindigkeit bei ungleichförmiger Bewegung. Bewegt sich ein Punkt A in Fig. 3 ungleichförmig auf einer Curve α, dann müssen wir die Bewegung während unendlich kleiner Zeittheilchen, die Zeitelemente heissen, betrachten. Um dies zu ermöglichen, nehmen wir an: ein gleichförmig bewegter Punkt T, der sich gleichzeitig mit A bewegt, durchschreite auf der Geraden τ die unendlich kleinen gleichen Bahnstrecken $T_0 T_1$, $T_1 T_2$, . . $T_x T_y$ . ., deren Länge wir mit dt bezeichnen, und betrachten die Strecke $T_0 T_v$ als die kinematische Zeiteinheit. Die unendlich kleinen gleichen Bahnstrecken repräsentiren eine Reihe aufeinander folgender Zeitelemente von der Grösse dt. Sind nun, während der Punkt T

die Lagen T_0, T_1, T_2, .. T_x, T_y .. einnimmt, die entsprechenden gleichzeitigen Lagen des Punktes A auf der Curve α beziehlich A_0, A_1, A_2, .. A_x, A_y .., so wird jedes der unendlich kleinen Curventheile A_0A_1, A_1A_2, .. A_xA_y .. während des Zeitelementes dt durchlaufen.

Die Curve α denken wir uns durch das Vieleck A_0, A_1, A_2 .. A_xA_y .. mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten vertreten, die Curvenelemente genannt werden und hier von ungleicher Länge sind. Als Ersatz für die ungleichförmige Bewegung des Punktes A nehmen wir die Bewegung eines fingirten Punktes P, der sich auf jeder der unendlich kleinen Vielecksseiten gleichförmig bewegt, aber gleichzeitig mit dem Punkte A in die Lagen A_0, A_1, A_2 .. A_x, A_y .. gelangt. Setzen wir die unendlich kleine Länge eines der als geradlinig betrachteten Curvenelemente z. B. $A_xA_y = ds$, so ist ds der während eines Zeitelementes dt von dem fingirten Punkte P und von dem Punkte A zurückgelegte Weg. Demnach ist, wenn jene Strecke T_0T_v als Einheit des Längenmaasses betrachtet wird,

$$\frac{ds}{dt} = v$$

die Geschwindigkeit des fingirten Punktes P auf der unendlich kleinen Vielecksseite A_xA_y.

Die Bewegung des Punktes A und die Bewegung des fingirten Punktes P sind als übereinstimmend anzusehen, weil die Punkte A und P nach Verlauf jedes der aufeinander folgenden, unendlich kleinen Zeittheilchen, stets in gleiche Lagen auf der Curve α gelangen. Dem zufolge nennen wir auch jene Grösse:

$$\frac{ds}{dt} = v$$

die Geschwindigkeit des ungleichförmig bewegten Punktes A auf dem betreffenden Curvenelemente A_xA_y. Die durch die unendlich nahen Punkte A_xA_y gehende Gerade $A_xA'_v$ wird, bei Festhaltung des Punktes A_x, wenn die Lage des Punktes A_y sich auf der Curve α derart ändert, dass A_xA_y unendlich klein bleibt, nur eine unendlich kleine, gegen endliche Lagenbeziehungen verschwindende Lagenänderung erfahren. Die somit durch ein Curvenelement A_xA_y gegen endliche Lagenbeziehungen bestimmte Gerade $A_yA'_v$ ist eine Tangente der Curve α und zugleich die Bewegungsrichtung des Punktes A. Machen wir auf der Tangente im Sinne der Bewegung die Strecke $A_yA'_v = v$, dann stellt diese

Strecke nach Grösse und Richtung die Geschwindigkeit dar, welche der Punkt A auf dem Curvenelemente $A_x A_y$ besitzt.

Die unendlich kleine Strecke $A_x A_y$ ist verschwindend klein gegen die endliche Strecke $A_y A_v'$; und nur eine aus unendlich vielen Summanden bestehende Summe von unendlich kleinen Grössen kann eine messbare Grösse geben. Deshalb stellen wir uns das Curvenelement $A_x A_y$ im Vergleich mit messbaren Grössen als einen Punkt vor, der dann als Berührungspunkt der betreffenden Tangente an der Curve α bezeichnet wird. Wir bezeichnen daher die Grösse v auch als die Geschwindigkeit, welche der ungleichförmig bewegte Punkt A in dem gedachten Curvenpunkte oder an der betreffenden Stelle seiner Bahn besitzt. Bei der geradlinigen Bewegung eines Punktes fällt die Richtung der Bewegung resp. der Geschwindigkeit mit der geradlinigen Bahn zusammen; bei der krummlinigen Bewegung ändert sich diese Richtung beständig. Die Grösse der Geschwindigkeit ist nur bei der gleichförmigen Bewegung constant. Aendert sich die Grösse der Geschwindigkeit eines Punktes und die Tangente an seiner Bahn während der einzelnen Zeitelemente unendlich wenig oder gar nicht, dann wird die Bewegung des Punktes eine stetige Bewegung genannt. Ist die Geschwindigkeit momentan oder während einer endlichen Zeit gleich Null, so sagen wir, der betrachtete Punkt ist resp. momentan oder während dieser endlichen Zeit in Ruhe.

3. **Geschwindigkeitsdiagramm und Wegdiagramm.** Um ein Bild von der Veränderung der Geschwindigkeit eines ungleichförmig bewegten Punktes A zu erhalten, der sich in Fig. 4 auf einer Bahn α bewegt, betrachten wir die auf der geradlinigen Bahn $T_0\tau$ des gleichförmig bewegten Punktes T dargestellten Zeitlängen als Abscissen und die entsprechenden Geschwindigkeiten des Punktes A als die rechtwinkeligen Ordinaten. Entsprechen den Lagen T_0, T_1, $T_2 \ldots T_n$ des Punktes T auf seiner geradlinigen Bahn $T_0\tau$, welche die Zeitaxe genannt wird, die gleichzeitigen Lagen A_0, A_1, $A_2 \ldots A_n$ des Punktes A auf seiner Bahn α, die krumm oder gerade sein kann; sind ferner v_0, v_1, $v_2 \,.\,.\, v_n$ die Geschwindigkeiten, welche der Punkt A in diesen Lagen besitzt: dann machen wir die Ordinaten $T_0V_0 = v_0$, $T_1V_1 = v_1$, $T_2V_2 = v_2$, .. $T_nV_n = v_n$ und ziehen die durch $V_0V_1V_2 \ldots V_n$ bestimmte Curve $\mathfrak{v}_\mathfrak{z}$. Diese Curve $\mathfrak{v}_\mathfrak{z}$ giebt eine übersichtliche bildliche Darstellung, wie sich die Geschwindigkeit des Punktes A mit der Zeit verändert, und wird das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm

genannt. Bei der gleichförmigen Bewegung ist dieses Diagramm eine zur Zeitaxe parallele Gerade.

Wenn wir in gleicher Weise die entsprechenden Weglängen, welche der Punkt A von A_0 aus gemessen durchläuft, als rechtwinkelige Ordinaten antragen, also $T_1 W_1 = \widehat{A_0 A_1}$, $T_2 W_2 = \widehat{A_0 A_2}, \ldots$ $T_n W_n = \widehat{A_0 A_n}$ machen, erhalten wir durch die Punkte $W_0 W_1 W_2 \ldots W_n$ eine Curve $\mathfrak{w}$, welche die Veränderung der Weglängen bildlich darstellt, und als das orthogonale Wegdiagramm bezeichnet wird. Bei der gleichförmigen Bewegung ist dieses Wegdiagramm eine Gerade.

Nehmen wir in Fig. 4 an, es sei $T_0 T_1$ eine Strecke von endlicher Grösse und es seien $T_1 T_2$, $T_2 T_3, \ldots$ unendlich kleine gleiche Strecken, die wir mit dt bezeichnen, dann sind die vom Zeitpunkte T_1 an beginnenden entsprechenden Wegzunahmen

$$ds_1 = T_1 V_1 dt, \quad ds_2 = T_2 V_2 dt, \quad ds_3 = T_3 V_3 dt, \; \ldots \; ds_n = T_n V_n dt.$$

Diese unendlich kleinen Producte repräsentiren die Inhalte der unendlich schmalen Flächenstreifen, die je zwei benachbarte Ordinaten zwischen sich fassen; denn diese Flächenstreifen, die oberhalb durch die Elemente des Geschwindigkeitsdiagramm begrenzt sind, differiren von den betreffenden unendlich schmalen Rechtecken nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung, die gegen die unendlich kleinen Grössen erster Ordnung, welche von den Producten geliefert werden, verschwinden. Demnach ist die Summe gleich dem Inhalte der Fläche $T_1 V_1 \mathfrak{v}_t V_n T_n$. Bezeichnen wir mit f diesen Flächeninhalt, so müssen wir, weil die Geschwindigkeiten mit einer beliebig angenommenen Längeneinheit gemessen wurden, f noch mit einer Constanten ε multipliciren, damit die folgende Gleichsetzung:

$$ds_1 + ds_2 + ds_3 \cdots + ds_n = \varepsilon \cdot f$$

statthaft ist. Hiernach ergiebt sich die Weglänge, welche dem Zeitpunkte T_n entspricht:

$$T_n W_n = T_1 W_1 + \varepsilon \, . f,$$

und wir erhalten den Satz:

Die Weglängen vergrössern sich proportional dem Inhalte der Fläche, welche durch das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm, die beiden betreffenden Ordinaten und die Zeitaxe umgrenzt wird.

Sind in Fig. 5 die Ordinaten $T_i W_i$, $T_k W_k$ des orthogonalen Wegdiagramms $\mathfrak{w}$ unendlich nahe aneinander, und ist $W_i R$ senkrecht auf $T_k W_k$; dann repräsentirt in dem unendlich kleinen rechtwinkeligen Dreiecke $W_i R W_k$ die Kathete $W_i R = T_i T_k = dt$ ein Zeitelement, und die andere Kathete $R W_k = T_k W_k - T_i W_i = ds$ ist gleich dem entsprechenden unendlich kleinen Weg jenes bewegten Punktes A. Das Curvenelement $W_i W_k$ bestimmt die betreffende Tangente, welche mit der Zeitaxe $T_0 \tau$ einen Winkel θ bildet. Dem zufolge ist die Geschwindigkeit des Punktes A:

$$v = \frac{ds}{dt} = \tan\theta,$$

und hiernach erhalten wir den Satz:

Die Geschwindigkeit ist gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen die Tangente an dem orthogonalen Wegdiagramm mit der Zeitaxe bildet.

Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten.

4. **Parallelogramm der Geschwindigkeiten.** Bewegt sich ein Punkt A in einem Raumsystem R_1, welches gleichzeitig eine Bewegung in einem anderen Raumsystem R_2 vollführt, so können wir die Bewegung dieses Punktes A auch auf dieses Raumsystem R_2 beziehen. Wenn ferner das Raumsystem R_2 sich in einem Raumsystem R_3 bewegt; und wenn wir in dieser Weise weiter fortgesetzt abschliessend zu einem bestimmten Raumsystem R_i gelangen, dann nennen wir dasselbe das Grundraumsystem. Dieses Grundraumsystem kann beispielsweise durch die Erde vertreten werden, wenn wir deren Bewegung nicht weiter auf das Planetensystem beziehen. Bei der Betrachtung der Bewegung und der Ruhe müssen wir daher, um verständlich zu sein, stets hinzufügen, auf welches System die jeweilige Bezugnahme stattfindet. Das Grundraumsystem unterscheiden wir in der Regel dadurch, dass wir sagen es ruhe oder es sei fest. Bei der Betrachtung der ebenen Bewegung wird dasselbe insbesondere stets durch eine Ebene ersetzt.

Aus der Anschauung empfangen wir den Grundsatz: Die Bewegung eines Punktes in einem Raumsystem wird nicht beeinflusst, wenn sich dieses Raumsystem im Bezuge auf ein anderes Raumsystem bewegt. Im Bereiche der physikalischen Anwendung behält dieser Grundsatz seine Gültigkeit nur insofern, als die in Betracht kommenden

Körper sich der Erfahrung gemäss wie Raumsysteme verhalten. Hierauf gründet sich die Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten.

Durchläuft ein Punkt A in Fig. 6 auf einer Curve g^I in einem Zeitelemente dt das Curvenelement $A_1^I A_2^I$, bewegt sich ferner gleichzeitig die Curve g^I in einem Grundraumsystem während des Zeitelementes dt bis g^{II}; und durchschreitet der Punkt A_1^I der Curve g^I, mit dem der Punkt A momentan coincidirt, während dieser Bewegung in dem Grundraumsystem das Element $A_1^I A_1^{II}$ einer Curve h, so dass das Curvenelement $A_1^I A_2^I$ nach $A_1^{II} A_2^{II}$ gelangt: dann hat der bewegte Punkt A infolge dieser beiden Bewegungen, weil dieselben sich gegenseitig nicht beeinflussen, die Lage A_2^{II} erhalten und im Grundraumsystem das Element $A_1^I A_2^{II}$ der entstehenden Bahncurve α durchwandert. Während der unendlich kleinen Bewegung der stetig bewegten Curve g^I kann die Richtung des Elementes $A_1^{II} A_2^{II}$ von der Richtung des Elementes $A_1^I A_2^I$ nur um einen unendlich kleinen Winkel abweichen, der gegen die endlichen Winkel des unendlich kleinen Viereckes $A_1^I A_1^{II} A_2^{II} A_2^I$ verschwindet; demnach können wir dasselbe als ein unendlich kleines Parallelogramm betrachten. Denken wir uns zu diesem unendlich kleinen Parallelogramm $A_1^I A_1^{II} A_2^{II} A_2^I$ das ähnliche und ähnlich liegende vergrösserte Parallelogramm $A_1^I A_v^{II} A_v A_v^I$ construirt, so dass sich die homologen Seiten wie $dt : 1$ verhalten; dann sind die Seiten:

$$A_1^I A_v^I = \frac{A_1^I A_2^I}{dt}, \qquad A_1^I A_v^{II} = \frac{A_1^I A_1^{II}}{dt},$$

und ferner ist die Diagonale:

$$A_1^I A_v = \frac{A_1^I A_2^{II}}{dt}.$$

Die Strecke $A_1^I A_v^I$ in der Tangente der Curve g^I repräsentirt nach Grösse und Richtung die Geschwindigkeit des Punktes A auf der Curve g^I. Die Strecke $A_1^I A_v^{II}$ in der Tangente der Curve h stellt nach Grösse und Richtung die Geschwindigkeit dar, welche der mit A coincidirende, zu g^I gehörende Punkt A_1^I auf der Curve h besitzt. Die Strecke $A_1^I A_v$ in der Tangente der entstehenden oder resultirenden Bahncurve α des Punktes A, giebt die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit, mit welcher sich der Punkt A infolge beider Bewegungen auf der Bahncurve α bewegt. Hiernach erhalten wir den wichtigen Satz:

Werden einem Punkte A gleichzeitig zwei Geschwindigkeiten von der Grösse und Richtung der Strecken AA_v^I, AA_v^{II} ertheilt, so repräsentirt die Diagonale AA_v des durch $A_v^I A A_v^{II}$ bestimmten Parallelogramms $A_v^I A A_v^{II} A_v$ die resultirende Geschwindigkeit des Punktes A nach Grösse und Richtung.

Wir können demnach, wenn einem Punkte zwei oder mehrere Geschwindigkeiten gleichzeitig ertheilt werden, zwei Geschwindigkeiten zu einer Resultante zusammensetzen, diese mit einer dritten Geschwindigkeit vereinen und so fortsetzen. Die einzelnen Geschwindigkeiten, aus denen die resultirende hervorgeht, heissen auch Componenten. Umgekehrt können wir auch eine gegebene Geschwindigkeit in zwei oder mehrere Geschwindigkeiten resp. Componenten zerlegen, die der gegebenen äquivalent sind. Daher wird das in dem abgeleiteten Satze enthaltene wichtige Gesetz auch das Parallelogramm der Zusammensetzung und der Zerlegung der Geschwindigkeiten, oder kurz das Parallelogramm der Geschwindigkeiten genannt.

5. **Zusammensetzung mehrerer Geschwindigkeiten.** Ertheilen wir in Fig. 7 einem Punkte A die drei Geschwindigkeiten AA_v^I, AA_v^{II}, AA_v^{III} und machen wir $A_0A_I \# AA_v^I$, $A_IA_{II} \# AA_v^{II}$, $A_{II}A_{III} \# AA_v^{III}$, so repräsentirt A_0A_{II} in Grösse und Richtung die Resultante der beiden ersten Geschwindigkeiten und A_0A_{III} stellt in Grösse und Richtung die Resultante von A_0A_{II} und der dritten Geschwindigkeit $A_{II}A_{III}$ dar; folglich ist auch A_0A_{III} nach Grösse und Richtung die Resultante jener drei gegebenen Geschwindigkeiten. Hiernach bestimmt der Streckenzug $A_0A_IA_{II}A_{III}$, dessen Strecken beziehlich den Geschwindigkeiten gleich und gleichgerichtet sind, durch die Schlussstrecke A_0A_{III} die ihr gleiche und gleichgerichtete resultirende Geschwindigkeit AA_v. In derselben Weise ergiebt sich für beliebig viele Geschwindigkeiten die Resultante; und wenn der Endpunkt des Streckenzuges mit dem Anfangspunkte A_0 zusammenfällt, dann ist die resultirende Geschwindigkeit gleich Null und der Punkt ist in Ruhe. Verändern wir die Ordnung der Zusammensetzung, ziehen wir z. B. $A_0A_2 \# AA_v^{II}$, $A_2A_{II} \# AA_v^I$, $A_{II}A_{III} \# AA_v^{III}$, so erhalten wir denselben Endpunkt A_{III} wie vorhin. Da hiernach das Vertauschen zweier auf einander folgender Strecken keine Aenderung der Resultante hervorbringt, so ergiebt sich, dass durch eine successive Vertauschung solcher Strecken, also auch durch beliebige Veränderung der Reihenfolge, dieselbe resultirende Geschwindigkeit erhalten wird.

6. **Geometrische Addition.** Eine nach Grösse und Richtung bestimmte Strecke AA_I bezeichnen wir mit $\overline{AA_I}$ und die Folge der bezeichnenden Buchstaben giebt zugleich die Richtung der Strecke an. Zwei Strecken von gleicher Länge und gleicher Richtung heissen geometrisch gleich. Die Bildung eines Streckenzuges, wie sie bei der Bestimmung der resultirenden Geschwindigkeit in Fig. 7 ausgeführt wurde, wird geometrische Addition, und die Schliessungsstrecke $\overline{A_0 A_{III}}$ die geometrische Summe genannt. Wir schreiben demzufolge in Zeichen:

$$\overline{A_0 A_{III}} = \overline{A_0 A_I} + \overline{A_I A_{II}} + \overline{A_{II} A_{III}}.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass wir auf dem Wege $A_0 A_I A_{II} A_{III}$ denselben Zielpunkt A_{III} erreichen, nach dem wir direct auf dem Wege $A_0 A_{III}$ gelangen; und diese Beziehung bleibt bestehen, wenn wir die Reihenfolge der rechts stehenden Strecken verändern.

Wird eine Strecke, z. B. $A_0 A_{III}$, in der einen Richtung und hierauf wieder rückwärts in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so ist das Resultat gleich Null, und in Zeichen die geometrische Summe:

$$\overline{A_0 A_{III}} + \overline{A_{III} A_0} = 0.$$

Demnach können wir auch schreiben:

$$\overline{A_0 A_{III}} = - \overline{A_{III} A_0};$$

und erhalten aus der obigen Gleichung:

$$\overline{A_0 A_I} + \overline{A_I A_{II}} + \overline{A_{II} A_{III}} + \overline{A_{III} A_0} = 0.$$

Ist die geometrische Summe gleich Null, so bedeutet dies, dass der Streckenzug nach seinem Ausgangspunkte wieder zurückkehrt.

7. **Zerlegung der Geschwindigkeit.** Wenn die Geschwindigkeit AA_v eines Punktes A in Fig. 8 gegeben ist, und es soll dieselbe in zwei Componenten, deren Richtungen I, II sein mögen, zerlegt werden; dann ziehen wir durch A_v zu diesen Richtungen parallele Gerade, welche resp. auf I, II die Componenten AA_v^I, AA_v^{II} bestimmen. Sind die Richtungen der beiden Componenten nicht gegeben, so bilden die beiden Seiten AA_v^I, $A_v^I A_v$ eines an die Seite AA_v gezeichneten beliebigen Dreiecks die Componenten, deren Resultante AA_v ist. Allgemein können die Strecken eines beliebigen Streckenzuges, der durch AA_v geschlossen wird, als die Componenten betrachtet werden, deren Resultante die Geschwindigkeit AA_v ist.

Von der Bewegung des starren ebenen Systems.

8. **Bestimmung des Pols.** Die Gesamtheit aller in einer Ebene liegenden Punkte, welche ihre gegenseitige Lage nicht ändern, nennen wir ein starres ebenes System, oder auch kurz ein ebenes System.

Wird ein starres ebenes System S in einer festen Ebene aus einer Lage S_I in eine andere Lage S_{II} bewegt, dann repräsentiren diese beiden Lagen in der festen Ebene zwei gleichartige congruente ebene Systeme, welche wir wie diese Lagen mit S_I, S_{II} bezeichnen. Sind in Fig. 9 zwei beliebige Punkte $A_I B_I$ des Systems S_I und die homologen Punkte $A_{II} B_{II}$ des Systems S_{II} gegeben, dann ist $A_I B_I = B_{II} A_{II}$ und wir erhalten zu jedem beliebigen dritten Punkte C_I in S_I den homologen C_{II} in S_{II}, wenn wir zu dem Dreieck $A_I B_I C_I$ das gleichartig congruente Dreieck $A_{II} B_{II} C_{II}$ construiren. Ist also die Bewegung von zwei Punkten AB des Systems S durch die verschiedenen auf einander folgenden Lagen derselben gegeben, so ist dadurch die Bewegung aller Systempunkte und damit die des ganzen ebenen Systems bestimmt.

Errichten wir auf den Verbindungsstrecken der homologen Punkte A_I, A_{II} und B_I, B_{II} in den Mitten M_a, M_b resp. die Senkrechten $M_a\mathfrak{P}$, $M_b\mathfrak{P}$, welche sich im Punkte $\mathfrak{P}$ treffen, so sind die Dreiecke $A_I B_I \mathfrak{P}$ und $A_{II} B_{II} \mathfrak{P}$ wegen Gleichheit der analog bezeichneten Seiten gleichartig congruent; demnach fallen zwei homologe Punkte der Systeme S_I, S_{II} in dem Punkte $\mathfrak{P}$ zusammen, der Doppelpunkt der beiden congruenten Systeme $S_I S_{II}$ genannt wird. Fallen insbesondere zwei Paar im Endlichen liegende homologe Punkte zusammen, so findet dies bei allen homologen Punkten statt; die beiden Systeme sind dann identisch, und folglich besitzen zwei in einer Ebene liegende gleichartig congruente ebene Systeme im Allgemeinen nur einen Doppelpunkt. Dem gemäss gehen alle in den Mitten auf den Verbindungsstrecken homologer Punkte errichteten Senkrechten durch den Doppelpunkt der beiden congruenten Systeme. Nach dieser Darlegung kann das System S durch Drehung um den Doppelpunkt $\mathfrak{P}$ aus der einen der Lagen S_I, S_{II} in die andere gebracht werden; und hinsichtlich dieser Eigenschaft wird der Doppelpunkt $\mathfrak{P}$ auch der Pol der beiden Systemlagen S_I, S_{II} genannt.

Liegen die homologen Strecken $A_I B_I$ und $A_{II} B_{II}$ in Fig. 10 so, dass die auf $A_I A_{II}$, $B_I B_{II}$ in den Mitten M_a, M_b errichteten

Senkrechten zusammenfallen, dann wird zwar jene Bestimmung des Doppelpunktes $\mathfrak{P}$ ungiltig; aber in diesem besonderen Falle ergiebt sich derselbe als Schnitt der durch die Strecken $A_I B_I$, $A_{II} B_{II}$ bestimmten homologen Geraden, denn es ist wegen der Gleichheit dieser Strecken und des Parallelismus der Geraden $A_I A_{II}$, $B_I B_{II}$ auch $A_I \mathfrak{P} = A_{II} \mathfrak{P}$.

Sind zwei homologe Strecken $A_I B_I$, $A_{II} B_{II}$ der congruenten Systeme $S_I S_{II}$ in Fig. 11 parallel und gleichgerichtet, dann sind die auf $A_I A_{II}$ und $B_I B_{II}$ in den Mitten M_a, M_b errichteten Senkrechten parallel und der Schnittpunkt $\mathfrak{P}^\infty$ derselben liegt im Unendlichen. Die Verbindungsstrecken aller homologer Punkte sind gleich und parallel; die auf denselben errichteten Senkrechten gehen nach dem unendlich fernen Punkte $\mathfrak{P}^\infty$; das System S kann in diesem besonderen Falle durch Parallelbewegung (Translation) aus der einen Lage in andere geführt werden, und wir können die Parallelbewegung als eine Drehung um den unendlich fernen Pol $\mathfrak{P}^\infty$ betrachten. Hiernach erhalten wir den Satz:

Die Bewegung eines ebenen Systems innerhalb einer Ebene aus einer Lage in eine andere ist äquivalent einer Drehung um den Pol der beiden Systemlagen.

Ein ebenes System, welches sich in einer festen Ebene aus einer Lage S_I in eine andere S_{II} bewegt hat, kann demnach stets durch Drehung um den Pol $\mathfrak{P}$ dieser Systemlagen aus der einen Lage in die andere gebracht werden; liegt der Pol $\mathfrak{P}$ im Unendlichen, so geht die Drehung in eine Parallelbewegung über. Bei der Parallelbewegung beschreiben die Punkte des Systems in jedem Zeitelemente gleiche und parallele, also auch homologe Elemente congruenter Bahnen.

Bewegt sich das starre ebene System S beliebig in einer festen Ebene, und sind S_I, S_{II} zwei während einer unendlich kleinen Zeit auf einander folgende Lagen desselben, dann sind die unendlich kleinen Verbindungsstrecken $A_I A_{II}$, $B_I B_{II}$ .. der homologen Punkte beziehlich die von den Systempunkten A, B .. durchschrittenen Bahnelemente, welche die Geschwindigkeitsrichtungen dieser Punkte in dem betreffenden Zeitmomente bestimmen. Die auf diesen Bahnelementen in den Mitten errichteten Senkrechten, die nach obiger Darlegung durch den Pol $\mathfrak{P}$ gehen, sind die Normalen der Bahncurven, welche von den Systempunkten beschrieben werden; und die unendlich kleine Bewegung des Systems S können wir durch eine unendlich kleine Drehung um den Pol $\mathfrak{P}$, den momentan festen Systempunkt, ersetzen.

9. **Geschwindigkeitszustand eines bewegten ebenen Systems.** Nehmen wir an, es bewegen sich in Fig. 12 die zwei Punkte A, B eines in einer festen Ebene bewegten ebenen Systems S resp. auf den gegebenen Bahncurven α, β, so ist für einen bestimmten Zeitmoment der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der Curvennormalen $A\mathfrak{P}$, $B\mathfrak{P}$ der Pol, und die diesem Zeitmomente entsprechenden Geschwindigkeiten AA_v, $BB_v\ldots$ aller Systempunkte A, $B\ldots$ sind beziehlich senkrecht auf dem von diesen Punkten nach dem Pol $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden. Da die Bewegung des Systems während eines Zeitelementes als eine unendlich kleine Drehung um den Pol $\mathfrak{P}$ angesehen werden kann, so verhalten sich die Geschwindigkeiten AA_v, $BB_v\ldots$ der Punkte A, $B\ldots$ wie die entsprechenden Bahnelemente, und demnach auch wie die Polabstände $\mathfrak{P}A$, $\mathfrak{P}B\ldots$ dieser Punkte; und für den momentan mit dem Pol $\mathfrak{P}$ coincidirenden Systempunkt ist die Geschwindigkeit gleich Null. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $\mathfrak{P}AA_v$, $\mathfrak{P}BB_v$ sind auch die Dreiecke $\mathfrak{P}AB$ und $\mathfrak{P}A_vB_v$ gleichartig ähnlich. Hiernach erhalten wir den Satz:

Das ebene System S_v der Endpunkte A_v, $B_v\ldots$ der Geschwindigkeiten ist dem bewegten System S, dessen Punkte A, $B\ldots$ diese Geschwindigkeiten besitzen, gleichartig ähnlich und der Pol $\mathfrak{P}$ ist der Doppelpunkt dieser ähnlichen Systeme.

Wenn man also die Geschwindigkeiten AA_v, BB_v zweier Systempunkte A, B kennt, so ergiebt sich zu jedem dritten Systempunkte C die Geschwindigkeit CC_v in Grösse und Richtung, indem wir zu dem Dreieck ABC das gleichartig ähnliche Dreieck $A_vB_vC_v$ construiren; und demnach ist durch die Geschwindigkeiten zweier Systempunkte der Geschwindigkeitszustand des ganzen bewegten Systems gegeben. Wenn aber der Pol $\mathfrak{P}$ bekannt ist, so sind die Geschwindigkeiten der Systempunkte durch die gegebene Geschwindigkeit eines einzigen Systempunktes bestimmt.

Da die Geschwindigkeiten der Systempunkte auf den von diesen Punkten nach dem Pole gehenden Geraden senkrecht stehen, so liegen alle Systempunkte, deren Geschwindigkeitsrichtungen durch einen angenommenen Punkt gehen, auf einem Kreise, für welchen dieser Punkt und der Pol Durchmesserendpunkte sind. Alle Systempunkte, welche gleichen Abstand von dem momentanen Pol haben, also auf einem um den Pol $\mathfrak{P}$ beschriebenen Kreise liegen, besitzen momentan gleiche Geschwindigkeit; und die Geschwindigkeit derjenigen Systempunkte, deren Abstand von dem momentanen Pol $\mathfrak{P}$ gleich der Längeneinheit ist, nennen wir die **Drehgeschwindigkeit** des Systems S in dem betreffenden Zeitmomente. Bezeichnen wir mit ω die Drehgeschwindigkeit, mit v die Geschwindigkeit eines Systempunktes und mit r dessen Abstand von dem momentanen Pol, so ist die Drehgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Die Punkte auf einer durch den Pol gehenden Systemgeraden besitzen Geschwindigkeiten, deren Endpunkte auch auf einer durch den Pol gehenden Geraden liegen; und die Geschwindigkeit der beiden Punkte der Systemgeraden, die vom Pole um die Längeneinheit entfernt sind, wird auch die **Drehgeschwindigkeit** dieser Systemgeraden genannt.

Denken wir uns in Fig. **12** die Geschwindigkeiten AA_v, BB_v, CC_v .. der Punkte A, B, C .. des Systems S in gleichem Sinne um einen rechten Winkel gedreht, so dass auf den durch den Pol gehenden Geraden $AA_{\mathfrak{v}} = AA_v$, $BB_{\mathfrak{v}} = BB_v$, $CC_{\mathfrak{v}} = CC_v$ .. ist; dann wollen wir die Strecken $AA_{\mathfrak{v}}$, $BB_{\mathfrak{v}}$, $CC_{\mathfrak{v}}$ .. die **lothrechten Geschwindigkeiten** der betreffenden Punkte A, B, C.. nennen. Da sich nun die Geschwindigkeiten wie die Polabstände der betreffenden Punkte verhalten, so ergiebt sich der Satz:

Das System $S_{\mathfrak{v}}$ der Endpunkte $A_{\mathfrak{v}}$, $B_{\mathfrak{v}}$, $C_{\mathfrak{v}}$.. der lothrechten Geschwindigkeiten ist ähnlich und ähnlich liegend zu dem System S, dessen Punkte A, B, C .. diese lothrechten Geschwindigkeiten besitzen, und der Pol $\mathfrak{P}$ ist der Aehnlichkeitspunkt dieser beiden Systeme.

Ist in einem Zeitmomente die Drehgeschwindigkeit des Systems gleich der angenommenen Längeneinheit, fällt also der Endpunkt von der lothrechten Geschwindigkeit eines einzigen Systempunktes in den Pol, dann schrumpft das System $S_{\mathfrak{v}}$ im Pol zu einem Punkte zusammen und es liegen die Endpunkte der lothrechten Geschwindigkeiten aller Systempunkte im Pol. Durch die Einführung der lothrechten Geschwindigkeit wird, wie die später folgenden Darlegungen zeigen, die Construction der Geschwindigkeiten in vielen Fällen erleichtert.

10. **Bewegung einer Geraden.** Bezeichnen f^0, f^I, f^{II}, f^{III} .. in Fig. **13** die in unendlich kleinen Zeiten auf einander folgenden Lagen der in einer Ebene bewegten Geraden f, so können wir die durch die Schnittpunkte I, II, III .. entstandenen unendlich kleinen Strecken $I\,II$, $II\,III$ .. als die Elemente einer Curve φ

ansehen, welche von diesen Lagen umhüllt wird; und die Bewegung der Geraden an sich kann betrachtet werden als eine Folge unendlich kleiner successiver Drehungen, um I von f^0 nach f^I, um II von f^I nach f^{II} u. s. w. Wenn wir aber die Gesamtheit aller Punkte der Geraden als eine starre Punktreihe auffassen, welche wir als solche auch eine starre Gerade nennen, so kann die unendlich kleine Bewegung der starren Geraden f mit dem Punkte F von $f^I F^I$ nach $f^{II} F^{II}$ betrachtet werden als eine unendlich kleine Drehung um den mit II identischen Punkt F^{II} und gleichzeitige unendlich kleine Verschiebung in sich selbst um die unendlich kleine Grösse $F^I F^{II}$; oder auch als eine gleiche unendlich kleine Drehung um F^I und eine gleichzeitige gleiche unendlich kleine Verschiebung in sich selbst. In diesem letzten Falle gelangt die Gerade f^I nach der zu f^{II} parallelen Geraden f' und hat sich gleichzeitig in sich selbst um die mit $F^I F^{II}$ gleiche Strecke verschoben. Der senkrechte Abstand $F^I D$ der beiden Parallelen ist in dem unendlich kleinen Dreieck $F^I D F^{II}$ die Seite, welche dem unendlich kleinen Winkel $f^I F^{II} f^{II}$ gegenüberliegt, und als solche auch verschwindend klein gegen die unendlich kleine Strecke $F^I F^{II}$; demnach ist f' als mit f^I identisch anzusehen. Im Vergleich mit endlichen Strecken können wir die unendlich kleine Strecke $F^I F^{II}$ so wie das Curvenelement $I F^{II}$ als Berührungspunkt der Tangente f^I betrachten. Durch diese Ueberlegung ist der folgende Satz begründet:

Die Bewegung der in einer Ebene bewegten starren Geraden, deren Lagen eine Curve umhüllen, kann in jedem Zeitelemente betrachtet werden als eine unendlich kleine Drehung um den jeweiligen Berührungspunkt und eine gleichzeitige unendlich kleine Verschiebung in sich selbst.

11. Geschwindigkeiten der Punkte einer bewegten starren Geraden. Ist in Fig. 14 auf einer starren Geraden f des bewegten ebenen Systems S eine Punktreihe ABC.. gegeben, dann bilden die Endpunkte $A_\mathfrak{v} B_\mathfrak{v} C_\mathfrak{v}$.. der lothrechten Geschwindigkeiten dieser Punkte eine ähnliche Punktreihe auf der zu f parallelen Geraden $f_\mathfrak{v}$, die Endpunkte $A_v B_v C_v$.. der Geschwindigkeiten eine ähnliche Punktreihe auf einer Geraden f_v, und die Geschwindigkeitsrichtungen sind beziehlich senkrecht auf den von ABC.. nach dem momentanen Pol $\mathfrak{P}$ des Systems S gehenden Geraden. Ist F der Berührungspunkt, welchen die Gerade f momentan mit der umhüllten Curve φ bildet, so muss die Geschwindigkeit FF_v oder die Bewegungsrichtung derselben mit der Geraden f zusammenfallen; demnach ist der Berührungspunkt F auch der Fusspunkt der vom Pol $\mathfrak{P}$ auf die Gerade f gefällten Senkrechten, und ferner ist der Endpunkt F_v seiner Geschwindigkeit der Schnittpunkt der beiden Geraden f, f_v. Zerlegen wir jede der Geschwindigkeiten AA_v, BB_v, CC_v.. in zwei Componenten, von denen die eine auf der Geraden f senkrecht steht, die andere in derselben liegt, so sind die letzteren Componenten AA_v^t, BB_v^t, CC_v^t.. die senkrechten Projectionen dieser Geschwindigkeiten auf die Gerade f, gleich dem Abstande FF_v der Parallelen f, f_v, oder gleich der Geschwindigkeit FF_v des Fusspunktes F, und die Endpunkte $A_v^n B_v^n C_v^n$.. der auf f senkrechten Componenten liegen auf einer durch F gehenden Geraden f_v^n, welche zu f_v parallel ist und auf $\mathfrak{P}F_v$ senkrecht steht, weil der Winkel $\mathfrak{P}F_v f_v = \mathfrak{P}Ff$ ein rechter ist. Der zur starren Geraden f gehörende Fusspunkt F, der mit dem Berührungspunkte momentan zusammenfällt, zeichnet sich dadurch aus, dass seine Geschwindigkeit in der Geraden f liegt. Somit erhalten wir den Satz:

Die senkrechten Projectionen von den Geschwindigkeiten der Punkte einer bewegten starren Geraden im Bezug auf diese Gerade sind in einem jeden Zeitmomente von gleicher Grösse und gleich der Geschwindigkeit desjenigen Punktes dieser Geraden, der momentan mit ihrem an der umhüllten Curve gebildeten Berührungspunkte coincidirt.

Es ist der Winkel fFf_v^n gleich dem Winkel $F\mathfrak{P}F_v$, weil die Gerade f_v^n auf $\mathfrak{P}F_v$ senkrecht steht; demnach können wir die unendlich kleine Bewegung der Geraden f betrachten als eine unendlich kleine Drehung um den Berührungspunkt F mit derselben Drehgeschwindigkeit, welche das momentan um den Pol $\mathfrak{P}$ rotirende System S besitzt, und als eine gleichzeitige Verschiebung der Geraden in sich selbst mit der Geschwindigkeit des momentan mit F coincidirenden Systempunktes. Geht insbesondere die Gerade f durch den Pol $\mathfrak{P}$, so findet in dem betreffenden Zeitelemente keine Verschiebung der Geraden in sich selbst, sondern nur Drehung um den Pol statt, und in diesem Falle liegen die Endpunkte der Geschwindigkeiten von den Punkten der bewegten starren Geraden auf einer durch den Pol gehenden Geraden.[1])

---

1) Die Bewegung einer Geraden in der Ebene ist ausführlich behandelt in Wittenbauer, *Kinematik des Strahles.* 1883.

Sind in Fig. **15** die Bahncurven α, β zweier Punkte A, B eines in einer festen Ebene bewegten Systems gegeben nnd nehmen wir an: es sei AA_v die Geschwindigkeit des Punktes A, dann ergiebt sich die Geschwindigkeit BB_v des Punktes B auf seiner Bahncurve β, wenn wir $A_vA_v^t$ senkrecht AB ziehen, BB_v^t gleich AA_v^t machen und von B_v^t auf AB die Senkrechte $B_v^tB_v$ ziehen, welche die in B an die Curve β gelegte Tangente trifft. Sind $A\mathfrak{P}$, $B\mathfrak{P}$ die Curvennormalen und ist auf $A\mathfrak{P}$ die Strecke $AA_\mathfrak{v} = AA_v$ die lothrechte Geschwindigkeit von A, dann bestimmt die zu AB gezogene Parallele $A_\mathfrak{v}B_\mathfrak{v}$ auf $A\mathfrak{P}$ die lothrechte Geschwindigkeit $BB_\mathfrak{v}$ des Punktes B.

12. **Allgemeine Bestimmungen der Bewegung eines ebenen Systems. — Normalenziehung an die Bahncurven und Hüllbahncurven mittelst des Pols.** Die Bewegung eines in einer festen Ebene bewegten starren Systems S ist durch die Bewegung zweier Systempunkte AB bestimmt; denn sind α, β in Fig. **16** die Bahncurven dieser beiden Punkte und $AA_1A_2\ldots$, $BB_1B_2\ldots$ verschiedene Lagen derselben, so erhalten wir die Lagen $C_1C_2\ldots$ und die hierdurch bestimmte Bahncurve γ eines beliebigen Systempunktes C, indem wir die Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2\ldots$ dem Dreieck ABC congruent machen; und in analoger Weise ergeben sich die Lagen $f_1f_2\ldots$ einer Systemcurve f, wenn wir zu dem Gebilde ABf die congruenten Gebilde $A_1B_1f_1$, $A_2B_2f_2\ldots$ construiren. Die auf einander folgenden Lagen der Systemcurve f umhüllen in der festen Ebene eine Curve φ, welche wir die H ü l l b a h n c u r v e der bewegten Curve f nennen. Der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der beiden Curvennormalen $A\mathfrak{P}$, $B\mathfrak{P}$ ist für die Systemlage ABf der Pol und die Bewegungsrichtung jedes Systempunktes ist in dem betreffenden Zeitmomente senkrecht auf der von diesem Punkte nach dem Pol gehenden Geraden. Der Systempunkt F, in dem die Systemcurve f die Hüllbahncurve φ berührt, bewegt sich in der auf $F\mathfrak{P}$ senkrechten Richtung, welche momentan mit dem gemeinschaftlichen Elemente der berührenden Curven f, φ zusammenfällt. In den auf einander folgenden Lagen der Curve f treten im Allgemeinen successive andere Punkte dieser Curve momentan als Berührungspunkte auf und demnach berührt die Hüllbahncurve φ alle von solchen Punkten der Curve f beschriebenen Bahncurven. Schrumpft die Curve f zu einem Punkte zusammen, dann geht die Hüllbahncurve φ in die Bahncurve dieses Punktes über. Es ergiebt sich demnach der wichtige Satz:

B e w e g t s i c h e i n s t a r r e s e b e n e s S y s t e m i n e i n e r

Ebene, so gehen die Normalen der Curvenelemente, welche in einem Zeitelemente von den Systempunkten oder Systemcurven beschrieben werden, durch den momentanen Pol des Systems.

Gleiten in Fig. 17 zwei Curven f, l eines starren ebenen Systems S resp. auf den in einer festen Ebene liegenden Curven φ, λ, so ist die Bewegung dieses Systems bestimmt, und der momentane Pol $\mathfrak{P}$ ergiebt sich als Schnittpunkt der in den beiden Berührungspunkten auf die Curven errichteten Normalen. Ist in dem bewegten System S ein Punkt D gegeben, so ist die Verbindungsgerade $\mathfrak{P}D$ die Normale an der vom Punkte D beschriebenen Bahncurve δ; ist ferner im System S eine Curve c gegeben, und wird von $\mathfrak{P}$ an die Curve c eine Normale $\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ gezogen, so ist $\mathfrak{C}$ ein Berührungspunkt der Curve c an der von ihr erzeugten Curve γ und $\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ auch die Normale an der Curve γ.[1])

Betrachten wir das System S als fest und die vorhin feste Ebene als ein bewegtes starres System Σ, dessen Curven φ, λ beziehlich auf den jetzt festen Curven f, l gleiten, so erhalten wir nach dieser Wechselung für die momentane Bewegung des Systems Σ in dem festen System S denselben Pol $\mathfrak{P}$. Es ist demnach $\mathfrak{P}$ der Pol vom bewegten System S gegen das feste Σ und umgekehrt vom bewegten System Σ gegen das feste S. Wir werden auch sagen, $\mathfrak{P}$ ist der Pol des bewegten Systems S im festen Σ und umgekehrt, $\mathfrak{P}$ ist der Pol des bewegten Systems Σ im festen S; ferner $\mathfrak{P}$ ist der Pol der beiden Systeme S, Σ, gleichviel ob das eine dieser Systeme ruht oder ob beide sich gleichzeitig in einer festen Ebene bewegen.

Aus der betrachteten Bewegung des Systems S gegen das feste System Σ ergeben sich alle besonderen Fälle. Schrumpft die Curve f zu einem Punkte zusammen, dann bewegt sich dieser

---

1) Die erste Bestimmung der Tangenten oder Normalen mittelst des Pols wurde von Descartes an der Cycloide ausgeführt und durch die Betrachtung eines Vielecks abgeleitet, welches auf einer Geraden wälzt. Descartes, *Epistolae* 1683. T. III. *Epist.* 57. p. 213.

Für die allgemeine ebene Bewegung wurde der Pol von Joh. Bernoulli bestimmt. *Opera omnia* 1742. T. IV. p. 250. *De centro spontaneo rotationis.* Die fundamentale Bedeutung des Pols für die Bestimmung der Normalen derjenigen Curven, welche die Punkte eines in einer Ebene bewegten ebenen Systems beschreiben, hat Chasles zuerst hervorgehoben und die betreffenden Constructionen ausgeführt in einer der Société philomathique am 1. August 1829 überreichten Abhandlung, die abgedruckt ist im *Bulletin de la Société mathématique* 1877—1878. T. 6. p. 208.

auf der festen Curve φ, während die Systemcurve l auf der festen Curve λ gleitet; degeneriren beide Curven f und l zu Punkten, dann bewegen sich diese auf den Bahncurven φ, λ; wenn dagegen die feste Curve φ sich zu einem Punkte zusammenzieht, dann gleitet die Systemcurve f über diesen festen Punkt, während die Systemcurve l auf λ gleitet; und wenn schliesslich beide Curven φ, λ zu Punkten zusammenschrumpfen, dann gleiten beide Systemcurven f, l über diese festen Punkte. Andere specielle Fälle erhalten wir, wenn eine oder beide Curven der Paare fl, $\varphi\lambda$, $f\lambda$, $l\varphi$ in Gerade übergehen.

13. **Das Gelenkviereck.** Sind in Fig. **18** die Systemcurven f, l in dem bewegten System S, so wie die Hüllcurven φ, λ in dem festen System Σ Kreise, deren Mittelpunkte wir beziehlich mit F, L, Φ, Λ bezeichnen, und betrachten wir die Mittelpunkte F, L als Punkte des bewegten Systems, so bewegen sich diese resp. in dem festen System auf den Kreisen φ', λ', deren Mittelpunkte Φ, Λ sind; demnach ist in diesem Falle die Bewegung des Systems S bestimmt durch die Bewegung der Systempunkte F, L auf den Kreisen φ', λ' und unabhängig von der Grösse der Radien der vier Kreise f, l, φ, λ. Das durch die Punkte $\Phi\Lambda LF$ gebildete ebene Viereck, dessen Seitenlängen während der Bewegung unveränderlich sind, wird ein Gelenkviereck genannt; die Seiten ΦF, ΛL desselben drehen sich in der festen Ebene beziehlich um die Endpunkte Φ, Λ der festen Seite $\Phi\Lambda$, und durch die Bewegung der dritten beweglichen Seite FL, welche die Koppel des Gelenkvierecks heisst, ist auch die Bewegung des Systems S in diesem Falle gegeben.

Betrachten wir in Fig. **19** ein Gelenkviereck $\Phi\Lambda LF$, dessen Seite $\Phi\Lambda$ fest ist, so ist der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der Seiten ΦF, ΛL, die sich resp. um die festen Punkte Φ, Λ drehen, der momentane Pol für das durch die Koppel FL bestimmte, bewegte System. Ist $FF_{\mathfrak{v}}$ die auf $F\Phi$ liegende lothrechte Geschwindigkeit des Punktes F und ziehen wir durch $F_{\mathfrak{v}}$ zu FL eine Parallele $F_{\mathfrak{v}}L_{\mathfrak{v}}$, die ΛL in $L_{\mathfrak{v}}$ trifft, dann repräsentirt $LL_{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes L. Für einen beliebigen auf der Koppel liegenden Punkt D ergiebt sich die lothrechte Geschwindigkeit $DD_{\mathfrak{v}}$, indem wir die nach dem Pol $\mathfrak{P}$ gerichtete Gerade $DD_{\mathfrak{v}}$ bis an jene Parallele ziehen. Für einen beliebigen mit der Koppel verbundenen Punkt E erhalten wir die zugehörige lothrechte Geschwindigkeit $EE_{\mathfrak{v}}$, wenn wir zu FE und LE resp. die Parallelen $F_{\mathfrak{v}}E_{\mathfrak{v}}$, $L_{\mathfrak{v}}E_{\mathfrak{v}}$ ziehen.

14. Definition des Krümmungsmittelpunktes und der Evolute. Nehmen wir an, es seien in Fig. 20 auf einer Curve φ zwei unendlich nahe Punkte $F_I F_{II}$ und ein beliebiger dritter Punkt F'_{III} gegeben, es sei ferner die Gerade a in der Mitte auf dem Curvenelemente $F_I F_{II}$ und die Gerade b' in der Mitte auf der Strecke $F_{II} F'_{III}$ senkrecht, dann ist der Schnittpunkt Φ' dieser beiden Senkrechten der Mittelpunkt des durch $F_I F_{II} F'_{III}$ gehenden Kreises. Denken wir uns den Punkt F'_{III} auf der Curve φ bewegt bis derselbe nach F_{III} unendlich nahe an F_{II}, die Senkrechte b' nach der in der Mitte auf dem Elemente $F_{II} F_{III}$ senkrechten Geraden b gelangt ist, die a im Punkte Φ schneidet; dann bewegt sich auch der Schnittpunkt Φ' stetig auf a bis nach Φ. Dieser Punkt Φ ist demnach der Mittelpunkt des durch die drei unendlich nahen Punkte F_I, F_{II}, F_{III} der Curve φ gehenden Kreises φ^0. Eine unendlich kleine Bewegung des Punktes F'_{III} auf der Curve φ bewirkt eine unendlich kleine Aenderung des Punktes Φ' auf der Geraden a. Wird also die Lage des unendlich nahe an F_{II} bleibenden Punktes F_{III} auf der Curve φ geändert, so wird dadurch nur eine unendlich kleine Lagenänderung des Mittelpunktes Φ auf a bewirkt, die gegen endliche Grössen verschwindet. Ebenso erfolgt auf der Geraden b eine unendlich kleine Lagenänderung des Punktes Φ, wenn der unendlich nahe an F_{II} bleibende Punkt F_I auf φ seine Lage ändert. Da nun die Elemente $F_I F_{II}$, $F_{II} F_{III}$ gegen endliche Grössen verschwindend klein sind und ihre Grösse auf die endliche Entfernung des Punktes Φ von der Curve φ ohne Einfluss ist, so bezeichnen wir die Curvenstelle der unendlich nahen drei Punkte $F_I F_{II} F_{III}$ mit einem Punkte F und nennen den durch diese unendlich nahen Punkte gehenden Kreis φ^0 den Krümmungskreis und den Mittelpunkt Φ desselben den Krümmungsmittelpunkt der Curve φ für den Punkt F. Der Krümmungsmittelpunkt Φ ist demnach auch der Schnittpunkt zweier unendlich naher Normalen der Curve φ. Die Curve, welche von sämtlichen Krümmungsmittelpunkten einer Curve φ gebildet, also auch von den Normalen derselben umhüllt wird, heisst die Evolute[1]) der Curve φ.

Liegen an einer Curvenstelle F die Nachbarelemente $F_I F_{II}$, $F_{II} F_{III}$ in einer Geraden, dann befindet sich der Krümmungsmittelpunkt im Unendlichen; und umgekehrt, wenn Φ ein unendlich

1) Die Evoluten wurden zuerst von Huygens behandelt in seinem *Horologium oscillatorium.* 1673.

ferner Punkt ist, dann liegen die drei unendlich nahen Punkte $F_I F_{II} F_{III}$ auf einer Geraden. In diesem Falle wird der Punkt F ein *Wendepunkt* der Curve genannt. Bilden dagegen die beiden Curvenelemente an einer Curvenstelle F einen unendlich kleinen Winkel $F_I \widehat{F_{II}} F_{III}$, so ist der durch $F_I F_{II} F_{III}$ gehende Krümmungskreis unendlich klein und der Krümmungsmittelpunkt fällt mit dem Curvenpunkt F zusammen; liegt umgekehrt bei einer stetig verlaufenden Curve der Krümmungsmittelpunkt in der Curve, so findet jenes statt und in diesem Falle wird der Punkt F ein *Rückkehrpunkt* der Curve genannt.

15. **Drei unendlich nahe Lagen eines ebenen Systems.** Gleiten in Fig. 17 zwei Curven f, l eines bewegten Systems S resp. auf den festen Curven φ, λ, und sind $FL\Phi\Lambda$ beziehlich die Krümmungsmittelpunkte dieser Curven für die betreffenden Berührungspunkte, dann hat jeder hierdurch gegebene Krümmungskreis mit der zugehörigen Curve an den Berührungsstellen zwei Nachbarelemente gemeinsam. Bewegt sich das System S aus einer Systemlage in zwei unendlich nahe folgende Lagen, so kommen bei dieser Bewegung nur jene zwei Nachbarelemente der bewegten Curven f, l und der festen Curven φ, λ in Betracht. Demnach können wir für diese drei unendlich nahen Systemlagen die berührenden Curven durch die zugehörigen Krümmungskreise ersetzen, und die vier Krümmungsmittelpunkte $FL\Phi\Lambda$ bilden für diese drei unendlich nahen Systemlagen ein Gelenkviereck. Aus diesen Erörterungen folgt:

Die Bewegung eines ebenen Systems S aus einer Lage in zwei unendlich nahe folgende Lagen kann auch hervorgebracht werden durch die Bewegung der als Systempunkte betrachteten Krümmungsmittelpunkte F, L auf den um die festen Krümmungsmittelpunkte Φ, Λ beschriebenen Kreisen. Oder: die Bewegung des ebenen Systems S aus einer Lage in zwei unendlich nahe folgende Lagen ist bestimmt durch die Bewegung der als Systemstrecke betrachteten Koppel FL des durch die vier Krümmungsmittelpunkte $FL\Phi\Lambda$ gebildeten Gelenkvierecks.

16. **Die Polbahn und Polcurve.** In Fig. 21, Taf. II, sind durch $A_I B_I$, $A_{II} B_{II}$, $A_{III} B_{III}$, $A_{IV} B_{IV}$ .. beliebige Lagen zweier Punkte AB eines in einer festen Ebene bewegten starren Systems S gegeben. Construiren wir den Doppelpunkt oder Pol $\mathfrak{P}_{I\,II}$ der ersten und zweiten Lage durch die in den Mitten auf $A_I A_{II}$, $B_I B_{II}$ errichteten Senkrechten, in analoger Weise die Pole $\mathfrak{P}_{II\,III}$, $\mathfrak{P}_{III\,IV}$ ..

für je zwei auf einander folgende Lagen, dann bilden diese Pole in der festen Ebene ein Polvieleck, und die Bewegung des Systems S kann durch successive Drehungen um diese Pole ersetzt werden. Bestimmen wir ferner die Ecken $\mathfrak{P}'_{I\,II}\,\mathfrak{P}'_{II\,III}\,\mathfrak{P}'_{III\,IV}\,..$ eines zweiten Vielecks durch congruente Dreiecke, so dass:

$$\begin{array}{lcl} A_I B_I \mathfrak{P}'_{I\,II} & \cong & A_I B_I \mathfrak{P}_{I\,II} \\ A_I B_I \mathfrak{P}'_{II\,III} & \cong & A_{II} B_{II} \mathfrak{P}_{II\,III} \\ A_I B_I \mathfrak{P}'_{III\,IV} & \cong & A_{III} B_{III} \mathfrak{P}_{III\,IV} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

ist, so sind nach dieser Construction $\mathfrak{P}'_{I\,II}\,\mathfrak{P}'_{II\,III}\,\mathfrak{P}'_{III\,V}\,..$ die Lagen, welche die betreffenden Pole in dem bewegten System S einnehmen, und das von den Punkten $\mathfrak{P}'_{I\,II}\,\mathfrak{P}'_{II\,III}\,\mathfrak{P}'_{III\,IV}\,..$ gebildete Vieleck gehört demnach zu dem System S. Zunächst können die Systempunkte AB durch Drehung um den Pol $\mathfrak{P}_{I\,II}$, der mit $\mathfrak{P}'_{I\,II}$ identisch ist, von $A_I B_I$ nach $A_{II} B_{II}$ bewegt werden; der Punkt $\mathfrak{P}'_{II\,III}$ gelangt dann wegen der Congruenz der oben in zweiter Zeile genannten Dreiecke nach $\mathfrak{P}_{II\,III}$ und die Strecke $\mathfrak{P}'_{I\,II}\,\mathfrak{P}'_{II\,III}$ des bewegten Systems S fällt mit der festen Strecke $\mathfrak{P}_{I\,II}\,\mathfrak{P}_{II\,III}$ zusammen. In gleicher Weise können wir hierauf durch Drehung um $\mathfrak{P}_{II\,III}$ die Systempunkte AB von $A_{II} B_{II}$ nach $A_{III} B_{III}$ bringen, dabei fällt dann wegen der Congruenz der oben in dritter Zeile genannten Dreiecke die Strecke $\mathfrak{P}'_{II\,III}\,\mathfrak{P}'_{III\,IV}$ mit $\mathfrak{P}_{II\,III}\,\mathfrak{P}_{III\,IV}$ zusammen u. s. w. Durch diese auf einander folgenden Drehungen des Systems S kommen die Seiten des bewegten Vielecks $\mathfrak{P}'_{I\,II}\,\mathfrak{P}'_{II\,III}\,\mathfrak{P}'_{III\,IV}\,..$ successive mit den Seiten des festen Vielecks $\mathfrak{P}_{I\,II}\,\mathfrak{P}_{II\,III}\,\mathfrak{P}_{III\,IV}\,..$ zur Deckung.

Betrachten wir umgekehrt das System S als fest, dagegen die vorhin feste Ebene mit den Vielecken $\mathfrak{P}_{I\,II}\,\mathfrak{P}_{II\,III}\,\mathfrak{P}_{III\,IV}\,..$, $A_I\,A_{II}\,A_{III}\,...$, $B_I B_{II} B_{III}\,...$ als ein bewegtes starres System Σ, und bezeichnen wir jetzt die beiden mit $A_I B_I$ zusammenliegenden Punkte des Systems S der Unterscheidung wegen mit $A_S B_S$; dann erhalten wir die verschiedenen Lagen von Σ in S, wenn wir die Eckpunkte $A_{II} B_{II}$, $A_{III} B_{III}\,..$ successive auf die festen Punkte $A_S B_S$ gelegt denken. Werden also die zum System Σ gehörenden Punkte $A_{II} B_{II}$ durch Drehung um den Punkt $\mathfrak{P}'_{I\,II}$ nach $A_S B_S$ gebracht, dann fällt die bewegte Strecke $\mathfrak{P}_{I\,II}\,\mathfrak{P}_{II\,III}$ mit der jetzt festen Strecke $\mathfrak{P}'_{I\,II}\,\mathfrak{P}'_{II\,III}$ zusammen. In gleicher Weise können wir hierauf A_{III} B_{III} durch Drehung um $\mathfrak{P}'_{II\,III}$ nach $A_S\,B_S$ legen und dadurch gelangt die Strecke $\mathfrak{P}_{II\,III}\,\mathfrak{P}_{III\,IV}$ mit der festen Strecke $\mathfrak{P}'_{II\,III}\,\mathfrak{P}'_{III\,IV}$ zur Deckung u. s. w. Die hier auftretenden Wechselbeziehungen der Bewegung des Systems S gegen Σ und der Bewegung des Systems Σ gegen S sind für die kinematische Untersuchung der Bewegung von fundamentaler Bedeutung, und die Bewegung des einen Systems wird als die Umkehrung der Bewegung des anderen Systems bezeichnet.[1])

Denken wir uns die betrachteten Systemlagen $A_I B_I$, $A_{II} B_{II}$, $A_{III} B_{III}$.. unendlich nahe an einander gelegt, dann gehen die Vielecke $A_I A_{II} A_{III}$.. und $B_I B_{II} B_{III}$.. in die mit α, β bezeichneten Bahncurven der Systempunkte A, B über; und ferner entstehen aus den beiden Vielecken $\mathfrak{P}_{I\,II}\,\mathfrak{P}_{II\,III}\,\mathfrak{P}_{III\,IV}$.., $\mathfrak{P}'_{I\,II}\,\mathfrak{P}'_{II\,III}\,\mathfrak{P}'_{III\,IV}$.., deren entsprechende Seiten bei der Bewegung zusammenfallen, resp. die Curven π, p, welche sich in dem betreffenden Pol berühren, und von denen demnach die eine auf der anderen rollt.

Bei der stetigen Bewegung des Systems S in dem als fest angenommenen System Σ rollt die zu S gehörende Curve p (Fig. **21**) auf der festen Curve π des Systems Σ und der Berührungspunkt dieser Curven ist der momentane Pol des bewegten Systems. Die Curve π, welche von dem veränderlichen Pol $\mathfrak{P}$ in dem festen System Σ durchschritten wird, heisst die Polbahn, und die Curve p, welche der Pol $\mathfrak{P}$ in dem bewegten System S durchläuft, heisst die Polcurve. Hiernach erhalten wir den Satz:

Die Bewegung eines starren ebenen Systems in einer festen Ebene ist bestimmt durch das Rollen der in diesem System befindlichen Polcurve auf der in der festen Ebene liegenden Polbahn, und der jeweilige Berührungspunkt ist der momentane Pol.

Betrachten wir dagegen in Fig. **21** das System S in einer Lage $A_S B_S p$ als fest, das System Σ mit den Curven $\alpha\beta\pi$ als beweglich, dann gleiten die Curven α, β resp. durch die festen Punkte A_S, B_S, sie umhüllen diese Punkte; und die Curve π rollt dann auf der jetzt festen Curve p. Bei dieser Umkehrung der Bewegung wird also π die Polcurve und p die Polbahn. Diese durch Ruhe und Bewegung gegebene Unterscheidung der beiden Curven π, p, welche in Wechselbeziehung stehen und in gleicher Weise in den Systemen S, Σ erzeugt werden, hört auf, wenn diese Systeme sich beide in einem dritten System bewegen; daher wollen wir die beiden Curven π, p gemeinschaftlich die Rollcurven der beiden Systeme Σ, S nennen.

1) Auf die Umkehrung der Bewegung und auf die fundamentale Bedeutung derselben hat Chasles hingewiesen in seiner *Geschichte der Geometrie*, deutsch von Sohncke. 1837. S. 450.

Erzeugt eine Systemcurve f des bewegten Systems S eine Hüllbahn φ in dem festen System Σ, dann beschreibt bei der Umkehrung der Bewegung die zu Σ gehörende Systemcurve φ im System S als Hüllbahn die Curve f; und zieht sich insbesondere die Curve f zu einem Punkte zusammen, dann gleitet bei dieser Umkehrung der Bewegung die Curve φ über diesen Punkt, und wir sagen, derselbe wird von den Lagen der Curve φ umhüllt. Auch hier hört die Unterscheidung der Systemcurve und Hüllbahn auf, wenn sich die Systeme S, Σ beide in einem dritten System bewegen; daher sollen zwei solche Curven gemeinschaftlich **Gleitcurven** genannt werden.

Nehmen wir an, es bewegen sich in Fig. **22** die Punkte A, B des Systems S auf den Bahncurven α, β in dem festen System Σ, und machen wir die Strecken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 . ., deren Endpunkte beziehlich auf diesen Curven liegen, gleich der Systemstrecke AB, dann erhalten wir hierdurch verschiedene auf einanderfolgende Lagen des bewegten Systems. Die Schnittpunkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ . . der auf den Curven α, β errichteten Senkrechten-Paare $A_1\mathfrak{P}_1$, $B_1\mathfrak{P}_1$; $A_2\mathfrak{P}_2$, $B_2\mathfrak{P}_2$; $A_3\mathfrak{P}_3$, $B_3\mathfrak{P}_3$ . . sind die Pole für diese Systemlagen und bilden in dem festen System die Polbahn π. Bestimmen wir nun die Punkte $\mathfrak{P}'_1\,\mathfrak{P}'_2\,\mathfrak{P}'_3$ . . so, dass

$$\begin{array}{c} A_1B_1\mathfrak{P}'_1 \cong A_1B_1\mathfrak{P}_1 \\ A_1B_1\mathfrak{P}'_2 \cong A_2B_2\mathfrak{P}_2 \\ A_1B_1\mathfrak{P}'_3 \cong A_3B_3\mathfrak{P}_3 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

ist, dann liefern diese Punkte in der Lage A_1B_1 des bewegten Systems S die Polcurve p, welche die Polbahn π in dem mit $\mathfrak{P}'_1$ identischen Punkt $\mathfrak{P}_1$ berührt.

17. Geschwindigkeit des Berührungspunktes zweier Gleitcurven. Beschreibt in Fig. **23** die Curve f des bewegten Systems S die Curve φ als Hüllbahn in dem festen System Σ und ist p die Polcurve, π die Polbahn, $\mathfrak{P}$ der Berührungspunkt derselben, dann ist die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$, welche durch den Pol $\mathfrak{P}$ und den Berührungspunkt $\mathfrak{F}$ der Curven f, φ geht, die gemeinsame Normale dieser Curven, deren Krümmungsmittelpunkte auf dieser Normalen beziehlich F, Φ sein mögen. Der Berührungspunkt $\mathfrak{F}$ bewegt sich auf der Hüllbahn φ im festen System Σ und auf der Systemcurve f im beweglichen System S. Die Geschwindigkeiten, welche dieser Berührungspunkt $\mathfrak{F}$ in diesen beiden Systemen besitzt, können wir bestimmen, wenn wir annehmen, es sei durch die auf

$\mathfrak{P}F$ senkrechte Strecke FF_v die Geschwindigkeit gegeben, mit welcher sich der zu S gehörende Punkt F in Σ bewegt. Der Punkt F^0 des Systems S, welcher momentan mit dem Berührungspunkt $\mathfrak{F}$ zusammenliegt, besitzt dann in Σ die auf $\mathfrak{P}F$ senkrechte Geschwindigkeit $F^0F_v^0$, deren Endpunkt F_v^0 auf der Geraden $\mathfrak{P}F_v$ liegt. Die Gerade $\Phi\,\mathfrak{F}$ vollzieht während einer unendlich kleinen Bewegung des Systems S eine unendlich kleine Drehung um den festen Punkt Φ in dem ruhenden System Σ, und da der auf dieser Geraden befindliche Punkt F die Geschwindigkeit FF_v im System Σ besitzt, so erhalten wir die Geschwindigkeit $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_v$, mit welcher der Berührungspunkt $\mathfrak{F}$ sich auf φ in dem festen System Σ bewegt, durch den Schnitt $\mathfrak{F}_v$ der Geraden ΦF_v und $\mathfrak{F}F_v^0$. Der zum System S gehörende Punkt F^0 bewegt sich im festen System Σ mit der Geschwindigkeit $F^0F_v^0 = v_\Sigma$, und der mit F^0 momentan zusammenliegende Berührungspunkt $\mathfrak{F}$ besitzt die Geschwindigkeit $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_v = \mathfrak{v}_\Sigma$ im System Σ; demnach muss $F_v^0\mathfrak{F}_v = \mathfrak{v}_S$ nach Grösse und Richtung die Geschwindigkeit sein, mit welcher der Punkt $\mathfrak{F}$ sich auf der Curve f im System S bewegt. Es ist somit in Zeichen:

$$\mathfrak{v}_\Sigma - \mathfrak{v}_S = v_\Sigma.$$

Wenn man für den Berührungspunkt $\mathfrak{F}$ verschiedene Lagen auf der Geraden ΦF annimmt, so liefert uns die Fig. **23** ein Bild von den Veränderungen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_\Sigma$, $\mathfrak{v}_S$, v_Σ, welche resp. den Abständen $\mathfrak{F}\Phi$, $\mathfrak{F}F$, $\mathfrak{F}\mathfrak{P}$ proportional sind; denn die Gerade $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_v$ verschiebt sich dann senkrecht stehend auf ΦF und die Schnitte $\mathfrak{F}_v$, F_v^0 wandern auf den Geraden ΦF_v, $\mathfrak{P}F_v$. Gelangt $\mathfrak{F}$ nach dem Pol $\mathfrak{P}$ und damit $\mathfrak{F}_v$ nach $\mathfrak{F}_v'$, dann ist

$$v_\Sigma = 0, \quad \mathfrak{v}_\Sigma = \mathfrak{v}_S = \mathfrak{P}\mathfrak{F}_v'.$$

Die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_\Sigma$, $\mathfrak{v}_S$, mit denen sich momentan der Berührungspunkt $\mathfrak{F}$ beziehlich auf den Curven φ, f bewegt, sind für diese Lage des Punktes $\mathfrak{F}$ gleich und gleichgerichtet; demnach durchschreitet derselbe während einer unendlich kleinen Zeit auf diesen Curven in gleicher Richtung Elemente von gleicher Grösse, und in diesem Falle rollt die Systemcurve f momentan auf der Hüllbahn φ. Fällt aber der Berührungspunkt $\mathfrak{F}$ beständig mit dem Pol $\mathfrak{P}$ zusammen, dann findet beständiges Rollen statt und $\mathfrak{F}$ durchschreitet in Σ die Polbahn, in S die Polcurve, und die Gleitcurven werden in diesem besonderen Falle Rollcurven.

Betrachten wir, um dies noch in anderer Weise zu begründen, die Curventangente $F^0F_v^0$ zum System S gehörend, so ist nach

Art. 11 die Strecke $F^0 F_v^0$ die Geschwindigkeit, mit welcher diese Tangente, so wie das Berührungselement der Curve f sich während einer unendlich kleinen Zeit in sich selbst verschiebt; und gleichzeitig dreht sich während dieser unendlich kleinen Verschiebung die Tangente nebst der Curve f um den Berührungspunkt mit derselben Drehgeschwindigkeit, welche das System S momentan durch die Drehung um den Pol $\mathfrak{P}$ erhält. Hiernach besteht das Gleiten während jedes Zeitmomentes in einer unendlich kleinen Verschiebung des berührenden Elementes der Curve f in sich selbst und in einer gleichzeitigen unendlich kleinen Drehung um den Berührungspunkt. Das Gleiten geht in Rollen über, wenn die Geschwindigkeit $F^0 F_v^0$ gleich Null ist, also nur Drehung um den jeweiligen Berührungspunkt stattfindet. Aus diesen Darlegungen folgt:

Eine Systemcurve rollt momentan auf der zugehörigen Hüllbahncurve, wenn der Berührungspunkt der beiden in den Pol fällt.

Die Rollcurven sind die beiden einzigen Curven, welche bei der gegenseitigen Bewegung der Systeme beständig auf einander rollen.

Fällt der Berührungspunkt $\mathfrak{F}$ mit dem Krümmungsmittelpunkte F der Systemcurve f zusammen, dann degenerirt die Curve f zu einem Punkte des bewegten Systems S; es wird dann

$$\mathfrak{v}_S = 0, \quad \mathfrak{v}_\Sigma = v_\Sigma.$$

Liegt dagegen $\mathfrak{F}$ im Krümmungsmittelpunkt Φ der Hüllbahncurve φ, dann zieht sich die Hüllbahncurve φ zu einem Punkte des festen Systems Σ zusammen; es wird:

$$\mathfrak{v}_\Sigma = 0, \quad -\mathfrak{v}_S = v_\Sigma.$$

In diesem Falle gleitet die Curve f durch den festen Punkt Φ mit der Geschwindigkeit, welche gleich aber entgegen gerichtet ist der Geschwindigkeit des momentan mit Φ zusammenliegenden Punktes des Systems S.

Wird die Hüllbahncurve φ momentan in einem Wendepunkte berührt oder ist sie eine Gerade, dann liegt der zugehörige Krümmungsmittelpunkt Φ im Unendlichen, und die Gerade ΦF_v wird parallel zu $F\mathfrak{P}$. Dem zufolge ist, wenn wir dem Berührungspunkte $\mathfrak{F}$ auf der Geraden $F\mathfrak{P}$ verschiedene Lagen geben, in diesem Falle die Geschwindigkeit $\mathfrak{F}\mathfrak{F}_v$, mit welcher derselbe sich auf φ im System Σ bewegt, constant und gleich der Geschwindigkeit FF_v des Krümmungsmittelpunktes F.

Die Gerade $\mathfrak{P}F_v^0$ trägt die Endpunkte der Geschwindigkeiten aller auf der Geraden $\mathfrak{P}F^0$ liegenden Punkte des Systems S und die Gerade $\mathfrak{P}F_v^0$ ist also durch die Geschwindigkeit eines solchen Systempunktes bestimmt. Nehmen wir nun an, es sei die Gerade $\mathfrak{P}F_v^0$ gezeichnet und es befände sich der Krümmungsmittelpunkt F der Systemcurve f im Unendlichen, was eintritt, wenn die Curve f in einem Wendepunkte berührt wird oder eine Gerade ist, dann geht die Gerade ΦF_v parallel zu $\mathfrak{P}F_v^0$. Demzufolge ist, wenn wir für den Berührungspunkt $\mathfrak{F}$ verschiedene Lagen auf $\mathfrak{P}\Phi$ annehmen, in diesem Falle die Geschwindigkeit $F_v^0\mathfrak{F}_v = \mathfrak{v}_g$, mit welcher sich der Berührungspunkt $\mathfrak{F}$ auf der Curve f im System S bewegt, constant.

Specielle Bewegungen eines ebenen Systems.

18. **Elliptische Bewegung eines ebenen Systems.** Bewegen sich in Fig. 24 zwei Punkte F, L eines ebenen Systems S resp. auf den Geraden φ', λ', die sich im Punkte Π schneiden, so erhalten wir den Pol $\mathfrak{P}$ als Schnittpunkt der in F, L resp. auf φ', λ' errichteten Senkrechten, und der durch die Punkte $F\mathfrak{P}L$ gelegte Kreis p, dessen Mittelpunkt P auf der Geraden $\Pi\mathfrak{P}$ liegt, geht auch durch den Punkt Π. Dieser Kreis ist für alle Lagen der Systemstrecke FL von gleicher Grösse, weil die Sehne FL, sowie der Winkel $F\Pi L$ constant ist. Diese Beziehung bleibt auch bestehen, wenn sich die Strecke FL innerhalb der anderen von den Geraden φ' und λ' gebildeten Winkel bewegt. Wir können uns demnach den Kreis p mit der Systemstrecke FL fest verbunden denken und als einen in dem bewegten System S liegenden Kreis betrachten, der während der Bewegung durch den Punkt Π des festen Systems Σ gleitet. Der Pol $\mathfrak{P}$ befindet sich also für alle Lagen von FL auf dem Kreise p; folglich ist derselbe die Polcurve in dem bewegten System S. Ferner ist die Strecke $\Pi\mathfrak{P}$ der constante Durchmesser des Kreises p, und demnach ist der mit diesem Durchmesser als Radius um Π beschriebene Kreis π die Polbahn in dem festen System Σ. Nehmen wir auf dem im Kreise π rollenden Kreise p einen beliebigen Systempunkt A an, und ziehen wir von demselben nach Π eine Gerade, so wird der Winkel $L\Pi A$ während der Bewegung von A nicht geändert; denn dieser Winkel ist, weil der Kreis p beständig durch den Punkt Π geht, als Peripherie-Winkel über dem Bogen AL constant. Dasselbe gilt auch, wenn L und A durch Π hindurch-

gegangen sind. Demnach durchläuft der Punkt A, wenn der Kreis p seine Rollung im Kreise π ringsherum vollendet hat, in der einen und der anderen Richtung den durch $A\Pi$ gehenden Durchmesser des festen Kreises π.[1]) Ist ferner C ein beliebiger Punkt des bewegten Systems, AB der durch C gehende Durchmesser des rollenden Kreises p, dann bewegen sich A, B als Punkte einer starren Geraden resp. auf den durch $A\Pi$, $B\Pi$ bestimmten rechtwinkeligen Durchmessern des Kreises π; und die auf diese Weise vom Punkte C der Geraden AB beschriebene Curve γ ist eine Ellipse.[2]) Ihre grosse Halbaxe ΠG geht durch A und ist gleich BC; ihre kleine Halbaxe ΠK geht durch B und ist gleich AC. Demnach beschreiben alle Systempunkte, welche auf einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt P ist, congruente Ellipsen. Die Gerade $C\mathfrak{P}$, welche den Punkt C mit dem Pol verbindet, ist die Normale im Punkte C an der Ellipse γ. Wird der beschreibende Punkt C in den Mittelpunkt P des rollenden Kreises p gelegt, dann geht die Ellipse γ in den um Π mit dem Radius ΠP beschriebenen Kreis π' über; und es ist dieser Kreismittelpunkt P der einzige Systempunkt, der einen Kreis erzeugt. Liegt der Punkt C auf dem rollenden Kreise p, dann degenerirt die Ellipse γ zu einem Durchmesser des festen Kreises π. Aus der Betrachtung dieser Bewegung, die eine elliptische Bewegung genannt wird, folgt der Satz:

Bewegen sich zwei Punkte eines ebenen Systems auf zwei festen Geraden, so kann die Bewegung dieses Systems auch durch Rollen eines Systemkreises in dem Innern eines doppelt so grossen festen Kreises erzeugt werden; und jeder Systempunkt beschreibt eine Ellipse, die zu einem Durchmesser des festen Kreises degenerirt oder in einen Kreis übergeht, jenachdem der Systempunkt auf dem rollenden Kreise oder in dem Mittelpunkte desselben liegt.

Aus dieser Erzeugung der Ellipse ergiebt sich die bekannte,

---

[1]) Diese Beziehung findet sich schon in Cardanus, *Opus novum de proportionibus numerorum.* 1570. prop. 173 p. 186.

[2]) Die Erzeugung einer Ellipse durch eine Ecke eines Dreiecks, dessen beide andere Ecken sich auf zwei Geraden bewegen, die sich in einem Punkte schneiden, wurde zuerst ausführlich behandelt in F. Schooten, *De Organica conicarum sectionum in plano descriptione.* 1646; und war schon den Mathematikern des Alterthums bekannt. Vergl. Chasles, *Geschichte der Geometrie*, deutsch von Sohncke. 1839. S. 86, Anmerkung.

wichtige Rytz'sche Construction der Ellipsenaxen, wenn zwei conjugirte Halbmesser einer Ellipse gegeben sind. In Fig. **25** ist die Ellipse γ gezeichnet, die der Punkt C der starren Geraden FL beschreibt, während die Punkte F, L resp. auf den Geraden φ', λ' gleiten. Die Normale $\mathfrak{P}C$ an der Ellipse γ schneidet den rollenden Kreis p noch in einem zweiten Punkte N; und da die Gerade ΠN auf dieser Ellipsennormale senkrecht steht, so ist ΠN die Richtung des zu ΠC gehörenden conjugirten Halbmessers. Um die Länge ΠJ dieses conjugirten Halbmessers zu erhalten, betrachten wir C als einen Punkt der bewegten starren Strecke NO, deren Endpunkt O momentan mit dem Pol $\mathfrak{P}$ coincidirt. Die Endpunkte O, N bewegen sich, während der Kreis p in dem festen Kreise π rollt, resp. auf den Geraden ΠO, ΠJ, und wenn O nach Π gelangt, legt sich die Strecke OC nach ΠJ; demnach ist der conjugirte Halbmesser $\Pi J = CO$. Durch die Mitte P der Strecke ΠO und den Punkt C geht der Kreisdurchmesser AB, der die Ellipsenaxen ΠG, ΠK bestimmt. Machen wir ferner Πi gleich und senkrecht ΠJ, so liegt, weil $\Pi i \# CO$ ist, auch der Punkt i auf diesem Kreisdurchmesser und der Mittelpunkt P des Kreises p ist die Mitte von Ci. Hiernach ergiebt sich die folgende Rytz'sche Construction der Axen einer Ellipse aus den conjugirten Halbmessern ΠC, ΠJ:

W i r e r r i c h t e n a u f ΠJ d i e S e n k r e c h t e $\Pi i = \Pi J$, z i e h e n d u r c h iC e i n e G e r a d e, b e s c h r e i b e n u m d i e M i t t e P d e r S t r e c k e iC e i n e n d u r c h Π g e h e n d e n K r e i s, d e r d i e s e G e r a d e i n d e n P u n k t e n A, B s c h n e i d e t, u n d m a c h e n a u f d e n G e r a d e n ΠA, ΠB d i e S t r e c k e n $\Pi G = BC$, $\Pi K = AC$; d a n n s i n d ΠG, ΠK d i e H a l b a x e n d e r E l l i p s e.[1])

In Fig. **26** sind die Ellipsen γ, δ gezeichnet, welche die Punkte C, D der starren Geraden AB beschreiben, wenn die Punkte A, B derselben resp. auf den rechtwinkeligen Geraden α, β gleiten. Die Mitte P der Strecke AB beschreibt den Kreis π'. Der Schnitt $\mathfrak{P}$ der in A auf α und der in B auf β errichteten Senkrechten ist der Pol dieser starren Geraden, der mit C, D verbunden die Ellipsennormalen $C\mathfrak{P}$, $D\mathfrak{P}$ bestimmt. Der über AB als Durch-

---

[1]) Diese Construction findet sich in Mossbrugger, *Grösstentheils neue Aufgaben aus dem Gebiete der Géométrie descriptive* etc. 1845. p. 123. Diese kinematische Ableitung stammt von Mannheim, und ist mitgetheilt in dessen *Géométrie descriptive.* 1880. p. 166, ferner *Nouvelles Annales de mathématiques.* 1857. p. 188. Eine rein geometrische Begründung dieser Construction enthält L. Burmester, *Grundzüge der Reliefperspective.* 1883. S. 8.

messer beschriebene Kreis p rollt mit der starren Geraden AB verbunden gedacht auf dem um Π mit dem Radius $\Pi\mathfrak{P}$ beschriebenen festen Kreise π.

Die Gleichung der Ellipse γ kann aus dieser Erzeugung leicht abgeleitet werden. Es seien $\Pi X = x$, $XC = y$ die rechtwinkeligen Coordinaten des erzeugenden Punktes C, ferner $\Pi G = BC = a$, $\Pi K = AC = b$ die Längen der Halbaxen der Ellipse γ; und bezeichnen wir durch ν den Winkel, welchen die Gerade BA mit der Geraden β bildet, so ist

$$\sin\nu = \frac{x}{a}, \quad \cos\nu = \frac{y}{b},$$

und hieraus folgt die Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Diese Erzeugung der Ellipse kann, wie Fig. **27** zeigt, praktisch ausgeführt werden, wenn zwei in geraden rechtwinkeligen Nuten gleitende Schlitten in den Punkten A, B mit der Stange AB drehbar verbunden sind, an welcher ein schreibender Stift C befestigt ist. Eine derartige Vorrichtung heisst elliptischer Cirkel.

Die betrachtete Bewegung jenes Systems S kann auch erzeugt werden, wenn sich in Fig. **28** ein Systempunkt L auf einer Geraden λ' und ein zweiter Systempunkt P auf einem Kreise π' bewegt, dessen Mittelpunkt Π auf der Geraden λ' liegt und dessen Radius ΠP gleich der Strecke LP ist. Der Pol $\mathfrak{P}$ ergiebt sich als Schnitt des verlängerten Radius ΠP und der in L auf λ' errichteten Senkrechten, oder indem wir auf ΠP die Strecke $P\mathfrak{P}$ gleich ΠP machen. Die Systempunkte FAB, welche auf dem über $\Pi\mathfrak{P}$ als Durchmesser beschriebenen Kreis liegen, bewegen sich auf Geraden und ein beliebiger Systempunkt C beschreibt die Ellipse γ, deren Normale im Punkte C die Gerade $\mathfrak{P}C$ ist.

Dieselbe Bewegung wird auch erzeugt, wenn in Fig. **29** zwei Systemkreise f, l, deren Mittelpunkte resp. F, L sind, beziehlich an den beiden Geraden φ, λ gleiten; denn dann bewegen sich die Mittelpunkte F, L auf den zu φ, λ parallelen Geraden φ', λ', die sich im Punkte Π treffen. Ist FF_v die Geschwindigkeit des Mittelpunktes F, dann liefert die Gerade $\mathfrak{P}F_v$ auf φ die Geschwindigkeit $F^0F_v^0$ des mit dem Berührungspunkte $\mathfrak{F}$ von f und φ zusammenliegenden Systempunktes F^0, und ziehen wir von F_v auf die Gerade φ eine Senkrechte, d. h. eine Gerade nach dem unendlich fernen Krümmungsmittelpunkt Φ^∞ der Geraden φ, so ist nach Art. 17 durch den Fusspunkt $\mathfrak{F}_v$ die Geschwindigkeit $F_v^0 \mathfrak{F}_v$ bestimmt, welche der Berührungspunkt $\mathfrak{F}$ auf dem Systemkreise f besitzt. Bewegt sich der Systempunkt P, der Mittelpunkt des rollenden Kreises p, mit der constanten lothrechten Geschwindigkeit $P\mathfrak{P}$ auf seinem Bahnkreise π', dann ist die Geschwindigkeit FF_v des Punktes F gleich $F\mathfrak{P}$; folglich auch die Geschwindigkeit $F_v^0 \mathfrak{F}_v$ gleich $\mathfrak{F}_v F_v$, und so gross, wie der Radius des Kreises f. Bewegt sich also der Punkt P mit constanter Geschwindigkeit auf dem Kreise π', so bewegt sich auch der Berührungspunkt $\mathfrak{F}$ mit constanter Geschwindigkeit auf dem Systemkreise f und diese beiden Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Radien dieser Kreise. Dasselbe gilt von der Bewegung des Berührungspunktes $\mathfrak{L}$ auf dem Systemkreise l.

19. **Kardioidische Bewegung eines ebenen Systems.** Kehren wir die betrachtete Bewegung um, nehmen wir in Fig. **29** an: die Kreise f, l des Systems S seien fest und die Geraden φ, λ des vorhin festen Systems Σ gleiten auf diesen Kreisen, dann rollt der Kreis π mit seiner inneren Seite auf dem Kreise p, die beiden Geraden φ', λ' des Systems Σ gleiten resp. durch die festen Mittelpunkte F, L, und der Punkt Π bewegt sich auf dem festen Kreise p.

Ist Γ in Fig. **30** ein beliebiger Punkt des bewegten Systems Σ und ziehen wir durch Γ nach Π die Systemgerade ε, welche den Kreis p im Punkte E trifft, so wird dieser Punkt E von der Geraden ε umhüllt; demnach beschreibt der Punkt Γ der durch E gleitenden starren Geraden ε, deren Punkt Π den Kreis p durchläuft, eine Pascal'sche Curve c, die auch Limaçon[1]) genannt wird. Die Gerade $\mathfrak{P}\Gamma$ ist die Normale dieser Curve im Punkte Γ. Ziehen wir also durch E eine beliebige Gerade, die mit dem Kreise p den Schnitt Π_x bildet, und machen wir auf derselben $\Pi_x\Gamma_x = \Pi\Gamma$, so ist Γ_x ein Punkt der Pascal'schen Curve c, die von der Geraden PE symmetrisch getheilt wird. Ist die Strecke $\Pi\Gamma$ gleich dem Durchmesser des festen Kreises p, befindet sich also der Punkt Γ auf dem rollenden Kreis π, dann zieht sich die Curvenschleife in E zu einem Rückkehrpunkte zusammen. In diesem besonderen Falle wird die Curve eine Kardioide oder Herzcurve[2]) genannt, und darnach heisst diese Bewegung eine

[1]) *Mémoires de l'Académie* 1730. B. VI. p. 42, wo Roberval auch eine Construction der Tangente dieser Curve giebt.

[2]) Carré, *Mémoires de l'Académie* 1705. p. 56, hat in dieser Weise diese Curve erzeugt. Die Benennung Kardioide stammt von Castillione, *Philos. Transactions,* London 1741. p. 778. Ihre Erzeugung durch Rollung eines Kreises

kardioidische Bewegung des Systems Σ. Wir erhalten somit den Satz:

Gleiten zwei Gerade eines ebenen Systems über zwei feste Punkte, so kann die Bewegung dieses Systems auch dadurch erzeugt werden, dass ein Kreis mit seiner inneren Seite auf einem halb so grossen Kreise rollt; jeder Systempunkt beschreibt eine Pascal'sche Curve, die in eine Kardioide oder in einen Kreis übergeht, je nachdem der Systempunkt auf dem rollenden Kreise oder in dem Schnittpunkt jener Geraden liegt.

Die Pascal'sche Curve, welche ein Punkt Γ des bewegten Systems Σ in dem festen System S erzeugt, wird auch, wenn wir das System Σ als fest betrachten, durch den in Σ liegenden festen Punkt Γ in dem bewegten System S beschrieben. Dagegen erzeugt in diesem letzten Falle ein Punkt C des Systems S im festen System Σ eine Ellipse γ; und diese Ellipse wird auch, wenn wir das System S als fest ansehen, durch den festen Punkt C in dem bewegten System Σ beschrieben. Auf dieser Erzeugungsweise der Ellipse beruht das Ovalwerk von Leonardo da Vinci.[1])

Betrachten wir also zwei in einem Punkte 𝔈 coincidirende Punkte C, Γ zweier ebener Systeme S, Σ, so entsprechen dem Punkte 𝔈 zwei verschiedene Curven γ, c; die erste derselben wird durch den Punkt C des Systems S in dem System Σ, die zweite durch den Punkt Γ des Systems Σ im System S erzeugt.

Die Beziehungen der kardioidischen Bewegung, welche sich vermittelst der Umkehrung jener elliptischen Bewegung ergeben, können auch leicht direct abgeleitet werden. In Fig. **31** gleiten die beiden Geraden f, l eines bewegten ebenen Systems S resp. durch die festen Punkte Φ, Λ; und dem zufolge beschreibt der Schnittpunkt P dieser Geraden den durch $P\Phi\Lambda$ gehenden Kreis $\varkappa$ im ruhenden System Σ. Die Punkte Φ, Λ können wir auch als unendliche kleine Kreise betrachten, die beziehlich von den Lagen der beispielsweise senkrechten Geraden f, l umhüllt

---

auf einem gleich grossen Kreise findet sich in Cramer, *Analyse des lignes courbes.* 1750. p. 431. Eine neuere elementare Behandlung dieser Curve giebt Weinmeister in der *Zeitschrift f. math. u. naturw. Unterricht* 1884. S. 245.

[1]) Vergl. Lomazzo, *Idea del tempio della pittura.* 1590. p. 17. Chasles, *Geschichte der Geometrie,* deutsch von Sohncke. 1839. Note XXXIV. S. 450 u. 626. Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie.* 1840. T. III. p. 46—47.

werden; und demnach ergiebt sich der Pol $\mathfrak{P}$ des bewegten Systems S als der Schnitt der in Φ auf f und der in Λ auf l errichteten Senkrechten. Nach dieser Bestimmung liegt der Pol $\mathfrak{P}$ dem Punkte P diametral gegenüber auf dem Kreise π, der also im ruhenden System Σ die Polbahn bildet; und ferner befindet sich der Pol $\mathfrak{P}$ im bewegten System S auf dem um P mit dem Radius $P\mathfrak{P}$ beschriebenen Kreise p, der die Polcurve im System S ist, und mit seiner inneren Seite auf dem festen Kreise π rollt.

Wie die beiden Systemgeraden f, l, so umhüllen alle durch den Punkt P gehenden Systemgeraden Punkte, die auf dem Kreise π liegen. Die Pascal'schen Curven, welche von den Systempunkten erzeugt werden, besitzen eine Schleife mit einem Doppelpunkte auf dem Kreise π, oder keine Schleife, je nachdem die beschreibenden Punkte innerhalb oder ausserhalb des rollenden Kreises p sich befinden. Für alle auf dem rollenden Kreise liegenden Systempunkte sind die Bahncurven Kardioiden, die mit ihrem Rückkehrpunkte an den festen Kreis π stossen. In Fig. **31** sind die von den Punkten C, D der Geraden f beschriebenen Pascal'schen Curven γ, δ construirt; und ferner ist die vom Punkte J beschriebene Kardioide ι der Unterscheidung wegen strichpunktirt gezeichnet. Die Geraden, welche die Punkte C, D, J mit dem Pol $\mathfrak{P}$ verbinden, sind die betreffenden Normalen an diesen Curven.

Die kardioidische Bewegung des Systems S kann auch mittelst der durch den Punkt Φ gleitenden Systemgeraden f hervorgebracht werden, wenn ihr Punkt P auf dem Kreise π geführt wird. In diesem Falle ergiebt sich der Pol $\mathfrak{P}$ als Schnittpunkt des durch P gehenden Durchmessers des Kreises π mit der in Φ auf f errichteten Senkrechten. Um die Gleichung der Pascal'schen Curve, welche beispielsweise vom Punkte C erzeugt wird, in Polarcoordinaten zu erhalten, betrachten wir den Punkt Φ als Coordinatenursprung, bezeichnen den Fahrstrahl ΦC durch ϱ, den Winkel, welchen derselbe mit dem Kreisdurchmesser $\Phi\Lambda = a$ bildet, durch θ und setzen die constante Strecke $PC = b$, dann ist die Gleichung der Pascal'schen Curve

$$\varrho = a \cos \theta + b.$$

Für die entgegengesetzt gelegene Richtung des Fahrstrahles erhält $\cos \theta$ das negative Vorzeichen; und demnach wird die betrachtete Curve γ auch von dem Systempunkte C' beschrieben, der auf f bezüglich P zum Punkte C symmetrisch liegt. Ebenso werden auch die Curven ι, δ resp. von den Punkten J' D' erzeugt, die in gleicher Weise zu den Punkten J, D symmetrisch liegen.

20. **Erzeugung der Kreiskonchoide und der Nicomedischen Konchoide.** Gleitet eine starre Gerade f in Fig. **32** durch einen festen Punkt Φ und bewegt sich ein Punkt L derselben auf einem Kreise λ, dessen Mittelpunkt Λ ist, dann erzeugt ein Punkt C der Geraden f eine Curve γ, die Kreiskonchoide heisst. Dieselbe kann also leicht construirt werden, indem wir durch Φ verschiedene Geraden ziehen, welche den Kreis λ schneiden und auf diese Geraden von ihren mit dem Kreise λ gebildeten beiden Schnittpunkten aus in gleichem Sinne eine constante Strecke gleich LC abtragen. Wird diese Strecke auch im entgegengesetzten Sinne abgetragen, dann erhalten wir die feiner gezeichnete zweite Curve γ', die vom Punkte C' der Geraden f erzeugt wird, für welchen $LC' = CL$ ist; und diese beiden Curven γ, γ' bilden zusammen eine vollständige Kreiskonchoide. Die Kreiskonchoide erhält eine Schleife mit einem Doppelpunkt in Φ, wenn der beschreibende Punkt durch Φ hindurch gehen kann. Die Kreiskonchoide geht in die Pascal'sche Curve über, wenn der Punkt Φ auf dem Kreise λ liegt. Der Pol $\mathfrak{P}$ ergiebt sich als Schnitt des verlängerten Radius $L\Lambda$ mit der in Φ auf f errichteten Senkrechten; und die Geraden $C\mathfrak{P}$, $C'\mathfrak{P}$ sind die Normalen an den Curven γ, γ'.

Bewegt sich in Fig. **33** der Punkt L der starren Geraden f, welche durch den festen Punkt Φ geht, auf einer Geraden λ, dann erzeugt ein Punkt C der Geraden f eine Curve γ, die unter dem Namen Nicomedische Konchoide bekannt ist. Die feiner gezeichnete Curve γ' wird von dem Punkte C' der Geraden f beschrieben, für welchen $LC' = CL$ ist; und diese beiden Curven γ, γ' bilden zusammen eine vollständige Nicomedische Konchoide. Den Pol $\mathfrak{P}$ erhalten wir als Schnitt der in L auf λ und der in Φ auf f errichteten Senkrechten; dann sind die Geraden $C\mathfrak{P}$, $C'\mathfrak{P}$ die Normalen an diesen Curven γ, γ'.

21. **Erzeugung äquidistanter Curven.** Ist in einem bewegten System S ein beliebiger Kreis f in Fig. **34** gegeben, dessen Mittelpunkt F eine Bahncurve φ beschreibt, dann erzeugt der Kreis f eine aus zwei Theilen bestehende Hüllbahncurve $\varphi'\,\varphi''$. Die Gerade, welche den Pol $\mathfrak{P}$, den Berührungspunkt der Polbahn π und Polcurve p, mit dem Kreismittelpunkte F verbindet, schneidet den Kreis f in den Berührungspunkten F', F'', die derselbe mit den beiden Theilen der Hüllbahncurve bildet. Diese Gerade $F\mathfrak{P}$ ist die Normale für die Bahncurve φ, die der Mittelpunkt F beschreibt, und für die Hüllbahncurve $\varphi'\,\varphi''$. Da nach dieser Er-

zeugungsweise alle Punkte der Curven φ', φ'' beiderseits auf der Normalen gleichen Abstand von den entsprechenden Punkten der Curve φ besitzen, so wird jeder der Curventheile φ' und φ'' eine Aequidistante der Curve φ oder eine Parallelcurve derselben genannt.

22. **Erzeugung der Evolventen.** Die Curven φ', φ'', .., welche in Fig. 35 von den Punkten F', F'', .. einer starren Geraden p, die auf einer Curve π rollt, beschrieben werden, heissen Evolventen der Curve π. Da der Berührungspunkt von p und π der Pol $\mathfrak{P}$ ist, so folgt, dass die Normalen der Evolventen die Curve π umhüllen und dass die Evolventen, die derselben Curve angehören, äquidistante Curven sind. Eine Curve, die von den Normalen einer anderen Curve umhüllt wird, heisst nach Art. 14 die Evolute der letzteren Curve; demnach giebt es zu einer Curve unendlich viele Evolventen, dagegen gehört aber zu einer Curve nur eine Evolute. Ist in einem bewegten System S die Polcurve eine Gerade p, die auf einer Polbahn π rollt, dann nennen wir diejenigen Curven, welche die nicht auf p liegenden Systempunkte erzeugen, allgemeine Evolventen der Curve π.

23. **Erzeugung der Fusspunktencurven.** Rollt in Fig. 36 eine Curve p eines ebenen Systems S derart auf einer festen symmetrisch congruenten Curve π, dass stets zwei homologe Punkte dieser symmetrisch liegenden Curven p, π in Berührung treten; ist ferner A ein beliebiger Punkt des bewegten Systems S, der die Bahncurve α beschreibt, und $\mathfrak{A}$ der zu A homologe Punkt in dem symmetrisch congruenten festen System, so steht die gemeinsame Tangente $\mathfrak{P}$t der sich in $\mathfrak{P}$ berührenden Curve p, π in der Mitte C auf $\mathfrak{A}A$ senkrecht. Hiernach können wir die Bahncurve α des Punktes A erhalten, indem wir von dem festen Punkte $\mathfrak{A}$ auf sämtliche Tangenten $\mathfrak{P}$t, $\mathfrak{P}_1 t_1$, .. der Polbahn π Lothe $\mathfrak{A}C$, $\mathfrak{A}C_1$.. fällen und dieselben um ihre eigene Länge über die Fusspunkte C, C_1.. verlängern, so dass $CA = \mathfrak{A}C$, $C_1A_1 = \mathfrak{A}C_1$, .. ist; dann bilden die Punkte AA_1.. die Curve α, deren Normale für den Punkt A die Gerade $A\mathfrak{P}$ ist.

Die von den Fusspunkten C, C_1.... erzeugte Curve γ wird die Fusspunktencurve der Curve π in Bezug auf den Lothpunkt $\mathfrak{A}$ genannt. Diese Fusspunktencurve γ und die Bahncurve α, die der Systempunkt A beschreibt, sind ähnlich und ähnlich liegend, oder wie man sagt: sie sind homothetisch ähnliche Curven in Bezug auf $\mathfrak{A}$ als Aehnlichkeitspunkt und stehen in dem Verhältniss 1 : 2. Hiernach erhalten wir den Satz:

Rollt eine Polcurve derart auf einer symmetrisch congruenten Polbahn, so dass stets homologe Punkte dieser Curven in Berührung treten, dann beschreibt jeder Systempunkt eine Bahncurve, die derjenigen Fusspunktencurve der Polbahn im Verhältniss 2 : 1 homothetisch ähnlich ist, deren Lothpunkt im festen System zu dem beschreibenden Punkt symmetrisch ist; und dieser Lothpunkt ist zugleich der zugehörige Aehnlichkeitspunkt.

Gleitet in Fig. **37** von zwei rechtwinkeligen Geraden f, l eines Systems S, die sich im Punkte C schneiden, die erste durch einen festen Punkt Φ, die zweite auf einer festen Curve λ, so ist die Bahncurve γ, die der Systempunkt C beschreibt, die Fusspunktencurve der Curve λ im Bezug auf Φ als Lothpunkt. Errichten wir in Φ auf f, sowie im Berührungspunkte $\mathfrak{L}$ von l und λ auf l eine Senkrechte, dann ist ihr Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der Pol und $\mathfrak{P}C$ die Normale der Fusspunktencurve γ im Punkte C. Ist umgekehrt die Bahncurve γ des Punktes C gegeben, also die Normale $C\mathfrak{P}$, welche die auf f in Φ errichtete Senkrechte $\Phi\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}$ trifft, bekannt, dann ist der Fusspunkt $\mathfrak{L}$ der von $\mathfrak{P}$ auf die Gerade l gefällten Senkrechten der Berührungspunkt, den die Gerade l mit ihrer Hüllbahncurve λ bildet.

Von den gegenseitigen Bewegungen dreier ebener Systeme.

24. **Beziehungen der Pole und der Drehgeschwindigkeiten dreier ebener Systeme.** Bewegt sich in Fig. **38** ein ebenes System S_3 in einem ruhenden ebenen System S_2, so dreht sich S_3 momentan um einen Pol $\mathfrak{P}_{23}$ im System S_2. Wird dann beiden Systemen ausserdem gleichzeitig noch eine Bewegung in einem festen System S_1 ertheilt, so drehen sich die beiden Systeme S_2, S_3 im System S_1 momentan resp. um die Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$, und der vorhin ruhende Pol $\mathfrak{P}_{23}$ bewegt sich in S_1 als ein momentan zu beiden Systemen S_2, S_3 gehörender Punkt, in welchem diese Systeme während eines Zeitelementes gleichsam drehbar an einander geschlossen sind. Die beiden mit $\mathfrak{P}_{23}$ coincidirenden Punkte der Systeme S_2, S_3 sind demnach die einzigen beiden Punkte, welche sich mit ein und derselben Geschwindigkeit in dem System S_1 bewegen. Repräsentirt die Strecke $A_3A_v^{II}$ die Geschwindigkeit eines Punktes

A_3 des Systems S_3 in Bezug auf das System S_2, und $A_3 A_v^I$ die Geschwindigkeit, welche der zu S_2 gehörende mit A_3 coincidirende Punkt in S_1 besitzt; dann repräsentirt die Resultante $A_3 A_v$ die Geschwindigkeit, mit der sich A_3 im festen System S_1 bewegt. Die auf $A_3 A_v$ errichtete Senkrechte $A_3 \mathfrak{P}_{13}$, welche $\mathfrak{P}_{23} \mathfrak{P}_{12}$ in $\mathfrak{P}_{13}$ schneidet, ist die betreffende Normale der von A_3 in S_1 beschriebenen Bahncurve, ferner ist $\mathfrak{P}_{23} \mathfrak{P}_{12}$ die betreffende Normale der Bahncurve, welche von dem zu S_3 gehörenden mit $\mathfrak{P}_{23}$ momentan coincidirenden Punkte in S_1 erzeugt wird; folglich ergiebt sich, dass der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_{13}$ dieser Normalen der Pol des Systems S_3 in Bezug auf das feste System S_1 ist, und dass demnach die drei Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$, $\mathfrak{P}_{23}$ in einer Geraden liegen. Hiernach erhalten wir den wichtigen Satz:

Die drei Pole dreier ebener Systeme liegen während eines jeden Zeitelementes in je einer Geraden.

Sind die beiden Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ in dem festen System S_1 und die beiden Geschwindigkeiten $A_3 A_v$, $A_3 A_v^I$ gegeben, dann ist die Geschwindigkeit $A_3 A_v^{II}$, sowie die auf derselben senkrechte Gerade $A_3 \mathfrak{P}_{23}$ und damit auch der dritte auf $\mathfrak{P}_{12} \mathfrak{P}_{13}$ liegende Pol $\mathfrak{P}_{23}$ bestimmt.

Sind in Fig. 39 auf den Geraden $A_3 \mathfrak{P}_{23}$, $A_3 \mathfrak{P}_{12}$ die lothrechten Geschwindigkeiten $A_3 A_v^{II}$, $A_3 A_v^I$ gegeben, welche beziehlich A_3 in S_2 und der mit A_3 coincidirender zu S_2 gehörender Punkt in S_1 besitzt, und wird das Parallelogramm $A_v^I A_3 A_v^{II} A_v$ construirt, dann stellt die Diagonale $A_3 A_v$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes A_3 in Bezug auf das feste System S_1 dar, und der Schnitt dieser Diagonale mit $\mathfrak{P}_{12} \mathfrak{P}_{23}$ ist der Pol $\mathfrak{P}_{13}$.

Nehmen wir eine von A_3 nach der Geraden $\mathfrak{P}_{12} \mathfrak{P}_{23}$ gehende Strecke $A_3 o$ als Längeneinheit und ziehen wir zu $\mathfrak{P}_{12} \mathfrak{P}_{23}$ durch die Punkte A_v^I, A_v, A_v^{II} Parallele, die $A_3 o$ resp. in den Punkten a^I, a, a^{II} treffen, so ist, gemäss Art. 9, wenn ω_{32}, ω_{21}, ω_{31} beziehlich die Drehgeschwindigkeit bezeichnet, welche S_3 in S_2, S_2 in S_1 und S_3 in S_1 besitzt, der Grösse nach

$$\omega_{32} = A_3 a^{II}, \; \omega_{21} = A_3 a^I, \; \omega_{31} = A_3 a.$$

Da die Strecke $A_3 A_v^I \# A_v^{II} A_v$, so ist auch $A_3 a^I = a^{II} a$, und somit ergiebt sich, je nachdem die Drehung von S_3 zu der von S_2 in gleichem oder entgegengesetztem Sinne erfolgt,

$$\omega_{31} = \omega_{21} + \omega_{32}, \; \omega_{31} = \omega_{21} - \omega_{32}.$$

Wird für eine bestimmte Drehrichtung die Drehgeschwindigkeit als positiv, für die entgegengesetzte als negativ genommen, dann erhalten wir den Satz:

Bewegt sich ein System S_3 im System S_2 und bewegen sich beide gleichzeitig in einem dritten System, so ist die Drehgeschwindigkeit von S_3 gegen S_1 gleich der algebraischen Summe der beiden Drehgeschwindigkeiten von S_3 in S_2 und von S_2 in S_1.

Sind in Fig. 40 die Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$, um welche die Systeme S_2, S_3 sich im festen System S_1 momentan drehen; sind ferner in Bezug auf S_1 die Geschwindigkeiten $B_2 B_v$, $C_3 C_v$ der Punkte B_2, C_3, die resp. den Systemen S_2, S_3 angehören, gegeben, so ist hierdurch die momentane Bewegung der Systeme S_2, S_3 gegen das System S_1 und gegen einander bestimmt. Um den Pol $\mathfrak{P}_{23}$, der sich auf der durch $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{13}$ gehenden Geraden g befindet, zu erhalten, construiren wir an die Gerade g den Winkel $g\mathfrak{P}_{12}g_{II}$ gleich $B_2\mathfrak{P}_{12}B_v$, ferner den Winkel $g\mathfrak{P}_{13}g_{III}$ gleich $C_3\mathfrak{P}_{13}C_v$ und fällen von dem Schnittpunkte $\mathfrak{P}_{23,v}$ der Schenkel g_{II}, g_{III} auf die Gerade g die Senkrechte $\mathfrak{P}_{23,v}\mathfrak{P}_{23}$, dann ist der Fusspunkt derselben der Pol $\mathfrak{P}_{23}$ der Systeme S_2, S_3 und $\mathfrak{P}_{23}\mathfrak{P}_{23,v} = u$ die Geschwindigkeit dieses Pols in dem festen System S_1. Denn die Gerade g_{II} enthält die Endpunkte der Geschwindigkeiten von allen auf der Geraden g liegenden Punkten des Systems S_2, und die Gerade g_{III} trägt die Endpunkte der Geschwindigkeiten von allen auf g befindlichen Punkten des Systems S_3; dem zufolge ist der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_{23,v}$ der gemeinsame Endpunkt der beiden gleichen Geschwindigkeiten, welche die mit dem Pol $\mathfrak{P}_{23}$ coincidirenden beiden Punkte der Systeme S_2, S_3 besitzen. Errichten wir um die Längeneinheit von $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ entfernt auf die Gerade g Senkrechte, die resp. in den Geraden g_{II}, g_{III} enden, dann repräsentiren die Längen dieser Senkrechten beziehlich die Drehgeschwindigkeiten ω_{21}, ω_{31} der Systeme S_2, S_3 im System S_1. Demnach ist

$$\omega_{21} = \frac{u}{\mathfrak{P}_{23}\mathfrak{P}_{12}}, \quad \omega_{31} = \frac{u}{\mathfrak{P}_{23}\mathfrak{P}_{13}}$$

und

$$\frac{\omega_{21}}{\omega_{31}} = \frac{\mathfrak{P}_{23}\mathfrak{P}_{13}}{\mathfrak{P}_{23}\mathfrak{P}_{12}}.$$

Diese Beziehungen bleiben auch bestehen, wenn das System S_1 nebst den beiden Systemen S_2, S_3 in einer festen Ebene bewegt wird; und folglich ergiebt sich aus unseren Darlegungen der Satz:

Bewegen sich drei ebene Systeme S_1, S_2, S_3 beliebig in einer Ebene, so liegen die drei zugehörigen Pole $\mathfrak{P}_{12}, \mathfrak{P}_{13}, \mathfrak{P}_{23}$ während eines jeden Zeitelementes auf einer Geraden, und die Drehgeschwindigkeiten zweier Systeme im dritten System verhalten sich umgekehrt wie die Abstände des Pols dieser zwei Systeme von den beiden anderen Polen, welche diese beiden Systeme gegen das dritte besitzen.

25. **Bestimmung der Geschwindigkeit eines Punktes von einem System im Bezug auf zwei andere.** Die momentane Bewegung der beiden Systeme S_2, S_3 in dem dritten System S_1, welches wir der leichteren Vorstellung wegen als ruhend betrachten wollen, ist in Fig. **41** durch die drei Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$, $\mathfrak{P}_{23}$ und durch eine angenommene Geschwindigkeit $\mathfrak{P}_{23}\mathfrak{P}_{23,v}$, die der Pol $\mathfrak{P}_{23}$ in dem System S_1 besitzt, bestimmt. Die drei zu den Systemen S_1, S_2, S_3 gehörenden Punkte, welche in einem beliebigen Punkte A coincidiren, wollen wir resp. mit A_1, A_2, A_3 bezeichnen. Jedem dieser Punkte entsprechen zwei Geschwindigkeiten, mit denen sich derselbe in den beiden anderen Systemen bewegt. Demnach erscheinen hier sechs Geschwindigkeiten, von denen aber je zwei gleich und entgegengesetzt sind; denn die Geschwindigkeit, mit der sich z. B. der zu S_2 gehörende Punkt A_2 im System S_3 bewegt, ist gleich und entgegengesetzt der Geschwindigkeit, mit welcher der zu S_3 gehörende Punkt A_3 in S_2 fortschreitet. Um das Verständniss unserer Darlegung, bei der vornehmlich die lothrechten Geschwindigkeiten in Betracht kommen, zu erleichtern, wollen wir in consequenter Weise z. B. die Endpunkte der lothrechten Geschwindigkeiten des zu S_2 gehörenden Punktes A_2 in Bezug auf die Systeme S_1, S_3 resp. mit $A_{\mathfrak{v}}^{21}$, $A_{\mathfrak{v}}^{23}$ bezeichnen, und eine analoge Bezeichnung für die Endpunkte der anderen lothrechten Geschwindigkeiten der coincidirenden Punkte anwenden.

Ziehen wir durch den Endpunkt $\mathfrak{P}_{23,\mathfrak{v}}$ der lothrechten Geschwindigkeit $\mathfrak{P}_{23}\mathfrak{P}_{23,\mathfrak{v}}$ des Pols $\mathfrak{P}_{23}$ zu $\mathfrak{P}_{23}A$ eine Parallele, so bestimmt diese auf $\mathfrak{P}_{12}A$, $\mathfrak{P}_{13}A$ die lothrechten Geschwindigkeiten $AA_{\mathfrak{v}}^{21}$, $AA_{\mathfrak{v}}^{31}$, welche beziehlich die Punkte A_2, A_3 im System S_1 besitzen; ausserdem ist aber auch die Strecke $A_{\mathfrak{v}}^{21}A_{\mathfrak{v}}^{31}$ entgegengesetzt genommen gleich der auf $\mathfrak{P}_{23}A$ liegenden lothrechten Geschwindigkeit $AA_{\mathfrak{v}}^{23}$, mit der sich A_2 als Punkt von S_2 im System S_3 bewegt. Machen wir nun $AA_{\mathfrak{v}}^{12}$, $AA_{\mathfrak{v}}^{13}$, $AA_{\mathfrak{v}}^{32}$ resp. gleich und entgegengesetzt $AA_{\mathfrak{v}}^{21}$, $AA_{\mathfrak{v}}^{31}$, $AA_{\mathfrak{v}}^{23}$, so erhalten wir die sechs lothrechten Geschwindigkeiten, deren Endpunkte ein Sechseck bilden, dessen gegenüberliegende Seitenpaare beziehlich den von

A nach den Polen $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$, $\mathfrak{P}_{23}$ gehenden Geraden parallel sind.[1] Hieraus folgt der Satz:

Ist eine von den sechs lothrechten Geschwindigkeiten der drei in einem Punkte coincidirenden Systempunkte bekannt, so ergeben sich die übrigen auf den von diesem Punkte nach den drei Polen der drei Systeme gehenden Geraden durch entsprechende Parallelziehung zu diesen Geraden.

26. **Hervorbringung der momentanen Bewegung zweier ebener Systeme in einem dritten durch ein Gelenkviereck.** Sind in Fig. 42 wieder $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$, $\mathfrak{P}_{23}$ die Pole der drei Systeme S_1, S_2, S_3; ist F ein beliebiger Punkt des Systems S_2, der die lothrechte Geschwindigkeit $FF_\mathfrak{v}$ in Bezug auf das System S_1 besitzt, und nehmen wir auf der Geraden $F\mathfrak{P}_{23}$ einen beliebigen Punkt L als zu dem System S_3 gehörend an, so bestimmt die durch $F_\mathfrak{v}$ zu $F\mathfrak{P}_{23}$ parallele Gerade auf $\mathfrak{P}_{13}\mathfrak{P}_{23}$ die lothrechte Geschwindigkeit $\mathfrak{P}_{23}\mathfrak{P}_{23,\mathfrak{v}}$ des Pols $\mathfrak{P}_{23}$ und auf $\mathfrak{P}_{13}L$ die lothrechte Geschwindigkeit $LL_\mathfrak{v}$ des Punktes L gegen das System S_1. Betrachten wir nun $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{13}LF$ als ein Gelenkviereck, so repräsentiren $FF_\mathfrak{v}$, $LL_\mathfrak{v}$ auch die lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte F, L der starren bewegten Seite FL desselben; und demnach können wir annehmen, es seien die Systeme S_2, S_3 während eines Zeitelementes resp. in den Punkten F, L an diese starre Seite drehbar angeschlossen. Hiernach erhalten wir den Satz:

Während eines Zeitelementes kann die Bewegung zweier Systeme S_2, S_3 in einem dritten System S_1 durch ein Gelenkviereck bewirkt werden, welches gebildet wird durch die Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ und durch zwei beziehlich den Systemen S_2, S_3 angehörende, beliebige Punkte, deren Verbindungsgerade durch den Pol $\mathfrak{P}_{23}$ geht.

Bei einem Gelenkviereck, welches in Fig. 43 dargestellt ist, vertreten die vier Seiten S_1, S_2, S_3, S_4 vier gleichbezeichnete ebene Systeme, die in den Ecken oder Polen $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{24}$, $\mathfrak{P}_{34}$, $\mathfrak{P}_{13}$ drehbar an einander geschlossen sind. Ausser diesen vier Polen, die in den entsprechenden, drehbar verbundenen Systemen ihre Lage nicht ändern, giebt es noch zwei Pole $\mathfrak{P}_{23}$, $\mathfrak{P}_{14}$, welche auch in den

[1] Diese Bestimmungsweise wurde von Schadwill mitgetheilt in den *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen.* Jahrgang 1876. S. 412.

angehörigen Systempaaren $S_2 S_3$, $S_1 S_4$ wandern. Der Pol $\mathfrak{P}_{23}$ liegt nach dem Satze S. 46 in den beiden Geraden $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{13}$, $\mathfrak{P}_{24}\mathfrak{P}_{34}$, ist also der Schnittpunkt derselben, und ebenso ist auch der Pol $\mathfrak{P}_{14}$ der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{24}$, $\mathfrak{P}_{13}\mathfrak{P}_{34}$.

Constructionen der Geschwindigkeiten und der Tangenten oder Normalen an den Bahncurven.

27. **Construction der Geschwindigkeit des Schnittpunktes, den eine bewegte Curve mit einer festen Curve bildet.** Vermittelst des Parallelogramms der Geschwindigkeiten kann die Geschwindigkeit leicht bestimmt werden, mit welcher sich der Schnittpunkt bewegt, den eine bewegte Curve mit einer festen Curve bildet. Wir nehmen an, es bewege sich in Fig. **44**, Taf. III die Curve g, welche die feste Curve α stetig in einem mit A bezeichneten Punkte schneidet, und es sei AA_v^I die Geschwindigkeit des mit A momentan coincidirenden Punktes der bewegten Curve g; es seien ferner im Schnittpunkte A an den beiden Curven g, α resp. die Tangenten g_t, α_t gegeben. Ziehen wir $A_v^I A_v$ parallel der Tangente g_t bis an die Tangente α_t und $A_v A_v^{II}$ parallel $A_v^I A$ bis an die Tangente g_t; dann repräsentirt die Diagonale AA_v des erhaltenen Parallelogramms die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Schnittpunkt A momentan auf der festen Curve α bewegt, und AA_v^{II} stellt die Geschwindigkeit dar, die der Schnittpunkt A auf der bewegten Curve g besitzt. Wir erhalten also, indem wir zu g_t die Parallele $A_v^I A_v$ bis an α_t ziehen, in dem Dreieck $AA_v^I A_v$ durch die Seiten AA_v, $A_v^I A_v$ die Geschwindigkeiten dargestellt, mit denen der Schnittpunkt A sich resp. auf den Curven α, g bewegt. Diese einfache Bestimmung, aus der wir viele wichtige Folgerungen ableiten werden, wollen wir noch in folgendem Satze zusammenfassen:

Bewegt sich eine Curve g, welche mit einer festen Curve α einen Schnittpunkt A bildet, ist AA_v^I die Geschwindigkeit des mit dem Schnittpunkte A momentan coincidirenden Punktes der Curve g, sind g_t, α_t im Punkte A die Tangenten an den Curven g, α, und wird parallel zur Tangente g_t durch den Punkt A_v^I die Strecke $A_v^I A_v$ bis an die Tangente α_t gezogen, so repräsentirt

AA_v die Geschwindigkeit des Schnittpunktes A auf der festen Curve α, und $A_v^t A_v$ die Geschwindigkeit desselben auf der bewegten Curve g.

Zerlegen wir in Fig. 44 die Geschwindigkeit AA_v^t in zwei Componenten AA_v^n, AA_v^t, von denen die erste mit der Normalen g_n, die zweite mit der Tangente g_t der bewegten Curve g zusammenfällt, so erkennen wir, dass die Geschwindigkeit AA_v, die der Schnittpunkt A auf der festen Curve α besitzt, durch die in der Normalen g_n liegende Componente AA_v^n bestimmt wird, und unabhängig ist von der in der Tangente g_t befindlichen Componente AA_v^t.

Durch gleichsinnige Drehung der Geschwindigkeiten um einen rechten Winkel erhalten wir die lothrechten Geschwindigkeiten. Wenn also in Fig. 45 die lothrechte Geschwindigkeit AA_v^t des mit dem Schnittpunkte A momentan coincidirenden Punktes der bewegten Curve g gegeben ist, so bestimmt die zur Normalen Ag_n dieser Curve parallele Gerade $A_v^t A_v$ auf der Normalen $A\alpha_n$ der festen Curve α die lothrechte Geschwindigkeit AA_v, mit welcher, der Schnittpunkt A sich auf der festen Curve α bewegt.

Um diese abgeleitete Bestimmungsweise noch zu verallgemeinern, wollen wir in Fig. 46 annehmen, es gehöre die Curve g, welche die feste Curve α in A schneidet, zu einem bewegten starren ebenen System S_2, welches sich in einem gedachten System S_1 bewegt, und es sei für einen Punkt B dieses Systems, der auf der Normalen AB der Curve g liegt, die Geschwindigkeit BB_v und damit auch die lothrechte Geschwindigkeit BB_v^l gegeben. Wenn nun die Geschwindigkeit, welche der mit A coincidirende Punkt des bewegten Systems S_2 besitzt, auch nicht gegeben ist, so kennen wir doch die mit der Normalen AB zusammenfallende Componente AA_v^n, welche wegen der Starrheit der Systemstrecke AB gleich ist der auf AB senkrechten Projection BB_v^n von der Geschwindigkeit BB_v des Systempunktes B oder gleich ist dem Abstande der Parallelen $B_v A_v$, BA; und die andere mit der Tangente der Curve g zusammenfallende unbekannte Componente hat auf die Geschwindigkeit, mit welcher der Schnittpunkt A sich auf seiner Bahncurve α bewegt, keinen Einfluss. Machen wir also auf der Curvennormalen AB die Strecke $AA_v^n = BB_v^n$ und errichten wir auf derselben in A_v^n die Senkrechte $A_v^n A_v$, dann bestimmt diese auf der in A an die Curve α gelegten Tangente $A\alpha_t$ die Geschwindigkeit AA_v des Punktes A auf dieser Curve α. Einfacher kann diese Bestimmung noch vermittelst der lothrechten Geschwindigkeit $BB_{\mathfrak{v}}$ ausgeführt werden, indem wir durch $B_{\mathfrak{v}}$ zur Curvennormalen BA die Parallele $B_{\mathfrak{v}}A_{\mathfrak{v}}$ ziehen, welche auf der Normalen $A\alpha_n$ der Curve α die lothrechte Geschwindigkeit $AA_{\mathfrak{v}}$ liefert, die A auf dieser Curve α besitzt.

Die momentane Bewegung des Systems S_2 ist erst vollständig bestimmt, wenn in Fig. 47 ausser der lothrechten Geschwindigkeit $BB_{\mathfrak{v}}$ noch auf der Geraden $BB_{\mathfrak{v}}$ der Pol $\mathfrak{P}_{12}$ dieses Systems S_2 in Bezug auf das feste System S_1 gegeben ist, dann schneidet die zu BA Parallele $B_{\mathfrak{v}}A_{\mathfrak{v}}$ auf der Geraden $A\mathfrak{P}_{12}$ die lothrechte Geschwindigkeit $AA_{\mathfrak{v}}^{21}$ ab, welche A als Punkt des Systems S_2 im ruhenden System S_1 besitzt; und es ist $A_{\mathfrak{v}}^{21}A_{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit, mit der sich der Schnittpunkt A auf der Curve g in dem System S_2 bewegt.

28. **Construction der Geschwindigkeit des Schnittpunktes zweier bewegter Curven.** Betrachten wir in Fig. 48 den Schnittpunkt A zweier in einem festen System S_1 stetig bewegter Curven g, h und nehmen wir an, dass die Curve g zu einem bewegten starren ebenen System S_2, die Curve h zu einem bewegten starren ebenen System S_3 gehöre. Es sei $BB_{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit von einem Punkte B des Systems S_2, der auf der Normalen AB der Curve g liegt, und $CC_{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit von einem Punkte C des Systems S_3, der auf der Normalen AC der Curve h liegt; dann muss nach der eben gegebenen Darlegung der Endpunkt $A_{\mathfrak{v}}$ der lothrechten Geschwindigkeit $AA_{\mathfrak{v}}$, welche der Schnittpunkt A der beiden bewegten Curven g, h auf seiner entstehenden Bahncurve α besitzt, einerseits auf der Geraden $B_{\mathfrak{v}}A_{\mathfrak{v}}$, die parallel BA ist, anderseits auch auf der Geraden $C_{\mathfrak{v}}A_{\mathfrak{v}}$, die parallel CA ist, liegen. Demnach ergiebt sich der Endpunkt $A_{\mathfrak{v}}$ dieser lothrechten Geschwindigkeit $AA_{\mathfrak{v}}$ als der Schnittpunkt der durch $B_{\mathfrak{v}}$ und $C_{\mathfrak{v}}$ resp. zu BA und CA parallel gezogenen Geraden, und die Gerade $A_{\mathfrak{v}}A$ ist die Normale der Curve α. Wird $AA_{\mathfrak{v}}$ im entsprechenden Sinne um einen rechten Winkel nach AA_v gedreht, dann repräsentirt AA_v nach Grösse und Richtung die Geschwindigkeit von A auf der Curve α, und AA_v ist die Tangente an derselben. Hiernach erhalten wir den Satz:

Bewegen sich gleichzeitig zwei Curven g, h, welche sich stetig in einem Punkte A schneiden, in einem ruhenden System; ist für einen mit g starr verbundenen Punkt B, der in der zur Curve g gehörenden Normalen AB liegt, die lothrechte Geschwindigkeit $BB_{\mathfrak{v}}$ gegeben; ist ebenso für einen mit h starr verbundenen Punkt C, der in der zur Curve h gehörenden Normalen AC liegt, die lothrechte Geschwindigkeit $CC_\mathfrak{v}$ gegeben: so ergiebt sich der Endpunkt $A_\mathfrak{v}$ der lothrechten Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$, mit welcher der Schnittpunkt A sich auf seiner Bahncurve bewegt, als der Schnitt der resp. zu BA, CA parallelen Geraden $B_\mathfrak{v}A_\mathfrak{v}$, $C_\mathfrak{v}A_\mathfrak{v}$.

Befinden sich in Fig. **49** beide Punkte B, C im Schnittpunkte A der bewegten Curven g, h, und sind $AA_\mathfrak{v}^{21}$, $AA_\mathfrak{v}^{31}$ resp. die lothrechten Geschwindigkeiten der beiden mit A coincidirenden Punkte der Curven g, h, der Systeme S_2, S_3, dann ist in diesem besonderen Falle durch den Schnittpunkt $A_\mathfrak{v}$ der durch $A_\mathfrak{v}^{21}$, $A_\mathfrak{v}^{31}$ resp. zu den in A errichteten Normalen g_n, h_n der Curven g, h parallel gezogenen Geraden $A_\mathfrak{v}^{21}A_\mathfrak{v}$, $A_\mathfrak{v}^{31}A_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ des auf der Curve α wandernden Punktes A bestimmt; und ferner werden durch $A_\mathfrak{v}^{21}A_\mathfrak{v}$, $A_\mathfrak{v}^{31}A_\mathfrak{v}$ die lothrechten Geschwindigkeiten repräsentirt, die der Schnittpunkt A beziehlich auf den bewegten Curven g, h besitzt.

Wenn in Fig. **50** zu dem Schnittpunkte A als Punkt der Curve g die Geschwindigkeit AA_v^{21} und als Punkt der Curve h die Geschwindigkeit AA_v^{31} gehört, so erhalten wir die Geschwindigkeit AA_v des auf der Curve α bewegten Punktes A, indem wir durch A_v^{21}, A_v^{31} resp. zu den in A an die Curven g, h gelegten Tangenten g_t, h_t Parallele ziehen, diese treffen sich im Endpunkte A_v der Geschwindigkeit AA_v, und die Gerade AA_v ist auch die Tangente an der Bahncurve α.

Die momentane Bewegung der beiden im festen System S_1 bewegten Systeme S_2, S_3, welche resp. die Curven g, h enthalten, ist erst vollständig bestimmt, wenn in Fig. **51** auf der Geraden $BB_\mathfrak{v}$ der Pol $\mathfrak{P}_{12}$ des Systems S_2 und auf der Geraden $CC_\mathfrak{v}$ der Pol $\mathfrak{P}_{13}$ des Systems S_3 gegeben ist, dann erhalten wir auf der Geraden $\mathfrak{P}_{12}A$, $\mathfrak{P}_{13}A$, indem wir $B_\mathfrak{v}A_\mathfrak{v}^{12}$ parallel BA und $C_\mathfrak{v}A_\mathfrak{v}^{13}$ parallel CA ziehen, die lothrechten Geschwindigkeiten $AA_\mathfrak{v}^{21}$, $AA_\mathfrak{v}^{31}$, welche beziehlich der Punkt A als Punkt der Systeme S_2, S_3 im System S_1 besitzt; und ferner sind $A_\mathfrak{v}^{21}A_\mathfrak{v}$, $A_\mathfrak{v}^{31}A_\mathfrak{v}$ die lothrechten Geschwindigkeiten, mit denen sich der Schnittpunkt A resp. in dem System S_2, S_3 auf den Curven g, h bewegt.

Nehmen wir an, es sei die lothrechte Geschwindigkeit $A_\mathfrak{v}^{21}A_\mathfrak{v}$ des Schnittpunktes A auf der Curve g im System S_2 beständig gleich Null, also der Punkt $A_\mathfrak{v}^{21}$ falle mit $A_\mathfrak{v}$ zusammen, dann ist A ein Punkt dieses starren Systems S_2 und wir erhalten den folgenden in Fig. **52** dargestellten besonderen Fall. Ein Punkt B des Systems S_2 bewegt sich mit der lothrechten Geschwindigkeit $BB_\mathfrak{v}$ auf einer festen Curve β und ein Punkt A dieses Systems wird auf einer zu einem bewegten System S_3 gehörenden Curve h geführt, auf deren Normale AC ein beliebiger mit h starr verbundener Punkt C nebst seiner lothrechten Geschwindigkeit $CC_\mathfrak{v}$ gegeben ist. Die durch $B_\mathfrak{v}$, $C_\mathfrak{v}$ resp. zu BA, CA parallelen Geraden $B_\mathfrak{v}A_\mathfrak{v}$, $C_\mathfrak{v}A_\mathfrak{v}$ bestimmen durch ihren Schnittpunkt $A_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ des Systempunktes A auf seiner Bahncurve α und der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_{12}$ der Geraden $AA_\mathfrak{v}$, $BB_\mathfrak{v}$ ist der Pol $\mathfrak{P}_{12}$ des Systems S_2 in Bezug auf das feste System S_1. Durch gleichsinnige Drehung der lothrechten Geschwindigkeiten um einen rechten Winkel ergeben sich die entsprechenden Geschwindigkeiten AA_v, BB_v, CC_v.

Liegt insbesondere der Punkt C im Schnittpunkte A oder ist in Fig. **53** die lothrechte Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}^h$ des mit A zusammenfallenden Punktes der bewegten Curve h, dann ergiebt sich in gleicher Weise vermittelst der durch $B_\mathfrak{v}$, $A_\mathfrak{v}^h$ beziehlich zu BA und zur Normalen h_n der Curve h parallel gelegten Geraden $B_\mathfrak{v}A_\mathfrak{v}$, $A_\mathfrak{v}^hA_\mathfrak{v}$ der Punkt $A_\mathfrak{v}$ und der Pol $\mathfrak{P}_{12}$ des Systems S_2.[1]) Ferner erhalten wir durch Drehung des Dreiecks $AA_\mathfrak{v}A_\mathfrak{v}''$ in die rechtwinkelige Lage $AA_vA_v^h$ die Geschwindigkeiten AA_v, $A_v^hA_v$, welche der Schnittpunkt A resp. auf seiner Bahncurve α und auf der bewegten Curve h besitzt.

29. **Construction der Geschwindigkeit und der Pole bei einem bewegten Gelenke.** Um noch eine wichtige Specialisirung, welche sich auch leicht direct ableiten lässt, aus der allgemeinen Beziehung hervorzuheben, nehmen wir an: es seien die in Fig. **51** auftretenden lothrechten Geschwindigkeiten $A_\mathfrak{v}^{21}A_\mathfrak{v}$, $A_\mathfrak{v}^{31}A_\mathfrak{v}$ des Schnittpunktes A auf den beiden bewegten Curven g, h beide beständig gleich Null, d. h. die Punkte $A_\mathfrak{v}^{21}$, $A_\mathfrak{v}^{31}$ fallen beide mit dem Punkt $A_\mathfrak{v}$ zusammen; dann hat der Punkt A in den beiden Systemen S_2, S_3 keine Bewegung, es ist also A ein Punkt, der diesen beiden Systemen zugleich angehört. Demnach können wir den Punkt A in Fig. **54** als einen Gelenkpunkt betrachten, in dem die starren Strecken AB, AC der Systeme S_2, S_3 drehbar verbunden sind. Bewegen sich die Punkte B, C des Gelenkes beziehlich auf den Curven β, γ mit den lothrechten Geschwindigkeiten $BB_\mathfrak{v}$, $CC_\mathfrak{v}$,

---

[1]) Für diesen speciellen Fall giebt Resal eine umständlichere Bestimmung in seinem *Traité de cinématique pure.* 1862. p. 117.

dann bestimmen die Geraden $B_v A_v$, $C_v A_v$, welche resp. parallel BA, CA sind, durch ihren Schnittpunkt A_v die lothrechte Geschwindigkeit AA_v des Gelenkpunktes A und die Normale der Bahncurve α desselben. Die Schnittpunkte $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$, welche AA_v mit BB_v und CC_v bildet, sind die Pole der Strecken AB, BC oder der durch dieselben gegebenen Systeme S_2, S_3.

Um für diesen besonderen Fall die ausgeführte Construction direct zu begründen, haben wir in Fig. **54** nur zu beachten, dass die Endpunkte der lothrechten Geschwindigkeiten aller in der Geraden BA enthaltenen Punkte des Systems S_2 in der zu BA parallelen Geraden $B_v A_v$ liegen, und dass ebenso die Endpunkte der lothrechten Geschwindigkeiten aller in der Geraden $B_v A_v$ enthaltenen Punkte des Systems S_3 in der zu CA parallelen Geraden $C_v A_v$ sich befinden; dem zufolge ist der Schnitt A_v dieser Parallelen der Endpunkt der lothrechten Geschwindigkeit AA_v und die Gerade AA_v bestimmt die Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$.

Diese Bestimmung der Pole ist nicht ausführbar, wenn der Gelenkpunkt A im Unendlichen liegt. Es verschiebt sich dann das eine der beiden Systeme S_2, S_3 geradlinig in den anderen. In Fig. **55** ist dies praktisch dadurch herbeigeführt, dass sich in einer Hülse i eine Stange Cc verschiebt, während die Punkte B, C der Systeme S_2, S_3 sich auf den Bahnen β, γ bewegen und momentan die gegebenen lothrechten Geschwindigkeiten BB_v, CC_v besitzen. Dieser Fall erfordert eine besondere Construction der Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$. Um dieselbe abzuleiten, betrachten wir diese Pole zunächst als gegeben, die in einer nach A^∞ gerichteten, also auf Cc senkrechten Geraden liegen müssen. Wir ziehen von dem momentanen Fusspunkte X des von B auf Cc gefällten Lothes Gerade nach $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$, und ferner $B_v X_v^{21} \parallel BX$, $C_v X_v^{31} \parallel CX$, resp. bis an diese Geraden; dann repräsentirt XX_v^{21}, XX_v^{31} die lothrechten Geschwindigkeiten, welche die mit X momentan coincidirenden Punkte des Systems S_1, S_2 in dem festen System S_1 besitzen, und folglich stellt $X_v^{21} X_v^{31}$ die lothrechte Geschwindigkeit dar, mit welcher sich X als Punkt des einen der Systeme S_2, S_3 betrachtet in dem anderen bewegt. Diese lothrechte Geschwindigkeit muss aber senkrecht stehen auf Cc und liegt daher in der Geraden $B_v X_v^{21}$. Nach dieser Erkenntniss erhalten wir die folgende Construction. Wir ziehen $B_v X_v^{31}$ senkrecht Cc, ferner $C_v X_v^{31}$ parallel Cc, dann die Gerade XX_v^{31}, die auf CC_v den Pol $\mathfrak{P}_{13}$ bestimmt und hierauf senkrecht zu Cc die Gerade $\mathfrak{P}_{13}\,\mathfrak{P}_{12}$, die BB_v im Pol $\mathfrak{P}_{12}$ trifft.

30. **Construction der Geschwindigkeit des Schnittpunktes zweier bewegter Curven mittelst der Pole, nebst Construction der Normalen oder Tangente an seiner Bahn.** Die momentane Bewegung der beiden Systeme S_2, S_3, welche resp. die Curven g, h enthalten, ist in dem festen System S_1 vollständig bestimmt, wenn in Fig. **56** die drei Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$, $\mathfrak{P}_{23}$ nebst der lothrechten Geschwindigkeit $\mathfrak{P}_{23}\,\mathfrak{P}_{23,\mathfrak{v}}$ des Pols $\mathfrak{P}_{23}$ gegeben sind. Ziehen wir durch $\mathfrak{P}_{23}$ eine beliebige Gerade, welche die Normalen g_n, h_n der Curven g, h resp. in den Punkten B, C trifft, ferner durch $\mathfrak{P}_{23,\mathfrak{v}}$ zu dieser Geraden eine Parallele, so liefert diese Parallele auf der Geraden $\mathfrak{P}_{12}B$ die lothrechte Geschwindigkeit $BB_\mathfrak{v}$, welche der zu S_2 gehörende Normalenpunkt B im festen System S_1 besitzt, und auf der Geraden $\mathfrak{P}_{13}C$ die lothrechte Geschwindigkeit $CC_\mathfrak{v}$, mit welcher sich der zu S_3 gehörende Normalenpunkt C im festen System S_1 bewegt. Demnach ergiebt sich der Endpunkt $A_\mathfrak{v}$ der lothrechten Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ des Punktes A als Schnittpunkt der durch $B_\mathfrak{v}$, $C_\mathfrak{v}$ resp. zu den Normalen BA, CA parallel gezogenen Geraden. Geht insbesondere die zu BC Parallele $B_\mathfrak{v}C_\mathfrak{v}$ durch den Schnittpunkt J der Geraden $\mathfrak{P}_{12}B$, $\mathfrak{P}_{13}C$, dann fällt der Punkt $A_\mathfrak{v}$, welcher auf der Normalen der von A beschriebenen Curve α liegt, mit dem Punkte J zusammen und demnach geht diese Normale auch durch den Punkt J. Hieraus folgt:

Um die Normale AJ an der Bahncurve α zu construiren, welche der Schnittpunkt A zweier resp. den Systemen S_2, S_3 angehörenden Curven g, h in dem festen System S_1 beschreibt, ziehe man durch $\mathfrak{P}_{23}$ eine beliebige Gerade, welche die Normalen dieser Curven in B, C trifft, und ferner die Geraden $\mathfrak{P}_{12}B$, $\mathfrak{P}_{13}C$, deren Schnittpunkt J mit A verbunden jene Normale AJ an der Bahncurve giebt.

Eine speciellere Construction der lothrechten Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ des Schnittpunktes A der beiden Curven g, h ergiebt sich in Fig. **57** durch die Benutzung der lothrechten Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}^{21}$ und $AA_\mathfrak{v}^{31}$, die A resp. als Punkt des Systems S_2 oder S_3 besitzt. Wir ziehen durch $\mathfrak{P}_{23,\mathfrak{v}}$ zu $\mathfrak{P}_{23}A$ eine Parallele; diese trifft die Geraden $\mathfrak{P}_{12}A$, $\mathfrak{P}_{13}A$ in den Punkten $A_\mathfrak{v}^{21}$, $A_\mathfrak{v}^{31}$ und fällen von diesen Punkten resp. auf die Tangenten g_t, h_t der Curven g, h Senkrechte, dann treffen sich diese in dem Punkte $A_\mathfrak{v}$, der mit A verbunden die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes A und die Normale an der Bahncurve α desselben giebt. Soll bloss diese Normale bestimmt werden, so kommt der Punkt $\mathfrak{P}_{23,\mathfrak{v}}$ nicht in

Betracht und wir brauchen nur zu $\mathfrak{P}_{23}A$ in beliebigem Abstande die Parallele $A_v^{21}A_v^{31}$ zu ziehen.

In Fig. **58** ist diese Construction für den besonderen Fall ausgeführt, dass anstatt der beiden Curven in den beiden Systemen S_2, S_3 die Geraden g, h gegeben sind, welche sich im Punkte A schneiden und resp. durch die Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ gehen. Der Punkt A_v ergiebt sich also, indem wir durch $\mathfrak{P}_{23,v}$ zu $\mathfrak{P}_{23}A$ die Parallele $A_v^{21}A_v^{31}$ ziehen, ferner in A_v^{21} und A_v^{31} resp. auf g und h Senkrechte errichten, welche sich in A_v treffen. Der über AA_v als Durchmesser beschriebene Kreis geht durch die Punkte A_v^{21}, A_v^{31} und berührt in A die Tangente At der Bahncurve α des Punktes A. Der Tangentenwinkel $\mathfrak{P}_{12}At$ ist gleich dem Peripheriewinkel $A_v^{21}A_v^{31}A$, und der Winkel $\mathfrak{P}_{13}A\mathfrak{P}_{23}$ ist wegen der parallelen Geraden $A_v^{21}A_v^{31}$, $A\mathfrak{P}_{23}$ gleich $AA_v^{31}A_v^{21}$; demnach ist der Winkel $\mathfrak{P}_{21}At$ entgegengesetzt gleich dem Winkel $\mathfrak{P}_{13}A\mathfrak{P}_{23}$, und hieraus folgt:

U m die Tangente At an der Bahncurve α zu construiren, welche im festen System S_1 der Schnittpunkt A zweier Geraden beschreibt, die resp. zu den Systemen S_2, S_3 gehörend durch die Pole $\mathfrak{P}_{21}$, $\mathfrak{P}_{31}$ gehen, mache man den Winkel $\mathfrak{P}_{12}At$ entgegengesetzt gleich dem Winkel $\mathfrak{P}_{13}A\mathfrak{P}_{23}$.

Nehmen wir auf einer durch $\mathfrak{P}_{23}$ gehenden Geraden in Fig. **58** zwei beliebige resp. zu den Systemen S_2, S_3 gehörende Punkte F, L an, und denken wir uns diese Systeme mit der starren Strecke FL drehbar verbunden, so wird nach Art. 26 die momentane Bewegung der beiden Systeme S_2, S_3 durch das Gelenkviereck $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{13}LF$ hervorgebracht.

Betrachten wir nun in Fig. **58** das Gelenkviereck $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{13}LF$ als gegeben, an dessen Seiten $\mathfrak{P}_{12}F$, $\mathfrak{P}_{13}L$, welche sich um die festen Punkte $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{13}$ drehen, beziehlich die Geraden g, h befestigt, und ist FF_v die Geschwindigkeit des Gelenkpunktes F; dann bestimmt die zu FL parallele Gerade, welche durch den auf $\mathfrak{P}_{12}F$ liegenden Endpunkt F_v der zu F gehörenden lothrechten Geschwindigkeit geht, auf $\mathfrak{P}_{13}\mathfrak{P}_{23}$ die lothrechte Geschwindigkeit $\mathfrak{P}_{23}\mathfrak{P}_{23,v}$ des Pols $\mathfrak{P}_{23}$, der sich als Schnitt der Geraden $\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{13}$, FL ergiebt. Ferner liefert die durch $\mathfrak{P}_{23,v}$ zu $\mathfrak{P}_{23}A$ parallele Gerade die lothrechten Geschwindigkeiten AA_v^{21}, AA_v^{31}, welche A resp. als Punkt der Geraden g oder h besitzt, und mittelst welcher wir, wie oben angegeben wurde, die lothrechte Geschwindigkeit AA_v des Schnittpunktes der Geraden g, h erhalten. Drehen wir AA_v um einen rechten Winkel im Sinne $F_\mathfrak{v} F_v$ nach AA_v, so ist AA_v die Geschwindigkeit des Punktes A und die Tangente an seiner Bahncurve. Ohne Benutzung des Pols $\mathfrak{P}_{23}$ erhalten wir auch die Punkte $A_\mathfrak{v}^{21}$, $A_\mathfrak{v}^{31}$, indem wir $F_\mathfrak{v} L_\mathfrak{v}$ parallel FL, dann $F_\mathfrak{v} A_\mathfrak{v}^{21}$, $L_\mathfrak{v} A_\mathfrak{v}^{31}$ resp. parallel FA, LA ziehen. Diese letzte Bestimmung versagt aber, wenn die Geraden g, h beziehlich mit $\mathfrak{P}_{12}F$, $\mathfrak{P}_{13}L$ zusammenfallen, wenn also der Punkt A mit dem Pol $\mathfrak{P}$ coincidirt, den das durch die Koppel FL bestimmte, bewegte System gegen das feste System besitzt.

31. **Construction der Polgeschwindigkeit und der Normalen oder Tangente an der Polbahn.** Wir betrachten in Fig. **59** ein bewegtes starres ebenes System S, dessen Curven f, l resp. auf den Hüllbahncurven φ, λ eines festen ebenen Systems Σ gleiten, und nehmen an, es seien F, L, Φ, Λ beziehlich die Krümmungsmittelpunkte dieser Curven für die betreffenden Berührungspunkte; dann können wir die momentane Bewegung des Systems S nach Art. 15 durch das Gelenkviereck $\Phi F \Lambda L$ hervorbringen, dessen Ecken Φ, Λ in dem festen System Σ liegen und dessen Ecken F, L Punkte des bewegten Systems S sind. Der Schnittpunkt der Geraden ΦF, ΛL ist der Pol $\mathfrak{P}$ dieser beiden Systeme. Um nun die Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ an der Polbahn zu construiren, verbinden wir den Schnittpunkt Ω der Geraden $\Phi\Lambda$, FL mit dem Pol $\mathfrak{P}$ und machen den Winkel $\Phi\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ entgegengesetzt gleich dem Winkel $\Lambda\mathfrak{P}\Omega$.

In Fig. **60** ist diese Construction noch für den Fall ausgeführt, wenn der Pol $\mathfrak{P}$ sich zwischen den Krümmungsmittelpunkten Φ, F und Λ, L befindet. Diese aus unseren allgemeinen Darlegungen hervorgegangene elegante Construction der Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$, welche bekanntlich zugleich die Polcurve in $\mathfrak{P}$ berührt, wurde in anderer Weise zuerst von Bobillier[1]) abgeleitet; diese Construction ist für unsere weiteren Betrachtungen von grosser Wichtigkeit und daher wollen wir das Resultat unserer Ableitung noch in folgendem Satz aussprechen:

Um die gemeinsame Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ der Polbahn und Polcurve zweier ebener Systeme S, Σ zu erhalten, verbinde man die Krümmungsmittelpunkte F, L zweier Curven des bewegten Systems S, sowie die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte Φ, Λ der entsprechenden Hüllbahncurven in dem festen System Σ, ziehe von dem Schnittpunkte Ω dieser Verbindungsgeraden FL,

[1]) Bobillier, *Cours de géométrie.* 1870. p. 232.

$\Phi\Lambda$ nach dem Schnittpunkte der Geraden ΦF, ΛL, dem Pol $\mathfrak{P}$, die Gerade $\mathfrak{O}\mathfrak{P}$ und mache den Winkel $\Phi\mathfrak{P}t$ entgegengesetzt gleich dem Winkel $\Lambda\mathfrak{P}\mathfrak{O}$.

Errichten wir in Fig. 59 auf $\mathfrak{O}\mathfrak{P}$ die Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{s}$ und machen wir den Winkel $\Lambda\mathfrak{P}\mathfrak{P}_\mathfrak{v}$ entgegengesetzt gleich dem Winkel $\Phi\mathfrak{P}\mathfrak{s}$, so ist $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_\mathfrak{v}$ die Normale der Polbahn.

Ist für einen Punkt des Systems S z. B. für F die Geschwindigkeit FF_v und damit die lothrechte Geschwindigkeit $FF_\mathfrak{v}$ desselben gegeben, so erhalten wir die lothrechte Geschwindigkeit $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_\mathfrak{v}$, mit welcher sich der Pol $\mathfrak{P}$ auf der Polbahn bewegt, in der bekannten Weise. Wir ziehen durch $F_\mathfrak{v}$ zu FL die Parallele $F_\mathfrak{v}\mathfrak{O}_\mathfrak{v}$, welche $\Phi\Lambda$ in $\mathfrak{O}_\mathfrak{v}$ trifft, dann durch $\mathfrak{O}_\mathfrak{v}$ zu $\mathfrak{O}\mathfrak{P}$ die Parallele $\mathfrak{P}'_\mathfrak{v}\mathfrak{P}''_\mathfrak{v}$ und errichten in ihren Schnittpunkten $\mathfrak{P}'_\mathfrak{v}$, $\mathfrak{P}''_\mathfrak{v}$ auf den betreffenden Geraden ΦF, ΛL resp. Senkrechte, die sich in $\mathfrak{P}_\mathfrak{v}$ schneiden. Drehen wir hierauf $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_\mathfrak{v}$ im Sinne $F_\mathfrak{v}F_v$ um einen rechten Winkel nach $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_v$, dann repräsentirt $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_v$ die Polgeschwindigkeit. Nehmen wir an, es sei $F\mathfrak{P}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes F, dann coincidirt $F_\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{P}$ und in diesem Falle müssen wir durch $\mathfrak{P}$ zu FL eine Parallele ziehen, die den entsprechenden Punkt $\mathfrak{O}_\mathfrak{v}$ bestimmt.

32. **Construction der Geschwindigkeiten bei der Bewegung des Schnittpunktes zweier rotirender Geraden.** Wir denken uns in Fig. 61 den Schnittpunkt A der beiden um die festen Punkte Φ, Λ rotirenden Geraden g, h auf seiner Bahncurve α in dem durch $\Phi\Lambda$ bestimmten ruhenden ebenen System Σ geführt; und es sei AA_v momentan seine Geschwindigkeit auf α. Die von A_v auf g, h gefällten Lothe $A_v^g A_v$, $A_v^h A_v$ repräsentiren die Geschwindigkeiten, mit denen die beiden in A coincidirenden resp. zu g und h gehörenden Punkte sich in Σ bewegen. Ferner ist AA_v^g die Geschwindigkeit des Schnittpunktes A auf der Geraden g oder die Geschwindigkeit der Längenänderung von ΦA; ebenso ist AA_v^h die Geschwindigkeit des Schnittpunktes A auf der Geraden h oder die Geschwindigkeit der Längenänderung von ΛA. Sind umgekehrt diese Geschwindigkeiten gegeben, so erhalten wir durch die in A_v^g, A_v^h resp. auf g, h errichteten Senkrechten, die sich in A_v schneiden, die Geschwindigkeit AA_v, welche A in Σ besitzt. Zeichnen wir die lothrechte Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ gleich und senkrecht AA_v, und fällen wir von $A_\mathfrak{v}$ resp. auf g, h die Lothe $A_\mathfrak{v}A_\mathfrak{v}^G$, $A_\mathfrak{v}A_\mathfrak{v}^H$, so ist:

$$A_\mathfrak{v}^G A_\mathfrak{v} = AA_v^g, \quad A_\mathfrak{v}^H A_\mathfrak{v} = AA_v^h$$
$$AA_\mathfrak{v}^G = A_v^g A_v, \quad AA_\mathfrak{v}^H = A_v^h A_v.$$

Es repräsentirt also $A_{\mathfrak{v}}^G A_{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit der Längenänderung von ΦA, ebenso $A_{\mathfrak{v}}^H A_{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit der Längenänderung von ΛA; ferner ist $A A_{\mathfrak{v}}^G$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit A coincidirenden Punktes der Geraden g, ebenso $A A_{\mathfrak{v}}^H$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit A coincidirenden Punktes der Geraden h.

Nehmen wir an, dass in Fig. 62 die beiden Geraden g, h um die festen Punkte Φ, Λ momentan mit den Drehgeschwindigkeiten ω_g, ω_h rotiren und dass diese Drehgeschwindigkeiten im constanten Verhältnisse

$$\frac{\omega_g}{\omega_h} = n$$

stehen, so können wir die Normale an der Bahncurve des Schnittpunktes A der rotirenden Geraden leicht construiren. Die lothrechte Geschwindigkeit $A A_{\mathfrak{v}}^G$ des mit A momentan coincidirenden Punktes der Geraden g ergiebt sich, wenn wir der Einfachheit wegen $\omega_h = 1$ setzen aus der Gleichung

$$\frac{A A_{\mathfrak{v}}^G}{A \Phi} = \omega_g = n \,.\, \omega_h = n.$$

Je nachdem nun die Drehung der Geraden g, h in gleichem oder entgegengesetztem Sinne erfolgt, ist n als positiv oder negativ zu betrachten. Da wir die Drehgeschwindigkeit der Geraden h gleich der Einheit gesetzt haben, so repräsentirt $A\Lambda$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit A coincidirenden Punktes der Geraden h; und nehmen wir in Fig. 62 die Drehungen entgegengesetzt, dann ist die lothrechte Geschwindigkeit

$$A A_{\mathfrak{v}}^G = -n \,.\, A\Phi$$

auch entgegengesetzt von $A\Phi$ auf g aufzutragen. Wir erhalten demnach die Normale $A A_{\mathfrak{v}}$ an der Bahncurve α, indem wir auf $A\Lambda$ die Senkrechte $\Lambda A_{\mathfrak{v}}$ und auf $\Phi A_{\mathfrak{v}}^G$ die Senkrechte $A_{\mathfrak{v}}^G A_{\mathfrak{v}}$ errichten und den Schnittpunkt $A_{\mathfrak{v}}$ dieser beiden Senkrechten mit A verbinden. Nehmen wir an, es rotire die Gerade g mit der Drehgeschwindigkeit gleich der Einheit; dann machen wir auf $A\Lambda$ die Strecke $A\mathfrak{A}_{\mathfrak{v}}^H = -\frac{1}{n} A\Lambda$, errichten auf ΦA die Senkrechte $\Phi\mathfrak{A}_{\mathfrak{v}}$, auf $\Lambda\mathfrak{A}_{\mathfrak{v}}^H$ die Senkrechte $\mathfrak{A}_{\mathfrak{v}}^H\mathfrak{A}_{\mathfrak{v}}$ und erhalten somit die Normale $A\mathfrak{A}_{\mathfrak{v}}$ der Bahncurve α.

Um die Polargleichung der Bahncurve α aufzustellen, wenn die Drehungen der beiden Geraden g, h gleichzeitig von der Geraden $\Phi\Lambda$ ausgehen, bezeichnen wir die Strecke $\Phi\Lambda$ mit p, setzen den Fahrstrahl $\Phi A = \varrho$, den Winkel $\Lambda \Phi A = \theta$; dann ist der negativ genommene Winkel

$$-\Phi \widehat{\Lambda} A = \frac{1}{n}\theta \text{ und } \Phi \widehat{A} \Lambda = 180^0 - \frac{n-1}{n}\theta.$$

Demnach ergiebt sich aus dem Sinussatze die Polargleichung:

$$\varrho = p \cdot \frac{-\sin\frac{1}{n}\theta}{\sin\frac{n-1}{n}\theta}.$$

In Fig. **62** ist beispielsweise der Werth von $n = -2$ genommen, und in diesem besonderen Falle ergiebt sich hieraus die Polargleichung

$$\varrho = \frac{p}{1+2\cos\theta},$$

welche eine Hyperbel darstellt, deren eine Brennpunkt Φ ist und deren eine Scheitel in Λ liegt. Es ist die Hauptaxe $\Lambda J = \frac{2}{3}\Phi\Lambda$ und der Halbparameter $p = \Phi\Lambda$. Somit folgt:

Wenn zwei Gerade entgegengesetzt um je einen festen Punkt rotiren, so dass ihre Drehgeschwindigkeiten sich wie 1:2 verhalten und gleichzeitig von der Verbindungsgeraden der Drehpunkte ausgehen, dann ist die Bahn des Schnittpunktes dieser Geraden eine Hyperbel.

33. **Constructionen der Geschwindigkeiten bei einer bewegten Geraden, und Bestimmung ihres Berührungspunktes an der Hüllbahncurve.** a) Rotirt in Fig. **63** eine Gerade g, die eine feste Curve α in A schneidet, um einen festen Punkt Φ und ist BB_v'' die Geschwindigkeit eines Punktes B dieser Geraden g, so liegen die Endpunkte der Geschwindigkeiten aller Punkte von g auf der Geraden $\Phi B_v''$, und dieselbe bestimmt die auf g senkrechte Geschwindigkeit AA_v'' des mit dem Schnittpunkte A coincidirenden Punktes der rotirenden Geraden g. Die zu g parallele Gerade $A_v''A_v$ schneidet auf der an die Curve α gelegten Tangente die Geschwindigkeit AA_v ab, mit welcher sich der Schnittpunkt A auf α bewegt, und $A_v''A_v$ repräsentirt die Geschwindigkeit des Schnittpunktes A auf der rotirenden Geraden g, resp. die Geschwindigkeit der Längenänderung der Strecke ΦA.

Errichten wir auf ΦA die Senkrechte ΦN, welche die Normale AN der Curve α in N trifft, dann sind die Dreiecke $AA_v''A_v$, $A\Phi N$ ähnlich; und diese Dreiecke werden congruent, wenn insbesondere die Drehgeschwindigkeit der Geraden g gleich der Einheit genommen wird. In diesem Specialfalle ist $A\Phi$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit A coincidirenden Punktes der Geraden g, ferner AN die lothrechte Geschwindigkeit des Schnittpunktes A auf der Curve α und ΦN die lothrechte Geschwindigkeit, welche der Schnittpunkt A auf der Geraden g besitzt.

Denken wir uns in Fig. **63** die Gerade g um einen unendlich kleinen Winkel $A\Phi A' = d\chi$ gedreht, dann durchläuft der Punkt A auf der Curve α die unendlich kleine Strecke $AA' = ds$. Die Gerade $\Phi A'$ schneidet die auf ΦA senkrechte Gerade AA_v^n in einem Punkte a unter einem Winkel, der von einem rechten Winkel um eine unendlich kleine Grösse abweicht. Demnach kann das unendlich kleine Dreieck $AA'a$ als ein rechtwinkeliges betrachtet werden und ist dem Dreieck $AN\Phi$ ähnlich.

Da nun

$$\frac{Aa}{ds} = \frac{\Phi A}{AN} \text{ und } Aa = \Phi A \,.\, d\chi$$

ist, so ergiebt sich die unendlich kleine Winkeländerung

$$d\chi = \frac{ds}{AN}.$$

In Fig. **64** bewegt sich ein Punkt A einer starren Geraden Ag auf einer Curve α mit der Geschwindigkeit AA_v, während diese Gerade berührend an einer Curve γ entlang gleitet. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{G}$ den Berührungspunkt, mit Γ den betreffenden Krümmungsmittelpunkt der Curve γ. Um die Geschwindigkeit der Längenänderung der Strecke oder Tangente $\mathfrak{G}A$ zu erhalten, zerlegen wir Geschwindigkeit AA_v in die Componenten $A\mathfrak{A}_v$, $A\mathfrak{A}_v^t$, von denen die erste senkrecht auf $A\Gamma$ steht und die zweite in der Geraden Ag liegt. Denken wir uns die starre Gerade Ag momentan um den festen Krümmungsmittelpunkt Γ gedreht, so dass der mit A coincidirende Punkt $\mathfrak{A}$ der Geraden g die auf $\Gamma\mathfrak{A}$ senkrechte Geschwindigkeit $A\mathfrak{A}_v$ erhält, und verschieben wir zugleich die starre Gerade Ag in sich selbst mit der Geschwindigkeit $A\mathfrak{A}_v^t$, dann repräsentirt die aus diesen beiden Geschwindigkeiten hervorgehende Resultante AA_v die Geschwindigkeit, welche A auf seiner Bahn α besitzt. Da nun aber die Strecke $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$ während einer unendlich kleinen Drehung um Γ constant bleibt, so stellt $A\mathfrak{A}_v^t$ die Geschwindigkeit der Längenänderung von $\mathfrak{G}A$ dar. Diese Geschwindigkeit wird also erhalten, wenn AA_v gegeben ist, indem wir $A_v\mathfrak{A}_v^t$ senkrecht $A\Gamma$ ziehen.

Der Fusspunkt A_v^t des von A_v auf g gefällten Lothes bestimmt die Geschwindigkeit AA_v^t des momentan mit $\mathfrak{G}$ coincidirenden Punktes der Geraden g; demnach stellt $\mathfrak{A}_v^t A_v^t$ die Geschwindigkeit dar, mit welcher der Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ sich auf der Curve γ bewegt.

Einfacher ergeben sich noch diese Beziehungen, wenn wir in Fig. 64 die lothrechte Geschwindigkeit AA_v des auf α bewegten Punktes A als gegeben betrachten. Ziehen wir von A_v auf g die Senkrechte $A_v A_v^t$, die $A\Gamma$ in $\mathfrak{A}_v$ schneidet, dann repräsentirt $A_v^t \mathfrak{A}_v = \mathfrak{G}\mathfrak{G}_v$ die lothrechte Geschwindigkeit des Berührungspunktes $\mathfrak{G}$ auf der Curve γ und $\mathfrak{A}_v A_v$ die lothrechte Geschwindigkeit der Längenänderung von $\mathfrak{G}\mathfrak{A}$. Wenn insbesondere der Endpunkt A_v der lothrechten Geschwindigkeit des auf α bewegten Punktes A in der Geraden $\mathfrak{G}\Gamma$ liegt, dann coincidirt $\mathfrak{G}_v$ mit Γ und die Geschwindigkeit des Berührungspunktes $\mathfrak{G}$ auf der Hüllbahncurve γ ist gleich dem Krümmungsradius $\mathfrak{G}\Gamma$ derselben.

Bewegt sich ein Punkt A in Fig. 64 auf einer Bahncurve α mit einer Geschwindigkeit AA_v und ein zweiter Punkt $\mathfrak{G}$ mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_v$, die beständig nach A gerichtet ist, so wird der Punkt $\mathfrak{G}$ bei einer gegebenen Beziehung dieser Geschwindigkeiten eine Curve γ beschreiben, die eine Verfolgungscurve[1]) genannt wird. Wenn die genannten Geschwindigkeiten oder beziehlich die entsprechenden lothrechten Geschwindigkeiten AA_v, $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_v$ gegeben sind, können wir nach dieser Darlegung leicht auf der Geraden $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_v$ den Krümmungsmittelpunkt Γ der Verfolgungscurve γ bestimmen. Wir fällen von A_v auf $\mathfrak{G}A$ das Loth $A_v A_v^t$, machen auf demselben $A_v^t \mathfrak{A}_v = \mathfrak{G}\mathfrak{G}_v$ oder ziehen $\mathfrak{G}_v \mathfrak{A}_v \parallel \mathfrak{G}A$, dann schneidet $A\mathfrak{A}_v$ die auf $\mathfrak{G}A$ senkrechte Gerade $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_v$ in dem gesuchten Krümmungsmittelpunkte Γ der Verfolgungscurve γ.[2])

Wenn insbesondere die Strecke $A\mathfrak{G}$ constant ist, dann wird die von $\mathfrak{G}$ beschriebene Curve die Trajectorie des Punktes $\mathfrak{G}$ bezüglich der Curve α genannt. Die Trajectorie wird also von dem einen Endpunkte $\mathfrak{G}$ der constanten Strecke $\mathfrak{G}A$ erzeugt, wenn wir den anderen Endpunkt A auf einer Curve α führen. In diesem Falle ist die lothrechte Geschwindigkeit $\mathfrak{A}_v A_v$ der Längenänderung von $\mathfrak{G}A$ gleich Null; dem zufolge ist der Schnittpunkt

---

[1]) Die Verfolgungscurve stammt von Bouguer, *Mémoires de l'Académie*. 1732. p. 1.

[2]) Eine umständlichere Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes der Verfolgungscurve hat D'Orcagne mitgetheilt im *Bulletin de la Société mathématique*. 1884. T. XI. p. 134.

von $\mathfrak{G}\mathfrak{G}_v$ und AA_v der Krümmungsmittelpunkt der Trajectorie, und dieser Schnittpunkt ist auch der Pol der bewegten starren Strecke $\mathfrak{G}A$.

b) In Fig. **65** gleitet eine Gerade g als Tangente an einer Curve γ und schneidet zwei feste Curven α, β stetig in den Punkten A, B. Es sei die Geschwindigkeit BB_v, mit welcher sich der Schnittpunkt B auf der Curve β bewegt, und der Berührungspunkt $\mathfrak{G}$, den g mit γ bildet, gegeben. Um nun die Geschwindigkeit AA_v zu bestimmen, die der Schnittpunkt A auf der Curve α besitzt, stützen wir uns darauf, dass wir nach Art. 10 die Bewegung der Geraden g während eines Zeitelementes ansehen können als eine unendlich kleine Drehung um den Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ und eine gleichzeitige unendlich kleine Verschiebung in sich selbst, welche auf die Bewegung der Schnittpunkte keinen Einfluss hat. Wir bestimmen mittelst der zu g parallelen Geraden $B_vB_v^n$ die auf g senkrechte Componente BB_v^n der Geschwindigkeit BB_v; ferner mittelst der Geraden $\mathfrak{G}B_v^n$ die auf g senkrechte Componente AA_v^n der Geschwindigkeit des Punktes A und ziehen durch A_v^n zu g die Parallele $A_v^nA_v$, die auf der Tangente der Curve α die Geschwindigkeit AA_v giebt. Die Bestimmung dieser Geschwindigkeit können wir noch in folgender Weise vereinfachen. Wir ziehen die Gerade $\mathfrak{G}B_v$, dann parallel zu BB_v die Gerade AA' bis an $\mathfrak{G}B_v$ und ferner durch A' zu g die Parallele $A'A_v$. Diese liefert die Geschwindigkeit AA_v, wie sich leicht aus den ähnlichen Dreiecken $AA'A_v^n$, $BB_vB_v^n$ ergiebt.[1]

Aus dieser Darlegung erfolgt die analoge Bestimmungsweise bezüglich der lothrechten Geschwindigkeiten. In Fig. **66** ist durch $BB_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit gegeben, mit welcher sich der Schnittpunkt B auf der Curve β bewegt. Wir ziehen die Gerade $\mathfrak{G}B_\mathfrak{v}$, dann zu $BB_\mathfrak{v}$ die Parallele AA^I bis an $\mathfrak{G}B_\mathfrak{v}$ und ferner auf g die Senkrechte $A^IA_\mathfrak{v}$, welche auf der Normalen der Curve α die lothrechte Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ abschneidet. Durch gleichsinnige Drehung der lothrechten Geschwindigkeiten $AA_\mathfrak{v}$, $BB_\mathfrak{v}$ um einen rechten Winkel erhalten wir die betreffenden Geschwindigkeiten AA_v, BB_v der Schnittpunkte A, B.

Sind in Fig. **65** die beiden Geschwindigkeiten AA_v, BB_v der Schnittpunkte A, B gegeben, welche die bewegte Gerade g mit den Bahncurven α, β bildet, so können wir auf Grund der abge-

---

[1] J. Somoff, *Theoretische Mechanik*, I. Theil: Kinematik, deutsch von Ziwet. 1878. S. 406.

leiteten Beziehung den Berührungspunkt 𝔊 construiren, den die Gerade g mit ihrer Hüllbahncurve γ bildet. Wir ziehen $A_v A' \parallel g$, $AA' \parallel BB_v$ und ferner die Gerade $B_v A'$, die g im gesuchten Berührungspunkte 𝔊 trifft. Wenn dagegen in Fig. **66** die beiden lothrechten Geschwindigkeiten AA_v, BB_v gegeben sind, ziehen wir $A_v A' \perp g$, $AA' \parallel BB_v$ und hierauf die Gerade $B_v A'$, welche auf g den Berührungspunkt 𝔊 bestimmt.

c) Um die Bestimmung des Berührungspunktes oder der betreffenden Geschwindigkeit noch in anderer Weise auszuführen, denken wir uns in Fig. **67** die Gerade g, deren Schnittpunkte A, B auf den Curven α, β die Geschwindigkeiten AA_v, BB_v besitzen, so bewegt, dass A, B als Schnittpunkte der Geraden g mit den Curventangenten α_t, β_t auf diesen die constanten Geschwindigkeiten AA_v, BB_v besitzen; dann sind die Punktreihen, welche von den zu verschiedenen Zeitmomenten gehörenden Lagen der gleichzeitig bewegten Punkte A, B auf den Tangenten α_t, β_t gebildet werden, ähnliche Punktreihen. Die Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punkte oder die verschiedenen Lagen der so bewegten Geraden g umhüllen eine Parabel, an welcher die vier Geraden g, $A_v B_v$, α_t, β_t Tangenten sind. Diese Bewegung der Geraden g in eine unendlich nahe Nachbarlage ist aber dieselbe, als wenn ihre beiden Schnittpunkte A, B sich während einer unendlich kleinen Zeit auf den Curven α, β bewegen. Demzufolge ist der Berührungspunkt 𝔊, den die Gerade g mit der durch jene vier Tangenten bestimmten Parabel bildet, auch identisch mit dem Berührungspunkte von g an der erzeugten Hüllbahncurve γ.

Nach den Lehren der projectiven Geometrie ergiebt sich aus einer Specialisirung des Brianchon'schen Satzes eine einfache Bestimmung dieses Berührungspunktes. Sind in Fig. **68** fünf Tangenten I, II, III, IV, V eines Kegelschnittes gegeben, so erhalten wir den Berührungspunkt 𝔊 auf einer Tangente, z. B. auf I, indem wir die Schnittpunkte $I.II$, $IV.V$, sowie $V.I$, $II.III$ verbinden, dann durch den Schnittpunkt Ω dieser beiden Verbindungsgeraden und durch den Schnittpunkt $III.IV$ eine Gerade ziehen, die I im Berührungspunkte 𝔊 trifft. Wir haben bei dieser Construction nur zwei der vier Schnittpunkte verwendet, welche die Tangente I mit den vier übrigen Tangenten erzeugt; da aber aus diesen vier Punkten sechs Combinationen zu zweien Punkten gebildet werden können, so folgen hieraus sechs verschiedene Bestimmungsweisen des Berührungspunktes 𝔊.

Der durch die fünf Tangenten bestimmte Kegelschnitt ist eine Parabel, wenn eine von diesen Tangenten, z. B. IV im Unendlichen liegt. Dann befinden sich auch die beiden Punkte $III.IV$, $IV.V$ im Unendlichen und die betreffenden Constructionsgeraden sind beziehlich zu III und zu V parallel. Uebertragen wir diesen Fall in Fig. **67** auf die vier Parabeltangenten g, α_t, β_t, A_vB_v, die wir entsprechend mit I, II, III, V bezeichnen wollen; so ergiebt sich der Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ auf g, indem wir die Verbindungsgerade $V.I—II.III$, ferner bis an dieselbe $A\Omega \parallel A_vB_v$ und dann $\Omega\mathfrak{G} \parallel BB_v$ ziehen.

Durch eine andere Combination gewinnen wir die folgende Construction. Wir bestimmen den Schnittpunkt O der Geraden AB_v und der zu AA_v Parallelen BO, ziehen dann die Gerade $O\mathfrak{G}$ parallel A_vB_v und erhalten so durch dieselbe auf g den Berührungspunkt $\mathfrak{G}$. Wenn umgekehrt der Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ und die Geschwindigkeit BB_v gegeben ist, liefert diese letzte Beziehung auch die Geschwindigkeit AA_v. Denn mittelst der Geraden AB_v und der zu α_t Parallelen BO ergiebt sich der Punkt O und durch die zu $O\mathfrak{G}$ Parallele B_vA_v wird die Geschwindigkeit AA_v auf α_t bestimmt. In Fig. **67** ist noch eine dritte Construction ausgeführt und durch punktirte Linien gekennzeichnet. Die Gerade $A_v\mathfrak{O}$ ist parallel g, die Gerade $V.I—\mathfrak{O}$ parallel BB_v gezogen und der Schnittpunkt $\mathfrak{O}$ mit $II.III$ verbunden. Dann bestimmt diese Verbindungsgerade $II.III—\mathfrak{O}$ auf g den Berührungspunkt $\mathfrak{G}$. Umgekehrt liefert diese Construction, wenn $\mathfrak{G}$ und A_v gegeben sind, die Geschwindigkeit BB_v.

Beispiele für die Erzeugung der Curven, für die Construction der Tangenten oder Normalen und der Krümmungsmittelpunkte vermittelst Geschwindigkeiten.

34. **Mechanische Erzeugung der Kegelschnitte und Construction ihrer Tangenten.** Bei einer Ellipse, Fig. **69** Taf. IV, ist die Summe der Abstände eines Punktes A derselben von den Brennpunkten Φ, Λ gleich der Hauptaxe DE; also in Zeichen:

$$\Phi A + A\Lambda = DE.$$

Die Ellipse α wird demnach auch mechanisch beschrieben, indem wir einen Faden $\Phi A\Lambda$, dessen Länge gleich DE ist, mit seinen Enden in Φ, Λ befestigen, oder einen geschlossenen Faden von der Gesamtlänge $\Phi A + A\Lambda + \Lambda\Phi = DE + \Lambda\Phi$ über zwei in Φ, Λ eingeschlagene Nadeln legen und einen schreibenden Stift A so bewegen, dass durch denselben der Faden straff angezogen wird. Bei dieser Bewegung sind die Längenänderungen der Fadentheile ΦA, ΛA entgegengesetzt gleich und demnach sind auch die Geschwindigkeiten AA', AA'' dieser Längenänderungen gleich, aber auf $A\Phi$, $A\Lambda$ in ungleichem Sinne zu nehmen. Tragen wir auf die Verlängerung von ΦA und auf ΛA die gleichen Strecken AA', AA'' ab und errichten wir auf ΦA, ΛA resp. die Senkrechten $A'A_v$, $A''A_v$, so liefert deren Schnitt A_v mit A verbunden die entsprechende Geschwindigkeit AA_v des Punktes A auf der Ellipse α und damit zugleich die Tangente an derselben.[1]) Wenn umgekehrt diese Geschwindigkeit AA_v gegeben ist, werden durch die Senkrechten die gleichen Geschwindigkeiten jener Längenänderungen bestimmt. Wegen der symmetrisch congruenten Dreiecke $AA'A_v$, $AA''A_v$ halbirt die Ellipsentangente AA_v den Winkel $A'_vAA''_v$ und die Ellipsennormale α_n den Winkel $\Phi A\Lambda$, welchen die beiden von den Brennpunkten ausgehenden Fahrstrahlen ΦA, ΛA bilden.

Bei der Hyperbel in Fig. **70** ist die Differenz der Abstände eines Punktes A derselben von den Brennpunkten Φ, Λ gleich der Hauptaxe DE; also in Zeichen:

$$\Phi A - A\Lambda = DE.$$

Dreht sich eine Linealkante ΦU um den Brennpunkt Φ und ist ein Faden mit seinem einen Ende in einem Punkte U dieser Kante, mit seinem anderen Ende in dem Brennpunkte Λ befestigt und um die die Länge DE kürzer als die Strecke $U\Phi$, so wird mittelst eines schreibenden Stiftes A, der an dem rotirenden Lineal geführt den Faden straff zieht, die Hyperbel α mechanisch erzeugt. Bei dieser Bewegung sind die Geschwindigkeiten AA', AA'' der

---

[1]) Die Methode, vermittelst Geschwindigkeiten Tangenten zu bestimmen, gab Personier aus Roberval, der allgemein nach seinem Geburtsorte Roberval genannt wird, in seiner Abhandlung: *Sur la composition des mouvemens, et sur le moyen de trouver les touchantes. Mémoires de l'Académie.* 1730. T. 6. p. 1. Aber seine Begründung der Construction der Kegelschnitttangenten ist nicht richtig, weil er die Geschwindigkeit AA_v als die Resultante aus den Geschwindigkeiten AA', AA'' betrachtet und als Diagonale des durch $A'AA''$ bestimmten Parallelogramms erhält. Vergl. Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie.* 1862. T. I. p. 452. — Olivier, *Applications de la géométrie descriptive.* 1847. p. 100. — Bour, *Cours de mécanique et machines,* 1er fasc. *Cinématique.* 1865. p. 49.

Längenänderungen der Strecken ΦA, ΛA gleich und demnach bestimmen die auf diesen Strecken errichteten Senkrechten $A'A_v$, $A''A_v$ durch ihren Schnitt A_v die entsprechende Geschwindigkeit AA_v des Punktes A auf der Hyperbel α resp. die Tangente an derselben. Die Hyperbeltangente AA_v halbirt somit den Winkel $\Phi A \Lambda$, welchen die beiden von den Brennpunkten ausgehenden Fahrstrahlen ΦA, ΛA bilden, und die Hyperbelnormale α_n halbirt den Winkel $\Lambda A U$.

Wenn bei der Hyperbel in Fig. **70** der Brennpunkt Φ auf der Geraden ΛE im Unendlichen liegt, dann geht die Hyperbel in eine Parabel über, und anstatt der Drehung des Lineals um Φ tritt eine senkrecht zu ΛE gerichtete Parallelbewegung des mit ΛE parallel gelegenen Lineals. In Fig. **71** wird diese Parallelbewegung durch das bei Z rechtwinkelige Winkeldreieck TZU erzeugt, dessen Kante ZT sich an dem festen Lineal HJ senkrecht zu ΛE verschiebt. Der beschreibende Stift A wird dann bei straffer Anziehung des Fadens die Parabel α mechanisch erzeugen. In diesem Falle sind die Geschwindigkeiten AA', AA'' der Längenänderungen der Strecken ZA, ΛA gleich, und die auf den Geraden ZA, ΛA errichteten Senkrechten $A'A_v$, $A''A_v$ bestimmen durch ihren Schnitt A_v die Geschwindigkeit AA_v des Punktes A auf der Parabel resp. die Tangente an derselben. Die Parabeltangente AA_v halbirt den Winkel $ZA\Lambda$; und wenn Θ ihren mit der Axe ΛE gebildeten Schnitt bezeichnet, so folgt, dass $\Lambda\Theta = \Lambda A$ ist. Bezeichnet N den Schnittpunkt, welchen die Normale $A\alpha_n$ der Parabel mit der Axe $E\Lambda$ derselben bildet, so ist wegen des rechten Winkels $\Theta A N$ auch die Strecke $\Lambda N = \Lambda A$. Wenn die auf $E\Lambda$ senkrechte Linealkante HJ so gelegt wird, dass $AZ = A\Lambda$ ist, dann sind für jeden Parabelpunkt die Abstände desselben von dem Brennpunkte Λ und der Geraden HJ gleich, und der Parabelscheitel E halbirt den Abstand $\Lambda\Delta$ des Brennpunktes Λ von der Geraden HJ, so wie die Strecke von Θ bis zum Fusspunkte Ξ des von A auf die Axe gefällten Lothes. Die Gerade HJ heisst in dieser besonderen Lage die Leitlinie der Parabel.

35. **Constructive Erzeugung des Cartesischen Ovals und Construction der Tangente an demselben.** Wir wollen zuförderst einen allgemeineren Fall betrachten, aus dem die Construction der Tangente an dem Cartesischen Oval als besonderer Fall hervorgeht. Sind in Fig. **72** zwei Curven k', k'' gegeben und ist die Curve α der geometrische Ort eines Punktes A, dessen Abstände AA', AA'' von den Curven k', k'' in dem constanten Verhältnisse

$$\frac{AA'}{AA''} = a$$

stehen, so kann die Construction der Tangente an der Curve α durch die folgende Ueberlegung abgeleitet werden. Wir denken uns den Punkt A unendlich wenig bewegt, und bezeichnen die entsprechenden unendlich kleinen Längenänderungen der Abstände AA', AA'' resp. mit dAA', dAA''. Demnach ist:

$$\frac{AA' + dAA'}{AA'' + dAA''} = a,$$

und somit

$$\frac{dAA'}{dAA''} = a.$$

Die unendlich kleinen Längenänderungen verhalten sich wie die Geschwindigkeiten v', v'' der Längenänderungen der Abstände, und folglich ist

$$\frac{v'}{v''} = \frac{AA'}{AA''}.$$

Errichten wir also auf AA' die Senkrechte $A'A_v$, auf AA'' die Senkrechte $A''A_v$ und verbinden wir ihren Schnitt A_v mit A, dann ist AA_v die Tangente an der Curve α.

Das Oval des Cartesius[1]), welches Fig. **73** darstellt, ist ein specieller Fall der betrachteten Curve, und wird dadurch definirt, dass die Abstände eines Punktes A desselben von zweien Brennpunkten Φ, Λ in der folgenden, die zwei Constanten a, b enthaltenen Beziehung

$$\Phi A - a \,.\, \Lambda A = b$$

stehen. Behufs der Construction des Cartesischen Ovals α beschreiben wir um Φ mit dem gegebenen Radius $b = \Phi A'$ einen Kreis k', und ferner um Φ mit einem angenommenen Fahrstrahle ΦA als Radius einen Kreisbogen; dann ist durch

$$\Lambda A = \frac{\Phi A - b}{a} = \frac{A'A}{a}$$

der zweite entsprechende Fahrstrahl ΛA bestimmt. Mit diesem so erhaltenen Fahrstrahle wird um Λ ein Kreisbogen beschrieben, der jenen Kreisbogen im Punkte A des von der Geraden $\Phi\Lambda$ symmetrisch getheilten Ovals α schneidet, bei welchem beispielsweise $a = \frac{1}{2}$ genommen ist.

---

[1]) **Descartes**, *Géométrie.* 1705. p. 86. — **Chasles**, *Geschichte der Geometrie,* deutsch von **Sohncke**. 1839. S. 369.

Somit ergiebt sich die Tangente AA_v an dem Oval, indem wir auf ΦA die Senkrechte $A'A_v$, auf ΛA die Senkrechte ΛA_v errichten und ihren Schnitt A_v mit A verbinden.[1])

Geben wir der Constante b das entgegengesetzte Vorzeichen, dann erhalten wir ein zweites Oval β. Bei diesem ist, wenn B' den zweiten Schnitt bezeichnet, welchen ΦA rückwärts verlängert mit dem Kreise k' bildet, ein Punkt B des Ovals bestimmt durch die folgende Beziehung

$$\Lambda B = \frac{\Phi B + b}{a} = \frac{B'B}{a}.$$

In diesem Falle errichten wir auf ΦB die Senkrechte $B'B_v$, auf ΛB die Senkrechte ΛB_v, dann giebt der Schnitt B_v dieser Senkrechten mit B verbunden die Tangente BB_v an dem Oval β.

Bezeichnen w_φ, w_λ die Winkel, welche die beiden Fahrstrahlen $A\Phi$, $A\Lambda$ mit der Normalen $A\alpha_n$ des Ovals α bilden, dann ergiebt sich, weil $\sphericalangle AA_vA' = w_\varphi$ und $\sphericalangle AA_v\Lambda = w_\lambda$ ist,

$$\frac{\sin w_\varphi}{\sin w_\lambda} = \frac{A'A}{\Lambda A} = a.$$

Hieraus folgt, wenn das Cartesische Oval zwei Medien trennt, welche die Lichtstrahlen in einem bestimmten Brechungsverhältnisse brechen, so werden alle von dem einen Brennpunkte, z. B. von Φ, ausgehenden Lichtstrahlen derart gebrochen, dass die gebrochenen Lichtstrahlen durch den anderen Brennpunkt Λ gehen. Aus dem Cartesischen Oval gehen als Specialfälle die Ellipse und Hyperbel hervor, wenn die Constante a resp. gleich -1 oder $+1$ genommen wird. Ist insbesondere $b = 0$, dann vereinigen sich die beiden Ovale α, β zu einem Kreise.

36. **Constructive Erzeugung des Cassinischen Ovals und Construction der Tangente an demselben.** Wir betrachten zunächst einen allgemeineren Fall, aus dem die Construction der Tangente an dem Cassinischen Oval als besonderer Fall hervorgeht. Sind in Fig. 74 zwei Curven k', k'' gegeben und ist die Curve α der geometrische Ort eines Punktes A, dessen Abstände AA', AA'' von den Curven k', k'' ein constantes Product

$$AA' . AA'' = a^2$$

bilden, so kann die Construction der Tangente an der Curve α in folgender Weise abgeleitet werden. Wir denken uns den Punkt A unendlich wenig bewegt, und bezeichnen die entspre-

[1]) Vergl. P. Serret, *Méthodes en géométrie.* 1855. p. 79.

chenden unendlich kleinen Längenänderungen der Abstände AA', AA'' resp. mit dAA', dAA''. Demnach ist:

$$(AA' + dAA')(AA'' + dAA'') = a^2$$

$$AA'.AA'' + AA'.dAA'' + AA''.dAA' + dAA'.dAA'' = a^2.$$

Hieraus folgt, weil das letzte unendlich kleine Glied zweiter Ordnung gegen die unendlich kleinen Glieder erster Ordnung verschwindet,

$$\frac{dAA'}{dAA''} = -\frac{AA'}{AA''}.$$

Da die Geschwindigkeiten v', v'' der Längenänderungen der Abstände AA', AA'' sich wie die entsprechenden unendlich kleinen Längenänderungen verhalten, so ist

$$\frac{v'}{v''} = -\frac{AA'}{AA''}.$$

Um die Tangente AA_v an der Curve α zu erhalten, errichten wir hiernach auf AA' die Senkrechte $A'A_v$, verlängern, weil der Quotient negativ ist, die Strecke $A''A$ um ihre eigene Länge, machen also $AA^{II} = A''A$, und errichten auf AA^{II} die Senkrechte $A^{II}A_v$; dann wird durch den Schnitt A_v dieser beiden Senkrechten die Tangente AA_v bestimmt.

Das Oval α des Cassini[1]), welches Fig. **75** darstellt, ist ein besonderer Fall der betrachteten Curve und dadurch definirt, dass das Product der Abstände eines Punktes A derselben von zweien festen Punkten Φ, Λ constant ist; also in Zeichen

$$\Phi A \,.\, \Lambda A = a^2.$$

Um das durch diese Gleichung bestimmte Cassinische Oval α zu construiren, beschreiben wir über $\Phi\Lambda$ als Durchmesser den Kreis $\varkappa$, dessen Mittelpunkt mit M bezeichnet ist. An diesen Kreis legen wir die Tangente $UT = a$ und machen auf der Geraden $\Phi\Lambda$, die das Oval symmetrisch theilt, die Strecke $MD = ME = MU$. Wenn wir ferner durch D eine beliebige Gerade ziehen, die den Kreis $\varkappa$ in den Punkten X, Y schneidet, dann ist das Product der Abschnitte $DX.DY = a^2$, und folglich erhalten wir einen Punkt A des Ovals α, indem wir $\Phi A = DX$, $\Lambda A = DY$ machen.

Die Tangente AA_v an dem Cassinischen Oval α ergiebt sich hiernach, indem wir auf dem Fahrstrahle ΦA die Senkrechte ΦA_v errichten, dann auf der Verlängerung des anderen Fahrstrahles ΛA die Strecke $AA^{II} = \Lambda A$ machen und auf ΛA^{II} die Senk-

---

[1]) Vergl. den Artikel *„Sur l'ellipse astronomique de M. Cassini"*. *Histoire de l'Académie.* 1703. p. 67.

rechte $A^{II}A_v$ errichten. Der Schnittpunkt A_v dieser beiden Senkrechten liefert mit A verbunden die Tangente AA_v.[1])

Das Cassinische Oval besteht aus einem Oval α oder aus zweien symmetrisch congruenten Ovalen γ, γ', je nachdem $a \gtrless \frac{1}{2}\Phi\Lambda$ ist; und es geht in eine Lemniscate β über, wenn $a = \frac{1}{2}\Phi\Lambda$ ist.

37. **Constructive Erzeugung der Niveaulinien und Kraftlinien zweier electrisch geladener Punkte und Construction der Tangenten.** Wir betrachten zuerst einen allgemeineren Fall, in welchem die Niveaulinien als Specialfall enthalten sind. In Fig. 76 sei die Curve α der geometrische Ort eines Punktes A, dessen Abstände AA', AA'' von den beiden gegebenen Curven k', k'' die Bedingung

$$\frac{a}{AA'} + \frac{b}{AA''} = \frac{1}{c}$$

erfüllen, in der a, b, c constante Grössen sind, und der wir auch die folgende Form geben können:

$$a \, . \, AA'' + b \, . \, AA' = \frac{AA' . AA''}{c}.$$

Wir denken uns den Punkt A unendlich wenig bewegt, und bezeichnen die entsprechenden unendlich kleinen Längenänderungen der Abstände AA', AA'' resp. mit dAA', dAA''. Demnach erhalten wir die Gleichung

$$a\,(AA'' + dAA'') + b\,(AA' + dAA') = \\ \frac{1}{c}\,(AA' + dAA')\,(AA'' + dAA''),$$

aus welcher nach Weglassung der unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung

$$\frac{dAA'}{dAA''} = -\frac{a \, . \, c - AA'}{b \, . \, c - AA''}$$

folgt. Bezeichnen v', v'' die Geschwindigkeiten der Längenänderungen der Abstände AA', AA'' und wird c mittelst der ersten Gleichung eliminirt, dann ergiebt sich

$$\frac{v'}{v''} = -\frac{a \, . \, c - AA'}{b \, . \, c - AA''} = -\frac{b \, . \, \overline{AA'}^2}{a \, . \, \overline{AA''}^2}.$$

Behufs der Construction der Tangente AA_v an der Curve α

[1]) Eine umständlichere Construction der Tangente an dem Cassini'schen Oval giebt schon Varignon, *Mémoires de l'Académie.* 1703. p. 181. Die abgeleitete einfachere Construction stammt von Bobillier, *Cours de géométrie.* 1870. p. 216. Vergl. auch Steiner's Gesammelte Werke. 1882. B. 2. S. 19, und *Journal für reine und angewandte Mathematik.* 1835. B. XIV. S. 80.

machen wir hiernach auf AA' die Strecke $AA^I = b.\overline{AA'}^2$, ferner auf der Verlängerung von $A''A$ die Strecke $AA^{II} = a.\overline{AA''}^2$, und errichten auf AA^I die Senkrechte A^IA_v, auf AA^{II} die Senkrechte $A^{II}A_v$, dann ist der Schnitt A_v dieser beiden Senkrechten ein Punkt der Tangente an der Curve α.

Bei den Niveaulinien erfüllen die Abstände eines Punktes A derselben von zwei festen Punkten Φ, Λ die Gleichung:

$$\frac{a}{\Phi A} + \frac{b}{\Lambda A} = \frac{1}{c},$$

aus welcher

$$\frac{\Phi A}{c} = \frac{a.\Lambda A}{\Lambda A - b.c}$$

folgt. Hiernach können wir zu jedem angenommenen Fahrstrahle ΦA den entsprechenden ΛA ohne Schwierigkeit construiren, und somit mehrere Punkte der Niveaulinie bestimmen. Diese Niveaulinie hat die Eigenschaft, dass alle ihre Punkte bezüglich zweier im Verhältnisse $a:b$ electrisch geladener oder magnetischer Punkte gleiches Potential besitzen.[1])

In Fig. 77 sind für $a = +1$, $b = -1$ die bezüglich $\Phi\Lambda$ symmetrischen Niveaulinien α_1, α_2, α_3, α_∞, denen die Werthe von $c = \frac{1}{2}\Phi\Lambda$, $1.\Phi\Lambda$, $2.\Phi\Lambda$, ∞ entsprechen, nach der aus der Gleichung

$$\frac{1}{\Phi A} - \frac{1}{\Lambda A} = \frac{1}{c}$$

hervorgehenden Beziehung

$$\frac{\Phi A}{c} = \frac{\Lambda A}{\Lambda A + c}$$

zur Hälfte construirt. Für $c = \infty$ erhalten wir die in der Mitte auf $\Phi\Lambda$ senkrechte Gerade α_∞.

Bei diesen Niveaulinien ist demnach

$$\frac{v'}{v''} = \frac{\overline{\Phi A}^2}{\overline{\Lambda A}^2}.$$

Um z. B. die Tangente AA_v an der Niveaulinie α_2 zu erhalten, betrachten wir den einen Fahrstrahl, etwa ΛA, als Einheit; machen dann auf $A\Lambda$ die Strecke $A\Xi = A\Phi$, ziehen durch Ξ zu $\Lambda\Phi$ die Parallele ΞA^I bis an $A\Phi$, dem zufolge ist $AA^I = \overline{\Phi A}^2$. Hierauf

---

[1]) Vergl. Zech's Mittheilung in der *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. 1867. B. 12. S. 277. — Maxwell, *Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus,* deutsch von Weinstein. 1883. B. I. Cap. VII.

errichten wir auf AA^I die Senkrechte $A^I A_v$, auf $A\Lambda$ die Senkrechte ΛA_v, dann liefert der Schnittpunkt A_v dieser Senkrechten mit A verbunden die Tangente AA_v an der Niveaulinie α_2.

Eine zweite Construction dieser Tangente ergiebt sich, weil auch das Verhältniss der Geschwindigkeiten

$$\frac{v'}{v''} = \frac{c - A\Phi}{c + A\Lambda}$$

ist, indem wir auf $A\Phi$ die Strecke $A\mathfrak{A}^I = c - A\Phi$, ferner auf $A\Lambda$ die Strecke $A\mathfrak{A}^{II} = c + A\Lambda$ machen, dann auf $A\mathfrak{A}^I$ die Senkrechte $\mathfrak{A}^I\mathfrak{A}_v$, auf $A\mathfrak{A}^{II}$ die Senkrechte $\mathfrak{A}^{II}\mathfrak{A}_v$ errichten, und somit erhalten wir vermittelst des Schnittpunktes $\mathfrak{A}_v$ dieser Senkrechten die Tangente $A\mathfrak{A}_v$. Diese zweite Construction der Tangente erfordert die Constante c, während die erste nur allein die Lagenbeziehung der drei Punkte Φ, A, Λ verlangt.

Eine Kraftlinie wird dadurch definirt, dass ihre Tangente eines jeden Punktes mit der Richtung der resultirenden Kraft zusammenfällt. Eine Kraftlinie durchschneidet die Niveaulinien rechtwinkelig und demnach liefert jene erste Construction der Tangente an der Niveaulinie, weil die Constante c nicht zur Verwendung kommt, zugleich die Normale AA_v an der betreffenden Kraftlinie.

Wenn wir die Winkel $A\Phi l$, $A\Lambda l$, welche die Fahrstrahlen ΦA, ΛA mit der durch Φ, Λ gehenden Geraden l bilden, resp. mit φ, λ bezeichnen, dann sind die Punkte einer Kraftlinie durch die Gleichung

$$a \cos\varphi + b \cos\lambda = \varepsilon$$

bestimmt. In dem angenommenen Falle $a = +1$, $b = -1$ erhalten wir die Beziehung

$$\cos\varphi = \varepsilon + \cos\lambda,$$

nach derselben sind, indem die Strecke $\Phi\Lambda$ als Einheit betrachtet wurde, für die Werthe $\varepsilon = \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, 2$ die entsprechenden Kraftlinien $\varkappa_I$, $\varkappa_{II}$, $\varkappa_{III}$, $\varkappa_{IV}$, $\varkappa_V$ in Fig. 77 gezeichnet. Die Kraftlinie $\varkappa_V$, welche dem Werthe $\varepsilon = 2$ entspricht, ist die Verbindungsgerade der Punkte Φ, Λ. Die gezeichneten Niveaulinien und Kraftlinien treten auf bei zwei mit gleicher entgegengesetzter Electricität geladener Punkte Φ, Λ oder bei einem Magnet, dessen Pole Φ, Λ sind.

38. **Constructive Erzeugung der zweitheiligen Focalcurve und Construction der Normalen an derselben.** In Fig. 78 sind die drei festen Punkte Φ, H, J gegeben; auf der Verbindungsstrecke HJ

ist in der Mitte Q eine Gerade ζ senkrecht gezogen. Wenn sich nun die Gerade Φg, die ζ in M schneidet, um Φ dreht und auf derselben beiderseits von M die beiden Strecken MA, MB gleich dem Abstande MH gemacht werden, so sind A, B Punkte der zweitheiligen Focalcurve $\alpha\beta$.[1]) Der Punkt A erzeugt ein durch die Punkte Φ, H gehendes Oval α, der Punkt B einen getrennten durch J gehenden Ast β, der sich ins Unendliche erstreckt. Diese Focalcurve ist also das Erzeugniss eines Kreisbüschels, dessen reelle Grundpunkte HJ sind, und eines Strahlenbüschels, dessen Strahlen von Φ aus durch die betreffenden Kreismittelpunkte gehen.

Um im Punkte A an der Focalcurve die Normale zu construiren, nehmen wir an: der momentan mit M coincidirende Punkt der um Φ rotirenden Gerade Φg besitze die lothrechte Geschwindigkeit $M\Phi$. Da aber der Schnittpunkt M sich auf der Geraden ζ bewegt, so ist, wenn wir auf Φg die Senkrechte ΦM_v, auf ζ die Senkrechte MM_v errichten, welche die erste in M_v schneidet, durch MM_v die lothrechte Geschwindigkeit des in ζ bewegten Punktes M dargestellt; und ΦM_v repräsentirt die lothrechte Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt M sich auf der rotirenden Geraden Φg bewegt. Ferner stellt das von M_v auf HM gefällte Loth $M_v N$ die lothrechte Geschwindigkeit der Längenänderung der Strecke HM dar; und demnach ist auch $M_v N$ gleich der Geschwindigkeit, mit welcher sich die Strecke MA resp. der Radius des mit k bezeichneten Kreises verändert. Der Punkt M bewegt sich auf der rotirenden Geraden Φg in gleichem Sinne wie der Punkt A; denn wenn M in der gezeichneten Lage z. B. nach rechts schreitet, vergrössert sich die Strecke MH oder der Radius MA, während die Strecke $M\Phi$ sich verkleinert. Demnach ist die lothrechte Geschwindigkeit ΦA_v, die der Punkt A auf Φg besitzt, in der auf Φg Senkrechten ΦM_v durch

$$\Phi A_v = \Phi M_v + M_v N$$

---

[1]) Die Focalcurven, welche bei bestimmten Schnitten eines Kegels zweiter Ordnung auftreten, stammen von Quetelet und van Rees. S. Chasles, *Geschichte der Geometrie,* deutsch von Sohncke. 1839. Note IV. S. 287. Eine analytische Untersuchung der Focalcurven hat Fleischer mitgetheilt im *Jahresbericht über die Landesschule zu Grimma.* 1851. Die Focalcurve ist auch der geometrische Ort der Brennpunkte aller Kegelschnitte, die vier Gerade berühren, und wurde als solche eingehend untersucht. Salmon, *Kegelschnitte,* deutsch von Fiedler. 1873. 3. Aufl. S. 369. Eckart, *Zeitschrift für Mathematik u. Physik.* 1865. B. 10. S. 321. Schröter, *Math. Annalen.* 1872. B. 5. S. 50. B. 6. S. 85. Durège, *Math. Annalen.* 1872. B. 5. S. 83.

bestimmt. Somit ist $AA_{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit für den auf der Curve α bewegten Punkt A und folglich auch die Normale im Punkte A an der Focalcurve. Die beiden Punkte M und B bewegen sich auf der Geraden Φg im entgegengesetzten Sinne und daher wird die lothrechte Geschwindigkeit von B auf Φg durch

$$\Phi B_{\mathfrak{v}} = \Phi M_{\mathfrak{v}} - M_{\mathfrak{v}} N$$

dargestellt. Dem zufolge ist $BB_{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit für den auf der Curve β bewegten Punkt B und somit auch die Normale im Punkte B an der Focalcurve.

Nach dieser Darlegung ergiebt sich also die folgende Construction der beiden Normalen $AA_{\mathfrak{v}}$, $BB_{\mathfrak{v}}$ dieser Focalcurve. Wir ziehen durch Φ auf die Gerade ΦM eine Senkrechte $\Phi M_{\mathfrak{v}}$, welche die in M auf ζ errichtete Senkrechte in $M_{\mathfrak{v}}$ schneidet, fällen von $M_{\mathfrak{v}}$ auf HM das Loth $M_{\mathfrak{v}} N$ und beschreiben mit demselben als Radius um $M_{\mathfrak{v}}$ einen Kreis, der auf jener Senkrechten $\Phi M_{\mathfrak{v}}$ die Schnittpunkte $A_{\mathfrak{v}}$, $B_{\mathfrak{v}}$ bildet.[1])

39. **Mechanische Erzeugung der doppelpunktigen Focalcurve und Construction der Normalen an derselben.** Wenn in Fig. **78** die Grundpunkte H, J des Kreisbüschels auf der Geraden ζ in einem Punkte Q zusammenfallen, erhalten wir die doppelpunktige Focalcurve. Dieselbe besteht aus einem Curvenzuge, der eine Schleife mit einem Doppelpunkte in Q besitzt. In diesem speciellen Falle vereinfacht sich die Construction der Normalen; denn es coincidiren dann die Punkte N, M und wir brauchen nur mit $M_{\mathfrak{v}}M$ um $M_{\mathfrak{v}}$ einen Kreis zu beschreiben, der auf der zu ΦM senkrechten Geraden $\Phi M_{\mathfrak{v}}$ die Normalenpunkte $A_{\mathfrak{v}}$, $B_{\mathfrak{v}}$ bestimmt. Die in Fig. **79** gezeichnete doppelpunktige Focalcurve kann auch mechanisch durch den Scheitel eines bewegten starren Winkels beschrieben werden. Wird der starre Winkel gBZ gleich dem Winkel $\Phi Q\zeta$ gemacht, ferner so gelegt, dass der Schenkel g durch Φ geht und auf den anderen Schenkel die constante Strecke $BZ = Q\Phi$ ist; wird nun der Schenkelpunkt Z auf der Geraden ζ bewegt, während der Schenkel g durch Φ gleitet, dann beschreibt der Scheitel B die doppelpunktige Focalcurve α; denn es ist wegen der congruenten Dreiecke $Q\Phi M$, BZM die Strecke $MB = MQ$. Da es hier nur darauf ankommt, dass der Abstand des Punktes Z von der Ge-

[1]) Eine andere Construction der Normalen resp. der Tangenten an der Focalcurve hat C. Pelz abgeleitet in den *Sitzungsberichten der k. Academie der Wissenschaften.* Wien 1880. B. 82. S. 1207.

raden g gleich dem Abstande des Punktes Φ von der Geraden ζ ist, so wird bei der Gleichheit dieser Abstände von jedem Punkte der Geraden g eine doppelpunktige Focalcurve beschrieben.[1])

Nach der abgeleiteten Construction ergeben sich in diesem Specialfalle für die beiden auf Φg liegenden Curvenpunkte A, B die Normalen $AA_\mathfrak{v}$, $BB_\mathfrak{v}$ der doppelpunktigen Focalcurve, indem wir $MM_\mathfrak{v} \perp \zeta$, $\Phi M_\mathfrak{v} \perp \Phi g$ ziehen und $M_\mathfrak{v} A_\mathfrak{v} = M_\mathfrak{v} B_\mathfrak{v} = M_\mathfrak{v} M$ machen. Nach der letzteren Erzeugungsweise erhalten wir auch die eine Normale $BB_\mathfrak{v}$, wenn wir den Pol des bewegten Winkels bestimmen. Dieser Pol ist aber der Schnittpunkt $B_\mathfrak{v}$ der in Φ auf Φg und der in Z auf ζ errichteten Senkrechten.

Ist insbesondere der bewegte Winkel gAZ ein rechter, der begrenzte Schenkel AZ also gleich dem senkrechten Abstande des festen Punktes Φ von der Geraden ζ, dann beschreibt der Scheitel B die symmetrische doppelpunktige Focalcurve, welche Strophoide[2]) genannt wird, und die Mitte von AZ erzeugt die Cissoide des Diocles.[3])

40. **Constructive Erzeugung der eintheiligen Focalcurve und Construction ihrer Normalen.** In Fig. **80** ist ein Kreis $\varkappa$, eine durch seinen Mittelpunkt Q gehende Gerade ζ und ein fester Punkt Φ gegeben, um den sich eine Gerade Φg dreht. Von dem Schnittpunkte M, den diese Gerade mit ζ bildet, ziehen wir an den Kreis $\varkappa$ die Tangente MT und machen auf Φg beiderseits von M die Strecken MA, MB gleich der Tangentenlänge MT, dann sind A, B Punkte der eintheiligen Focalcurve. Dieselbe besteht aus einem Curvenzuge, der durch den Punkt Φ geht und sich ins Unendliche erstreckt. Der um den Punkt M mit dem Radius MT beschriebene Kreis k schneidet den Kreis $\varkappa$ rechtwinkelig und die Gesamtheit aller derartigen Kreise bildet demnach ein Kreisbüschel, dessen Grundpunkte imaginär sind. Die eintheilige Focalcurve ist also das Erzeugniss dieses Kreisbüschels und eines

---

[1]) Chasles, *Geschichte der Geometrie*, deutsch von Sohncke. 1839. Note XXXIV. S. 451.

[2]) Die Curve kommt schon in Cramer, *Analyse des lignes courbes*. 1750. p. 411 vor. Ihre Benennung Strophoide findet sich in einer Abhandlung von Ritt, *Nouvelles Annales de Mathématiques*. 1846. T. V. p. 470. Diese Curve wird auch logocyklische Curve genannt und hat wegen ihrer vielen interessanten Eigenschaften vielfache Behandlung gefunden. Vergl. S. Günther, *Parabolische Trigonometrie*. 1882. S. 80.

[3]) Diese Erzeugung der Cissoide giebt Newton in seiner *Arithmetica universalis*. 1732. p. 130. Prob. XXXIV.

Strahlenbüschels, dessen Strahlen von Φ aus durch die betreffenden Kreismittelpunkte gehen.

Um im Punkte A an dieser Focalcurve die Normale zu construiren, nehmen wir an: der momentan mit M coincidirende Punkt der um Φ rotirenden Geraden Φg besitze die lothrechte Geschwindigkeit $M\Phi$. Dem zufolge repräsentirt, wenn wir auf Φg die Senkrechte $\Phi M_\mathfrak{v}$, auf ζ die Senkrechte $MM_\mathfrak{v}$ errichten, die Strecke $MM_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit von M auf ζ und $\Phi M_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit, mit welcher M sich auf der rotirenden Geraden Φg bewegt. Ziehen wir von $M_\mathfrak{v}$ auf die Tangente TM die Senkrechte $M_\mathfrak{v}\mathfrak{M}_\mathfrak{v}$ bis an ζ, so ist die Strecke $M_\mathfrak{v}\mathfrak{M}_\mathfrak{v}$ nach S. 63 gleich der lothrechten Geschwindigkeit der Längenänderung der Tangente TM. Mit der Bewegung des Punktes M nach links vergrössert sich in Fig. **80** die Tangentenlänge TM oder der Kreisradius MA und gleichzeitig vergrössert sich auch die Strecke ΦM. Demnach wird die lothrechte Geschwindigkeit, die der Punkt A auf der rotirenden Geraden Φg besitzt, in der auf Φg Senkrechten $\Phi M_\mathfrak{v}$ durch

$$\Phi A_\mathfrak{v} = \Phi M_\mathfrak{v} - M_\mathfrak{v}\mathfrak{M}_\mathfrak{v}$$

bestimmt; und es ist, indem wir auf $\Phi M_\mathfrak{v}$ die Strecke $M_\mathfrak{v} A_\mathfrak{v} = M_\mathfrak{v}\mathfrak{M}_\mathfrak{v}$ machen, $AA_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit von A auf der Focalcurve α und die Normale im Punkte A an derselben. Analog ergiebt sich, wenn wir auf $\Phi M_\mathfrak{v}$ die Strecke $M_\mathfrak{v} B_\mathfrak{v} = M_\mathfrak{v}\mathfrak{M}_\mathfrak{v}$ machen, für den Curvenpunkt B die entsprechende Normale $BB_\mathfrak{v}$.

Wenn der Radius des Kreises $\varkappa$ gleich Null ist, wird dieser durch den Mittelpunkt Q vertreten. In diesem Falle erhalten wir die doppelpunktige Focalcurve. Es fällt dann $M_\mathfrak{v}\mathfrak{M}_\mathfrak{v}$ mit $M_\mathfrak{v} M$ zusammen und es ergiebt sich dieselbe Construction der Normalen, wie in Art. 39.

41. **Mechanische Erzeugung der Kranioide und Construction der Normalen an derselben.** In Fig. **81** sind γ, δ zwei concentrische Kreise mit dem Mittelpunkte Φ, und $\mathfrak{G}$ ist ein fester Punkt. Wird durch Φ eine Gerade gezogen, welche die Kreise γ, δ resp. die Punkte C, D schneidet, durch die Punkte $\mathfrak{G}$, C eine Gerade g gelegt und werden auf derselben die Punkte A, B so bestimmt, dass $DA = DB$ gleich einer gegebenen constanten Strecke ist; dann sind A, B Punkte einer aus zwei Theilen α, β bestehenden Curve, die wir wegen ihrer in Fig. **81** auftretenden schädelförmigen Gestalt Kranioide[1]) genannt haben. Bei einer Schraubenfläche,

[1]) Von κρανίον, Schädel.

welche von einer zu ihrer Axe senkrechten Ebene in einer cyclischen Curve geschnitten wird, ist die Kranioide die auf einer solchen Ebene senkrechte Projection der Selbstschattengrenze.[1]) Die Kranioide, welche eine Fülle interessanter Eigenschaften besitzt, kann leicht mechanisch erzeugt werden. Eine Stange ΦD rotirt um eine feste Axe Φ. Auf dieser Stange befinden sich zwei Zapfen C, D; um den letzteren D ist ein Arm DA drehbar, der in A einen Zapfen trägt. Ferner befindet sich auch in $\mathfrak{G}$ ein fester Zapfen, und die drei Zapfen $\mathfrak{G}$, C, A werden, während die Stange ΦD rotirt, durch einen geradlinigen Schlitz einer Schiene beständig in gerader Linie gehalten. Bei dieser Bewegung beschreibt ein in A angebrachter Stift die Curve α; und die zweite Curve β wird beschrieben, wenn der Arm DA nach DB gelegt wird.

Um die Normale an der Kranioide zu construiren, nehmen wir an: es sei $D\Phi$ die lothrechte Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt D sich auf dem Kreise δ bewegt. Dann ist auch $C\Phi$ die lothrechte Geschwindigkeit von C auf dem Kreise γ, und der Endpunkt $A_\mathfrak{v}$ der lothrechten Geschwindigkeit von dem Punkte A der starren Strecke DA liegt auf der durch Φ zu DA parallel gezogenen Geraden $\Phi A_\mathfrak{v}$. Ziehen wir ferner durch A zu $D\Phi$ die Parallele AA^I, welche $\Phi\mathfrak{G}$ in A^I trifft, und durch A^I auf g die Senkrechte $A^I A_\mathfrak{v}$; dann liefert der Schittpunkt $A_\mathfrak{v}$ mit A verbunden die Normale der Curve α und die lothrechte Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ des Punktes A auf derselben. Denn der in unserer Figur nicht bezeichnete Fusspunkt der Senkrechten $A^I A_\mathfrak{v}$ ist der Endpunkt der lothrechten Geschwindigkeit von dem mit A zusammenliegenden Punkt der um $\mathfrak{G}$ rotirenden starren Geraden g. Der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ des Radius $D\Phi$ und der Curvennormalen $AA_\mathfrak{v}$ ist der Pol der bewegten starren Strecke DA. Drehen wir $AA_\mathfrak{v}$ um einen rechten Winkel, etwa nach AA_v, so ist hierdurch die Geschwindigkeit AA_v von A auf der Curve α bestimmt und die Richtung dieser Drehung wird durch die Richtung der Bewegung, welche wir dem Punkte A zuweisen wollen, bedingt. Die Construction der Normalen $AA_\mathfrak{v}$ der Curve α erfordert also nur das Ziehen dreier Geraden, nämlich $\Phi A_\mathfrak{v}$ parallel DA, ferner AA^I parallel $D\Phi$ und $A^I A_\mathfrak{v}$ senkrecht g.

---

[1]) Vergl. **Burmester**, Kinematisch-geometrische Constructionen der Parallelprojection der Schraubenflächen und insbesondere des Schattens derselben. *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* 1873. B. 18. S. 185, 198.

Eine andere eben so einfache Construction dieser Normalen ergiebt sich durch die folgende Ueberlegung. Wir nehmen an: es sei $C\mathfrak{G}$ die lothrechte Geschwindigkeit von dem mit C coincidirenden Punkte der um $\mathfrak{G}$ rotirenden starren Geraden g, dann ist auch $A\mathfrak{G}$ die lothrechte Geschwindigkeit von A als Punkt dieser Geraden. Die in $\mathfrak{G}$ auf g errichtete Senkrechte bestimmt auf ΦC die lothrechte Geschwindigkeit $CC'_{\mathfrak{v}}$, welche der Punkt C auf dem Kreise γ besitzt, und enthält auch den Endpunkt $A'_{\mathfrak{v}}$ der in diesem Falle auftretenden lothrechten Geschwindigkeit des auf der Curve α bewegten Punktes A. Den Endpunkt $D'_{\mathfrak{v}}$ der lothrechten Geschwindigkeit, mit der D sich auf dem Kreise δ bewegt, würden wir erhalten, wenn wir $D'_{\mathfrak{v}}\,C'_{\mathfrak{v}}\,\Phi$ ähnlich $DC\Phi$ machen, dann befindet sich $A'_{\mathfrak{v}}$ auch auf der durch $D'_{\mathfrak{v}}$ gehenden zu DA parallelen Geraden $D'_{\mathfrak{v}}A'_{\mathfrak{v}}$, und demnach würde sich der Punkt $A'_{\mathfrak{v}}$ als Schnitt dieser Parallelen mit der in $\mathfrak{G}$ auf g errichteten Senkrechten ergeben. Wir können aber die Bestimmung des Punktes $D'_{\mathfrak{v}}$ vermeiden; denn, wenn wir in C auf g die Senkrechte errichten, welche AD in J trifft, so sind die Gebilde $\Phi C'_{\mathfrak{v}} D'_{\mathfrak{v}} A'_{\mathfrak{v}}$ und ΦCDJ ähnlich, und folglich liegt $A'_{\mathfrak{v}}$ auch auf der Geraden $J\Phi$. Nach dieser Darlegung ergiebt sich die folgende, drei Gerade erfordernde Construction der Normalen $AA'_{\mathfrak{v}}$ der Curve α. Wir errichten auf die Gerade g in den Punkten $\mathfrak{G}$, C Senkrechte; ziehen durch den Schnittpunkt J, den die Senkrechte CJ mit AD bildet, und durch den Punkt Φ die Gerade $J\Phi$, welche die Senkrechte $\mathfrak{G}A'_{\mathfrak{v}}$ in $A'_{\mathfrak{v}}$ trifft. Dann ist $AA'_{\mathfrak{v}}$ die Normale an der Curve α, und die Strecke $AA'_{\mathfrak{v}}$ repräsentirt zugleich die betreffende lothrechte Geschwindigkeit, die A auf der Curve α besitzt. Analoge Constructionen liefern die Normale an der von dem Punkte B beschriebenen Curve β.

Die Kranioide kann, wie leicht zu erkennen ist, noch in anderer Weise mechanisch erzeugt werden. Bezeichnen wir mit Γ und Δ die Schnittpunkte, welche die zu DA parallele Gerade $\Phi A_{\mathfrak{v}}$ resp. mit g und AA^1 bildet, so folgt, weil $\Phi\Delta AD$ ein Parallelogramm ist, die Proportion

$$\Phi C : \Delta A = \Gamma\Phi : \Gamma\Delta,$$

und demnach sind $\Gamma\Phi$, $\Phi\Delta$, ΔA constante Strecken.

Wir ersetzen nun die Gerade $\Gamma\Delta$ durch eine um Φ drehbare Stange und die Strecke ΔA durch einen mit dieser Stange in Δ gelenkig verbundenen Arm. Auf dem Arme ist in A und an der Stange in Γ ein Zapfen befestigt, und die drei Zapfen $A\mathfrak{G}\Gamma$ werden durch den geradlinigen Schlitz jener vorhin erwähnten

Schiene in gerader Linie gehalten, während die Stange $\Gamma\Delta$ um die feste Axe Φ rotirt. Bei dieser Bewegung wird vom Punkte A dieselbe Curve α beschrieben; und wenn wir den Arm ΔA nach $\Delta\mathfrak{B}$ legen, erzeugt der Punkt $\mathfrak{B}$ die Curve β. Diese zweite mechanische Erzeugung vollzieht sich in analoger Weise wie die erste; dem gemäss erhalten wir noch zwei neue analoge Constructionen für die Normale in einem Punkte A an der Kranioide. Es sei nur die zu jener ersten symmetrischen Construction erwähnt. Wir verlängern die zu $\Delta\Phi$ parallele Gerade AD bis zu ihrem Schnittpunkte A^{II}, den sie mit $\Phi\mathfrak{G}$ bildet, ziehen von A^{II} auf g die Senkrechte $A^{II}\mathfrak{P}$, welche $C\Phi$ in $\mathfrak{P}$ trifft; dann ist $A\mathfrak{P}$ die Normale und $\mathfrak{P}$ der Pol jener bewegten starren Strecke AD. Da wegen der Bestimmung des Curvenpunktes A schon die Geraden ΦC und g vorhanden sind, so erfordert diese Construction der Normalen $A\mathfrak{P}$ nur das Ziehen zweier neuer Geraden AD, $A^{II}\mathfrak{P}$.

42. **Mechanische Erzeugung der Capricornoide und Construction der Normalen an derselben.** Wird bei der vorhin betrachteten ersten Erzeugung der Kranioide der Gelenkpunkt D in Fig. **81** auf der Geraden ΦC ins Unendliche verlegt, so muss auch, wenn der Endpunkt B des Armes DB sich im Endlichen befinden soll, der Arm $DB = DA$ unendlich lang sein. In diesem Falle rückt die von A erzeugte Curve α ins Unendliche, und es kommt nur die vom Punkte B beschriebene Curve β in Betracht. Der Punkt B bewegt sich dann in Bezug auf die rotirende Gerade ΦC in einer auf ΦC senkrechten Geraden h. Dies wird in Fig. **82** dadurch bewirkt, dass wir an die um Φ rotirende Stange ΦC einen rechtwinkeligen Schlitz anbringen, in welchem sich der Zapfen B verschiebt. Dieser Zapfen B wird, während der Drehung der Stange ΦC, durch den Schlitz einer Schiene in gerader Linie mit den beiden Zapfen $\mathfrak{G}$, C gehalten und beschreibt somit eine specielle Kranioide, die wir nach ihrer Gestalt Capricornoide nennen.[1] Diese Curve besteht, wenn der Punkt $\mathfrak{G}$ ausserhalb des von C beschriebenen Kreises γ liegt, aus zwei sich ins Unendliche erstreckenden Aesten, deren Asymptoten die von $\mathfrak{G}$ an den Kreis γ gelegten Tangenten sind. Liegt aber $\mathfrak{G}$ innerhalb dieses Kreises,

[1] In dem besonderen durch Fig. **83** dargestellten Falle, bei welchem die Mittellinie h des auf ΦC senkrechten Schlitzes durch Φ geht, ist diese Curve von Poncelet in seinen *Applications d'analyse et de géométrie*. 1862. T. I. p. 447 schon vor dem Jahre 1822 behandelt und die Construction der Tangente vermittelst der Roberval'schen Methode ausgeführt. Derselbe sagt p. 460 daselbst: „Cette courbe du quatrième degré, que nous avions baptisée, dans la

dann vereinen sich diese beiden Aeste zu einem Curvenzuge. Die Capricornoide ist bei der Schraubenregelfläche die senkrechte Projection der Selbstschattengrenze in Bezug auf eine zur Schraubenaxe senkrechte Ebene.

Bei dem in Fig. **83** dargestellten besonderen Falle geht die Mittellinie h jenes auf ΦC senkrechten Schlitzes durch Φ. Die Gestalt der Capricornoide specialisirt sich dann in der Weise, dass die Curve sich selbst im Punkte Φ berührt. Wenn in Fig. **84** durch weitere Specialisirung der Punkt $\mathfrak{G}$ auf den Kreis γ gelegt wird, degenerirt der eine Bestandtheil der Capricornoide zu einer Geraden, und der andere schleifenförmige Bestandtheil geht in die Strophoide über. Denn ziehen wir auf $\Phi\mathfrak{G}$ die Senkrechte $\mathfrak{G}M$, welche die auf den Kreisdurchmesser CC' in Φ errichtete Senkrechte in M schneidet, so lässt sich leicht beweisen, dass $MB = MB' = M\mathfrak{G}$ ist. Die Geraden $C\mathfrak{G}$, $C'\mathfrak{G}$ schneiden ΦM in den Punkten B, B' der Capricornoide und somit sind die Dreiecke $M\mathfrak{G}B$, $\Phi\mathfrak{G}C'$ und die Dreiecke $M\mathfrak{G}B'$, $\Phi\mathfrak{G}C$ ähnlich; und damit ist, weil $\Phi\mathfrak{G}C'$, $\Phi\mathfrak{G}C$ gleichschenkelige Dreiecke sind, die Gleichheit jener Strecken bewiesen.

Die zweifache Erzeugungsweise der Kranioide fällt bei der Capricornoide in eine einzige zusammen. Die Construction der Normalen an der Capricornoide specialisirt sich in folgender Weise. Wir ziehen in Fig. **82** zu $C\Phi$ die Parallele BB^I bis an $\mathfrak{G}\Phi$ und durch B^I auf die Gerade g die Senkrechte $B^IB_\mathfrak{v}$, welche $C\Phi$ im Punkte $B_\mathfrak{v}$ der Normalen $BB_\mathfrak{v}$ schneidet. Dieselbe Construction ist auch in den Specialfällen Figg. **83, 84** ausgeführt.

43. **Momentane Bewegung eines ebenen Gelenkvielecks.** a) In Fig. **85**, Taf. V ist ein ebenes geschlossenes Gelenkvieleck gezeichnet, beispielsweise ein Viereck, dessen starre, mit 1, 2, 3, 4 bezeichnete Seiten wir uns in den Ecken A, B, C, D gelenkig verbunden denken. Wenn nun die Ecken A, B, C sich resp. auf den gegebenen Curven α, β, γ in einem ruhenden System S_0 bewegen, so ist damit auch die Curve δ, die von der letzten Ecke D beschrieben wird, bestimmt. Die Pole $\mathfrak{P}_{01}$, $\mathfrak{P}_{02}$ der starren Seiten AB, BC in Bezug auf das System S_0 ergeben sich als

salle nº 6, du nom de capricorne; courbe remarquable à plus d'un titre, par sa forme symétrique, élégante même, et douée de nombreuses propriétés géométriques jusqu'ici encore peu étudiées; mais qui, si je ne me trompe, mériteraient tout autant de l'être que celles qui appartiennent aux courbes mécaniques des anciens et à diverses autres plus modernes etc." Vergleiche auch Olivier, *Applications de la géométrie descriptive.* 1847. p. 95.

die Schnittpunkte der Normalen der Curven α, β, γ. Ist nun für einen der Eckpunkte, z. B. für A, die lothrechte Geschwindigkeit $AA_{\mathfrak{v}}$ gegeben und zeichnen wir durch Parallele zu den Seiten des Gelenkvielecks das Vieleck $A_{\mathfrak{v}} B_{\mathfrak{v}} C_{\mathfrak{v}} D_{\mathfrak{v}}$, dessen Ecken $A_{\mathfrak{v}}$, $B_{\mathfrak{v}}$, $C_{\mathfrak{v}}$ beziehlich auf den Normalen der Curven α, β, γ liegen, dann wird nach Art. 29 durch die Schlussecke $D_{\mathfrak{v}}$ die Normale $DD_{\mathfrak{v}}$ an der Curve δ bestimmt.[1]) Diese Normale liefert die beiden Pole $\mathfrak{P}_{03}$, $\mathfrak{P}_{01}$, welche den Seiten CD, DA angehören; und die Strecken $AA_{\mathfrak{v}}$, $BB_{\mathfrak{v}}$, $CC_{\mathfrak{v}}$, $DD_{\mathfrak{v}}$ stellen die lothrechten Geschwindigkeiten der betreffenden Ecken dar. Wenn wir insbesondere die lothrechte Geschwindigkeit $AA_{\mathfrak{v}} = A\mathfrak{P}_{01}$ nehmen, fällt die Seite $A_{\mathfrak{v}} B_{\mathfrak{v}}$ weg und es werden demnach bei der Construction der Normalen $DD_{\mathfrak{v}}$ die Hülfslinien um eine vermindert. Diese für ein Gelenkvieleck von vier Ecken ausgeführte Construction gilt allgemein für ein Gelenkvieleck von n Ecken, wenn die Bahncurven für $n - 1$ Ecken gegeben sind.

Speciell bei dem Gelenkviereck ergiebt sich eine interessante Beziehung, die zu einer viel einfacheren Construction der zur Curve δ gehörenden Normale und der beiden nicht gegebenen Pole $\mathfrak{P}_{03}$, $\mathfrak{P}_{01}$ führt. Es ist der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_{13}$ der Seiten 2, 4 der Pol der beiden Seiten 1, 3 und der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_{24}$ der Seiten 1, 3 der Pol der beiden Seiten 2, 4; und nach dem Satze auf S. 46 liegen die drei Pole $\mathfrak{P}_{13}$, $\mathfrak{P}_{01}$, $\mathfrak{P}_{03}$, so wie die drei Pole $\mathfrak{P}_{24}$, $\mathfrak{P}_{04}$, $\mathfrak{P}_{02}$ auf je einer Geraden. Demnach erhalten wir die Normale $D\mathfrak{P}_{03}$, erstens, indem wir die eine neue Gerade $\mathfrak{P}_{13}\mathfrak{P}_{01}$ ziehen, welche die Normale $C\mathfrak{P}_{03}$ in dem Pol $\mathfrak{P}_{03}$ trifft, und zweitens, indem wir die eine neue Gerade $\mathfrak{P}_{24}\mathfrak{P}_{02}$ ziehen, welche die Normale $A\mathfrak{P}_{01}$ in dem Pol $\mathfrak{P}_{04}$ schneidet. Hieraus folgt ferner, beziehlich der Dreiecke $BC\mathfrak{P}_{02}$, $AD\mathfrak{P}_{04}$, deren entsprechende Ecken auf Geraden liegen, die durch $\mathfrak{P}_{24}$ gehen, und deren entsprechende Seiten sich in drei auf einer Geraden befindlichen Punkten $\mathfrak{P}_{13}$, $\mathfrak{P}_{01}$, $\mathfrak{P}_{03}$ schneiden, der bekannte Desargues'sche Satz:

Gehen die Verbindungsgeraden von je zwei entsprechenden Ecken zweier Dreiecke durch einen Punkt, so schneiden sich je zwei entsprechende Seiten derselben in drei Punkten, die auf einer Geraden

---

[1]) Eine andere, aber bei grösserer Eckenzahl des Vielecks nicht so einfache und übersichtliche Construction dieser Normalen hat Nicolaïdès in seinen *Analectes 16me Livraison*. 1874. p. 415 abgeleitet.

liegen; und umgekehrt, befinden sich die drei Schnittpunkte der entsprechenden Seiten auf einer Geraden, so gehen die drei Verbindungsgeraden der entsprechenden Ecken durch einen Punkt.

b) In Fig. **86** ist ein offenes Gelenkvieleck, beispielsweise ein Viereck $ABCD$, dessen Ecken A, B, C, D sich resp. auf den in einer festen Ebene gegebenen Curven $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bewegen. Wenn für die eine Ecke, z. B. für A, die lothrechte Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ bekannt ist, ergeben sich durch das Vieleck $A_\mathfrak{v} B_\mathfrak{v} C_\mathfrak{v} D_\mathfrak{v}$, dessen Seiten den Seiten des Gelenkvielecks parallel sind und dessen Ecken beziehlich auf den Normalen der Curven $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ liegen, die lothrechten Geschwindigkeiten $AA_\mathfrak{v}$, $BB_\mathfrak{v}$, $CC_\mathfrak{v}$, $DD_\mathfrak{v}$ aller Ecken; und die Schnittpunkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ der betreffenden Normalen sind die Pole der starren Seiten AB, BC, CD in Bezug auf die feste Ebene. Um nun den Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ zu erhalten, den die Verbindungsgerade AD, deren Länge veränderlich ist, mit ihrer Hüllbahncurve bildet, ziehen wir $D_\mathfrak{v} D^I$ senkrecht AD, ferner DD^I parallel $A_\mathfrak{v} A$ und verbinden ihren Schnitt D^I mit $A_\mathfrak{v}$; dann schneidet $D^I A_\mathfrak{v}$ die Gerade AD nach S. 65 in dem gesuchten Berührungspunkte. Bei dieser Bestimmung wird eine Hülfsgerade gespart, wenn wir die lothrechte Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v} = A\mathfrak{P}_1$ nehmen. Nach dieser Construction können wir auch, wenn der Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ und die Normalen der Curven $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .. bis auf eine gegeben sind, diese letzte Normale bestimmen.

c) In Fig. **87** ist die Construction auf das Gelenk ABC angewendet; und nur zur Abwechselung ist bei der Bestimmung des Berührungspunktes $\mathfrak{G}$, den die Gerade AC mit ihrer Hüllbahn bildet, $A_\mathfrak{v} A^I$ senkrecht AC, ferner AA^I parallel $C_\mathfrak{v} C$ gezogen, so dass $A^I C_\mathfrak{v}$ auf AC den Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ liefert.

Ist in diesem Falle, Fig. **88**, der Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ bekannt und sind für die Curven α, β die Normalen $A\mathfrak{A}_\mathfrak{v}$, $C\mathfrak{C}_\mathfrak{v}$ gegeben, welche die in $\mathfrak{G}$ auf AC errichtete Senkrechte in den Punkten $\mathfrak{A}_\mathfrak{v}$, $\mathfrak{C}_\mathfrak{v}$ schneiden, so können wir $A\mathfrak{A}_\mathfrak{v}$, $C\mathfrak{C}_\mathfrak{v}$ als die lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte A, C betrachten. Wenn wir nun $\mathfrak{A}_\mathfrak{v}\mathfrak{B}_\mathfrak{v}$ parallel AB, ferner $\mathfrak{C}_\mathfrak{v}\mathfrak{A}_\mathfrak{v}$ parallel CB ziehen, dann ist nach Art. 29 der Schnittpunkt $\mathfrak{B}_\mathfrak{v}$ ein Punkt der Normalen $B\mathfrak{B}_\mathfrak{v}$ der von B beschriebenen Curve β, und $B\mathfrak{B}_\mathfrak{v}$ repräsentirt zugleich die lothrechte Geschwindigkeit dieses Punktes.

Denken wir uns für den Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ verschiedene Lagen auf der Geraden AC angenommen, dann sind die vom

Punkte $\mathfrak{A}_v$ auf der Curvennormalen AK und die vom Punkte $\mathfrak{C}_v$ auf der Curvennormalen CK erzeugten Punktreihen $\mathfrak{A}_v \ldots$, $\mathfrak{C}_v \ldots$ ähnlich, und besitzen den Schnittpunkt K dieser Curvennormalen als selbstentsprechenden Punkt. Der Punkt $\mathfrak{B}_v$ beschreibt demnach eine durch K gehende Gerade; folglich ist die von der Geraden $B\mathfrak{B}_v$ auf CK erzeugte Punktreihe $\mathfrak{P}_2 \ldots$ der Punktreihe $\mathfrak{A}_v \ldots$ projectiv [1]) und K ist ein selbstentsprechender Punkt dieser beiden Punktreihen. Die Verbindungsgeraden $\mathfrak{A}_v \mathfrak{P}_2, \ldots$, ihrer entsprechenden Punkte gehen hiernach durch einen Punkt J. Derselbe ist aber der Schnittpunkt, den die Gerade AB mit der in C auf AC errichteten Senkrechten CJ bildet; denn, wenn $\mathfrak{G}$ nach A gelangt, fällt die Gerade $\mathfrak{A}_v \mathfrak{P}_2$ mit AB, und wenn $\mathfrak{G}$ sich in C befindet, mit CJ zusammen. Wir erhalten demnach den Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ auch, indem wir auf AC die Senkrechte CJ errichten, die AB in J schneidet, dann $J\mathfrak{P}_2$ bis zu ihrem mit $A\mathfrak{P}_1$ gebildeten Schnitt $\mathfrak{A}_v$ ziehen und von $\mathfrak{A}_v$ auf AC das Loth $\mathfrak{A}_v \mathfrak{G}$ fällen. Wenn dagegen der Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ gegeben ist, erhalten wir durch diese Beziehung umgekehrt auf CK den Pol $\mathfrak{P}_2$ und die Normale $B\mathfrak{P}_2$ der von B beschriebenen Curve β.

Diese einfache Bestimmung wurde von Nicolaïdès a. a. O. mitgetheilt und von ihm in der folgenden Weise abgeleitet. Die durch A, C gehende Gerade, auf der sich die Strecke AC verändert, betrachten wir als einem gedachten starren System S angehörend, bezeichnen sie mit Ag und nehmen an, dass A ein Punkt dieses Systems sei. Wir denken uns nun zunächst auch das Dreieck ABC als ein starres und ertheilen demselben eine unendlich kleine Drehung um $\mathfrak{P}_2$, dann bleiben B, C auf ihren Bahncurven β, γ, während A seine Bahncurve α verlässt. Hierauf denken wir uns wieder AB gegen BC beweglich und um B gedreht, so dass A in die Curve α gelangt. Demnach hat das gedachte System S mit der Geraden Ag erstens eine unendlich kleine Drehung um $\mathfrak{P}_2$ und zweitens eine unendlich kleine Drehung um J, den Schnittpunkt der Geraden AB und der auf AC Senkrechten CJ, vollzogen. Aus diesen beiden unendlich kleinen Drehungen resultirt nach Art. 24 eine unendlich kleine Drehung um einen Punkt, der in der Geraden $\mathfrak{P}_2 J$ liegt. Ausserdem muss aber der Pol für die Gerade Ag, weil ihr Punkt A sich auf der Curve α bewegt, auch auf der Curvennormale $A\mathfrak{P}_1$ liegen; folglich ist der Schnittpunkt $\mathfrak{A}_v$

[1]) Wir haben nach dem Vorschlage von R. Sturm (*Math. Annalen*. 1876. B. 10. S. 118) die Benennung „projectiv“ für „projectivisch“ angenommen.

von $A\mathfrak{P}_1$, $J\mathfrak{P}_2$ der Pol der Geraden Ag, und das von $\mathfrak{A}_v$ auf AC gefällte Loth $\mathfrak{A}_v\mathfrak{G}$ bestimmt den Berührungspunkt $\mathfrak{G}$. Ebenso findet eine symmetrische Beziehung auch andererseits statt. Wenn wir auf AC in A die Senkrechte AH errichten, von ihrem mit CB gebildeten Schnittpunkte H die Gerade $H\mathfrak{P}_1$ ziehen, so trifft diese $C\mathfrak{P}_2$ im Punkte $\mathfrak{C}_v$ jenes Lothes $\mathfrak{A}_v\mathfrak{G}$. Nicolaïdès hat diese Betrachtungen auch auf das offene Gelenkvieleck von n Seiten ausgedehnt; dann wird aber die Ableitung schwieriger und die Construction bietet nicht mehr die Einfachheit und Uebersichtlichkeit, wie die oben für diesen allgemeinen Fall angegebene Construction.

44. **Momentane Bewegung eines veränderlichen Dreiecks.** a) Die momentane Bewegung eines veränderlichen Dreiecks ABC ist in Fig. **89** bestimmt durch die Tangenten a, b, c an den von den Ecken A, B, C beschriebenen Bahncurven α, β, γ und durch die Berührungspunkte $\mathfrak{G}_{ab}$, $\mathfrak{G}_{bc}$ auf den zu den beiden Seiten AB, BC gehörenden Hüllbahncurven θ_{ab}, θ_{bc}. Um den Berührungspunkt $\mathfrak{G}_{ca}$ auf der zur dritten Seite CA gehörenden Hüllbahncurve θ_{ca} zu erhalten, betrachten wir jene beiden Berührungspunkte $\mathfrak{G}_{ab}$, $\mathfrak{G}_{bc}$ als feste Drehpunkte der Geraden AB, BC und denken uns den Schnittpunkt B dieser Geraden auf der Tangente b bewegt; dann erzeugen die Punkte A, C resp. auf den Tangenten a, c projective Punktreihen und die veränderliche Verbindungsgerade AC umhüllt einen Kegelschnitt, der von der betreffenden Lage AC in dem zu bestimmenden Punkte $\mathfrak{G}_{ca}$ berührt wird. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Ecken des durch die Tangenten a, b, c gebildeten Dreiecks und verschieben den Punkt B auf b zunächst nach rechts, so dass C nach $\mathfrak{B}$, ferner A nach $\mathfrak{C}$ gelangt; und dem zufolge legt sich die Gerade CA als Kegelschnitttangente in die Gerade a und dann in die Gerade $\mathfrak{C}\mathfrak{G}_{bc}$. In analoger Weise legt sich die Gerade CA bei einer Verschiebung des Punktes B nach links in die Gerade c und ferner in die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{G}_{ab}$. Demnach ist, wenn wir mit U den Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{G}_{ab}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{G}_{bc}$ bezeichnen, $U\mathfrak{A}CA\mathfrak{C}$ ein Tangentenfünfeck jenes Kegelschnittes; und gestützt auf eine Specialisirung des Brianchon'schen Satzes ergiebt sich somit der Berührungspunkt $\mathfrak{G}_{ca}$, indem wir durch den Schnitt Ω der Diagonalen $A\mathfrak{A}$, $C\mathfrak{C}$ die Gerade $U\Omega$ ziehen, die CA in dem Berührungspunkte $\mathfrak{G}_{ca}$ trifft. Die Construction des Berührungspunktes $\mathfrak{G}_{ca}$ auf der dritten Hüllbahncurve θ_{ca} erfordert das Ziehen der fünf gestrichelten Geraden d, e, h, i, z.

Die momentane Bewegung des veränderlichen Dreiecks ABC

ist auch bestimmt, wenn in Fig. **90** die Berührungspunkte $\mathfrak{G}_{ab}$, $\mathfrak{G}_{bc}$, $\mathfrak{G}_{ca}$ auf den drei Hüllbahncurven θ_{ab}, θ_{bc}, θ_{ca} und die Tangenten a, c an den beiden Bahncurven α, γ gegeben sind. Um in diesem Falle die Tangente b an der dritten Bahncurve β zu erhalten, können wir einfach von den dualen Beziehungen ausgehen, die der vorigen Construction entsprechen. Wir ziehen demnach durch $\mathfrak{G}_{ab}\mathfrak{G}_{ca}$, $\mathfrak{G}_{bc}\mathfrak{G}_{ca}$ die Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, die beziehlich auf den Dreiecksseiten BC, BA die Punkte H, J, auf den Tangenten c, a die Punkte D, E bestimmen. Hierauf ziehen wir durch HJ die mit ω bezeichnete Gerade, durch DE die mit u bezeichnete Gerade; dann liefert der Schnittpunkt Z dieser beiden Geraden mit B verbunden die Tangente b an der Bahncurve β. Diese Construction der Tangente erfordert demnach das Ziehen von fünf Geraden.

b) Ist in dem betrachteten Falle die Geschwindigkeit eines der Eckpunkte des veränderlichen Dreiecks ABC in Fig. **91** gegeben, so kann man, nachdem die Tangente an der Bahncurve β construirt ist, die Geschwindigkeit der zweiten und der dritten Ecke leicht in bekannter Weise bestimmen. Um aber, wenn z. B. die Geschwindigkeit AA_v der Ecke A bekannt ist, ohne Benutzung der angegebenen Construction der Tangente die Geschwindigkeit BB_v der Ecke B und damit zugleich die Tangente an der Bahncurve β zu erhalten, construiren wir zuerst die Geschwindigkeit CC_v der Ecke C. Wir ziehen $A_v\mathfrak{G}_{ca}$ bis zum Schnitt C' der zu AA_v Parallelen CC', ferner zu CA die Parallele $C'C_v$, die auf der Tangente CC_v die Geschwindigkeit CC_v bestimmt. Hierauf ziehen wir die Geraden $A_v\mathfrak{G}_{ab}$, $C_v\mathfrak{G}_{bc}$ und bis an diese führen wir beziehlich $BB' \parallel AA_v$, $BB'' \parallel CC_v$; ferner $B'B_v \parallel BA$, $B''B_v \parallel BC$. Demnach ist BB_v die Geschwindigkeit der Ecke B und die Tangente an der Bahncurve β.

In Fig. **92** ist dieselbe Construction für den Fall ausgeführt, in welchem jede der beiden Dreiecksseiten AB, BC sich parallel verschiebt. Es liegen dann auf diesen Dreiecksseiten die Berührungspunkte $\mathfrak{G}_{ab}$, $\mathfrak{G}_{bc}$ im Unendlichen und folglich ergiebt sich in einfacher Weise die Geschwindigkeit BB_v, indem wir $A_vB_v \parallel AB$, $C_vB_v \parallel CB$ ziehen.

In Fig. **93** sind die Normalen an den Bahncurven α, β, γ gezeichnet und in den Berührungspunkten $\mathfrak{G}_{ab}$, $\mathfrak{G}_{bc}$, $\mathfrak{G}_{ca}$ auf den Dreiecksseiten die Senkrechten, resp. die Normalen der Hüllbahnen errichtet. Diese sechs Normalen bilden ein Sechseck $\mathfrak{a}_b\mathfrak{a}_c\,\mathfrak{b}_c\mathfrak{b}_a\,\mathfrak{c}_a\mathfrak{c}_b$. Bezeichnen wir die Geschwindigkeiten der Ecken A, B, C resp. mit v_a, v_b, v_c, so bestehen die Verhältnisse:

$$\frac{v_a}{v_b} = \frac{A\mathfrak{a}_c}{B\mathfrak{b}_c}, \quad \frac{v_b}{v_c} = \frac{B\mathfrak{b}_a}{C\mathfrak{c}_a}, \quad \frac{v_c}{v_a} = \frac{C\mathfrak{c}_b}{A\mathfrak{a}_b};$$

und hiernach ist

$$\frac{A\mathfrak{a}_c \,.\, B\mathfrak{b}_a \,.\, C\mathfrak{c}_b}{A\mathfrak{a}_b \,.\, B\mathfrak{b}_c \,.\, C\mathfrak{c}_a} = 1. \text{[1]}$$

Vermittelst dieser Beziehung kann man auch die Normale an der dritten Bahncurve bestimmen; aber die Ausführung ist nicht so einfach und übersichtlich, wie jene oben angegebene erste Construction der Tangente an der dritten Bahncurve. In gleicher Weise lässt sich leicht die analoge, allgemeinere Beziehung für ein veränderliches n-Eck ableiten und vermittelst derselben kann dann die Normale an der n^{ten} Bahncurve bestimmt werden.

c) Die bisherigen Constructionen sind nicht anwendbar, wenn, wie in Fig. **94**, die Bahncurven α, γ der Ecken A, C zugleich die Hüllbahncurven der Dreiecksseiten AB, BC sind; denn in diesem Falle müssen, damit die momentane Bewegung des Dreiecks ABC bestimmt ist, ausser dem Berührungspunkte $\mathfrak{G}_{ca}$ noch die betreffenden Krümmungsmittelpunkte A, Γ der Bahncurven α, γ gegeben sein. Um nun die Normale an der dritten Bahncurve β zu construiren, nehmen wir an, es sei $CC_\mathfrak{v}$ auf $C\Gamma$ die lothrechte Geschwindigkeit der Ecke C; dann erhalten wir durch die Gerade $C_\mathfrak{v}\mathfrak{G}_{ca}$, welche die zu $C\Gamma$ Parallele AA^I in A^I trifft, und durch die von A^I auf AC Senkrechte $A^IA_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ der Ecke A. Ziehen wir nun $C_\mathfrak{v}\mathfrak{B}_\mathfrak{v}''$ parallel CB bis an ΓB, und $A_\mathfrak{v}\mathfrak{B}_\mathfrak{v}'$ parallel AB bis an $\mathsf{A}B$, so muss nach S. 63 der Endpunkt $B_\mathfrak{v}$ der lothrechten Geschwindigkeit von B in der auf BC senkrechten Geraden $\mathfrak{B}_\mathfrak{v}''B_\mathfrak{v}$ und ebenso in der auf AB senkrechten Geraden $\mathfrak{B}_\mathfrak{v}'B_\mathfrak{v}$ liegen. Demnach ergiebt sich der Punkt $B_\mathfrak{v}$ als der Schnitt dieser beiden Geraden, und $BB_\mathfrak{v}$ ist die Normale an der Bahncurve β.

Die Construction dieser Normalen vereinfacht sich, wenn wir in Fig. **95** annehmen, dass $C\Gamma$ die lothrechte Geschwindigkeit von C sei. Wir ziehen dann die Gerade $\Gamma\mathfrak{G}_{ca}$, welche die zu $C\Gamma$ Parallele AA^I in A^I trifft, ferner $A^IA_\mathfrak{v}$ senkrecht AC bis an $A\mathsf{A}$, hierauf zu AB die Parallele $A_\mathfrak{v}\mathfrak{B}_\mathfrak{v}'$ bis an $\mathsf{A}B$ und auf AB die Senkrechte $\mathfrak{B}_\mathfrak{v}'B_\mathfrak{v}$, die $C\Gamma$ im Punkte $B_\mathfrak{v}$ der Normalen $BB_\mathfrak{v}$ der

[1] Diese Gleichung findet sich in Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie.* 1862. p. 502, von Mannheim auf Grund einer in Newton, *Opuscula.* 1754. T. I. p. 206 gegebenen Formel abgeleitet. Vergl. auch Bour, *Cours de mécanique et machines*, 1er fasc. *Cinématique* 1865. p. 58, und Möbius, *Statik.* 1837. II. Theil. S. 260.

Bahncurve β schneidet. Ist die Normale $BB_\mathfrak{v}$ der Bahncurve β, der Berührungspunkt $\mathfrak{G}_{ca}$ und der Krümmungsmittelpunkt Γ bekannt, so kann auch vermittelst dieser Beziehung der andere Krümmungsmittelpunkt A bestimmt werden. Oder, wenn die Normale $BB_\mathfrak{v}$ und die beiden Krümmungsmittelpunkte A, Γ gegeben sind, so kann man auch hiernach den Berührungspunkt $\mathfrak{G}_{ca}$ erhalten.

Errichten wir in Fig. **96** auf der Dreiecksseite AC im Berührungspunkte $\mathfrak{G}_{ca}$ eine Senkrechte, die $A\mathsf{A}$, $C\Gamma$ resp. in den Punkten $A_\mathfrak{v}$, $C_\mathfrak{v}$ schneidet; dann können wir $AA_\mathfrak{v}$, $CC_\mathfrak{v}$ als die lothrechten Geschwindigkeiten der Ecken A, C betrachten. Demzufolge erhalten wir eine symmetrische Construction der Normalen $BB_\mathfrak{v}$ der Bahncurve β. Wir ziehen zu AB die Parallele $A_\mathfrak{v}\mathfrak{B}'_\mathfrak{v}$ bis an $\mathsf{A}B$, ferner zu BC die Parallele $C_\mathfrak{v}\mathfrak{B}''_\mathfrak{v}$ bis an ΓB; hierauf $\mathfrak{B}'_\mathfrak{v}B_\mathfrak{v}$ senkrecht AB und $\mathfrak{B}''_\mathfrak{v}B_\mathfrak{v}$ senkrecht BC.[1]

In Fig. **97** ist diese Construction der Normalen $BB_\mathfrak{v}$ für den besonderen Fall ausgeführt, wenn der Krümmungsmittelpunkt Γ in der Geraden AC liegt; dann repräsentirt $C\mathfrak{G}_{ca}$ die lothrechte Geschwindigkeit von C, und die auf BC senkrechte Gerade $\mathfrak{B}''_\mathfrak{v}B_\mathfrak{v}$ ist parallel zu CA.

Bei dem noch specielleren Falle in Fig. **98** ist die Hüllbahncurve θ_{ca} der Geraden CA die Evolute der Bahncurve γ, und der Krümmungsmittelpunkt Γ ist zugleich der Berührungspunkt auf der Hüllbahncurve. In diesem Specialfalle ergiebt sich die Normale $BB_\mathfrak{v}$, indem wir auf AC die Senkrechte $\Gamma A_\mathfrak{v}$ bis an $A\mathsf{A}$, dann auf $A\mathsf{A}$ die Senkrechte $A_\mathfrak{v}\mathfrak{B}'_\mathfrak{v}$ bis an $\mathsf{A}B$ errichten und zu $A\mathsf{A}$ die Parallele $\mathfrak{B}'_\mathfrak{v}B_\mathfrak{v}$ ziehen, die CA in $B_\mathfrak{v}$ trifft.

Fällen wir vom Krümmungsmittelpunkte A auf CA die Senkrechte $\mathsf{A}H$, ferner vom Punkte H auf $A\mathsf{A}$ die Senkrechte HJ, so ist ΓJ parallel $BB_\mathfrak{v}$. Um dies zu beweisen, nehmen wir für A verschiedene Lagen auf der Normalen $AA_\mathfrak{v}$ der Bahncurve α; dann entspricht der von A auf $AA_\mathfrak{v}$ gebildeten Punktreihe ein von der betreffenden Geraden ΓJ erzeugtes projectives Strahlenbüschel, dessen Scheitelpunkt Γ ist, und ebenso ein von der betreffenden Geraden $BB_\mathfrak{v}$ erzeugtes projectives Strahlenbüschel, dessen Scheitelpunkt B ist. Coincidirt A mit $A_\mathfrak{v}$, dann ist der Strahl ΓJ senkrecht $AA_\mathfrak{v}$, und der Strahl $BB_\mathfrak{v}$ fällt mit BA zusammen; befindet sich A in A, dann liegt ΓJ in CA und $BB_\mathfrak{v}$ ist parallel CA;

[1] Diese Aufgabe findet sich schon in De l'Hospital, *Analyse des infiniment petits.* 1715. p. 141; aber vollständig gelöst wurde dieselbe in anderer Weise erst von Mannheim, *Annali di Matematica.* 1859. T. II. p. 208.

rückt A ins Unendliche, dann ist der Strahl ΓJ sowie der Strahl $BB_{\mathfrak{v}}$ zu $AA_{\mathfrak{v}}$ parallel. Demnach sind bei den betrachteten drei Lagen von A die entsprechenden Strahlen der beiden projectiven Büschel parallel, und folglich sind alle entsprechende Strahlen dieser Büschel parallel. Es ergiebt sich also in diesem besonderen Falle die Normale $BB_{\mathfrak{v}}$ der Bahncurve β in einfacherer Weise, indem wir $\mathsf{A}H \perp CA$, ferner $HJ \perp A\mathsf{A}$ und $BB_{\mathfrak{v}} \parallel \Gamma J$ ziehen.

45. **Anwendung auf die Construction des Krümmungsmittelpunktes der Curve, deren Punktabstände von zwei gegebenen Curven im constanten Verhältnisse stehen.** In Fig. **99** sei die Curve α der geometrische Ort des Punktes A, dessen Abstände AC, AC' von zwei gegebenen Curven γ, γ' in einem constanten Verhältnisse stehen. Die Tangente CB an γ und die Tangente $C'B$ an γ' bestimmen durch ihren Schnitt B nach Art. 35 die Tangente AB an der Curve α. Sind $\Gamma, \Gamma', \mathsf{A}$ resp. die Krümmungsmittelpunkte der Curven γ, γ', α, so ist, wenn wir $\mathsf{A}H$ senkrecht AC und HJ senkrecht $A\mathsf{A}$ ziehen, die Verbindungsgerade ΓJ nach der obigen Darlegung parallel zur Normalen der vom Punkte B beschriebenen Curve. Das Gleiche gilt von der Verbindungsgeraden $\Gamma' J'$, die wir erhalten, indem wir $\mathsf{A}H'$ senkrecht AC' und $H'J'$ senkrecht $A\mathsf{A}$ ziehen. Es ist demnach $\Gamma J \parallel \Gamma' J'$. Durch diese Beziehung wird, wenn der Krümmungsmittelpunkt A und einer von den Krümmungsmittelpunkten Γ, Γ' bekannt ist, der andere dieser beiden letzteren gefunden. Um aber den Krümmungsmittelpunkt A zu erhalten, wenn die beiden Krümmungsmittelpunkte Γ, Γ' gegeben sind, müssen wir noch die folgende Beziehung beweisen. Errichten wir auf $A\Gamma$ die Senkrechte ΓD bis an $A\mathsf{A}$, ebenso auf $A\Gamma'$ die Senkrechte $\Gamma' D'$ bis an $A\mathsf{A}$, ferner auf $A\mathsf{A}$ die Senkrechten DE, $D'E'$, welche die Geraden AC, AC' resp. in den Punkten E, E' treffen, dann schneidet die Gerade EE' die Normale $A\mathsf{A}$ der Curve α in dem Krümmungsmittelpunkte A. Denn betrachten wir die beiden Geraden $A\mathsf{A}$, $A\Gamma$ als einen geradlinigen Kegelschnitt, so ist $\mathsf{A}HJ\Gamma DE$ ein demselben eingeschriebenes Seckseck, und da sowohl die Seiten $\mathsf{A}H, \Gamma D$ als die Seiten JH, DE parallel sind, so müssen nach dem Satze von Pascal auch die beiden Seiten $E\mathsf{A}$, ΓJ parallel sein. Aus demselben Grunde ist $E'\mathsf{A}$ parallel $\Gamma' J'$ und weil ΓJ, $\Gamma' J'$ Parallele sind, liegen die Punkte $\mathsf{A}EE'$ auf einer Geraden.[1])

[1]) Diese Construction des Krümmungsmittelpunktes wurde von Mannheim mitgetheilt in *Annali di Matematica.* 1858. T. I. p. 364. Vergl. auch Mannheim, *Cours de géométrie descriptive.* 1880. p. 207.

Wenn in Fig. **99** die Curven γ, γ' Kreise sind, oder wenn insbesondere einer dieser Kreise zu einem Punkte zusammengeschrumpft, dann ist die Curve α ein Cartesisches Oval; und jene Construction liefert demnach den Krümmungsmittelpunkt A des Cartesischen Ovals. Ist die eine Curve γ durch eine Gerade, die andere γ' durch einen Punkt vertreten, dann ist die Curve α ein Kegelschnitt; und durch jene Construction, die sich in diesem Falle vereinfacht, erhalten wir den Krümmungsmittelpunkt des Kegelschnitts.

46. **Betrachtung einer veränderlichen Punktgruppe auf einer bewegten Geraden.** a) Eine bewegte Gerade g, welche ihre Hüllbahncurve $\mathfrak{g}$, Fig. **100**, im Punkte $\mathfrak{S}$ berührt, schneidet die vier Curven α, β, γ, δ resp. in den Punkten A, B, C, D, die eine veränderliche Punktgruppe bilden. Die im Berührungspunkte $\mathfrak{S}$ auf g errichtete Senkrechte schneidet die Normalen dieser Curven beziehlich in den Punkten $A_\mathfrak{v}$, $B_\mathfrak{v}$, $C_\mathfrak{v}$, $D_\mathfrak{v}$. Nehmen wir an, es rotire die Gerade g momentan mit einer Drehgeschwindigkeit gleich der Einheit um den Punkt $\mathfrak{S}$, dann repräsentiren die Strecken $\mathfrak{S}A_\mathfrak{v}$, $\mathfrak{S}B_\mathfrak{v}$, $\mathfrak{S}C_\mathfrak{v}$, $\mathfrak{S}D_\mathfrak{v}$ die lothrechten Geschwindigkeiten der Längenänderungen der Strecken $\mathfrak{S}A$, $\mathfrak{S}B$, $\mathfrak{S}C$, $\mathfrak{S}D$. Sollen nun die Strecken AB, CD während der Bewegung der Geraden g in constantem Verhältnisse bleiben, so muss auch die Proportion

$$\frac{A_\mathfrak{v}B_\mathfrak{v}}{C_\mathfrak{v}D_\mathfrak{v}} = \frac{AB}{CD}$$

bestehen. Hiernach ist, wenn der Berührungspunkt $\mathfrak{S}$ und die Normalen von dreien der Curven $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gegeben sind, die Normale der vierten Curve leicht zu construiren.

Dreht sich in Fig. **101** die Gerade g um den festen Punkt $\mathfrak{S}$, ist auf dieser Geraden, welche die Curven α, β, γ resp. in den Punkten A, B, C schneidet, $\mathfrak{S}C = BA$; und sind $A_\mathfrak{v}$, $B_\mathfrak{v}$, $C_\mathfrak{v}$ die Schnittpunkte, welche die in $\mathfrak{S}$ auf g errichtete Senkrechte mit den Normalen dieser Curven bildet, so ist auch $\mathfrak{S}C_\mathfrak{v} = B_\mathfrak{v}A_\mathfrak{v}$.

In Fig. **102** ist beispielsweise α eine Gerade, β ein Kreis mit dem Mittelpunkte M. Um nun die Normale $CC_\mathfrak{v}$ an der von C erzeugten Curve γ, wenn $\mathfrak{S}C = BA$ ist, zu erhalten, errichten wir in $\mathfrak{S}$ auf g eine Senkrechte, welche BM in $B_\mathfrak{v}$ und die in A auf α errichtete Senkrechte in $A_\mathfrak{v}$ trifft, und nehmen auf jener Senkrechten $\mathfrak{S}C_\mathfrak{v} = B_\mathfrak{v}A_\mathfrak{v}$. Wenn insbesondere der Kreis β unendlich gross ist, wenn also die um $\mathfrak{S}$ rotirende Gerade g zwei feste Gerade α, β schneidet, dann ist die vom Punkte C auf diese Weise erzeugte Curve eine Hyperbel.

Befindet sich in Fig. **103** der Punkt $\mathfrak{S}$ auf dem Kreise β und berührt die Gerade α diesen Kreis, dann ist die vom Punkte C erzeugte Curve γ eine allgemeine Cissoide, welche in die Cissoide des Diocles übergeht, wenn $\mathfrak{S}$ dem Berührungspunkte diametral gegenüber liegt. Die Normale $CC_\mathfrak{v}$ ergiebt sich also, weil $\mathfrak{S}C = BA$ ist, indem wir $\mathfrak{S}C_\mathfrak{v} = B_\mathfrak{v} A_\mathfrak{v}$ machen.

Liegt der Punkt $\mathfrak{S}$ in Fig. **104** auf dem Kreise β und geht die Gerade α durch den Mittelpunkt M desselben; dann ist die von C erzeugte Curve γ eine doppelpunktige Focalcurve, deren Doppelpunkt $\mathfrak{S}$ ist. Da der Curvenpunkt C auf der Geraden g erhalten wird, indem wir $\mathfrak{S}C = BA$ machen, und der Curvenpunkt Φ auf der durch den Kreismittelpunkt M gehenden Geraden sich ergiebt, indem wir $\mathfrak{S}\Phi = \Xi M$ abtragen, so sind die Dreiecke ABM, $C\mathfrak{S}\Phi$ congruent. Bezeichnet μ den Schnittpunkt, welchen ΦC mit der zu α Parallelen $\mathfrak{S}\zeta$ bildet, so sind demnach in dem Dreieck $C\mathfrak{S}\mu$ die Winkel bei C und $\mathfrak{S}$ gleich, es ist also $\mu C = \mu\mathfrak{S}$; und dies ist die Beziehung, welche in Art. 39 zur Construction der doppelpunktigen Focalcurve gedient hat. Die Normale $CC_\mathfrak{v}$ an dieser Curve wird somit erhalten, wenn wir $\mathfrak{S}C_\mathfrak{v} = B_\mathfrak{v} A_\mathfrak{v}$ machen.[1])

b) In Fig. **105** bewegt sich eine Gerade g, welche die Curven α, β, γ in den Punkten A, B, C schneidet, derart, dass die Punktgruppe ABC ähnlich bleibt. Bezeichnet $\mathfrak{S}$ den Berührungspunkt auf der Hüllbahncurve $\mathfrak{g}$, der Geraden g, und wird in $\mathfrak{S}$ auf g eine Senkrechte errichtet, welche die Normalen der Curven α, β, γ resp. in den Punkten $A_\mathfrak{v}\, B_\mathfrak{v}\, C_\mathfrak{v}$ schneidet, so ist $A_\mathfrak{v}\, B_\mathfrak{v}\, C_\mathfrak{v}$ ähnlich ABC; und es besteht also die Proportion $A_\mathfrak{v} B_\mathfrak{v} : B_\mathfrak{v} C_\mathfrak{v} = AB : BC$. Fällt insbesondere eine der Curvennormalen, z. B. $AA_\mathfrak{v}$ mit der Geraden g zusammen, dann coincidiren die Punkte $A_\mathfrak{v}$, $\mathfrak{S}$; dem zufolge ist in diesem Specialfalle $\mathfrak{S}B_\mathfrak{v}C_\mathfrak{v}$ ähnlich ABC und $\mathfrak{S}B_\mathfrak{v} : B_\mathfrak{v} C_\mathfrak{v} = AB : BC$. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Tangenten an den Curven α, β, γ und denken wir uns diese Curven durch diese Tangenten ersetzt, dann würde die bewegte Gerade g, auf der die Punktgruppe ABC ähnlich bleiben soll, eine Parabel umhüllen. Dem zufolge ist der Berührungspunkt $\mathfrak{S}$ der bewegten Geraden g auf ihrer Hüllbahncurve $\mathfrak{g}$ identisch mit dem Berüh-

---

[1]) Mannheim, *Nouvelles Annales de Mathématiques.* 1857. T. 16. p. 322, und ferner D'Ocagne, daselbst. 1880. 2ème Serie. T. 19. p. 289.

rungspunkte $\mathfrak{G}$ auf dieser Parabel, an der die vier Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, g Tangenten sind und die hierdurch bestimmt ist. Vermittelst jener Proportion kann die auf g senkrechte Gerade leicht construirt werden, deren Fusspunkt der Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ ist. Wir können aber auch in verschiedener Weise, wie in Art. 33 c) gezeigt wurde, gestützt auf eine Specialisirung des Brianchon'schen Satzes den Punkt $\mathfrak{G}$ als Berührungspunkt an der genannten Parabel vermittelst dreier Hülfsgeraden construiren. Um beispielsweise zwei dieser Constructionen des Berührungspunktes $\mathfrak{G}$ in Fig. **105** auszuführen, ziehen wir tC, ferner zu $\mathfrak{c}$ die Parallele $B\Omega$ und durch den Schnittpunkt Ω dieser Geraden zu $\mathfrak{a}$ die Parallele $\Omega\mathfrak{G}$; oder wir ziehen die Gerade Am, ferner die zu $\mathfrak{a}$ parallele Gerade BO und durch den Schnitt O dieser Geraden zu $\mathfrak{c}$ die Parallele $O\mathfrak{G}$.

47. **Anwendung auf die Construction des Krümmungsmittelpunktes der Kegelschnitte und der cyclischen Curven.** a) Die Ellipse α ist in Fig. **106** durch den Punkt A der starren Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ erzeugt, deren Punkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sich auf Axen der Ellipse bewegen. Die Ellipsennormale $A\mathfrak{P}$ wird durch den Pol $\mathfrak{P}$, den Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der resp. in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ auf den Axen errichteten Senkrechten, bestimmt und schneidet die Axen in den Punkten A, B. Aus den ähnlichen Dreiecken $AB\mathfrak{B}$, $A\mathfrak{P}\mathfrak{C}$ folgt die Proportion

$$AB : A\mathfrak{P} = A\mathfrak{B} : A\mathfrak{C};$$

und aus den ähnlichen Dreiecken $A\mathfrak{P}\mathfrak{B}$, $AC\mathfrak{C}$ ergiebt sich die Proportion

$$A\mathfrak{P} : AC = A\mathfrak{B} : A\mathfrak{C}.$$

Da die Strecken $A\mathfrak{B}$, $A\mathfrak{C}$ resp. gleich den Halbaxen mb, ma der Ellipse sind, so ist das Verhältniss

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\overline{mb}^2}{\overline{ma}^2}$$

constant und die Punktgruppe ABC auf der Normalen bleibt für alle Lagen derselben ähnlich. Dieselbe Beziehung kann in anderer Weise auch leicht bei der Hyperbel nachgewiesen werden. Hiernach erhalten wir den Steiner'schen Satz:

Die Tangente $\mathfrak{a}$ und Normale g an einem beliebigen Punkte A eines Kegelschnittes α und die beiden Axen desselben bestimmen als vier Tangenten eine Parabel, welche die Normale g im Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{G}$ berührt.[1])

[1]) Steiner, *Vorlesungen über synthetische Geometrie.* II. Theil von Schröter. 1867. § 37. — C. Pelz hat in einer sehr vollständigen, übersichtlichen

Gemäss der oben gegebenen Constructionen erhalten wir somit erstens den Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{G}$ in Fig. **106**, indem wir tC ziehen, ferner $B\Omega$ parallel der Axe $m\mathfrak{c}$ und $\Omega\mathfrak{G}$ senkrecht g resp. parallel der Tangente $\mathfrak{a}$; zweitens, indem wir Am ziehen, dann BO senkrecht g oder parallel $\mathfrak{a}$ und $O\mathfrak{G}$ parallel $m\mathfrak{c}$.[1])

Nach der obigen Darlegung ist $\mathfrak{G}B_{\mathfrak{b}}C_{\mathfrak{b}}$ ähnlich ABC, und es lässt sich leicht nachweisen, dass durch die ausgeführten Constructionen diese Beziehung erfüllt wird. Für die Scheitel des Kegelschnittes werden die Constructionen unbrauchbar. Wenn A sich z. B. in dem Scheitel a der Ellipse α befindet, coincidirt der zum Scheitel a gehörende Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{G}_a$ mit dem betreffenden Punkte B, und C ist nach m gelangt, so dass $AC = \overline{ma}$ wird. Nach jenem constanten Verhältnisse ergiebt sich dann

$$\overline{a\mathfrak{G}_a} = AB = \frac{\overline{mb}^2}{\overline{ma}};$$

und hiernach kann man den Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{G}_a$ in folgender Weise construiren. Wir ziehen an die Scheitel a, b die Tangenten, welche sich im Punkte J treffen und von J auf die Verbindungsgerade ab die Senkrechte $J\mathfrak{G}_a$, welche die Axe ma in $\mathfrak{G}_a$ schneidet; und die Verlängerung dieser Senkrechten liefert, wie aus der Symmetrie dieser Construction hervorgeht, zugleich auf der Axe mb den zum Scheitel b gehörenden Krümmungsmittelpunkt.

b) Wenn in Fig. **107** ein Kreis p an einem festen Kreise π rollt, so beschreibt ein mit dem rollenden Kreise p verbundener Punkt A eine cyclische Curve α (Art. 57); und die von A nach dem Berührungspunkte B der Kreise, dem Pol $\mathfrak{P}$, gezogene Gerade AB ist die Normale an der cyclischen Curve.

Verbinden wir A mit dem Mittelpunkte F des rollenden Kreises p und ziehen wir durch den Mittelpunkt Φ des festen Kreises π zu AF die Parallele ΦC, die AB in C trifft, dann ist wegen der ähnlichen Dreiecke BAF, $BC\Phi$ das Verhältniss

$$\frac{AB}{BC} = \frac{FB}{B\Phi}$$

constant; und ferner ist auch die Strecke ΦC constant. Demnach bewegt sich der Schnittpunkt C auf einem mit π concentrischen

Zusammenstellung gezeigt, dass die vielen bekannten Constructionen für die Krümmungsmittelpunkte der Kegelschnitte aus diesem Steiner'schen Satze abgeleitet werden können. *Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften.* 1879.

[1]) Vergl. Mannheim a. a. O. Bour a. a. O. p. 53.

Kreise. Ist $\mathfrak{G}$ der entsprechende Krümmungsmittelpunkt der cyclischen Curve, und sind $B_\mathfrak{v}$, $C_\mathfrak{v}$ die Schnittpunkte, welche die in $\mathfrak{G}$ auf AC errichtete Senkrechte resp. mit $B\Phi$, $C\Phi$ bildet, so ist nach der in Art. 46. b) abgeleiteten Beziehung

$$\frac{\mathfrak{G}B_\mathfrak{v}}{B_\mathfrak{v}C_\mathfrak{v}} = \frac{AB}{BC}.$$

Um hiernach den Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{G}$ zu construiren, errichten wir in B auf AB die Senkrechte $B\mathfrak{Q}$, die AF in $\mathfrak{Q}$ schneidet und ziehen die Gerade $\mathfrak{Q}\Phi$, dann trifft diese AB im Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{G}$. Denn bezeichnet $\mathfrak{U}$ den Schnitt von $\mathfrak{Q}B$ und $C\Phi$, so ist

$$\frac{\mathfrak{G}B_\mathfrak{v}}{B_\mathfrak{v}C_\mathfrak{v}} = \frac{\mathfrak{Q}B}{B\mathfrak{U}} = \frac{AB}{BC}.\text{[1]}$$

Diese Construction des Krümmungsmittelpunktes kann auch auf die Ellipse angewendet werden. Denken wir uns in Fig. **106** um m mit dem Radius $m\mathfrak{P}$ einen Kreis beschrieben, ferner auch über $m\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ als Durchmesser einen zweiten Kreis, der in dem ersten festen Kreise rollt; dann erzeugt der mit dem rollenden Kreis verbundene Punkt A nach Art. 18 die Ellipse α. Errichten wir also auf $A\mathfrak{P}$ die Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, die $A\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{Q}$ schneidet, und ziehen wir die Gerade $m\mathfrak{Q}$, so trifft diese $A\mathfrak{P}$ in dem Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{G}$.

c) In Fig. **108** nehmen wir an, dass bei der ähnlich-veränderlichen Punktgruppe ABC auf der bewegten Geraden g, der Punkt C beständig der Berührungspunkt auf der zur Geraden g gehörenden Hüllbahncurve γ sei, deren entsprechender Krümmungsmittelpunkt mit Γ bezeichnet ist. Die auf g errichtete Senkrechte $C\Gamma$ schneidet die Normalen der von A, B beschriebenen Bahncurven α, β resp. in den Punkten $A_\mathfrak{v}$, $B_\mathfrak{v}$, und wenn diese Punkte als die Endpunkte der lothrechten Geschwindigkeiten von A, B betrachtet werden, dann ist nach S. 63 die lothrechte Geschwindigkeit des auf γ laufenden Berührungspunktes C gleich $C\Gamma$. Da aber die Punktgruppe ABC auf der bewegten Geraden g ähnlich bleibt, so ist auch $A_\mathfrak{v}\Gamma B_\mathfrak{v}$ ähnlich ACB. Der Krümmungsmittelpunkt Γ der Hüllbahncurve γ theilt also in diesem Falle die Strecke $A_\mathfrak{v}B_\mathfrak{v}$ in demselben Verhältnisse, wie der Berührungspunkt C die Strecke AB.

---

[1]) Auf diese Weise hat Mannheim die angegebene Construction zuerst begründet. *Nouvelles Annales de Mathématiques.* 1859. T. 18. p. 371. — Eine neue directe Ableitung dieser Construction ist in Art. 59 dargelegt.

Bewegen sich in Fig. **109** zwei Punkte A, B auf einem Kreise k, dessen Mittelpunkt Φ ist, so dass ihre Geschwindigkeiten AA_v, BB_v in jedem Zeitmomente in constantem Verhältnisse stehen; dann theilt der Punkt C, in welchem die Verbindungsgerade AB ihre Hüllbahncurve γ berührt, die Strecke AB in demselben constanten Verhältnisse. Denn ist AB in die unendlich nahe Nachbarlage $A'B'$ gelangt, so sind die unendlich kleinen Dreiecke CAA', CBB' ähnlich, und es ist

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{AA_v}{BB_v}.$$

Die auf diese Weise erzeugte Hüllbahncurve γ ist, wie in Art. 71 bewiesen wird, eine cyclische Curve; und der zu C gehörende Krümmungsmittelpunkt Γ derselben ergiebt sich demnach, wenn wir in C auf AB eine Senkrechte errichten, die $A\Phi$, $B\Phi$ resp. in $A_\mathfrak{v}$, $B_\mathfrak{v}$ schneidet, und auf dieser Senkrechten den Punkt Γ so bestimmen, dass

$$\frac{A_\mathfrak{v}\Gamma}{B_\mathfrak{v}\Gamma} = \frac{AC}{BC}$$

ist, also $A_\mathfrak{v}\Gamma B_\mathfrak{v}$ ähnlich ACB machen.[1])

c) Ist k in Fig. **109** eine beliebige Curve und sollen die Punkte A, B sich auf derselben so bewegen, dass die unendlich kleinen Dreiecke CAA', CBB' stets gleichen Inhalt haben; dann muss der Berührungspunkt C der zugehörigen Hüllbahncurve in der Mitte von AB liegen. In diesem Falle ist der Inhalt des Segmentes, welches die Sehne AB von der Curve k abschneidet, constant; und umgekehrt, wenn der Inhalt dieses Segmentes constant, ist C die Mitte von AB.

In Fig. **110** bewegen sich die beiden Punkte A, B resp. auf den Geraden a, b, die sich in M schneiden, derart, dass der Inhalt des Dreiecks MAB constant bleibt, dann ist auch das Product $\overline{MA}\,.\,\overline{MB}$ constant. Dem zufolge beschreiben die beiden Punkte A, B auf den Geraden a, b projective Punktreihen und die Verbindungsgerade AB umhüllt dann eine Hyperbel γ, deren Asymptoten a, b sind. Die Gerade AB berührt mit ihrer Mitte C die Hyperbel γ und der zum Punkte C gehörende Krümmungsmittelpunkt Γ ist die Mitte der Strecke $A_\mathfrak{v}\ B_\mathfrak{v}$, welche die beiden in A, B auf den Asymptoten a, b errichteten Senkrechten auf der zu C gehörenden Normale der Hyperbel abschneiden.

[1]) Eine andere Ableitung dieser Construction hat Mannheim, *Cours de géométrie descriptive*. 1880. p. 203, mitgetheilt.

Beziehungen der Krümmungsmittelpunkte der Curven im bewegten ebenen System und der erzeugten Curven im festen ebenen System.

48. **Die Bobillier'schen Constructionen der Krümmungsmittelpunkte.** a) Nachdem wir die Construction der Tangenten und Normalen an den Curven ausführlich behandelt haben, müssen wir auch die Beziehungen aufsuchen, welche die Grundlage bilden für die Construction der Krümmungsmittelpunkte der durch die Punkte und Curven eines bewegten ebenen Systems erzeugten Bahncurven und Hüllbahncurven.

Wir bezeichnen in Fig. **111**, Taf. VI mit S_I, S_{II}, S_{III} drei discrete Lagen eines ebenen Systems S, welches sich in einem festen ebenen System Σ bewegt; ferner mit f_I, f_{II}, f_{III} die drei Lagen eines dem System S angehörenden Kreises f, dessen Mittelpunkt F sein möge, und nehmen an, es seien $\mathfrak{A}_I$, $\mathfrak{B}_{II}$, $\mathfrak{C}_{III}$ die Berührungspunkte, welche die drei congruenten Kreise f_I, f_{II}, f_{III} mit einem zum System Σ gehörenden Kreise φ an derselben Seite liegend bilden. Die Mittelpunkte F_I, F_{II}, F_{III} dieser drei Kreise befinden sich beziehlich auf den vom Mittelpunkte Φ des Kreises φ nach den Berührungspunkten $\mathfrak{A}_I$, $\mathfrak{B}_{II}$, $\mathfrak{C}_{III}$ gehenden Radien und auf dem um Φ beschriebenen Kreise φ'. Nehmen wir ferner an, es sei t eine gegebene Gerade, welche die noch unbekannten Pole $\mathfrak{P}_{I\,II}$, $\mathfrak{P}_{II\,III}$ der Systemlagen S_I, S_{II} und S_{II}, S_{III} enthalten soll, so ergeben sich diese Pole auf t, indem wir von Φ nach den Mitten $m_{I\,II}$, $m_{II\,III}$ der Strecken F_IF_{II}, $F_{II}F_{III}$ Gerade ziehen. Hiernach sind jene drei Systemlagen bestimmt; denn das System S wird von S_I nach S_{II} gebracht, wenn wir die Systemstrecke $\mathfrak{P}_{I\,II}F_I$ nach $\mathfrak{P}_{I\,II}F_{II}$ und dann die Systemstrecke $\mathfrak{P}_{II\,III}F_{II}$ nach $\mathfrak{P}_{II\,III}F_{III}$ drehen. Dadurch gelangt der Systemkreis f von f_I nach f_{II}, dann nach f_{III}, und zu den Berührungspunkten $\mathfrak{A}_I$, $\mathfrak{B}_{II}$, $\mathfrak{C}_{III}$ ergeben sich auf den entsprechenden Kreisen beziehlich die homologen Punkte $\mathfrak{A}_{II}\mathfrak{A}_{III}$, $\mathfrak{B}_I\mathfrak{B}_{III}$, $\mathfrak{C}_I\mathfrak{C}_{II}$. Diese ausgeführte Bestimmung der drei Systemlagen S_I, S_{II}, S_{III} erfordert nur die Mittelpunkte Φ, F_I, F_{II}, F_{III} und die Gerade t, demnach dind diese Lagen von der Grösse des Systemkreises f und des Kreises φ unabhängig. Diese Beziehungen bleiben bestehen, wenn die drei Systemlagen S_I, S_{II}, S_{III} unendlich nahe auf einander folgen, wenn also die drei Punkte $\mathfrak{A}_I$, $\mathfrak{B}_{II}$, $\mathfrak{C}_{III}$, sowie die drei Punkte F_I, F_{II}, F_{III} unendlich nahe liegen; dann geht die Gerade t in die Tangente der Polbahn und der Kreis φ' in den Krümmungskreis der Bahncurve des Punktes F über.

Betrachten wir nun den Kreis f als den Krümmungskreis einer Curve des Systems S, dann ist bei unendlich nahen Systemlagen der Kreis φ der Krümmungskreis der entsprechenden Hüllbahncurve. Denken wir uns noch einen Systempunkt L in S angenommen, der ein Krümmungsmittelpunkt einer Curve des Systems S ist, und sind L_I, L_{II}, L_{III} in den drei Systemlagen die drei entsprechenden unendlich nahen Punkte, so ist auch der Mittelpunkt Λ des durch diese drei Punkte gehenden Kreises der Krümmungsmittelpunkt für die Bahncurve des Punktes L und zugleich für die zugehörige Hüllbahncurve. Wohl können die drei aufeinander folgenden Punkte F_I, F_{II}, F_{III} auf dem Kreise φ' in verschiedener Weise unendlich nahe gelegt werden, dem entsprechend erhalten dann auch die Punkte L_I, L_{II}, L_{III} auf der Bahncurve des Punktes L verschiedene unendlich kleine Abstände $L_I L_{II}$ und $L_{II} L_{III}$; aber solche Aenderungen dieser unendlich kleinen Abstände bewirken nur eine unendlich kleine Lagenänderung des Krümmungsmittelpunktes Λ, die gegen endliche Grössen verschwindet.

Liegen auf dem Kreise φ', dessen Mittelpunkt Φ ist, die drei Punkte F_I, F_{II}, F_{III} unendlich nahe und ist die Gerade t die betreffende Polbahntangente, dann liefert die für discrete Lagen angegebene Bestimmung, hier angewendet, auf der Tangente t der Polbahn die unendlich nahen Pole $\mathfrak{P}_{I\,II}$, $\mathfrak{P}_{II\,III}$, welche mit den Punkten F_I, F_{II}, F_{III} zusammen drei unendlich nahe Lagen des bewegten Systems S und damit auch die Krümmungsmittelpunkte bestimmen. Nennen wir nun die Krümmungsmittelpunkte F, Φ einer Systemcurve und der zugehörigen Hüllbahncurve entsprechende Krümmungsmittelpunkte dieser beiden Gleitcurven; und beachten wir, dass wir die Punkte F_I, F_{II}, F_{III} in beliebigen unendlich kleinen Abständen folgend auf dem um Φ beschriebenen Kreise φ' bei der Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte annehmen können, so ergiebt sich der Satz:

Zwei entsprechende Krümmungsmittelpunkte und die betreffende Polbahntangente bilden ein Aequivalent für drei unendlich nahe Lagen eines bewegten ebenen Systems und bestimmen die gegenseitige Lage der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte aller Gleitcurven.

Ist in Fig. 112 der Krümmungsmittelpunkt F einer Curve f des bewegten ebenen Systems S, ferner der entsprechende Krümmungsmittelpunkt Φ der zugehörigen Hüllbahncurve φ in dem festen System Σ und die betreffende Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ gegeben, so können wir zu jedem beliebig angenommenen Krümmungsmittelpunkte der einen Gleitcurve den entsprechenden der anderen leicht in folgender Weise construiren. Es sei L ein beliebig angenommener Krümmungsmittelpunkt einer Systemcurve l, so ziehen wir die Gerade $\mathfrak{P}L$, machen den Winkel $L\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ entgegengesetzt gleich dem Winkel $F\mathfrak{P}\mathfrak{t}$, verbinden den Schnittpunkt $\mathfrak{Q}$ der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{q}$, FL mit Φ, dann treffen sich die Geraden $\Phi\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}L$ in dem entsprechenden Krümmungsmittelpunkte Λ der zugehörigen Hüllbahncurve λ. Denn die Punkte L, Λ liefern in der That als entsprechende Krümmungsmittelpunkte zusammen mit den entsprechenden Krümmungsmittelpunkten F, Φ nach dem Satze in Art. 31 wegen der entgegengesetzt gleichen Winkel $\Lambda\mathfrak{P}\mathfrak{q}$, $\Phi\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ die vorhin gegebene Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$; und die beiden Punkte Φ, F nebst dieser Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ sind nach unserer obigen Darlegung drei unendlich nahen Systemlagen äquivalent, welche sämtliche Krümmungsmittelpunkte bestimmen. Ist umgekehrt der Punkt Λ als Krümmungsmittelpunkt einer Hüllbahncurve in dem festen System Σ gegeben, dann ergiebt sich in analoger Weise der entsprechende Krümmungsmittelpunkt L der zugehörigen Systemcurve. Somit erhalten wir die folgende wichtige Construction:

Ist ein Paar entsprechender Krümmungsmittelpunkte Φ, F und die Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ gegeben, und soll zu einem beliebigen Krümmungsmittelpunkte L der entsprechende Λ construirt werden, so machen wir den Winkel $L\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ entgegengesetzt gleich dem Winkel $F\mathfrak{P}\mathfrak{t}$, ziehen die Gerade FL, die $\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{Q}$ trifft, und die Gerade $\Phi\mathfrak{Q}$, die auf $\mathfrak{P}L$ den gesuchten entsprechenden Krümmungsmittelpunkt Λ bestimmt.

Nehmen wir im System S noch einen Krümmungsmittelpunkt D an und construiren wir wieder, indem wir den Winkel $D\mathfrak{P}\mathfrak{q}'$ entgegengesetzt gleich dem Winkel $F\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ machen, den Schnitt $\mathfrak{Q}'$ der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{q}'$, FD mit Φ verbinden, auf $\mathfrak{P}D$ den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt Δ, so sind die Winkel $L\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ und $D\mathfrak{P}\mathfrak{q}'$ gleich. Durch diese Beziehung erhalten wir, wenn zwei Paar entsprechende Krümmungsmittelpunkte gegeben sind, ohne Benützung der Polbahntangente die folgende Construction entsprechender Krümmungsmittelpunkte.

Sind ΦF, ΛL zwei Paar entsprechende Krümmungsmittelpunkte und soll zu einem beliebigen Krümmungsmittelpunkte D der entsprechende Δ construirt werden, so bestimmen wir den Pol $\mathfrak{P}$, den Schnittpunkt der Geraden ΦF, ΛL, ferner den Schnittpunkt $\mathfrak{Q}$ der Geraden $\Phi\Lambda$, FL, machen den Winkel $D\mathfrak{P}\mathfrak{q}'$ in gleichem Sinne gleich dem Winkel $L\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, ziehen die Gerade FD bis zum Schnittpunkte $\mathfrak{Q}'$ der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{q}'$ und verbinden $\mathfrak{Q}'$ mit Φ, dann ist der Schnittpunkt Δ der Geraden $\mathfrak{Q}'\Phi$, $\mathfrak{P}D$ der gesuchte entsprechende Krümmungsmittelpunkt.

Diese beiden wichtigen Constructionen, aus denen viele nützliche und interessante Resultate hervorgehen, wurden zuerst von Bobillier[1]) in anderer Weise abgeleitet; daher werden dieselben die Bobillier'schen Constructionen genannt. Ist der Krümmungsmittelpunkt Δ, Fig. **112**, im festen System Σ gegeben, so erhalten wir in analoger Weise umgekehrt den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt D im bewegten System S. Aus dieser Bestimmungsweise der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte ergiebt sich, dass der Berührungspunkt der betreffenden Gleitcurven nicht in Betracht kommt. Anstatt von der Geraden ΦF können wir auch in Fig. **112** von der Geraden ΛL ausgehend die Bestimmung der entsprechenden Punkte D, Δ ausführen, indem wir den Winkel $D\mathfrak{P}\mathfrak{q}^I$ in gleichem Sinne gleich dem Winkel $F\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ machen, und von dem Schnittpunkte $\mathfrak{Q}^I$ der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{q}^I$, LD nach Λ die Gerade $\mathfrak{Q}^I\Lambda$ ziehen; dann trifft dieselbe die Gerade $\mathfrak{P}D$ in dem Krümmungsmittelpunkte Δ. Da die entsprechenden Ecken der Dreiecke $\Phi\Lambda\Delta$, FLD auf Geraden liegen, die durch den Pol $\mathfrak{P}$ gehen, so liegen nach dem Desargues'schen Satze auf S. 83 auch die drei Schnittpunkte $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}^I$ der entsprechenden Seiten dieser Dreiecke auf einer Geraden.

Die ausgeführten Constructionen sind gleichartig, ob wir in dem einen oder in dem anderen der Systeme S, Σ die Krümmungsmittelpunkte annehmen und die entsprechenden bestimmen; daher sind auch alle Beziehungen der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte in den beiden Systemen S, Σ wechselseitig und sym-

[1]) Bobillier, *Cours de géométrie.* 1870. p. 232. Die von diesem Autor, sowie später von Anderen gegebene Begründung dieser Constructionen ermangelt der vollen Strenge, weil vorher nicht bewiesen wird, dass durch zwei entsprechende Krümmungsmittelpunkte und durch die Polbahntangente die Systeme der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte bestimmt sind.

metrisch. Bewegt sich das System S in Fig. **112** mit den Curven $f, l \ldots$, deren Krümmungsmittelpunkte $F, L \ldots$ sind, und werden in dem festen System Σ die zugehörigen Hüllbahncurven $\varphi, \lambda \ldots$ erzeugt, welche die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte $\Phi, \Lambda \ldots$ besitzen, so treten bei der Umkehrung der Bewegung, d. h. wenn das System S festgehalten und das System Σ bewegt wird, die Curven $f, l \ldots$ als Hüllbahncurven auf, die dann von den bewegten Curven $\varphi, \lambda \ldots$ erzeugt werden; und den bewegten Krümmungsmittelpunkten $\Phi, \Lambda, \ldots$ entsprechen somit im betrachteten Momente die in Ruhe befindlichen Krümmungsmittelpunkte $F, L, \ldots$

b) Durch die beiden Paare entsprechender Krümmungsmittelpunkte ΦF, ΛL ist ein Gelenkviereck gegeben, dessen festgehaltene Seite $\Phi\Lambda$ das System Σ und dessen Koppel FL das bewegte System S vertritt. Drei unendlich nahe Lagen dieser Koppel liefern drei unendlich nahe Lagen des Systems S, die sämtliche entsprechende Krümmungsmittelpunkte bestimmen. Ebenso bilden je zwei andere Paare entsprechender Krümmungsmittelpunkte, die nicht in einer Geraden liegen, ein Gelenkviereck, welches als ein Aequivalent für drei unendlich nahe Systemlagen betrachtet werden kann.

In Fig. **113** liegen die drei Krümmungsmittelpunkte Λ, L, F in einer Geraden, und dem zufolge coincidirt der Pol $\mathfrak{P}$ mit F. In diesem Falle ist nur die eine der beiden oben angegebenen Constructionen anwendbar, um zu einem gegebenen Krümmungsmittelpunkte D den entsprechenden Δ zu ermitteln. Wir machen in gleichem Sinne den Winkel $D\mathfrak{P}\mathfrak{q}'$ gleich $\Phi\mathfrak{P}\Lambda$, ziehen die Gerade LD, die $\mathfrak{P}\mathfrak{q}'$ in $\mathfrak{Q}'$ trifft, und die Gerade $\mathfrak{Q}'\Lambda$, welche auf $\mathfrak{P}D$ den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt Δ liefert.

Betrachten wir wieder die Fig. **112** und stellen wir uns vor, der Pol $\mathfrak{P}$ rücke ins Unendliche; dann werden die Geraden ΦF, ΛL, ΔD, $\mathfrak{Q}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{Q}'\mathfrak{q}'$ parallel; und aus der Gleichheit der Winkel $D\mathfrak{P}\mathfrak{q}'$, $L\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ geht die Gleichheit der Abstände der Geradenpaare $\mathfrak{Q}'\mathfrak{q}'$, ΔD und $\mathfrak{Q}\mathfrak{q}$, ΛL hervor.

Sind in Fig. **114** die Geraden ΦF, ΛL parallel, befindet sich also der Pol $\mathfrak{P}$ im Unendlichen, und soll zu einem gegebenen Krümmungsmittelpunkte D der entsprechende Δ bestimmt werden; dann ziehen wir Dd' parallel $L\Lambda$, ferner $\mathfrak{Q}'\mathfrak{q}'$ parallel $L\Lambda$, so dass auf der Geraden $\Phi\Lambda$ die Abschnitte $d'\mathfrak{q}'$, $\Lambda\mathfrak{Q}$ oder die Abschnitte $\mathfrak{Q}\mathfrak{q}'$, $\Lambda d'$ gleich sind, ferner ziehen wir die Gerade FD bis $\mathfrak{Q}'$ und die Gerade $\mathfrak{Q}'\Phi$, welche Dd' in Δ schneidet. Aus dieser Construction ergiebt sich, dass der Abstand $D\Delta$ constant ist, welche Lage wir auch für D resp. für Δ auf der Geraden Dd' annehmen. Demnach sind in dem betrachteten Falle für alle Systempunkte, die auf einer zu ΛL Parallelen liegen, die Krümmungsradien der entsprechenden Bahncurven von gleicher Grösse. Für die Parallele ww', bei welcher der Abstand $w'\Phi = \Lambda\mathfrak{Q}$ ist, fällt die zugehörige Parallele $\mathfrak{q}_w$ mit ΦF zusammen; und wir erhalten zu jedem entweder im System S oder im System Σ angenommenen Punkte jener Parallelen ww' einen unendlich fernen entsprechenden Punkt. Denn je näher wir eine gedachte Parallele x an die Parallele ww' rücken lassen, desto weiter liegen die entsprechenden Punkte auf der Parallelen x auseinander und die Entfernung dieser Punkte wird unendlich gross, wenn x mit ww' zusammenfällt.

c) Die Krümmungsmittelpunkte Π, P der in Fig. **115** gezeichneten Polbahn π und Polcurve p für den betreffenden Berührungspunkt oder Pol $\mathfrak{P}$ sind entsprechende Krümmungsmittelpunkte in dem festen System und in dem bewegten System; denn die Curve π ist die Hüllbahncurve der Systemcurve p. Diese beiden Curven, die Polbahn und Polcurve, unterscheiden sich jedoch ganz besonders von jedem anderen Paare der Gleitcurven dadurch, dass sie stets auf einander rollen, während diese letzteren auf einander gleiten. Ist D der Krümmungsmittelpunkt einer in dem bewegten System liegenden Curve d für den mit der zugehörigen Hüllbahncurve δ gebildeten Berührungspunkt $\mathfrak{D}$, so ergiebt sich der entsprechende Krümmungsmittelpunkt Δ der Hüllbahncurve δ, indem wir die Gerade DP ziehen, auf $D\mathfrak{P}$ die Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ errichten, die DP in $\mathfrak{Q}$ trifft, dann schneidet die Gerade $\mathfrak{Q}\Pi$ die Gerade $D\mathfrak{P}$ in dem entsprechenden Krümmungsmittelpunkte Δ. Denn, da die Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ mit $\mathfrak{P}\Pi$ einen rechten Winkel bildet, so muss nach der Bobillier'schen Construction auch der Winkel $\Delta\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ ein Rechter sein. Die für diesen besonderen Fall erhaltene Construction des zu D gehörenden Krümmungsmittelpunktes Δ stimmt mit der in Art. 47b) (Fig. **107**) abgeleiteten Construction überein.

49. **Projective und maassliche Beziehungen der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte auf einer durch den Pol gehenden Geraden.** Nehmen wir in Fig. **116** auf einer durch den Pol $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden g eine Reihe von Krümmungsmittelpunkten $D_1\, D_2\, D_3 \ldots$ an und construiren wir in der angegebenen Weise, indem wir den Winkel $g\mathfrak{P}\mathfrak{q}' = L\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ machen, die Reihe $\Delta_1\, \Delta_2\, \Delta_3 \ldots$ der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte, so sind diese beiden Punktreihen

projectiv; denn die Strahlenbüschel $F(D_1 D_2 D_3 ..)$, $\Phi(\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 ..)$ schneiden sich in den auf der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{q}'$ liegenden Punkten $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3 ..$ Diese Construction zeigt, dass nur im Pol $\mathfrak{P}$ zwei entsprechende Punkte dieser projectiven Reihen coincidiren; und da die beiden Reihen zwei Doppelpunkte besitzen, so liegen diese vereint in dem Pol. Demnach vertritt der Pol in geometrischer Beziehung zwei Paare sich selbst entsprechender Punkte. Wenn also auf einer durch den Pol gehenden Geraden ein einziges Paar entsprechender Krümmungsmittelpunkte gegeben ist, so sind durch dasselbe und durch den Pol die beiden entsprechenden projectiven Punktreihen auf dieser Geraden bestimmt.

Ist in Fig. **117** auf einer Geraden g der Pol $\mathfrak{P}$ und das Paar D, Δ entsprechender Krümmungsmittelpunkte gegeben, dann können wir zu einem Punkte D_1 den entsprechenden Δ_1 in folgender Weise construiren. Wir ziehen durch $\mathfrak{P}$ zwei beliebige Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{o}$, $\mathfrak{P}\mathfrak{u}$, nehmen auf der ersten einen beliebigen Punkt $\mathfrak{O}$ an, ziehen die Gerade $\mathfrak{O}D$, $\mathfrak{O}\Delta$, welche $\mathfrak{P}\mathfrak{u}$ resp. in $\mathfrak{U}_D$, $\mathfrak{U}_\Delta$ schneiden, ferner die Gerade $D_1\mathfrak{U}_D$, die $\mathfrak{P}\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{O}_1$ trifft, und die Gerade $\mathfrak{O}_1\mathfrak{U}_\Delta$, die den entsprechenden Punkt Δ_1 liefert. Umgekehrt ergiebt sich auf diese Weise zu Δ_1 der entsprechende Punkt D_1. So erhalten wir z. B. zu dem unendlich fernen Punkte Δ_w^∞ den entsprechenden D_w, indem wir die Gerade $\mathfrak{U}_\Delta \mathfrak{O}_w$ parallel $\mathfrak{P}\Delta_w^\infty$ und die Gerade $\mathfrak{O}_w \mathfrak{U}_D$ ziehen, die D_w bestimmt. Dieser Punkt D_w, dem der unendlich fernere Punkt Δ_w^∞ entspricht, ist der Gegenpunkt in der Reihe $D D_1 ...$ Die Systemcurve, der D_w als Krümmungsmittelpunkt angehört, berührt ihre Hüllbahncurve momentan in einem Wendepunkte auf derselben; oder wenn D_w als ein beschreibender Punkt des bewegten Systems betrachtet wird, so durchschreitet derselbe momentan einen Wendepunkt seiner Bahncurve. Denken wir uns ebenso in der Punktreihe $\Delta\Delta_1 ..$ den Gegenpunkt Δ_ψ bestimmt, dann ist auf der betreffenden Systemcurve der Berührungspunkt mit der Hüllbahncurve ein Wendepunkt der Systemcurve. Die beiden projectiven Punktreihen sind hiernach auch bestimmt, wenn der Pol $\mathfrak{P}$ und einer von den beiden Gegenpunkten D_w, Δ_ψ gegeben ist.

In Fig. **118** ist wieder auf einer Geraden g der Pol $\mathfrak{P}$ und ein Paar entsprechender Krümmungsmittelpunkte D, Δ gegeben; zu einem beliebigen Punkte D_i ist der entsprechende Δ_i construirt. Wenn wir nun zu dem mit Δ_i coincidirenden Punkte D_k den entsprechenden Punkt Δ_k bestimmen; dann bilden die bei diesen Constructionen gebrauchten Hülfsgeraden die sechs Seiten eines vollständigen Vierecks $\mathfrak{O}_i \mathfrak{O}_k \mathfrak{U}_D \mathfrak{U}_\Delta$. Bezeichnen wir den Punkt der Geraden g, in welchem Δ_i, D_k coincidiren, mit $\mathfrak{D}$, so sind $\mathfrak{D}\, D_i\, \mathfrak{P}\, \Delta_k$ vier harmonische Punkte; und wenn der Punkt $\mathfrak{D}$ sich im Unendlichen befindet, liegt der Pol $\mathfrak{P}$ in der Mitte zwischen den Punkten D_i, Δ_k, die dann Gegenpunkte der entsprechenden projectiven Punktreihen sind. Hiernach erhalten wir den Satz:

Die Krümmungsmittelpunkte D_i, Δ_k, welche den beiden in einem Punkte $\mathfrak{D}$ coincidirenden Krümmungsmittelpunkten Δ_i, D_k entsprechen, bilden mit dem Punkte $\mathfrak{D}$ und dem Pol $\mathfrak{P}$ vier harmonische Punkte; und die Gegenpunkte der projectiven Reihen der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte liegen auf verschiedenen Seiten des Pols in gleichen Abständen von demselben.

Sind in Fig. **119** auf der Geraden g der Pol $\mathfrak{P}$ und zwei entsprechende Punkte D, Δ gegeben, so erhalten wir die beiden Gegenpunkte D_w, Δ_ψ in folgender Weise. Wir ziehen durch $\mathfrak{P}$ zwei beliebige Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{u}$, $\mathfrak{P}\mathfrak{o}$ und durch D eine beliebige Gerade, welche den beiden ersten resp. in den Punkten $\mathfrak{U}_D$, $\mathfrak{O}$ begegnet, ziehen ferner die Gerade $\mathfrak{O}\Delta$, die $\mathfrak{P}\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{U}_\Delta$ trifft, und legen zur Geraden g die Parallelen $\mathfrak{U}_D D_\psi^\infty$, $\mathfrak{U}_\Delta \Delta_w^\infty$, welche $\mathfrak{P}\mathfrak{o}$ resp. in $\mathfrak{O}_\psi$, $\mathfrak{O}_w$ schneiden; dann bestimmen die Geraden $\mathfrak{O}_w \mathfrak{U}_D$, $\mathfrak{U}_\Delta \mathfrak{O}_\psi$ auf g beziehlich die Gegenpunkte D_w, Δ_ψ.

Eine Vereinfachung der Bestimmung der Gegenpunkte D_w, Δ_ψ ergiebt sich, wenn wir die eine jener Parallelen, z. B. $\mathfrak{U}_\Delta \Delta_w^\infty$ ins Unendliche verlegen, dem zufolge liegen auf den Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{u}$, $\mathfrak{P}\mathfrak{o}$ auch die Punkte $\mathfrak{U}_\Delta$, $\mathfrak{O}_w$ im Unendlichen; und somit erhalten wir die folgende einfachere Construction. Wir ziehen in Fig. **120** durch den gegebenen Punkt D eine beliebige Gerade, durch die beiden gegebenen Punkte $\mathfrak{P}$, Δ zwei beliebige Parallele, welche diese Gerade in $\mathfrak{U}_D$, $\mathfrak{O}$ schneiden, und ferner $\mathfrak{U}_D D_w$ parallel $\mathfrak{P}\mathfrak{O}$. Der andere Gegenpunkt Δ_ψ ergiebt sich dann am einfachsten, indem wir $\mathfrak{P}\Delta_\psi = D_w \mathfrak{P}$ machen. Soll in Fig. **120** der Gegenpunkt Δ_ψ zuerst bestimmt werden, so ziehen wir durch Δ eine beliebige Gerade, durch $\mathfrak{P}$, D zwei beliebige Parallele, welche diese Gerade in $\mathfrak{U}^\Delta$, $\mathfrak{O}$ treffen, und dann $\mathfrak{U}^\Delta \Delta_\psi$ parallel $\mathfrak{P}\mathfrak{O}$. Nach dieser Construction sind die Punktgruppen $\mathfrak{P} D D_w$, $\Delta D \mathfrak{P}$ ähnlich, demnach besteht die Proportion:

$$D D_w : \mathfrak{P} D = \mathfrak{P} D : D \Delta,$$

und es ist

$$D D_w \,.\, D\Delta = \overline{\mathfrak{P} D}^2.$$

In gleicher Weise ergiebt sich:

$$\Delta\Delta_\psi : \mathfrak{P}\Delta = \mathfrak{P}\Delta : \Delta D,$$

und demnach

$$\Delta\Delta_\psi \,.\, \Delta D = \overline{\mathfrak{P}\Delta}^2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt noch eine nützliche geometrische Beziehung, wenn, wie in Fig. **120**, die beiden gegebenen entsprechenden Krümmungsmittelpunkte D, Δ zu beiden Seiten des Pols $\mathfrak{P}$ liegen. Wir beschreiben um D, Δ Kreise, die sich im Pol $\mathfrak{P}$ berühren, und beschreiben ferner über $D\Delta$ als Durchmesser einen dritten Kreis, der die beiden ersten Kreise einerseits resp. in den Punkten Z, Ξ schneidet, dann sind die Fusspunkte D_w, Δ_ψ der von Z, Ξ auf $D\Delta$ gefällten Lothe die beiden Gegenpunkte.

Aus den ähnlichen Punktgruppen $\Delta D \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} D D_w$ in Fig. **120** folgt auch

$$\mathfrak{P} D : \Delta \mathfrak{P} = D_w D : \mathfrak{P} D_w = (\mathfrak{P} D - \mathfrak{P} D_w) : \mathfrak{P} D_w.$$

Setzen wir nun $\mathfrak{P} D = r_i$, $\Delta \mathfrak{P} = -\mathfrak{P}\Delta = -\varrho_i$, $\mathfrak{P} D_w = \mathfrak{d}_i$, so erhalten wir

$$r_i : -\varrho_i = (r_i - \mathfrak{d}_i) : \mathfrak{d}_i.$$

Hieraus ergiebt sich

$$r_i \,.\, \varrho_i = \mathfrak{d}_i\,(\varrho_i - r_i)$$

und

$$\frac{1}{r_i} - \frac{1}{\varrho_i} = \frac{1}{\mathfrak{d}_i} \,\ldots\ldots\, \alpha).$$

Nehmen wir in dieser Gleichung $r_i = -\varrho_i = \mathfrak{r}$, dann ist

$$\mathfrak{r} = 2\mathfrak{d}_i.$$

Es giebt demnach auf jeder durch den Pol gehenden Geraden ein Paar entsprechender Krümmungsmittelpunkte, welche auf verschiedenen Seiten des Pols von demselben gleiche Abstände besitzen.

Unter allen durch den Pol gehenden Geraden nimmt aber in Fig. **116** die Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ an der Polbahn eine Sonderhaltung ein; denn nehmen wir auf derselben einen beliebigen Krümmungsmittelpunkt im bewegten System an, so fällt nach der Bobillier'schen Construction jene Hülfsgerade $\mathfrak{P}\mathfrak{q}'$ mit der Geraden $\mathfrak{P}\Phi$ zusammen, und dem zufolge coincidirt der entsprechende Krümmungsmittelpunkt mit dem Pol $\mathfrak{P}$. Hiernach entspricht jedem auf der Polbahntangente befindlichen Krümmungsmittelpunkte des bewegten Systems S stets der Pol $\mathfrak{P}$ im festen System Σ. Und analog ergiebt sich, dass jedem auf der Polbahntangente liegenden Krümmungsmittelpunkte des festen Systems Σ der Pol $\mathfrak{P}$ im beweglichen System S entspricht. Umgekehrt entsprechen, wenn wir den Pol als einen Punkt des einen Systems betrachten, demselben alle Punkte der Polbahntangente in dem anderen System.

50. **Construction der Krümmungsmittelpunkte der Polbahn und Polcurve.** In Fig. **121** sei die Bewegung eines Systems S wieder dadurch bestimmt, dass die beiden Curven f, l desselben resp. auf den Curven φ, λ in dem festen System Σ gleiten, und es seien die zu diesen Curven f, l, φ, λ gehörenden Krümmungsmittelpunkte F, L, Φ, Λ gegeben, welche momentan die Ecken eines Gelenkvierecks bilden. Um zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes Π der Polbahn π zu gelangen, nehmen wir an, es sei $\mathfrak{G}$ der Berührungspunkt, den die Verbindungsgerade $\mathfrak{q}$ der beweglichen Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ momentan mit der zugehörigen Hüllbahncurve bildet; und errichten auf $\mathfrak{P}\Phi$, $\mathfrak{P}\Lambda$, $\mathfrak{P}\mathfrak{G}$ die Senkrechten ΦN_φ, ΛN_λ, $\mathfrak{G} N_\mathfrak{g}$, welche die Normale $\mathfrak{P}n$ der Polbahn resp. in den Punkten N_φ, N_λ, $N_\mathfrak{g}$ schneiden. Ziehen wir ferner die auf $\mathfrak{P}n$ senkrechte Polbahntangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$, und bezeichnen wir den Winkel $\Lambda\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ mit θ, so ist auch der Winkel $\Phi\mathfrak{P}\mathfrak{t} = \theta$, und dem zufolge macht die Polbahnnormale $\mathfrak{P}n$ mit $\mathfrak{P}\Phi$ den Winkel $\Phi\mathfrak{P}n = 90^\circ - \theta$. Durchläuft der Pol $\mathfrak{P}$ eine unendlich kleine Wegstrecke ds auf der Polbahn π; und betrachten wir zunächst die beiden Geraden $\Lambda\mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}\mathfrak{P}$, welche sich um die momentan festen Punkte Λ, $\mathfrak{G}$ im System Σ drehen, und bezeichnen wir die entsprechenden unendlich kleinen Drehungswinkel dieser Geraden resp. mit $d\chi_\lambda$, $d\chi_\mathfrak{g}$: so ist nach der Gleichung auf S. 62

$$d\chi_\lambda = \frac{ds}{\mathfrak{P}N_\lambda}, \quad d\chi_\mathfrak{g} = \frac{ds}{\mathfrak{P}N_\mathfrak{g}}.$$

Ferner ist, wenn $d\theta$ die unendlich kleine Aenderung des von den Geraden $\Lambda\mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}\mathfrak{P}$ gebildeten Winkels θ bezeichnet,

$$d\theta = d\chi_\lambda - d\chi_\mathfrak{g};$$

also

$$d\theta = \left(\frac{1}{\mathfrak{P}N_\lambda} - \frac{1}{\mathfrak{P}N_\mathfrak{g}}\right) ds.$$

Betrachten wir ferner die beiden Geraden $\Phi\mathfrak{P}$, $\Pi\mathfrak{P}$, welche sich um die momentan festen Punkte Φ, Π im System Σ drehen und den Winkel $90^\circ - \theta$ einschliessen, so ergiebt sich in analoger Weise die unendlich kleine Aenderung $-d\theta$ dieses Winkels

$$-d\theta = \left(\frac{1}{\mathfrak{P}N_\varphi} - \frac{1}{\mathfrak{P}\Pi}\right) ds,$$

und somit ist

$$\frac{1}{\mathfrak{P}\Pi} = \frac{1}{\mathfrak{P}N_\varphi} + \frac{1}{\mathfrak{P}N_\lambda} - \frac{1}{\mathfrak{P}N_\mathfrak{g}} \quad \ldots \ldots \; 1).$$

Durch diese Gleichung ist der Krümmungsradius $\mathfrak{P}\Pi$ der Polbahn π bestimmt, wenn wir den Berührungspunkt $\mathfrak{G}$, den die Gerade $\mathfrak{q}$ mit ihrer Hüllbahncurve bildet, kennen. Behufs der Construction dieses Berührungspunktes $\mathfrak{G}$ können wir auf $L\Lambda$ eine beliebig angenommene Strecke LL_v als die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes L betrachten. Wir ziehen durch L_v zu FL eine Parallele, die $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{Q}_v$ und $\Phi\Lambda$ in $\mathfrak{Q}_v^0$ trifft; dann repräsentirt die Strecke $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_v$ die lothrechte Geschwindigkeit, welche der mit $\mathfrak{Q}$ coincidirende Punkt der Geraden FL besitzt, und $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_v^0$ die lothrechte Geschwindigkeit, mit welcher der an ΛL geheftete momentan in $\mathfrak{Q}$ befindliche Punkt um Λ rotirt. Wird ferner senkrecht auf FL oder $\mathfrak{Q}_v^0\mathfrak{Q}_v$ die Gerade $\mathfrak{Q}_v\mathfrak{Q}_v^1$ gezogen, welche die auf $\Phi\Lambda$ senkrechte Gerade $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_v^1$ in $\mathfrak{Q}_v^1$ schneidet, so ist $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_v^1$ die lothrechte Geschwindigkeit, mit welcher sich der Punkt $\mathfrak{Q}$ auf der Geraden $\Phi\Lambda$ bewegt. Die durch $\mathfrak{Q}_v^0$ zu $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ parallele Gerade bestimmt durch ihre Schnittpunkte D', D'' auf den Geraden $\Phi\mathfrak{P}$, $\Lambda\mathfrak{P}$ die lothrechten Geschwindigkeiten $\mathfrak{P}D'$, $\mathfrak{P}D''$, welche beziehlich der mit $\mathfrak{P}$ coincidirende Punkt der rotirenden Geraden ΦF, ΛL besitzt; und folglich schneiden sich die auf diesen Geraden errichteten Senkrechten $D'D$, $D''D$ auf der Polbahntangente $\mathfrak{P}n$ in dem mit D bezeichneten Endpunkte der lothrechten Geschwindigkeit $\mathfrak{P}D$, mit welcher sich der Pol $\mathfrak{P}$ auf der Polbahn π bewegt. Damit wir nun den Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ erhalten, ziehen wir nach Art. 33 a) auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ die Senkrechte $\mathfrak{Q}_v^1\mathfrak{N}$, zu $\mathfrak{P}D$ die Parallele $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$, welche diese Senkrechte in $\mathfrak{Q}'$ trifft; und dann bestimmt die Gerade $D\mathfrak{Q}'$ den Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$.

Wenn wir jene zu FL Parallele $\mathfrak{Q}_v^0\mathfrak{Q}_v$ nicht durch einen beliebigen auf $L\Lambda$ angenommenen Punkt L_v ziehen, sondern erst, wie in Fig. **121**, durch den Schnittpunkt $\mathfrak{U}_D$, den LF mit der auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ errichteten Senkrechten $\mathfrak{P}\mathfrak{s}$ bildet, zu $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ die Parallele $\mathfrak{U}_D\mathfrak{Q}_v^0$ legen, dann wird hierdurch die Lage jener Parallelen $\mathfrak{Q}_v^0\mathfrak{Q}_v$ bestimmt, und es ergiebt sich eine Beziehung, durch welche die Bestimmung des Berührungspunktes $\mathfrak{G}$ vereinfacht wird. Denn machen wir, weil $\mathfrak{U}_D\mathfrak{Q}_v^0 \# \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_v$ ist, das Dreieck $\mathfrak{U}_D\mathfrak{Q}_v^0X \cong \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_v\mathfrak{Q}_v^1$, und betrachten wir das entstandene Dreieck $\mathfrak{U}_DX\mathfrak{Q}$, so treffen sich die von den Ecken X, $\mathfrak{Q}$ ausgehenden Höhenlothe in dem Punkte $\mathfrak{Q}_v^0$. Dem zufolge ist die Gerade $X\mathfrak{Q}$, welche $\mathfrak{P}n$

in N_q trifft, auf $\mathfrak{U}_D\mathfrak{Q}_0^0$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ senkrecht, und es ergiebt sich, wenn $\mathfrak{U}_D\mathfrak{H}$ das dritte Höhenloth bezeichnet,

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{U}_D\mathfrak{H} = \mathfrak{Q}\mathfrak{R},$$
$$\mathfrak{P}N_q = \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'.$$

Ferner ist:

$$\frac{\mathfrak{P}N_q}{\mathfrak{P}N_g} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}\mathfrak{G}} = \frac{\mathfrak{P}D - \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{P}D},$$

und hiernach

$$\frac{1}{\mathfrak{P}N_g} = \frac{1}{\mathfrak{P}N_q} - \frac{1}{\mathfrak{P}D} \quad \ldots . \; 2).$$

Um für den Krümmungsradius $\mathfrak{P}\Pi$ der Polbahn eine Formel abzuleiten, die zur möglichst einfachen Construction desselben führt, bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}_\Delta$ den Schnitt der Geraden $\Lambda\Phi$, $\mathfrak{P}\mathfrak{U}_D$, mit ε_1, ε_2 die Winkel, welche die Geraden $\mathfrak{P}\Phi$, $\mathfrak{P}\Lambda$ mit der Polbahnnormalen $\mathfrak{P}n$ einschliessen, mit α_1, α_2 die Winkel, welche diese Geraden mit der Geraden $\mathfrak{Q}\mathfrak{U}_\Delta$ bilden, und mit γ den Winkel $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{U}_\Delta$ des bei $\mathfrak{P}$ rechtwinkeligen Dreiecks $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{U}_\Delta$, dann ist

$$\frac{1}{\mathfrak{P}N_\varphi} = \frac{\cos\varepsilon_1}{\mathfrak{P}\Phi} = \frac{\cos\varepsilon_1 \sin\alpha_1}{\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta \cos\gamma},$$
$$\frac{1}{\mathfrak{P}N_\lambda} = \frac{\cos\varepsilon_2}{\mathfrak{P}\Lambda} = \frac{\cos\varepsilon_2 \sin\alpha_2}{\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta \cos\gamma},$$

und ferner

$$\frac{1}{\mathfrak{P}N_\varphi} + \frac{1}{\mathfrak{P}N_\lambda} = \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta \cos\gamma}(\cos\varepsilon_1 \sin\alpha_1 + \cos\varepsilon_2 \sin\alpha_2).$$

Da $\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta$ senkrecht auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ steht, ist auch der Winkel $\Phi\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta = \varepsilon_2$, und wir erhalten

$$\alpha_1 = 90^0 + \gamma - \varepsilon_2, \quad \alpha_2 = 90^0 + \gamma - \varepsilon_1.$$

Durch Einsetzung in die erlangte Gleichung ergiebt sich

$$\frac{1}{\mathfrak{P}N_\varphi} + \frac{1}{\mathfrak{P}N_\lambda} = \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta \cos\gamma}[\cos\varepsilon_1 \cos(\gamma - \varepsilon_2) + \cos\varepsilon_2 \cos(\gamma - \varepsilon_1)]$$
$$= \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta \cos\gamma}[2\cos\varepsilon_1 \cos\varepsilon_2 \cos\gamma + \sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sin\gamma]$$
$$= \frac{2\cos\varepsilon_1 \cos\varepsilon_2}{\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta} + \frac{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sin\gamma}{\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta \cos\gamma}.$$

Wenn wir durch $\mathfrak{U}_\Delta$ zu $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ eine Parallele, d. h. auf $\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta$ eine Senkrechte ziehen, welche die Geraden $\mathfrak{P}\Phi$, $\mathfrak{P}\Lambda$ resp. in den Punkten Δ', Δ'' trifft, und auf diesen Geraden in den erhaltenen Schnittpunkten die Senkrechten $\Delta'\Delta$, $\Delta''\Delta$ errichten, so schneiden sich dieselben auf der Polbahnnormalen $\mathfrak{P}n$ in einem Punkte Δ. Dem zufolge ist:

$$\frac{\cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2}{\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta} = \frac{1}{\mathfrak{P}\Delta}.$$

Beachten wir, dass der Winkel $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}n = 90^\circ - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ ist, so erhalten wir

$$\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}N_q};$$

und weil ferner

$$\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \mathfrak{P}\mathfrak{Q},$$

ergiebt sich

$$\frac{\sin(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\sin\gamma}{\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta \cos\gamma} = \frac{1}{\mathfrak{P}N_q},$$

und somit

$$\frac{1}{\mathfrak{P}N_\varphi} + \frac{1}{\mathfrak{P}N_\lambda} = \frac{2}{\mathfrak{P}\Delta} + \frac{1}{\mathfrak{P}N_q} \;\ldots\; 3).$$

Hiernach folgt durch Benutzung der Gleichungen 1), 2)

$$\frac{1}{\mathfrak{P}\Pi} = \frac{2}{\mathfrak{P}\Delta} + \frac{1}{\mathfrak{P}D} \;\ldots\; 4).$$

Wenn wir in Fig. **122** auf der Polbahnnormalen $\mathfrak{P}n$ die Strecke $\mathfrak{P}D$ im entgegengesetzten Sinne vom Pol $\mathfrak{P}$ aus abtragen, also $\mathfrak{P}\mathfrak{D} = -\mathfrak{P}D$ machen, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{2}{\mathfrak{P}\Delta} = \frac{1}{\mathfrak{P}\Pi} + \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{D}},$$

aus welcher durch Umformung

$$\frac{\mathfrak{P}\Pi - \mathfrak{P}\Delta}{\mathfrak{P}\Pi} = \frac{\mathfrak{P}\Delta - \mathfrak{P}\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}\mathfrak{D}}$$

und ferner das Doppelverhältniss

$$\frac{\Delta\Pi}{\mathfrak{P}\Pi} : \frac{\Delta\mathfrak{D}}{\mathfrak{P}\mathfrak{D}} = -1$$

folgt. Demnach ist der Krümmungsmittelpunkt Π der Polbahn der vierte harmonische Punkt zu den drei Punkten $\Delta, \mathfrak{P}, \mathfrak{D}$, und kann als solcher mittelst eines vollständigen Vierecks in bekannter Weise construirt werden.

Es ergiebt sich jedoch der Krümmungsmittelpunkt Π auch ohne Benutzung des Punktes $\mathfrak{D}$ in folgender Weise. Wir ziehen durch D, Δ Parallele, welche eine durch $\mathfrak{P}$ gezogene Gerade resp. in den Punkten $\mathfrak{U}_D$, $\mathfrak{U}_\Delta$ schneiden, legen durch den Schnittpunkt J der Diagonalen des Trapezes $\Delta D \mathfrak{U}_D \mathfrak{U}_\Delta$ zu den parallelen Seiten desselben eine Parallele Ji, die $\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta$ in i trifft, ziehen ferner die Gerade Δi, die auf der Diagonale $\mathfrak{U}_\Delta D$ den Schnittpunkt H liefert, und zu $\mathfrak{U}_\Delta\mathfrak{P}$ die Parallele $H\Pi$, welche auf $\mathfrak{P}n$ den Krümmungsmittelpunkt Π bestimmt. Zum Beweise verlängern wir die Gerade Δi bis zu ihrem Schnittpunkte d mit $D\mathfrak{U}_D$, alsdann ist hinsichtlich des Trapezes $iJ\Delta\mathfrak{U}_\Delta$ der Punkt $\mathfrak{U}_D$ die Mitte von Dd, und da auch der Pol $\mathfrak{P}$ die Mitte von $D\mathfrak{D}$ ist, so sind $d\mathfrak{D}$, $\mathfrak{U}_D\mathfrak{P}$ Parallele; ferner sind die beiden Punktgruppen ΔHid, $\Delta\Pi\mathfrak{P}\mathfrak{D}$ harmonisch und folglich ist auch $H\Pi$ parallel zu $\mathfrak{U}_\Delta\mathfrak{P}$.

Um noch eine andere Construction des Punktes Π abzuleiten, ziehen wir zu $\Delta\mathfrak{U}_\Delta$ die Parallelen Hh, $\Pi\mathfrak{p}$ bis an $\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta$ und die Parallele $\mathfrak{P}K$ bis an $\mathfrak{U}_\Delta\Pi$, dann sind $\mathfrak{U}_D\, i\, h\, \mathfrak{U}_\Delta$ vier harmonische Punkte. Dem zufolge ist

$$\frac{2}{\mathfrak{U}_D h} = \frac{1}{\mathfrak{U}_D i} + \frac{1}{\mathfrak{U}_D\mathfrak{U}_\Delta},$$

und wegen Proportionalität in dem Trapeze $iJ\Delta\mathfrak{U}_\Delta$ ergiebt sich hiernach

$$\frac{1}{hH} = \frac{1}{iJ} + \frac{1}{\mathfrak{U}_\Delta\Delta}.$$

Analog ist hinsichtlich des Trapezes $K\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta\Delta$

$$\frac{1}{\mathfrak{p}\Pi} = \frac{1}{\mathfrak{P}K} + \frac{1}{\mathfrak{U}_\Delta\Delta},$$

und da $hH = \mathfrak{p}\Pi$, so erhalten wir

$$\mathfrak{P}K = iJ.$$

Hierauf gründet sich die folgende Construction des Krümmungsmittelpunktes Π. Wir ziehen zu den parallelen Seiten des Trapezes $\Delta D\mathfrak{U}_D\mathfrak{U}_\Delta$ die Parallele $\mathfrak{P}K$, durch den Schnittpunkt J der Trapezdiagonalen zu $\mathfrak{U}_\Delta\mathfrak{P}$ eine Parallele JK, und hierauf die Gerade $\mathfrak{U}_\Delta K$, welche $\mathfrak{P}n$ im Krümmungsmittelpunkte Π schneidet.

Wir wollen in Fig. **123** der besseren Uebersicht wegen diese Construction des Krümmungsmittelpunktes Π der Polbahn in Vollständigkeit wiederholen. Die vier Krümmungsmittelpunkte Φ, F, Λ, L sind gegeben und mit denselben die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$. Die in $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ senkrecht gezogene Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{U}_\Delta$ liefert die Punkte $\mathfrak{U}_D$, $\mathfrak{U}_\Delta$; durch den einen der beiden, z. B. durch $\mathfrak{U}_\Delta$, ziehen wir zu $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ eine Parallele, welche die Geraden $\mathfrak{P}\Phi$, $\mathfrak{P}\Lambda$ resp. in Δ', Δ'' schneidet; errichten auf diesen Geraden in den erhaltenen Schnittpunkten Senkrechte, dann ist der Schnitt Δ derselben ein Punkt der Polbahnnormalen $\mathfrak{P}n$. Hierauf ziehen wir zu $\mathfrak{U}_\Delta\Delta$ die Parallele $\mathfrak{U}_D D$ bis an $\mathfrak{P}n$, ferner die Parallele $\mathfrak{P}K$; bestimmen den Schnitt J der Trapezdiagonalen $\mathfrak{U}_D\Delta$, $\mathfrak{U}_\Delta D$; ziehen JK parallel $\mathfrak{U}_\Delta\mathfrak{P}$ und schliesslich die Gerade $\mathfrak{U}_\Delta K$, welche auf $\mathfrak{P}n$ den Krümmungsmittelpunkt Π der Polbahn π liefert.[1]

Ziehen wir durch $\mathfrak{U}_D$ zu $\mathfrak{P}\Omega$ eine Parallele, welche die Geraden $\mathfrak{P}\Phi$, $\mathfrak{P}\Lambda$ in den Punkten D', D'' schneidet, und errichten wir in denselben auf diesen Geraden Senkrechte, die sich in dem Punkte D auf $\mathfrak{P}n$ treffen, dann erhalten wir den Punkt Δ durch die zu $\mathfrak{U}_D D$ parallel gezogene Gerade $\mathfrak{U}_\Delta \Delta$. Sind so die beiden Punkte D, Δ bestimmt, dann kann man auch, falls die Trapezdiagonalen $\mathfrak{U}_D \Delta$, $\mathfrak{U}_\Delta D$ sich unter sehr spitzem Winkel schneiden und den Schnittpunkt J nicht genau bestimmen, durch Δ, D, $\mathfrak{P}$ beliebige Parallele ziehen und ferner durch $\mathfrak{P}$ eine Gerade legen, so dass wir ein Trapez erhalten, dessen Diagonalen einen genaueren Schnittpunkt geben.

Kehren wir die Bewegung um, betrachten wir also das System S als fest, das System Σ als beweglich, so erfolgt bei dieser Construction eine Vertauschung der Punkte $\mathfrak{U}_D$, $\mathfrak{U}_\Delta$. Wir erhalten demnach auf $\mathfrak{P}n$ den Krümmungsmittelpunkt P der Polcurve p durch die Gerade $\mathfrak{U}_D K$; und aus der Gleichung 4) ergiebt sich dem gemäss

$$\frac{1}{\mathfrak{P}P} = \frac{2}{\mathfrak{P}D} + \frac{1}{\mathfrak{P}\Delta} \quad \ldots\ldots \text{4a)}.$$

Betrachten wir die beiden Krümmungsradien $\mathfrak{P}\Pi$, $\mathfrak{P}P$ der Polbahn π und der Polcurve p als gegeben, so sind durch die Gleichungen 4), 4a) die Strecken $\mathfrak{P}\Delta$, $\mathfrak{P}D$ bestimmt; und allen Gelenkvierecken, welche auf der gemeinsamen Normale $\mathfrak{P}n$ der Polbahn und Polcurve die beiden Punkte Δ, D liefern, entsprechen dieselben Krümmungsmittelpunkte Π, P.

Die Polbahn π ist die Hüllbahncurve der bewegten Polcurve p; es sind also Π, P entsprechende Krümmungsmittelpunkte in den Systemen Σ, S, und demnach bestimmen je zwei Gerade, welche von $\mathfrak{U}_\Delta$, $\mathfrak{U}_D$ nach einem Punkte der Geraden $\mathfrak{P}K$ gezogen werden, auf $\mathfrak{P}n$ zwei entsprechende Krümmungsmittelpunkte. Da die Geraden $\mathfrak{U}_\Delta \Delta$, $\mathfrak{U}_D D$ zur Geraden $\mathfrak{P}K$ parallel sind, dieselbe also im unendlich fernen Punkte schneiden, so sind Δ, D entsprechende Krümmungsmittelpunkte in Σ, S. Ferner bestimmen je zwei Gerade, welche von $\mathfrak{U}_\Delta$, $\mathfrak{U}_D$ nach einem Punkte der Geraden $\mathfrak{P}\Omega$ gezogen werden, auf $\mathfrak{P}\Phi$ wie auf $\mathfrak{P}\Lambda$ entsprechende Krümmungsmittelpunkte; und da die Geraden $\mathfrak{U}_\Delta \Delta''$, $\mathfrak{U}_D D''$ zu $\mathfrak{P}\Omega$

[1] Diese Construction wurde zuerst, aber in anderer Weise, von Grübler abgeleitet in der *Zeitschrift für Math. u. Physik.* 1884. B. 29. S. 212 u. 382.

parallel sind, so sind auch Δ', D' und Δ'', D'' entsprechende Krümmungsmittelpunkte. Allen Gelenkvierecken, dessen Eckpaare in den Geraden $\mathfrak{P}\Phi$, $\mathfrak{P}\Lambda$ liegen und dessen nicht in diesen Geraden liegende Seiten resp. durch $\mathfrak{U}_\Delta$, $\mathfrak{U}_D$ gehen und sich auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ schneiden, entsprechen dieselben beiden Krümmungsmittelpunkten Π, P.

Wenn wir in Fig. **123** die Punkte Δ, D durch die Krümmungsmittelpunkte Π, P auf der Polbahnnormalen $\mathfrak{P}n$ gegeben betrachten, so können wir nach dieser Darlegung leicht die Gesamtheit aller Gelenkvierecke überschauen, denen diese Krümmungsmittelpunkte Π, P entsprechen. Wir beschreiben über $\mathfrak{P}\Delta$ und $\mathfrak{P}D$ als Durchmesser Kreise, die in Fig. **123** nur zur Hälfte gezeichnet sind, ziehen durch den Pol $\mathfrak{P}$ zwei beliebige Gerade, die diese Kreise resp. in den Punkten $\Delta' D'$, $\Delta'' D''$ schneiden und fällen von $\mathfrak{P}$ auf die erhaltenen Parallelen $\Delta'\Delta''$, $D'D''$ eine Senkrechte, so bestimmt diese auf den Parallelen die betreffenden Punkte $\mathfrak{U}_\Delta$, $\mathfrak{U}_D$, die mit Δ, D das Trapez $\Delta D \mathfrak{U}_D \mathfrak{U}_\Delta$ bilden. Die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ ergiebt sich als parallel zu $\Delta'\Delta''$ oder $D'D''$, und je zwei von $\mathfrak{U}_\Delta$, $\mathfrak{U}_D$ nach einem auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ befindlichen Punkte gezogene Gerade liefern mit jenen beiden beliebig durch den Pol $\mathfrak{P}$ gezogenen Geraden ein Gelenkviereck, dem die Krümmungsmittelpunkte Π, P der Polbahn und Polcurve entsprechen.

51. **Construction der beiden Pole, welche durch zwei Paare auf einer Geraden gegebener, entsprechender Krümmungsmittelpunkte bestimmt sind.** Werden auf einer Geraden die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte F, Φ und L, Λ angenommen, so sind F, Φ, und L, Λ entsprechende Punkte zweier projectiver Reihen, bei denen die beiden Doppelpunkte in einem Punkte, dem Pol, coincidiren. Die beiden projectiven Punktreihen werden aber durch zwei Paare entsprechender Punkte noch nicht bestimmt. Unsere Darlegungen werden jedoch lehren, dass durch die Punktpaare F, Φ und L, Λ zwei zugehörige Pole bestimmt sind, und wir wollen die Construction derselben ableiten.

Nehmen wir an, es seien in Fig. **124** auf einer Geraden g zwei projective Punktreihen durch drei Paare entsprechender Punkte DFL, $\Delta\Phi\Lambda$ gegeben, so erhalten wir nach den Lehren der projectiven Geometrie die beiden Doppelpunkte $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ dieser Reihen, indem wir einen beliebigen Kreis k beschreiben, einen beliebigen Peripheriepunkt M desselben mit jenen Punkten durch Gerade verbinden, die den Kreis k andererseits beziehlich in den Punkten $d_k f_k l_k$, $\delta_k \varphi_k \lambda_k$ treffen, ferner ziehen wir die Geradenpaare $\lambda_k d_k$, $l_k \delta_k$ und $\lambda_k f_k$, $l_k \varphi_k$, die sich resp. in den Punkten J, N schneiden. Die Verbindungsgerade JN bestimmt auf dem Kreise k die Schnittpunkte $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, und dann liefern die Geraden $M\mathfrak{p}'$, $M\mathfrak{p}''$ auf g die beiden Doppelpunkte $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ der beiden projectiven Reihen. Sollen aber diese Doppelpunkte beide in einem Punkte zusammenfallen, so muss die Gerade JN den Kreis k berühren. Sind also für einen solchen besonderen Fall nur die entsprechenden Punktpaare ΦF, ΛL gegeben, dann wird hierdurch nur der Punkt N bestimmt, von dem zwei Tangenten an den Kreis k gezogen werden können. Die von M durch die betreffenden beiden Berührungspunkte gehenden Geraden liefern demnach auf g zwei Punkte, welche die beiden Doppelpunkte einer durch die conjugirten Punktpaare ΦL und ΛF bestimmten involutorischen Reihe sind und zu diesen Punktpaaren harmonisch liegen.

In Fig. **125** sind auf einer Geraden g zwei Paare entsprechender Krümmungsmittelpunkte ΦF, ΛL gegeben. Um die hierdurch bestimmten beiden Pole $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$ auf der Geraden g zu erhalten, beschreiben wir einen beliebigen Kreis k, ziehen von einem beliebigen Punkte M desselben nach den Punkten Φ, F, Λ, L Gerade, die k in den Punkten φ_k, f_k, λ_k, l_k schneiden, ziehen ferner die Geraden $\varphi_k l_k$, $f_k \lambda_k$, legen dann von ihrem Schnittpunkte N Tangenten an den Kreis k und ziehen von M nach den beiden Berührungspunkten $\mathfrak{p}^I$, $\mathfrak{p}^{II}$ der Tangenten Gerade $M\mathfrak{p}^I$, $M\mathfrak{p}^{II}$, die g in den Polen $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$ treffen. Anstatt des Ziehens der beiden Tangenten können wir die Berührungspunkte $\mathfrak{p}^I$, $\mathfrak{p}^{II}$ auch erhalten, indem wir die Paare der Verbindungsgeraden $\varphi_k f_k$, $\lambda_k l_k$ und $f_k l_k$, $\varphi_k \lambda_k$ ziehen, die sich beziehlich in den Punkten ζ, η treffen, ferner die Gerade $\zeta\eta$ ziehen, die als Polare des Punktes N den Kreis k in jenen Berührungspunkten $\mathfrak{p}^I$, $\mathfrak{p}^{II}$ schneidet. Aus diesen Darlegungen folgt der Satz:

Die beiden Pole $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$, welche bei zwei Paaren entsprechender Krümmungsmittelpunkte Φ, F und Λ, L auftreten, sind die Doppelpunkte einer durch die beiden Paare conjugirter Punkte Φ, L und Λ, F bestimmten, involutorischen Punktreihe, und liegen harmonisch zu jedem dieser Punktpaare.[1])

---

[1]) Diese Beziehung hat Aronhold in anderer Auffassung und auf einem anderen Wege gefunden. *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen.* 1872. Jahrgang 51. S. 140.

Einfacher gestaltet sich die Construction der Pole $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$, wenn wir die Punkte Φ, L, oder, wie in Fig. **126**, die Punkte Λ, F als Durchmesserendpunkte des Kreises k nehmen. Wir ziehen von einem beliebigen Kreispunkte M nach Φ, L Gerade, die k in φ_k, l_k treffen, ziehen ferner die Geraden $F\varphi_k$, Λl_k und durch deren Schnittpunkt ζ eine auf g senkrechte Gerade, die den Kreis k in den Punkten $\mathfrak{p}^I$, $\mathfrak{p}^{II}$ schneidet; dann bestimmen die Geraden $M\mathfrak{p}^I$, $M\mathfrak{p}^{II}$ auf der Geraden g die Pole $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$. Behufs der Ausführung der anderen Construction dieser Pole ziehen wir die Gerade $\varphi_k l_k$, welche g in N schneidet, und bestimmen die Berührungspunkte $\mathfrak{p}^I$, $\mathfrak{p}^{II}$ der von N an den Kreis k gehenden Tangenten.

Um noch eine dritte einfachere Construction der beiden zu den Punktpaaren ΦL, ΛF harmonisch liegenden Pole $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$ anzugeben, beachten wir, dass diese Pole auch die beiden Grenzpunkte des Kreisbüschels sind, das durch die beiden über ΦL und ΛF als Durchmesser beschriebenen Kreise bestimmt ist. Beschreiben wir einen beliebigen Kreis $\mathfrak{k}$, so bildet derselbe mit diesen beiden Kreisen zwei gemeinschaftliche Secanten, die sich auf der Chordale des Kreisbüschels schneiden. Ziehen wir aber der Einfachheit wegen den Kreis $\mathfrak{k}$ in Fig. **126** durch die Punkte Φ, L, darauf die mit dem Kreise k gebildete gemeinschaftliche Secante GH, die ΦL im Punkte O schneidet, dann ist O der Fusspunkt der auf ΦL senkrechten Chordale oder der Mittelpunkt der durch die conjugirten Punktpaare ΦL, ΛF bestimmten involutorischen Reihe. Wird nun der Berührungspunkt T einer von O an den Kreis k gehenden Tangente construirt, so ergeben sich die Pole $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$, indem wir auf der Geraden g die Strecken $O\mathfrak{P}^I = O\mathfrak{P}^{II} = OT$ machen.

52. **Construction der Pole bei einem Gelenkviereck in besonderen Lagen.** Die Zweideutigkeit der Pollage tritt besonders bei dem Gelenkviereck auf, dessen vier Seiten in eine einzige Gerade zusammenfallen können. Dieser Fall erfolgt, wenn, wie in Fig. **127** und Fig. **128**, bei dem Gelenkviereck $\Phi\Lambda L_1 F_1$ die Seitensumme $\Lambda\Phi + \Phi F_1$ gleich der Seitensumme $\Lambda L_1 + L_1 F_1$ ist; denn die Koppel $F_1 L_1$ gelangt dann nach FL in die Gerade $\Lambda\Phi$. In Fig. **127** ist bei dem offenen Gelenkviereck für die nahe an FL befindliche Lage $F_1 L_1$ der Pol $\mathfrak{P}_1^I$ als Schnittpunkt der Seiten ΦF_1, ΛL_1 und der Punkt $\mathfrak{Q}_1^I$ als Schnittpunkt der Seiten $\Lambda\Phi$, $L_1 F_1$ bestimmt. Fällt aber die Koppel $F_1 L_1$ nach FL, dann liegt auch für diese Durchgangslage der entsprechende Pol $\mathfrak{P}^I$ wie der zugehörige Punkt $\mathfrak{Q}^I$ auf der Geraden $\Phi\Lambda$, und diese Bestimmung

des Pols $\mathfrak{P}^I$ und des Punktes $\mathfrak{Q}^I$ versagt. Da für diesen Grenzfall die Gerade FL sich momentan um den auf $\Phi\Lambda$ liegenden Pol $\mathfrak{P}^I$ dreht, so können wir auch $\mathfrak{P}^I$ gleichsam als Schnitt der unendlich nahen Geraden $\Phi\Lambda$, FL betrachten, und folglich müssen $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{Q}^I$ coincidiren. Ebenso ergeben sich in Fig. **128** bei dem gekreuzten Gelenkviereck für eine nahe an FL befindliche Lage F_1L_1 der Pol $\mathfrak{P}_1^{II}$ und der Punkt $\mathfrak{Q}_1^{II}$, welche bei der Durchgangslage auf der Geraden $\Phi\Lambda$ coincidiren und dann als jene Schnittpunkte nicht mehr bestimmbar sind. Hier in diesem Falle, wo also die gewöhnliche Polbestimmung vollständig versagt, steht uns die abgeleitete, in Fig. **126** ausgeführte Bestimmung der beiden Pole $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$ helfend zur Seite und liefert wegen ihrer Zweideutigkeit diese beiden Pole durch die Vermittelung des Kreises k.

Bei der Bewegung dieses Gelenkvierecks treten zwei Fälle der Unstetigkeit ein. Es kann erstens in Fig. **127** die Koppel F_1L_1 nach FL gelangen, hierauf nach derselben Seite zurückkehrend die Lage F_1L_1 in Fig. **128** einnehmen, dann bewegt sich der Pol $\mathfrak{P}_1^I$, Fig. **127**, nach $\mathfrak{P}^I$, springt von hier nach $\mathfrak{P}^{II}$, Fig. **128**, über und schreitet nach $\mathfrak{P}_1^{II}$. Die Polbahn ist also in diesem Falle unstetig, und dasselbe gilt dann auch von der Polcurve. Diese Unstetigkeit zeigt sich auch darin, dass die Punkte $\mathfrak{P}_1^I$, $\mathfrak{Q}_1^I$ oder $\mathfrak{P}_1^{II}$, $\mathfrak{Q}_1^{II}$, mittelst deren Verbindungsgerade die Polbahntangente construirt wurde, zusammenfallen und dass es somit an den beiden Unstetigkeitsstellen $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$ unendlich viele Polbahntangenten giebt. Es kann zweitens die Koppel F_1L_1 in Fig. **127** über FL schreitend so auf die andere Seite der Geraden $\Phi\Lambda$ gelangen, dass das offene Gelenkviereck in ein gekreuztes übergeht; dann bewegt sich der Pol von $\mathfrak{P}_1^I$ nach $\mathfrak{P}^I$, springt nach $\mathfrak{P}^{II}$, Fig. **128**, über und bewegt sich von dort auf jener anderen Seite der Geraden $\Phi\Lambda$ weiter. Zu jedem dieser beiden Fälle gesellt sich noch eine analoge symmetrische Bewegung. Wenn dagegen die Koppel so durch die Gerade $\Phi\Lambda$ schreitet, dass zu beiden Seiten derselben das Gelenkviereck ein offenes oder ein gekreuztes bleibt, so erhalten wir eine continuirliche Polbahn, die durch die Gerade $\Phi\Lambda$ symmetrisch getheilt wird, und eine continuirliche Polcurve, welche durch die Koppel F_1L_1 symmetrisch getheilt wird. In der Durchgangslage ist demnach die Polbahntangente senkrecht zur Geraden $\Lambda\Phi$.

Liegen die beiden Punkte Φ, L, Fig. **129**, in einem Punkte $\mathfrak{P}^{II}$ zusammen, dann geht nach unserer in Fig. **126** ausgeführten Construction jene Kreissecante $\varphi_k l_k$, welche mit ΛF den Schnitt N

bildet, in die Kreistangente $\mathfrak{p}^{II}N$ über; demnach ist in diesem Falle der Punkt $\mathfrak{P}^{II}$, in welchem die Punkte Φ, L coincidiren, der eine Pol. Nehmen wir nun insbesondere in Fig. **129** den Punkt M auf dem über ΛF als Durchmesser beschriebenen Kreise k so an, dass $M\mathfrak{P}^{II}$ senkrecht ΛF steht, dann fällt auch der Berührungspunkt $\mathfrak{p}^{I}$ der zweiten von N an k gelegten Tangente mit dem Punkte M und der andere Pol $\mathfrak{P}^{I}$ mit dem Punkte N zusammen. Wir erhalten also den Pol $\mathfrak{P}^{I}$, wenn wir in $\mathfrak{P}^{II}$, wo Φ, L coincidiren, auf ΛF eine Senkrechte errichten, die den über ΛF als Durchmesser beschriebenen Kreis k in M trifft, an M die Kreistangente $M\mathfrak{P}^{I}$ legen, die ΛF in dem gesuchten Pol $\mathfrak{P}^{I}$ schneidet. In Fig. **131** ist eine in der Nähe von FL befindliche Lage $F_1 L_1$ der Koppel dieses Gelenkvierecks nebst zugehörigem Pol $\mathfrak{P}_1^{I}$ construirt; gelangt L_1 nach L oder dem Pol $\mathfrak{P}^{II}$, dann können sich die beiden zusammengeklappten Vierecksseiten ΦF, LF um den Pol $\mathfrak{P}^{II}$ drehen, der hier als ein isolirter Sonderpunkt der Polbahn auftritt, und der Punkt F bewegt sich auf einem um $\mathfrak{P}^{II}$ beschriebenen Kreise. Hat dieser Punkt eine halbe Drehung vollendet und die in Fig. **132** gezeichnete Lage eingenommen, so wird, wenn jetzt das Gelenkviereck sich öffnet, wie es in Fig. **132** dargestellt ist, der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_1'$ von ΦF_1, ΛL_1 der zugehörige Pol sein. Um aber bei der Durchgangslage ausser dem Pol $\mathfrak{P}^{I}$ und jenem isolirten Sonderpunkte $\mathfrak{P}^{II}$ den betreffenden Pol $\mathfrak{P}'$ zu erhalten, bestimmen wir in Fig. **130** den Berührungspunkt M' der von $\mathfrak{P}^{II}$ ausgehenden Tangente auf dem über ΛF als Durchmesser beschriebenen Kreise k', und fällen von M' auf ΛF das Loth $M'\mathfrak{P}'$, dessen Fusspunkt $\mathfrak{P}'$ in diesem Falle der entsprechende Pol ist. Denn so wie in Fig. **129** der Pol $\mathfrak{P}^{I}$ und der isolirte Sonderpunkt $\mathfrak{P}^{II}$ die Strecke ΛF harmonisch theilen, so wird auch in Fig. **130** durch den Pol $\mathfrak{P}'$ und den isolirten Sonderpunkt $\mathfrak{P}^{II}$ die Strecke ΛF harmonisch getheilt.

Aus den in Fig. **126** ausgeführten Constructionen der beiden Pole $\mathfrak{P}^{I}$, $\mathfrak{P}^{II}$ ersehen wir, dass, im Falle einer der Punkte Φ, L sich innerhalb, der andere ausserhalb der Strecke ΛF befindet, der Punkt N, von dem die Tangenten an den Kreis k gelegt sind, im Innern dieses Kreises liegt; und dass dem gemäss die beiden Pole imaginär sind. In diesem Falle kann die Koppel FL sich nicht bewegen. Betrachten wir z. B. für die beiden in Fig. **133** dargestellten Fälle FL als die Koppel eines Gelenkvierecks, dessen feste Seite $\Phi\Lambda$ ist, so müsse sich F auf dem um Φ, und L auf dem um Λ beschriebenen Kreise bewegen; dies ist aber unmöglich, weil F, L die beiden einzigen Punkte dieser Kreise sind, deren Abstand gleich der Koppellänge FL ist. In den beiden betrachteten Fällen liegt der eine der Punkte Φ, L innerhalb, der andere ausserhalb der Strecke ΛF, und demnach ergiebt sich auch hieraus direct, dass keine Bewegung möglich ist.

53. **Quadratische Verwandtschaft zwischen den Krümmungsmittelpunkten in dem bewegten System und in dem festen System.** Nehmen wir an, es sei in Fig. 134 Taf. VII die Polbahntangente $\mathfrak{P}t$ und ein dieselbe im Pol $\mathfrak{P}$ berührender Kegelschnitt k zum bewegten System S gehörend gegeben, es sei ferner zu einem auf diesem Kegelschnitt liegenden Krümmungsmittelpunkte D in S der entsprechende Krümmungsmittelpunkt Δ im festen System Σ bekannt. Dann erhalten wir, gestützt auf die entsprechenden Punkte D, Δ, zu einer auf k liegenden Punktreihe $D_1 D_2 D_3 \ldots$ nach der Bobillier'schen Construction die entsprechenden Punkte $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \ldots$, indem wir die Geraden $\mathfrak{P}q_1$, $\mathfrak{P}q_2, \ldots$ so ziehen, dass die Winkel $D_1 \mathfrak{P} q_1$, $D_2 \mathfrak{P} q_2, \ldots$ dem Winkel $D\mathfrak{P}t$ entgegengesetzt gleich sind, und hierauf die Schnittpunkte $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{Q}_3 \ldots$, in denen die Geradenpaare $\mathfrak{P}q_1$, DD_1; $\mathfrak{P}q_2$, DD_2; .. sich treffen, mit Δ durch die Geraden $\Delta\mathfrak{Q}_1$, $\Delta\mathfrak{Q}_2$, $\Delta\mathfrak{Q}_3 \ldots$ verbinden, die $\mathfrak{P}D_1$, $\mathfrak{P}D_2$, $\mathfrak{P}D_3 \ldots$ in den entsprechenden Punkten $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \ldots$ schneiden. Nach dieser Construction sind die Strahlenbüschel $\mathfrak{P}(D_1 D_2 D_3 \ldots)$, $\mathfrak{P}(q_1 q_2 q_3 \ldots)$ congruent und die Strahlenbüschel $\mathfrak{P}(D_1 D_2 D_3 \ldots)$, $D(D_1 D_2 D_3 \ldots)$ projectiv; folglich sind auch die Strahlenbüschel $\mathfrak{P}(q_1 q_2 q_3 \ldots)$, $D(D_1 D_2 D_3 \ldots)$ projectiv. Da in der Geraden $\mathfrak{P}D$ zwei entsprechende Strahlen dieser Büschel zusammenfallen, so liegen die Schnittpunkte $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{Q}_3 \ldots$ der entsprechenden Strahlen auf einer Geraden. Demnach sind auch die Strahlenbüschel $\Delta(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{Q}_3 \ldots)$, $\mathfrak{P}(D_1 D_2 D_3 \ldots)$ projectiv. Diese bestimmen durch ihre entsprechenden Strahlen die Punkte $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \ldots$, welche, weil auch $\Delta\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}t$ entsprechende Strahlen sind, auf einem die Polbahntangente $\mathfrak{P}t$ im Pol berührenden Kegelschnitt $\varkappa$ liegen. Da die Beziehungen der beiden Systeme S, Σ symmetrisch wechselseitig sind, so folgt, dass einem Kegelschnitt in dem einen System, der die gemeinsame Tangente $\mathfrak{P}t$ der Rollcurven im Pol berührt, ein eben solcher Kegelschnitt in dem anderen System entspricht.

Ist insbesondere der Kegelschnitt k in Fig. 135 ein Kreis, dann sind jene Strahlenbüschel alle congruent, die Punkte $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots$ befinden sich sämtlich im Unendlichen, und in diesem Falle ist auch der entsprechende Kegelschnitt $\varkappa$ ein Kreis. Einem Kreise in dem einen System, der die gemeinsame Tangente der Rollcurven im Pol berührt, entspricht demnach ein eben solcher Kreis in dem anderen System.

Nehmen wir in Fig. 136 an, der im System S liegende Kegelschnitt bestehe aus zwei Geraden, aus der Polbahntangente $\mathfrak{P}t$ und aus einer beliebigen nicht durch den Pol gehenden Geraden d, welche die Punktreihe $D_1 D_2 D_3 ..$ trägt; dann fällt die Gerade, auf der die Punkte $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3 ..$ liegen, mit der Geraden d zusammen, dabei bleibt die projective Beziehung der Strahlenbüschel $\Delta (\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3 ..)$, $\mathfrak{P} (D_1 D_2 D_3 ..)$ bestehen, und dieselben erzeugen durch ihre entsprechenden Strahlen die Punkte $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 ..$, welche auf einem die Polbahntangente im Pol berührenden Kegelschnitt δ liegen. Jedem Punkte der Tangente $\mathfrak{P}t$ im Systeme S entspricht aber der Pol $\mathfrak{P}$ im System Σ. Hieraus ergiebt sich, dass einer beliebigen Geraden in dem einen System ein Kegelschnitt in dem anderen entspricht, der die gemeinsame Tangente der Rollcurven im Pol berührt.[1])

In Fig. 137 sind zu den beiden sich im Punkte D schneidenden Geraden d^1, d^I, auf denen die Punktreihen $D_1 D_2 D_3 ..$ und $D_I D_{II} D_{III} ..$ bezüglich $\mathfrak{P}$ perspectiv liegen, die entsprechenden beiden Kegelschnitte δ^1, δ^I gezeichnet; zu jenen Punktreihen sind auf diesen Kegelschnitten beziehlich die entsprechenden Punktreihen $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 ..$ und $\Delta_I \Delta_{II} \Delta_{III} ..$ in der angegebenen Weise construirt. Nach dieser Construction können wir die Punktgruppen $D D_1 D_2 .. \Delta \Delta_1 \Delta_2 .. \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 ..$ und $D D_I D_{II} .. \Delta \Delta_I \Delta_{II} .. \mathfrak{D}_I \mathfrak{D}_{II} ..$ als entsprechende Punktgruppen in zweien centralcollinearen Systemen betrachten, deren Collineationscentrum der Pol $\mathfrak{P}$, und deren Collineationsaxe die Gerade $\mathfrak{P}\Delta$ ist. Es sind demnach in diesen beiden Systemen auch δ^1, δ^I entsprechende Kegelschnitte, und für diese ist die Gerade $\mathfrak{P}\Delta$ eine gemeinsame Secante. Da aber diese Kegelschnitte auch die Polbahntangente $\mathfrak{P}t$ im Pol $\mathfrak{P}$ berühren, und die genannte gemeinsame Secante durch den Pol $\mathfrak{P}$ geht, so coincidiren drei Schnittpunkte der Kegelschnitte δ^1, δ^I im Pol $\mathfrak{P}$, und schneiden sich ausserdem nur noch in dem Punkte Δ. Hieraus ergiebt sich, dass den Geraden des einen der Systeme S, Σ Kegelschnitte in dem anderen System entsprechen, die drei gemeinsame im Pol coincidirende Punkte besitzen. Aus diesen Darlegungen folgt ferner das Ergebniss:

Die beiden Systeme S, Σ der entsprechenden Krüm-

---

[1]) Diese Beziehung wurde von Rivals gefunden. *Journal de l'Ecole polytechnique.* 1853. T. XX, cah. 35. p. 112.

mungsmittelpunkte stehen in einer speciellen quadratischen Verwandtschaft.

Geht insbesondere eine im System S liegende Gerade d, der im System Σ ein Kegelschnitt δ entspricht, durch den Pol, dann degenerirt dieser Kegelschnitt zu zwei Geraden, von denen, wie wir wissen, die eine mit d zusammenfällt, die andere mit der Polbahntangente identisch ist, weil dem Pol als Punkt des Systems S alle Punkte dieser Tangente im System Σ entsprechen. Ebenso entspricht umgekehrt einer durch den Pol gehenden Geraden des Systems Σ ein aus zwei Geraden bestehender Kegelschnitt im System S, von denen die eine mit jener Geraden, die andere mit der Polbahntangente zusammenfällt.

Wird in Fig. 138 die im bewegten System S befindliche Gerade im Unendlichen angenommen, dann sind, da die Punkte $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots$ im Unendlichen liegen, die entsprechenden Strahlen der Büschel $\mathfrak{P}(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots)$ und $\Delta(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots)$ parallel. Demnach sind die Strahlenbüschel $\Delta(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots)$, $\mathfrak{P}(D_1 D_2 \ldots)$ congruent und erzeugen einen Kreis ψ, der die Polbahntangente $\mathfrak{P}$t im Pol $\mathfrak{P}$ berührt. Den unendlich fernen Punkten $D_1 D_2 \ldots$ entsprechen die Punkte $\Delta_1 \Delta_2 \ldots$ auf diesem Kreise. Wegen der symmetrischen Wechselbeziehungen der beiden Systeme S, Σ entspricht auch der unendlich fernen Geraden des Systems Σ ein Kreis w in dem System S, der die Polbahntangente im Pol berührt. Nach S. 104 liegt der Pol $\mathfrak{P}$ in der Mitte zwischen den beiden zu den Systemen S, Σ gehörenden Punkten, die einem unendlich fernen Punkte entsprechen, dem zufolge sind die beiden Kreise ψ, w congruent und liegen symmetrisch bezüglich der Polbahntangente $\mathfrak{P}$t. Da alle Kegelschnitte in Σ, die den Geraden in S entsprechen, drei gemeinsame im Pol coincidirende Punkte besitzen und der Kreis ψ mit zu diesen Kegelschnitten gehört, so ist derselbe am Pol $\mathfrak{P}$ Krümmungskreis für alle diese Kegelschnitte. In analoger Beziehung steht der Kreis w zu den betreffenden Kegelschnitten in S. Da jedem Punkte des Kreises w im System S ein unendlich ferner Punkt im System Σ entspricht, so folgt hieraus, dass je nachdem eine Gerade in S den Kreis w schneidet, nicht schneidet oder berührt, der entsprechende Kegelschnitt in Σ eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel ist. Das Analoge gilt bezüglich des Kreises ψ von einer im System Σ liegenden Geraden.

54. **Folgerungen aus der quadratischen Verwandtschaft der Systeme der entsprechenden Krümmungsmittelpunkte.** Betrachten wir in dem bewegten System S alle Punkte einer beliebigen

Geraden für einen Bewegungsmoment als Krümmungsmittelpunkte von Systemcurven, so erzeugen diese in dem festen System Σ Hüllbahncurven, deren entsprechende Krümmungsmittelpunkte sich auf einem die Polbahn im Pol berührenden Kegelschnitt befinden. Nehmen wir dagegen die Punkte einer beliebigen im System Σ liegenden Geraden für einen Moment als Krümmungsmittelpunkte von Hüllbahncurven an, so befinden sich die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte der zugehörigen Systemcurven in S auf einem Kegelschnitt, der die Polcurve im Pol berührt. Wird die Bewegung umgekehrt, das System S als fest und das System Σ als bewegt angesehen, dann tritt Vertauschung der Gleitcurven, d. h. der Systemcurven und Hüllbahncurven, sowie der Polcurve und Polbahn ein. Wir erhalten somit den Satz:

Die in einem System befindlichen Gleitcurven, deren zu den Berührungspunkten gehörende Krümmungsmittelpunkte in einem Bewegungsmomente auf einer Geraden liegen, erzeugen in dem anderen System Gleitcurven, deren entsprechende Krümmungsmittelpunkte einen Kegelschnitt bilden, der die beiden Rollcurven im Pol berührt.

Aus diesem allgemeinen Satze wollen wir noch mehrere wichtige specielle Sätze ableiten. Schrumpft eine Curve des bewegten Systems zu einem Punkte zusammen, so geht die Hüllbahncurve derselben in die Bahncurve dieses Punktes über. Hiernach erhalten wir den specielleren Satz:

Die Punkte einer Geraden des bewegten Systems beschreiben Bahncurven, deren zugehörige Krümmungsmittelpunkte für jeden Bewegungsmoment in dem festen System einen entsprechenden Kegelschnitt bilden, der die Polbahn in dem Pol berührt und seine Gestalt mit der Bewegung verändert.

Reducirt sich eine Hüllbahncurve zu einem Punkte, so gleitet die zugehörige Systemcurve durch diesen Punkt, oder wir sagen, dieser Punkt wird von der bewegten Systemcurve umhüllt; dann ergiebt sich der folgende Satz, der die Umkehrung der eben betrachteten Bewegung enthält:

Die Krümmungsmittelpunkte derjenigen Curven eines bewegten Systems, welche die Punkte einer festen Geraden umhüllen, bilden für jeden Bewegungsmoment in dem bewegten System einen Kegelschnitt, der die Polcurve in dem Pol berührt und seine Gestalt mit der Bewegung verändert.

Diejenigen Curvenpunkte, zu denen unendlich ferne Krümmungsmittelpunkte gehören, welche also unendlich grosse Krümmungsradien besitzen, sind Wendepunkte der betreffenden Curven. Berührt nun eine Hüllbahncurve die zugehörige bewegte Systemcurve momentan in einem Wendepunkte, dann liegt der entsprechende Krümmungsmittelpunkt dieser Hüllbahncurve auf jenem Kreise ψ; und berührt eine Systemcurve die zugehörige Hüllbahncurve momentan in einem Wendepunkte, dann befindet sich der entsprechende Krümmungsmittelpunkt dieser Systemcurve auf jenem Kreise w. Hiernach erhalten wir den wichtigen Satz:

Die Krümmungsmittelpunkte aller Hüllbahncurven, welche die zugehörigen Systemcurven des bewegten Systems S momentan in Wendepunkten berühren, liegen in dem festen System Σ auf einem Kreise ψ; und die Krümmungsmittelpunkte aller Systemcurven, welche die zugehörigen Hüllbahncurven des festen Systems momentan in Wendepunkten berühren, liegen in dem bewegten System S auf einem Kreise w; diese beiden Kreise sind gleich und berühren beiderseits die Rollcurven in dem Pol.

Wenn eine Systemcurve zu einem Systempunkt zusammenschrumpft, ist ihr Krümmungsradius gleich Null, und die zugehörige Hüllbahncurve geht dann in die Bahncurve dieses Systempunktes über. Demnach befinden sich alle Systempunkte, die momentan Wendepunkte ihrer Bahncurven durchschreiten, auf dem Kreise w, und daher wird dieser Kreis, der seine Lage und Grösse in dem bewegten System S mit der Bewegung desselben ändert, der Wendekreis genannt, derselbe wurde zuerst von De La Hire[1]) gefunden und constructiv bestimmt. Hiernach erhalten wir den Satz:

Die Punkte eines bewegten Systems, welche momentan Wendepunkte ihrer Bahncurven durchschreiten, liegen auf dem Wendekreise.

Die an den momentan erzeugten Wendepunkten der Bahncurven gelegten Tangenten gehen, weil die betreffenden Normalen der Bahncurven sich im Pol schneiden, durch den Punkt des Wendekreises, der dem Pol diametral gegenüber liegt; und dieser Punkt wird der Wendepol genannt.

---

[1]) De La Hire, *Traité des roulettes. Mémoires de l'Académie.* 1706. p. 340.

Wenn alle Krümmungsmittelpunkte einer Curve im Unendlichen liegen, dann besteht dieselbe aus lauter Wendepunkten und ist demnach eine Gerade. Aus dem ersten Theil des vorletzten Satzes ergiebt sich somit, dass die betreffenden Krümmungsmittelpunkte der Hüllbahncurven, welche von allen Geraden des bewegten Systems erzeugt werden, auf dem Kreise ψ liegen. Die Fusspunkte der von dem momentanen Pol auf diese Geraden gefällten Lothe sind die Berührungspunkte, welche diese Geraden momentan mit den zugehörigen Hüllbahncurven bilden. Für diejenigen Geraden, welche sich auf dem Kreise ψ in dem Punkte schneiden, der dem Pol diametral gegenüberliegt und Rückkehrpol genannt wird, befinden sich die Berührungspunkte auf dem Kreise ψ und fallen demnach mit den entsprechenden Krümmungsmittelpunkten der zugehörigen Hüllbahncurven zusammen; solche Punkte der Hüllbahncurven, deren Krümmungsradius also gleich Null ist, sind Rückkehrpunkte dieser Curven, und deshalb wird der Kreis ψ der Rückkehrkreis genannt. Somit ergiebt sich der Satz:

Die Krümmungsmittelpunkte aller Hüllbahnen, welche von den Geraden eines bewegten Systems umhüllt werden, liegen für jeden Bewegungsmoment in dem festen System auf dem Rückkehrkreise, der alle momentan erzeugten Rückkehrpunkte der betreffenden Hüllbahnen enthält.

Aus diesem Satze folgt durch Umkehrung der Bewegung:

Die Krümmungsmittelpunkte aller Systemcurven eines bewegten Systems, welche Gerade umhüllen, liegen für jeden Bewegungsmoment in dem bewegten System auf dem Wendekreise, der alle diejenigen Rückkehrpunkte dieser Systemcurven enthält, welche momentan auf den betreffenden Geraden gleiten.

Da der von De La Hire zuerst gefundene Wendekreis durch Umkehrung der Bewegung sofort zur Auffindung des Rückkehrkreises führt, so sind wir berechtigt, diese beiden wichtigen Kreise gemeinsam die De La Hire'schen Kreise zu nennen.

55. **Construction der De La Hire'schen Kreise, des Wendekreises und Rückkehrkreises.** Ist in Fig. **139** die Polbahntangente $\mathfrak{P}t$ und ein Paar entsprechender Krümmungsmittelpunkte D, Δ beziehlich in dem bewegten und in dem festen System gegeben, dann erhalten wir die De La Hire'schen Kreise in folgender Weise.

Wir ziehen die Geraden $\mathfrak{P}\Delta_w^\infty$ und $\Delta\mathfrak{Q}$ senkrecht zur Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$, ferner auf $\mathfrak{P}D$ die senkrechte Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{q}$, die $\Delta\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{Q}$ trifft, und dann die Gerade $\mathfrak{Q}D$. Diese schneidet $\mathfrak{P}\Delta_w^\infty$ in dem Wendepol, dem Endpunkte D_w des zur Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ senkrechten Durchmessers des Wendekreises w; denn nach dieser Construction ist der Winkel $\Delta_w^\infty\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ entgegengesetzt gleich dem Winkel $\Delta\mathfrak{P}\mathfrak{t}$, und es ist D_w der Punkt im bewegten System, welcher dem unendlichen fernen Punkte Δ_w^∞ entspricht. Hiermit ist dann auch, indem wir $\mathfrak{P}\Delta_\psi = D_w\mathfrak{P}$ machen, der Rückkehrkreis ψ gefunden. Dieser Kreis ergiebt sich aber auch direct durch eine analoge Construction, wenn man durch D zu $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ eine Senkrechte bis zum Schnittpunkte $\mathfrak{Q}'$ der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ zieht, dann bestimmt die Gerade $\Delta\mathfrak{Q}'$ auf $\mathfrak{P}\Delta_w^\infty$ den Rückkehrpol Δ_ψ.

In Fig. **140** sind zwei Paar entsprechende Krümmungsmittelpunkte D_1, Δ_1 und D_2, Δ_2 gegeben. Um in diesem Falle die De La Hire'schen Kreise zu construiren, bestimmen wir die Schnittpunkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ der Geradenpaare $\Delta_1 D_1$, $\Delta_2 D_2$ und $\Delta_1\Delta_2$, $D_1 D_2$, ziehen $\mathfrak{P}\mathfrak{U}^\Delta$ parallel $D_1 D_2$ bis zum Schnittpunkte $\mathfrak{U}^\Delta$ mit $\Delta_1\Delta_2$, ferner durch $\mathfrak{U}^\Delta$ zu $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ die Parallele, welche $\Delta_1 D_1$, $\Delta_2 D_2$ resp. in den Punkten Δ'_ψ, Δ''_ψ trifft; dann ist der durch diese Punkte und durch den Pol gehende Kreis ψ der Rückkehrkreis. Denn nach dieser Construction, die mit der auf S. 104, Fig. **120**, gegebenen Construction übereinstimmt, sind Δ'_ψ, Δ''_ψ diejenigen Punkte im festen System Σ, die den zum System S gehörenden unendlich fernen Punkten der betreffenden Geraden entsprechen. Mit diesem Rückkehrkreise ψ ist auch der congruente Wendekreis w gefunden. Dieser letzte kann jedoch auch in analoger Weise wie der erste construirt werden. Wir ziehen $\mathfrak{P}\mathfrak{U}_D$ parallel $\Delta_1\Delta_2$ bis zum Schnittpunkte $\mathfrak{U}_D$ mit $D_1 D_2$, ferner durch $\mathfrak{U}_D$ zu $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ die Parallele, welche auf $\Delta_1 D_1$, $\Delta_2 D_2$ resp. die Punkte D'_w, D''_w des Wendekreises w liefert. Diese Construction stimmt auch mit jener auf S. 104, Fig. **120**, gegebenen Construction überein. Der Schnittpunkt $\mathfrak{W}$ der beiden in D'_w, D''_w resp. auf $\mathfrak{P}D'_w$, $\mathfrak{P}D''_w$ errichteten Senkrechten ist der Wendepol.

Wenn die Geraden $\Delta_1 D_1$, $\Delta_2 D_2$ parallel sind, liegt der Pol $\mathfrak{P}$ im Unendlichen, und in diesem besonderen Falle befinden sich die Krümmungsmittelpunkte, denen unendlich ferne Krümmungsmittelpunkte entsprechen, wie S. 101 Fig. **114** gelehrt wurde, auf einer zu $\Delta_1 D_1$ oder $\Delta_2 D_2$ Parallelen, die leicht bestimmt werden kann. In diesem Falle geht der Wendekreis sowie der Rückkehrkreis in diese Parallele über.

Errichten wir in den Punkten Δ'_ψ, Δ''_ψ beziehlich auf die Geraden $\mathfrak{P}\Delta'_\psi$, $\mathfrak{P}\Delta''_\psi$ die Senkrechten, welche sich in Ψ treffen, so ist Ψ der Rückkehrpol und $\mathfrak{P}\Psi$ der zur Polbahntangente $\mathfrak{P}t$ normale Durchmesser des Rückkehrkreises ψ, und nach den Darlegungen in Art. 31 zugleich die lothrechte Geschwindigkeit, mit welcher der Pol $\mathfrak{P}$ sich auf der Polbahn bewegt, wenn wir voraussetzen, dass $D_1\mathfrak{P}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes D_1 sei, dass also die Endpunkte aller lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte des bewegten Systems S im Pol $\mathfrak{P}$ coincidiren. Ist aber für einen gedachten Systempunkt D eine beliebige lothrechte Geschwindigkeit v_d gegeben, und in diesem Falle u die entsprechende lothrechte Geschwindigkeit des Pols $\mathfrak{P}$, so folgt, weil durch eine Aenderung der einen dieser Geschwindigkeiten eine proportionale Aenderung der anderen bewirkt wird,

$$v_d : u = D_1\mathfrak{P} : \mathfrak{P}\Psi$$

und

$$\mathfrak{P}\Psi = D_1\mathfrak{P}\,\frac{u}{v_d}.$$

Bezeichnen wir die Drehgeschwindigkeit des bewegten Systems S durch ω und den Durchmesser der De La Hire'schen Kreise, welcher gleich $\mathfrak{P}\Psi$ ist, durch $\mathfrak{d}$, so erhalten wir, da $v_d = \omega \,.\, D_1\mathfrak{P}$,

$$\mathfrak{d} = \frac{u}{\omega}.$$

Der Durchmesser der De La Hire'schen Kreise ist hiernach gleich der Polgeschwindigkeit dividirt durch die Drehgeschwindigkeit des bewegten Systems.

Nach der in Art. 49 abgeleiteten Gleichung α) ist, wenn r_1, ϱ_1, $\mathfrak{d}_1$ beziehlich die Strecken $\mathfrak{P}D_1$, $\mathfrak{P}\Delta_1$, $\mathfrak{P}\Delta'_\psi$ und analog r_2, ϱ_2, $\mathfrak{d}_2$ resp. die Strecken $\mathfrak{P}D_2$, $\mathfrak{P}\Delta_2$, $\mathfrak{P}\Delta''_\psi$ bezeichnen,

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\mathfrak{d}_1}, \quad \frac{1}{r_2} - \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\mathfrak{d}_2}.$$

Sind ferner ε_1, ε_2 die Winkel, welche die Geraden $\mathfrak{P}\Delta'_\psi$, $\mathfrak{P}\Delta''_\psi$ mit der Normale $\mathfrak{P}\Psi$ der Polbahn oder Polcurve bilden, so ergiebt sich, weil

$$\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}\cos\varepsilon_1, \quad \mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}\cos\varepsilon_2$$

ist,

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\cos\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\cos\varepsilon_2 = \frac{1}{\mathfrak{d}} = \frac{\omega}{u}.$$

Diese Formel bildet den analytischen Ausdruck der abgeleiteten mannigfaltigen geometrischen Beziehungen, welche die Construction der Krümmungsmittelpunkte anschaulich entfalteten; sie hat den meisten Autoren als Grundlage für die Bestimmung und Berechnung der Krümmungsradien gedient.[1] Diese Formel erhält eine specielle Form, wenn die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte D_2, Δ_2 auf der Normale der Polbahn liegen und ihre Abstände vom Pol resp. durch r, ϱ bezeichnet werden, dann ist $\cos\varepsilon_2 = 1$ und somit

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\cos\varepsilon_1 = \frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}.$$

Noch mehr wird diese Formel specialisirt, wenn insbesondere die Punkte D_2, Δ_2 resp. mit dem Krümmungsmittelpunkte der Polbahn und Polcurve zusammenfallen, und wenn wir in diesem Specialfalle die entsprechenden Krümmungsradien $\mathfrak{P}D_2$, $\mathfrak{P}\Delta_2$ beziehlich durch r_0, ϱ_0 bezeichnen, dann ist

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\cos\varepsilon_1 = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{\varrho_0}.$$

Diese specielle Formel, aus der die obige allgemeine Formel sofort wieder hergestellt werden kann, wurde in einer anderen Form zuerst von Euler[2] abgeleitet und von ihm zur Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte der Radzahncurven angewendet. Viel später hat auch Savary[3] diese Formel zu diesem Zwecke benutzt und daher wird dieselbe oft unrichtig als die Savary'sche Formel bezeichnet.

56. **Besondere Fälle. Constructionen der Krümmungsmittelpunkte für Fusspunktencurven, Kegelschnitte, katakaustische Curven.** a) In Fig. 141 gleiten die Schenkel f, l eines starren Winkels fCl auf den Curven φ, λ und berühren dieselben resp. in den Punkten $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{L}$. Die zu diesen Curvenpunkten gehörenden Krümmungsmittelpunkte sind durch Φ, Λ gegeben. Der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der Curvennormalen $\mathfrak{F}\Phi$, $\mathfrak{L}\Lambda$ ist der Pol und die Gerade $C\mathfrak{P}$ die Normale der vom Scheitel C des Winkels beschriebenen Bahncurve γ. Da die Krümmungsmittelpunkte F_∞, L_∞ der Geraden f, l resp. auf $\Phi\mathfrak{F}$, $\Lambda\mathfrak{L}$ im Unendlichen liegen, so sind Φ, Λ, $\mathfrak{P}$ drei Punkte des Rückkehrkreises ψ, und derselbe ist durch diese Punkte bestimmt. Sind insbesondere die Curven φ, λ im festen

[1] Mannheim, *Journal de l'Ecole polytechnique*. 1858. T. XXI, cah. 37. p. 179.

[2] *Novi Commentarii Academiae Petropolitanae* 1765. T. XI. p. 207. Supplementum. „De figura dentium rotarum."

[3] Leroy, *Géométrie descriptive*. 1867. p. 322.

System Σ Kreise, dann ist der Rückkehrkreis ψ in Σ unveränderlich, und nach Art. 19 die Polbahn; dem zufolge umhüllen alle Gerade des bewegten Systems S Kreise, deren Mittelpunkte auf dem festen Kreise ψ liegen.

Um mittelst der zweiten Bobillier'schen Construction den Krümmungsmittelpunkt Γ der Bahncurve γ für den Punkt C zu bestimmen, ziehen wir $\mathfrak{Q}^I_\infty \mathfrak{P} \mathfrak{Q}'_\infty$ parallel $\Phi\Lambda$, denn der Schnittpunkt $\mathfrak{Q}'_\infty$ der Geraden $F_\infty L_\infty$ und $\Phi\Lambda$ befindet sich im Unendlichen. Ferner ziehen wir die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{q}'$, die $F_\infty C$ in $\mathfrak{Q}'$ schneidet, so dass der Winkel $C\mathfrak{P}\mathfrak{q}'$ gleich dem Winkel $L_\infty \mathfrak{P} \mathfrak{Q}'_\infty$ ist; dann schneidet die Gerade $\Phi\mathfrak{Q}'$ die Curvennormale $C\mathfrak{P}$ in dem gesuchten Krümmungsmittelpunkte Γ. In analoger Weise erhalten wir den Punkt Γ, indem wir die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{q}^I$, die $L_\infty C$ in $\mathfrak{Q}^I$ trifft, so ziehen, dass der Winkel $C\mathfrak{P}\mathfrak{q}^I$ gleich dem Winkel $F_\infty \mathfrak{P} \mathfrak{Q}^I_\infty$ ist, dann bestimmt die Gerade $\Lambda\mathfrak{Q}^I$ auf $C\mathfrak{P}$ den Krümmungsmittelpunkt Γ. Sind dagegen die Krümmungsmittelpunkte Φ, Γ gegeben und durchschreiten wir den ersten Constructionsweg rückwärts, so erhalten wir den Krümmungsmittelpunkt Λ. Da nach S. 100 die drei Punkte $\mathfrak{Q}'_\infty$ $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}^I$ auf einer Geraden liegen, so sind hier die Geraden $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}^I$, $\Lambda\Phi$ parallel.

In Fig. **142** sind dieselben Constructionen ausgeführt, wenn der bewegte Winkel fCl ein Rechter ist. In diesem besonderen Falle ergiebt sich aus jener zweifachen Bestimmung eine Beziehung, die zu einer anderen Construction führt, welche die Gleichmachung jener zweier Winkel nicht erfordert. Es ist der Winkel $\mathfrak{Q}^I\mathfrak{P}\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}^I\mathfrak{P}C + C\mathfrak{P}\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}^I_\infty \mathfrak{P} F_\infty + L_\infty \mathfrak{P} \mathfrak{Q}'_\infty = F_\infty \mathfrak{P} L_\infty$, also ein Rechter. Dem zufolge sind die Dreiecke $\mathfrak{F}\mathfrak{P}\mathfrak{L}$, $\mathfrak{Q}^I\mathfrak{P}\mathfrak{Q}'$, deren Seiten $\mathfrak{F}\mathfrak{L}$, $\mathfrak{Q}^I\mathfrak{Q}'$ sich im Punkte J schneiden, ähnlich, und wegen ihrer gleichen Winkel an den Ecken $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{Q}'$ liegen die Punkte $\mathfrak{Q}'\mathfrak{L}J\mathfrak{P}$ auf einem Kreise, für welchen $\mathfrak{Q}'\mathfrak{P}$ ein Durchmesser ist; folglich steht die Gerade $\mathfrak{P}J$ senkrecht auf $\mathfrak{Q}^I\mathfrak{Q}'$ und auf der Parallelen $\Phi\Lambda$.

Hieraus ergiebt sich, wenn die Krümmungsmittelpunkte Φ, Λ gegeben sind, die folgende Construction des Krümmungsmittelpunktes Γ. Wir fällen von $\mathfrak{P}$ auf $\Phi\Lambda$ das Loth, welches die Gerade $\mathfrak{F}\mathfrak{L}$ in J trifft, ziehen auf $\mathfrak{P}J$ die Senkrechte $J\mathfrak{Q}'$ bis zum Schnitt $\mathfrak{Q}'$ der Geraden $C\mathfrak{L}$, und ferner die Gerade $\mathfrak{Q}'\Phi$, die $C\mathfrak{P}$ in Γ schneidet. Andererseits können wir auch die auf $\mathfrak{P}J$ Senkrechte bis zum Schnitt $\mathfrak{Q}^I$ der Geraden $C\mathfrak{F}$ ziehen, dann bestimmt $\mathfrak{Q}^I\Lambda$ auf $C\mathfrak{P}$ den Punkt Γ. In Fig. **144** ist diese Construction des Krümmungsmittelpunktes Γ für den Fall ausgeführt, wenn der Schenkel f durch einen festen Punkt Φ geht. Es ist $\mathfrak{P}J$ senkrecht $\Phi\Lambda$, dann $J\mathfrak{Q}'$ senkrecht $\mathfrak{P}J$ und ferner die Gerade $\mathfrak{Q}'\Phi$ gezogen, die $C\mathfrak{P}$ in Γ trifft.

Ist in Fig. **142** der Krümmungsmittelpunkt Γ und einer von den beiden Krümmungsmittelpunkten Φ, Λ, z. B. Φ, gegeben, sind also die Krümmungsmittelpunkte der beiden Curven γ, φ bekannt, so erhalten wir den anderen Krümmungsmittelpunkt Λ in folgender Weise. Nachdem wir vom Pol $\mathfrak{P}$ auf Cl die Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{L}$ gefällt haben, ziehen wir $\Phi\Gamma$ bis zum Schnitt $\mathfrak{Q}'$ der Geraden $C\mathfrak{L}$, dann auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}'$ die Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}^I$, welche $C\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{Q}^I$ trifft, und hierauf die Gerade $\mathfrak{Q}^I\Gamma$, bis sie $\mathfrak{P}\mathfrak{L}$ in Λ schneidet.

In dem Falle, wenn der eine Schenkel f des bewegten starren Winkels fCl in Fig. **143** beständig durch einen festen Punkt Φ geht, der andere Schenkel l eine Curve λ umhüllt, wollen wir noch andere besondere Bestimmungen des Krümmungsmittelpunktes Γ oder Λ durch die folgenden Betrachtungen ableiten. Errichten wir in Φ auf $\Phi\mathfrak{L}$ eine Senkrechte, die $\mathfrak{P}L_\infty$ im Punkte X schneidet, und betrachten wir X als Krümmungsmittelpunkt der Curve λ, dann ergiebt sich leicht nach obiger allgemeiner Construction, dass der zugehörige Krümmungsmittelpunkt der von C beschriebenen Curve γ mit dem Pol $\mathfrak{P}$ zusammenfällt. In gleicher Weise folgt, wenn wir die Punkte $\mathfrak{L}$, L_∞ als Krümmungsmittelpunkte von λ ansehen, beziehlich die Mitte M von $C\mathfrak{P}$ und der Punkt C als zugehöriger Krümmungsmittelpunkt der betreffenden Curve γ. Den Punkten X, $\mathfrak{L}$, L_∞ entsprechen demnach projectiv resp. die Punkte $\mathfrak{P}$, M, C, und folglich können wir dann zu dem Krümmungsmittelpunkte Λ der Curve λ als Punkt der ersten Punktreihe durch die bekannte projective Construction in der mannigfaltigsten Weise den Krümmungsmittelpunkt Γ der betreffenden Curve γ als entsprechenden Punkt der zweiten Punktreihe erhalten. Um z. B. eine auf diese projective Beziehungen gegründete Construction anzugeben, denken wir uns die Punktreihe $X\Lambda\mathfrak{L}L_\infty\,..$ senkrecht auf die Gerade $\Phi\mathfrak{L}$ nach $\Phi H\mathfrak{L}L^\infty\,..$ projicirt und die so erhaltene Punktreihe wieder parallel $\Phi\mathfrak{P}$ auf die Gerade $\mathfrak{P}L_\infty$ nach $\mathfrak{P}N\mathfrak{L}L_\infty\,..$ projicirt, dann sind $\mathfrak{P}N\mathfrak{L}L_\infty$ und $\mathfrak{P}\Gamma MC$ entsprechende Punkte zweier perspectiv liegender Reihen, und die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte derselben treffen sich in dem Schnittpunkte Ξ der Geraden $L_\infty C$, $\mathfrak{L}M$, d. h. in dem vierten Eckpunkte des durch $\mathfrak{P}\mathfrak{L}C$ bestimmten Rechtecks.

Ist also der Krümmungsmittelpunkt Λ der Curve λ gegeben, so ziehen wir ΛH senkrecht $\Phi\mathfrak{L}$, ferner HN parallel $\Phi\mathfrak{P}$ und die Gerade $N\Xi$, welche die Curvennormale $C\mathfrak{P}$ in dem Krümmungsmittelpunkte Γ der von C beschriebenen Curve γ trifft. Wenn dagegen der Punkt Γ gegeben ist, so erhalten wir durch Rückwärtsschreiten des Constructionsweges den Punkt Λ.

Ist der Winkel fCl, wie in Fig. **144**, ein Rechter, dann beschreibt der Scheitel C die Fusspunktencurve γ der Curve λ bezüglich Φ als Lothpunkt, und jene Construction vereinfacht sich sehr, weil in diesem besonderen Falle der Punkt Ξ mit Φ zusammenfällt. Betrachten wir den Krümmungsmittelpunkt Λ der Curve λ als gegeben, dann ziehen wir ΛH senkrecht $\Phi\mathfrak{L}$, ferner HN senkrecht $\mathfrak{P}\mathfrak{L}$ und hierauf die Gerade $N\Phi$, die $C\mathfrak{P}$ in dem Krümmungsmittelpunkte Γ der Fusspunktencurve γ schneidet. Durch Rückwärtsschreiten dieses Constructionsweges erhalten wir umgekehrt, wenn Γ gegeben ist, den Krümmungsmittelpunkt Λ.[1])

b) Gleitet der eine Schenkel f des bewegten Winkels fCl in Fig. **145** durch den festen Punkt Φ und der andere Sckenkel l auf der Curve λ, und fällen wir vom Punkte Φ auf die Lagen $l, l_1 ..$ des letzteren Schenkels Lothe, dann bilden die Fusspunkte $C' C'_1 ..$ derselben die Fusspunktencurve γ' der Curve λ für den Lothpunkt Φ. Da die erhaltenen Dreiecke $\Phi C C_1$, $\Phi C' C'_1, ..$ ähnlich sind, so ist auch die Curve γ, die der Scheitel C beschreibt, der Fusspunktencurve γ' ähnlich.

Bewegt sich der Scheitel C des Winkels fCl in Fig. **146** auf einem Kreise γ, dessen Mittelpunkt Γ ist, während der Schenkel f durch den festen Punkt Φ gleitet, dann umhüllt der andere Schenkel l einen Kegelschnitt λ. Um dies zu beweisen, fällen wir von Φ auf l das Loth $\Phi C'$; es befindet sich dann der Fusspunkt C' desselben auf dem Kreise γ', dessen Mittelpunkt Γ' so liegt, dass $\Phi C' \Gamma'$ ähnlich $\Phi C \Gamma$ ist. Betrachten wir nun den bewegten rechten Winkel $\Phi C' l$, dessen Scheitel C' den Kreis γ' durchläuft und dessen Schenkel $C'\Phi$ durch den Punkt Φ gleitet, dann umhüllt l auch bei dieser Bewegung des rechten Winkels die Curve λ, welche der Schenkel l des Winkels fCl erzeugt. Die in Φ auf $C'\Phi$ errichtete Senkrechte trifft die Gerade $C'\Gamma'$, welche andererseits den Kreis γ' im Punkte B' schneidet, in dem Pol $\mathfrak{P}'$, und der Fusspunkt $\mathfrak{L}$ der von $\mathfrak{P}'$ auf l gefällten Senkrechten ist der Berührungspunkt, den l mit λ bildet. Machen wir nun $\Gamma'\Phi'$

---

[1]) Diese elegante Construction wurde für diesen besonderen Fall in anderer Weise zuerst von Emil Weyr abgeleitet. *Sitzungsberichte der Akademie in Wien.* 1869. B. 59. Abth. II. S. 169.

entgegengesetzt gleich $\Gamma'\Phi$, so ist $B'\Phi' \# \Phi C' \# \mathfrak{P}'\mathfrak{L}$; demnach ist $\Phi'\mathfrak{L} = B'\mathfrak{P}'$, und folglich, weil $\Phi\mathfrak{L} = C'\mathfrak{P}'$, ergiebt sich $\Phi\mathfrak{L} - \Phi'\mathfrak{L} = B'C'$. Liegt aber der Punkt Φ innerhalb des Kreises γ oder γ', dann ergiebt sich $\Phi\mathfrak{L} + \Phi'\mathfrak{L} = B'C'$. Der Schenkel l des bewegten Winkels fCl umhüllt also einen Kegelschnitt λ, dessen Brennpunkte Φ, Φ' sind und dessen Hauptaxe gleich dem Durchmesser des Kreises γ' ist. Dieser Kegelschnitt λ ist eine Hyperbel oder Ellipse, je nachdem der Punkt Φ ausserhalb oder innerhalb des Kreises γ liegt. Liegt der Mittelpunkt Γ des Kreises γ im Unendlichen, geht also dieser Kreis in eine Gerade über, dann befindet sich auch der zweite Brennpunkt Φ' im Unendlichen und der Kegelschnitt λ ist in diesem Falle eine Parabel.

Gelangt der Scheitel C des bewegten Winkels fCl in die Endpunkte C_1, C_2 des durch Φ gehenden Durchmessers des Kreises γ, dann sind die betreffenden Schenkel l_1, l_2 zu $\Gamma\Gamma'$ parallel und berühren den Kegelschnitt λ in den Endpunkten seiner Hauptaxe. Die beiden Punkte C^I, C^{II} des Kreises γ, in denen der Schenkel l diesen Kreis tangirt, sind die Berührungspunkte, die der Kreis γ mit dem Kegelschnitt λ bildet. Ziehen wir also durch den einen Brennpunkt Φ des Kegelschnitts λ eine beliebige Gerade, welche die Nebenaxe $\Gamma'\Gamma$ desselben und eine zu ihr parallele Scheiteltangente l_1 resp. in den Punkten Γ, C_1 trifft, und beschreiben wir um Γ mit dem Radius ΓC_1 einen Kreis, so berührt dieser den Kegelschnitt λ in zwei Punkten. Bestimmen wir auf diese Weise mehrere solche Kreise, dann erhalten wir den Kegelschnitt als die von diesen Kreisen umhüllte Curve und damit eine einfache, leicht auszuführende Construction des Kegelschnitts.

Hieraus folgt auch, dass die von einem Brennpunkte eines Kegelschnitts nach den Tangenten desselben unter gleichem Winkel in gleichem Sinne gezogenen Geraden die Tangenten in Punkten treffen, welche auf einem den Kegelschnitt in zwei Punkten berührenden Kreise liegen; und wenn der Winkel ein Rechter ist, dann sind die Endpunkte der Hauptaxe des Kegelschnitts Durchmesserendpunkte dieses Kreises.

In Fig. **147** ist der Kegelschnitt λ construirt, der von dem Schenkel l des rechten Winkels fCl umhüllt wird, wenn dessen anderer Schenkel f durch den Punkt Φ gleitet und dessen Scheitel C sich auf dem Kreise γ bewegt. Der Kegelschnitt λ ist, weil Φ innerhalb des Kreises γ liegt, eine Ellipse, deren Hauptaxe der durch Φ gehende Kreisdurchmesser ist. Die Brennpunkte Φ, Φ'

liegen beiderseits in gleichem Abstande vom Mittelpunkte Γ des Kreises γ. Den Krümmungsmittelpunkt Λ für den Punkt $\mathfrak{L}$ des Kegelschnitts λ erhalten wir nach der abgeleiteten Construction, indem wir auf der Normalen $\mathfrak{L}\mathfrak{P}$ des Kegelschnitts in ihrem Schnitt N mit der Hauptaxe eine Senkrechte NH errichten, die $\Phi\mathfrak{L}$ in H trifft, und $H\Lambda$ senkrecht $\Phi\mathfrak{L}$ ziehen. Andererseits können wir auch NH' senkrecht $\mathfrak{L}\mathfrak{P}$ bis an $\mathfrak{L}\Phi'$ und $H'\Lambda$ senkrecht $\mathfrak{L}\Phi'$ ziehen.

In Fig. **148** ist die Construction des Krümmungsmittelpunktes für die Parabel λ ausgeführt; dieselbe wird von dem Schenkel l des rechten Winkels lCf umhüllt, dessen anderer Schenkel f durch den Brennpunkt Φ' gleitet, während sich der Winkelscheitel C auf der Scheiteltangente γ der Parabel bewegt. Der zweite Brennpunkt Φ_∞ liegt hier im Unendlichen. Die auf l senkrechte Normale $\mathfrak{L}\Lambda$ der Parabel wird nach S. 68 auch dadurch bestimmt, dass wir auf der Axe $\Phi'\Phi_\infty$ die Strecke $\Phi'N = \Phi'\mathfrak{L}$ machen. Behufs der Construction des zu $\mathfrak{L}$ gehörenden Krümmungsmittelpunktes Λ ziehen wir NH senkrecht $\mathfrak{L}N$, ferner $\mathfrak{L}H$ parallel und $H\Lambda$ senkrecht zur Parabelaxe. In anderer Weise ergiebt sich Λ, indem wir auf $\mathfrak{L}N$ die Senkrechte NH' bis an die Gerade $\mathfrak{L}\Phi'$ und auf diese die Senkrechte $H'\Lambda$ ziehen. Da wegen der Halbirung des Winkels $H'\Phi'N$ durch die Gerade Cf die Strecke $\Phi'H' = \Phi'N = \Phi'\mathfrak{L}$ ist, so wird Λ auch erhalten, wenn wir auf $\mathfrak{L}\Phi'$ die Senkrechte $\Phi\mu$ ziehen und $\mu\Lambda = \mathfrak{L}\mu$ machen.

Nachdem wir die Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte eines Kegelschnitts kennen gelernt haben, können wir auch die Construction der Krümmungsmittelpunkte der Fusspunktencurve eines Kegelschnitts, deren Lothpunkt ein beliebig angenommener Punkt ist, leicht ausführen. Wenn insbesondere der Lothpunkt in einem Brennpunkte des Kegelschnitts liegt, ist die Fusspunktencurve bei der Ellipse und Hyperbel der über die Hauptaxe als Durchmesser beschriebene Kreis, bei der Parabel aber die Scheiteltangente derselben.

Um die Ordnung der zu einem beliebigen Lothpunkte Φ_x gehörenden Fusspunktencurven eines Kegelschnittes λ zu ermitteln, also die Anzahl der Schnittpunkte zu bestimmen, welche eine beliebige Gerade g mit dieser Fusspunktencurve bildet, betrachten wir Φ_x als den Brennpunkt und g als die Scheiteltangente einer hierdurch bestimmten Parabel λ_x. Da diese Parabel λ_x und jener Kegelschnitt λ, wenn derselbe eine Ellipse oder Hyperbel ist, vier gemeinschaftliche Tangenten besitzen, so sind die vier Schnittpunkte, welche die Gerade g mit diesen Tangenten bildet, zugleich die Schnittpunkte, die diese Gerade mit den Fusspunktencurven erzeugt. Demnach ist die Fusspunktencurve einer Ellipse oder Hyperbel im Allgemeinen von der vierten Ordnung. Ist aber jener Kegelschnitt λ eine Parabel, dann treten nur drei im Endlichen befindliche gemeinschaftliche Tangenten auf; denn die unendlich ferne Gerade, welche beide Parabeln als gemeinschaftliche Tangente besitzen, wird nicht in Betracht gezogen. Demnach ist die Fusspunktencurve einer Parabel im Allgemeinen von der dritten Ordnung.

c) Gleiten in Fig. **149** die beiden zum bewegten System S gehörenden Curven f, l resp. auf den Geraden φ, λ in dem festen System Σ und bezeichnen F, L beziehlich die Krümmungsmittelpunkte für die Berührungspunkte $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{L}$, so erhalten wir zu einem Krümmungsmittelpunkte oder zu einem Punkte D im bewegten System S den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt Δ im festen System Σ, wenn wir durch den Pol $\mathfrak{P}$, den Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{F}F$, $\mathfrak{L}L$, zu FL die Parallele $\mathfrak{P}\Omega$ ziehen, dann den Winkel $D\mathfrak{P}\Omega_1$ gleich $L\mathfrak{P}\Omega$ machen, FD bis Ω_1 und $\Omega_1\Delta$ parallel $\mathfrak{P}\Phi_\infty$ ziehen. Da F, L den unendlich fernen Krümmungsmittelpunkten Φ_∞, Λ_∞ der Geraden φ, λ entsprechen, so ist der durch $FL\mathfrak{P}$ gehende Kreis der Wendekreis w, und dieser bleibt im bewegten System S unverändert, wenn f, l Kreise sind. In diesem Falle ist nach Art. 18 der Wendekreis w zugleich die Polcurve des bewegten Systems S.

In Fig. **150** sind im festen System Σ zwei Curven φ, λ mit den betreffenden Krümmungsmittelpunkten Φ, Λ gegeben; und auf diesen Curven φ, λ gleiten beziehlich die im beweglichen System S befindliche Curve f und Gerade l, zu denen die betreffenden Krümmungsmittelpunkte F, L_∞ gehören. Um in diesem Beispiel zu dem Punkte D des Systems S, der mit dem Berührungspunkte von λ, l coincidirt, den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt Δ zu bestimmen, ziehen wir zu $\mathfrak{P}\Lambda$ die Parallele $L_\infty F$, die $\Phi\Lambda$ in Ω schneidet, ferner die Gerade $\mathfrak{P}\Omega$, die auf FD den Schnittpunkt Ω_1 liefert, und die Gerade $\Phi\Omega_1$, die auf $\mathfrak{P}D$ den zu D gehörenden Krümmungsmittelpunkt Δ bestimmt. Wenn insbesondere die Gerade l durch einen festen Punkt Λ geht, also D mit Λ zusammenfällt, dann ist nach dieser Construction $\Lambda\Delta = \Delta\mathfrak{P}$; folglich der Krümmungsmittelpunkt Δ die Mitte von $\Lambda\mathfrak{P}$.

d) Rollt in Fig. **151** eine Curve p eines bewegten Systems derart auf einer festen congruenten Curve π, dass stets zwei homologe Punkte dieser symmetrisch gelegenen Curven in Berührung treten, dann beschreibt ein Systempunkt A, dessen homologer Punkt in dem festen, symmetrisch congruenten System mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet ist, nach Art. 23 eine Bahncurve α, die derjenigen zur Polbahn π gehörenden Fusspunktencurve γ homothetisch ähnlich ist, welche dem Lothpunkte $\mathfrak{A}$ entspricht. Die beiden ähnlichen Curven α, γ stehen in dem Verhältniss $2:1$, und $\mathfrak{A}$ ist der Aehnlichkeitspunkt für dieselben. Vermittelst der Krümmungsmittelpunkte Π, P der Polbahn π und Polcurve p, deren Berührungspunkt der Pol $\mathfrak{P}$ ist, erhalten wir auf der zur Bahncurve α gehörenden Normalen $A\mathfrak{P}$ den betreffenden Krümmungsmittelpunkt A dieser Curve, indem wir auf $A\mathfrak{P}$ die Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ bis an die Gerade AP ziehen und $\mathfrak{Q}$ mit Π verbinden; dann schneidet $\mathfrak{Q}\Pi$ die Curvennormale $A\mathfrak{P}$ in A. Der Halbirungspunkt Γ der Strecke $\mathsf{A}\mathfrak{A}$ ist der Krümmungsmittelpunkt der Fusspunktencurve γ für den auf der Polbahntangente $\mathfrak{P}t$ liegenden Curvenpunkt C.

Nehmen wir an, es sei $\mathfrak{A}$ ein leuchtender Punkt und die Polbahn π eine die Lichtstrahlen reflectirende Curve, so ist, da die Polbahntangente $\mathfrak{P}t$ in der Mitte C auf $\mathfrak{A}A$ senkrecht steht, der Winkel $\mathfrak{A}\mathfrak{P}\Pi = \Pi\mathfrak{P}\mathsf{A}$ und folglich $\mathfrak{P}\mathsf{A}$ der vom Curvenpunkte $\mathfrak{P}$ reflectirte Strahl. Die von den Krümmungsmittelpunkten der Curve α gebildete Curve $\mathfrak{a}$, welche von den reflectirten Strahlen umhüllt wird, heisst die katakaustische Curve oder die Brenncurve der Curve π im Bezug auf den leuchtenden Punkt $\mathfrak{A}$. Die katakaustische Curve $\mathfrak{a}$ ist also die Evolute der von dem Systempunkte A beschriebenen Bahncurve α.[1])

Um noch eine andere Construction eines Punktes A der katakaustischen Curve $\mathfrak{a}$ in Fig. 152 abzuleiten, ziehen wir vom leuchtenden Punkte $\mathfrak{A}$ auf die Normale $\mathfrak{P}\Pi$ der reflectirenden Curve π die Senkrechte $\mathfrak{A}H$, welche den reflectirten Strahl $\mathfrak{P}\mathsf{A}$ in J schneidet, und nehmen an, dass der Punkt $\mathfrak{P}$ sich auf π mit der lothrechten Geschwindigkeit $\mathfrak{P}\Pi$ bewege. Der Fusspunkt H resp. die Mitte von $\mathfrak{A}J$ bewegt sich momentan auf dem über $\mathfrak{A}\Pi$ als Durchmesser beschriebenen Kreise h und der Schnittpunkt J bewegt sich momentan auf einem doppelt so grossen Kreise i, dessen Mittelpunkt Π ist. Der mit H coincidirende Punkt der Geraden $\mathfrak{P}\Pi$, die sich momentan um den Krümmungsmittelpunkt Π dreht,

[1]) Diese Erzeugungsweise der katakaustischen Curven hat De l'Hospital in seiner *Analyse des infiniments petits.* 1715. Art. 111. p. 105 mitgetheilt, und wurde von Kessler zur kinematischen Untersuchung einiger dieser Curven benutzt. *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* 1878. B. 23. S. 1.

besitzt die lothrechte Geschwindigkeit $H\Pi$. Demnach repräsentirt der Durchmesser $HH_{\mathfrak{v}}$ des Kreises h, weil $\Pi H_{\mathfrak{v}}$ auf $\Pi\mathfrak{P}$ senkrecht ist, die lothrechte Geschwindigkeit, mit welcher sich H auf dem Kreise h bewegt. Wenn wir nun durch Π die Gerade $JJ_{\mathfrak{v}}$ bis an die Gerade $\mathfrak{A}H_{\mathfrak{v}}$ ziehen, welche zu $\Pi\mathfrak{P}$ parallel ist, dann wird durch $JJ_{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Schnittpunktes J dargestellt; denn es ist $JJ_{\mathfrak{v}} = 2\overline{HH_{\mathfrak{v}}}$ und parallel $HH_{\mathfrak{v}}$. Nachdem wir also von den beiden Punkten $\mathfrak{P}$, J des reflectirten Strahles die lothrechten Geschwindigkeiten $\mathfrak{P}\Pi$, $JJ_{\mathfrak{v}}$ kennen, können wir, wie auf S. 64 (Fig. **66**) gezeigt wurde, den Punkt A construiren, in welchem dieser Strahl seine Hüllbahncurve α berührt. Wir ziehen $\Pi\Pi'$ senkrecht $\mathfrak{P}J$, dann $\mathfrak{P}\Pi'$ parallel $J\Pi$ und die Gerade $\Pi' J_{\mathfrak{v}}$, die $\mathfrak{P}J$ im Punkte A schneidet.

ZWEITER ABSCHNITT.

Die cyclischen Curven.

Erzeugung der cyclischen Curven durch Rollung.

57. **Die doppelte Erzeugung der cyclischen Curven.** Die cyclischen Curven werden bei den Rädermechanismen in mannigfacher Weise erzeugt und bilden die Grundlage für die Lehre von der Verzahnung. Diese Curven sind in geometrischer Beziehung noch unvollständig untersucht, und daher ist es nothwendig, dass wir der Behandlung derselben einen besonderen Abschnitt widmen.

Dreht sich in Fig. **153**, Taf. VIII ein ebenes System S_3 mit der Drehgeschwindigkeit ω_{32} in einem anderen ebenen System S_2 um einen in demselben ruhenden Punkt F, rotirt ferner das System S_2 mit der Drehgeschwindigkeit ω_{21} um einen festen Punkt Φ in einem festen System S_1 und sind diese Drehungen proportional, so ist das Verhältniss $\omega_{21} : \omega_{32}$ constant. Die Curven, welche bei dieser Bewegung die Punkte des Systems S_3 in dem festen System S_1 beschreiben, werden cyclische Curven genannt. Der Punkt F, der einzige in dem System S_3, der im festen System S_1 einen Kreis um Φ beschreibt, ist der Pol der beiden Systeme S_3, S_2, und der Punkt Φ ist der Pol von S_2 in S_1; folglich ergiebt sich nach Art. 24, wenn ω_{31} die Drehgeschwindigkeit von S_3 in S_1 bezeichnet, dass

$$\omega_{31} = \omega_{21} + \omega_{32}$$

ist, und dass der auf ΦF liegende Pol $\mathfrak{P}$ des Systems S_3 im Bezug auf das feste System S_1 durch die Proportion

$$\frac{F\mathfrak{P}}{F\Phi} = \frac{\omega_{21}}{\omega_{31}} = \frac{\omega_{21}}{\omega_{21} + \omega_{32}}$$

bestimmt ist, aus welcher umgestaltet die folgende Proportion

$$\frac{F\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}\Phi} = \frac{\omega_{21}}{\omega_{32}}$$

hervorgeht.

Hierin ist die Drehgeschwindigkeit ω_{32} negativ zu nehmen, wenn dieselbe nicht in gleichem Sinne mit der als positiv betrachteten Drehgeschwindigkeit ω_{21} gerichtet ist. Je nachdem nun die Drehungen der beiden Systeme S_2, S_3 in gleichem oder entgegengesetztem Sinne erfolgen, liegt der Pol $\mathfrak{P}$ auf der durch ΦF gehenden Geraden innerhalb oder ausserhalb der Strecke ΦF. Da nach der Voraussetzung das Verhältniss $\omega_{21} : \omega_{32}$ der Drehgeschwindigkeiten constant ist, so sind auch die Strecken $\mathfrak{P}\Phi$, $F\mathfrak{P}$ constant. Demnach ist für die Bewegung des Systems S_3 in dem festen System S_1 die Polbahn ein um Φ mit dem Radius $\Phi\mathfrak{P}$ beschriebener Kreis π und die Polcurve ein um F mit dem Radius $F\mathfrak{P}$ beschriebener Kreis p. Dieser Kreis p rollt entweder ausserhalb oder innerhalb an dem festen Kreise π, der auch Grundkreis genannt wird; und hieraus folgt:

Rollt ein Kreis eines bewegten ebenen Systems an einem festen Kreise, so beschreiben die Punkte dieses bewegten Systems cyclische Curven.[1])

Für die cyclische Curve α, die ein im bewegten System S_3 beliebig angenommener Punkt A, Fig. **153**, beschreibt, ist $A\mathfrak{P}$ die Normale. Bilden wir das Parallelogramm $\Phi FAF'$, dessen starre Seiten wir uns in den Ecken gelenkartig verbunden denken, dann rotirt, weil $\Phi F'$ beständig parallel FA ist, die Seite $\Phi F'$ sowie das durch dieselbe bestimmte ebene System S_2' mit der Drehgeschwindigkeit $\omega_{21}' = \omega_{31}$ um Φ in dem festen System S_1; und ferner folgt wegen der sich im ungleichen Sinne ändernden, gleichen

---

[1]) Die cyclischen Curven sollen von Olaf Römer 1674 erfunden und von ihm auf die Verzahnung der Räder angewandt worden sein. Leibniz berichtet hierüber an Bernoulli in einem vom 18. Jan. 1698 datirten Briefe. *Commercium phil. et math. Leibnitii et Bernoullii.* An. 1694—1699. T. I. *Epistola* 64. p. 347, und ferner *Miscellanea Berolin.* T. I. p. 315. Dagegen hat aber schon Albrecht Dürer in seinem bekannten Buche „*Underweysung der Messung mit dem Zirckel und richtscheyt* 1538" eine cyclische Curve gezeichnet und „Spinnenlinie" benannt. Die speciellen cyclischen Curven, welche von den Punkten der Peripherie des rollenden Kreises beschrieben werden, finden sich als Cycloiden bezeichnet in Newton, *Principia mathematica.* 1686. p. 158, deutsche Ausgabe von Wolfers 1872. S. 156. Die erste im Jahre 1694 erschienene Abhandlung dieser Curven und die Anwendung auf die Verzahnungen der Räder von De La Hire befindet sich unter dem Titel: „*Traité des épicycloïdes et leur usage dans les mécaniques*" in den *Mémoires de l'Académie.* T. 9. p. 341. Im Vorworte daselbst erwähnt dieser Autor, dass schon vor ihm Desargues die geometrischen Bestimmungen der Zahnformen der Räder gekannt und praktisch ausgeführt habe. Vergl. auch *Oeuvres de Desargues par Poudra.* 1864. T. I. p. 30.

Winkel an den Ecken F, F', dass die Seite $F'A$ sowie das durch dieselbe bestimmte ebene System S_3' sich mit der Drehgeschwindigkeit $\omega_{32}' = -\omega_{32}$ um F' im System S_2' dreht. Demnach erhalten wir den Satz:

Drehen sich zwei Seiten ΦF, $\Phi F'$ eines aus starren Seiten gebildeten, veränderlichen Parallelogramms $\Phi F A F'$ um den festen Eckpunkt Φ, so dass diese Drehungen proportional sind, also das Verhältniss ihrer Drehgeschwindigkeiten constant ist, dann beschreibt der vierte Eckpunkt A und jeder mit der Seite FA oder $F'A$ verbundene Punkt eine cyclische Curve.

Die Normale $A\mathfrak{P}$ an der vom Punkte A beschriebenen cyclischen Curve schneidet die Seite $\Phi F'$ des betrachteten Parallelogramms in dem Pol $\mathfrak{P}'$ des Systems S_3' im Bezug auf das feste System S_1, und die Strecken $F'\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}'\Phi$ sind constant, weil das Verhältniss

$$\frac{F'\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}'\Phi} = \frac{\omega_{21}'}{\omega_{32}'} = -\frac{\omega_{31}}{\omega_{32}}$$

constant ist. Demnach ist für die Bewegung des Systems S_3' in dem festen System S_1 die Polbahn ein um Φ mit dem Radius $\Phi\mathfrak{P}'$ beschriebener Kreis π', und die zugehörige Polcurve ein um F' mit dem Radius $F'\mathfrak{P}'$ beschriebener Kreis p'. Der Punkt A erzeugt hiernach die cyclische Curve α auf zweierlei Weise, je nachdem derselbe mit dem an dem Grundkreise π rollenden Kreise p oder mit dem an dem Grundkreise π' rollenden Kreise p' verbunden wird. [1]) Alle Punkte eines Kreises, der mit dem rollenden

---

[1]) Diese doppelte Erzeugungsweise der cyclischen Curven wurde zuerst von G. Bellermann in seiner kleinen Schrift „*Epicycloiden und Hypocycloiden.* 1867" mitgetheilt. Später ist diese doppelte Erzeugungsweise auch von mehreren Autoren begründet worden; von Rittershaus in den *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen.* 1874. Jahrg. 53. S. 272; von Proctor in seinem Buche „*A treatise on the cycloid and all forms of cycloidal curves.* 1878". p. 154—157; ferner von A. Victor und Ch. Wiener beziehlich in der *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* 1880. B. 25. S. 263 und B. 26. S. 255. Für den besonderen Fall, wenn der beschreibende Punkt auf dem rollenden Kreise liegt, wurde jene doppelte Erzeugung schon von De La Hire gefunden, der dieselbe in den *Mémoires de l'Académie.* 1694. T. 9. p. 390 mitgetheilt hat. Später gab auch Euler, ohne De La Hire zu erwähnen, hierfür einen Beweis in der Abhandlung „*De duplici genesi tam epicycloidum, quam hypocycloidum*". *Acta Petropolitanae.* An. 1781. Pars I. In dem Falle, wenn eine cyclische Curve durch den festen Kreismittelpunkt geht, hat Durège die doppelte Erzeugung in der *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* 1864. B. IX. S. 209 bewiesen.

Kreise concentrisch verbunden ist, beschreiben, wie man leicht erkennt, congruente cyclische Curven. Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{F\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}\Phi}=\frac{\omega_{21}}{\omega_{32}},\quad \frac{F'\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}'\Phi}=-\frac{\omega_{31}}{\omega_{32}}$$

folgt, weil $\omega_{31}=\omega_{21}+\omega_{32}$ ist,

$$\frac{F\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}\Phi}+\frac{F'\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}'\Phi}=-1.$$

Dieselbe Beziehung ergiebt sich auch leicht aus den ähnlichen Dreiecken $\Phi\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$, $F'A\mathfrak{P}'$, wenn wir beachten, dass die Strecken $F'\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}'\Phi$ entgegen- oder gleichgerichtet sind, je nachdem der Pol $\mathfrak{P}$ in der durch ΦF gehenden, unendlich langen Geraden auf der Seite von Φ nach F oder auf der anderen Seite von Φ liegt, und dass für jede dieser Lagen nach der Regel der Streckenaddition $AF'=F\mathfrak{P}+\mathfrak{P}\Phi$ ist. Denn liegt resp. in Fig. **153** und Fig. **154** $\mathfrak{P}$ innerhalb ΦF oder ausserhalb über F hinaus, so ist

$$-\frac{F'\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}'\Phi}=\frac{F\mathfrak{P}+\mathfrak{P}\Phi}{\mathfrak{P}\Phi},\quad \frac{F\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}\Phi}+\frac{F'\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}'\Phi}=-1;$$

oder befindet sich $\mathfrak{P}$ auf der anderen Seite von Φ, so folgt

$$\frac{F'\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}'\Phi}=-\frac{F\mathfrak{P}+\mathfrak{P}\Phi}{\mathfrak{P}\Phi},\quad \frac{F\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}\Phi}+\frac{F'\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}'\Phi}=-1.$$

Aus diesen Darlegungen erhalten wir den folgenden Satz:

Eine cyclische Curve kann mittelst Rollen durch zwei verschiedene Kreispaare erzeugt werden, deren feste Kreise concentrisch sind; der Abstand des beschreibenden Punktes von dem Mittelpunkte des rollenden Kreises bei der Erzeugung durch das eine Kreispaar ist gleich dem Abstande der Mittelpunkte des anderen Kreispaares; und wenn $F\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}\Phi$ die Radien des einen Kreispaares, ferner $F'\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}'\Phi$ die des anderen bezeichnen, so besteht die Beziehung

$$\frac{F\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}\Phi}+\frac{F'\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}'\Phi}=-1.$$

Bei dem Rollen eines Kreises p an einem festen Kreise π unterscheiden wir zwei Fälle: Erstens, der rollende Kreis p berührt den festen Kreis π ausserhalb; dabei wird der feste Kreis von dem rollenden entweder ausgeschlossen oder umschlossen, je nachdem der Berührungspunkt $\mathfrak{P}$ derselben innerhalb der Verbindungsstrecke ΦF der Kreismittelpunkte oder ausserhalb derselben jenseits des festen Mittelpunktes Φ liegt; und wir sagen dann, der Kreis p

rollt auf dem festen Kreise π. Zweitens, der rollende Kreis p berührt den festen Kreis π innerhalb, wird also von diesem umschlossen, dann sagen wir, der Kreis p rollt in dem festen Kreise π.

58. **Eintheilung der cyclischen Curven.** Wenn der Berührungspunkt $\mathfrak{P}$ der Kreise π, p, wie in Fig. **153**, innerhalb ΦF liegt, der Kreis p also auf dem Kreise π rollt und diesen ausschliesst, so befindet sich der Berührungspunkt $\mathfrak{P}'$ der beiden anderen Kreise π', p' ausserhalb $\Phi F'$ auf der Seite von Φ und der Kreis p' rollt umschliessend auf dem Kreise π'. Liegt dagegen, wie in Fig. **154**, der Berührungspunkt $\mathfrak{P}$ von π, p ausserhalb ΦF nach der Seite von F, rollt also der Kreis p in dem festen Kreise π, so befindet sich der Berührungspunkt $\mathfrak{P}'$ von π', p' ausserhalb $\Phi F'$ auf der Seite von F' und der Kreis p' rollt demnach in dem Kreise π'. Wird der Berührungspunkt $\mathfrak{P}$ ausserhalb ΦF auf der Seite von Φ liegend angenommen, dann liegt $\mathfrak{P}'$ innerhalb $\Phi F'$, und folglich tritt eine Vertauschung der im ersten Falle erhaltenen Lagenbeziehungen der Kreispaare ein.

Befindet sich der beschreibende Punkt A in Fig. **155** und **156** auf der Peripherie des rollenden Kreises, dann ist $F'A = F'\mathfrak{P}'$, $\Phi\mathfrak{P}' = \Phi\mathfrak{P}$; demnach liegt auch der Punkt A auf dem rollenden Kreise p' und die beiden festen Kreise π, π' fallen für diese besondere Lage von A zusammen. In diesem Specialfalle ist der Radius des festen Kreises gleich der Differenz oder der Summe der Radien der beiden rollenden Kreise p, p', je nachdem diese auf oder in dem festen Kreise rollen, und die betreffenden speciellen cyclischen Curven unterscheiden sich dadurch von den allgemeinen cyclischen Curven, dass sie mit Rückkehrpunkten oder Spitzen an den festen Kreis stossen.

Nach der Erzeugungsweise der cyclischen Curven, die Trochoiden[1]) genannt werden, wenn der feste und der rollende

---

[1]) Mit diesem Namen, der aus ὁ τροχός, der Reif, gebildet ist, wurde ehemals die Cycloide bezeichnet, welche entsteht, wenn der bewegte Kreis auf einer Geraden rollt. Vergl. die Abhandlung „*De trochoide*" von Roberval, *Mémoires de l'Académie.* 1730. T. 6. p. 361. Jetzt ist aber die Benennung „Trochoiden" für jene allgemeineren cyclischen Curven üblich geworden; auch Young hat dieselben schon im Jahre 1800 in seinem *Course of lectures.* Vol. 2. p. 555, wo diese Curven behandelt werden, eingeführt.

In dem Buche: „*Die cyclischen Curven*" von Weissenborn. 1856. S. 3 werden für den Fall, wenn ein Kreis umschliessend auf einem festen Kreise rollt, die cyclischen Curven „Pericycloiden" genannt. Da aber diese Curven auch

Kreis von endlicher Grösse sind, unterscheidet man Epitrochoiden und Hypotrochoiden, je nachdem der bewegte Kreis, mit dem der beschreibende Punkt verbunden ist, auf oder in dem festen Kreise rollt. Liegt insbesondere der beschreibende Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises, dann werden diese speciellen cyclischen Curven, weil sie Rückkehrpunkte resp. Spitzen besitzen, gespitzte Trochoiden genannt und auch als Epicycloiden oder Hypocycloiden bezeichnet, je nachdem jener Kreis auf oder in dem festen Kreise rollt. Geht eine Trochoide durch den festen Kreismittelpunkt, so hat sie in der Regel eine rosettenartige oder sternförmige Gestalt; und daher heisst sie in diesem Falle eine sternförmige Trochoide. Dieselbe wird sternförmige Epitrochoide oder sternförmige Hypotrochoide genannt, je nachdem der bewegte Kreis auf oder in dem festen Kreise rollt.

Befindet sich der beschreibende Punkt A und der feste Kreismittelpunkt Φ auf der einen Seite des rollenden Kreises p, z. B. wie in Fig. **157** und **158** ausserhalb desselben; dann folgt aus den ähnlichen Dreiecken $FA\mathfrak{P}$, $F'\mathfrak{P}'A$, dass $F'\mathfrak{P}' > F'A$ ist, und somit liegt A innerhalb des rollenden Kreises p'. Ebenso liegt auch Φ innerhalb dieses Kreises p'; denn für Φ ausserhalb p ist auch $F'\mathfrak{P}' > F'\Phi$. Befinden sich die beiden Punkte A, Φ innerhalb des rollenden Kreises p, so folgt in analoger Weise, dass $F'\mathfrak{P}' < F'A$, $F'\mathfrak{P}' < F'\Phi$ ist, und demnach liegen dann die beiden Punkte A, Φ ausserhalb des rollenden Kreises p'.

In Fig **153** und **154** ist der beschreibende Punkt A innerhalb, der feste Mittelpunkt Φ ausserhalb des rollenden Kreises p angenommen. In diesem Falle ist wegen der ähnlichen Dreiecke $FA\mathfrak{P}$, $F'\mathfrak{P}'A$ der Radius $F'\mathfrak{P}' < F'A$, und demnach liegt A ausserhalb des rollenden Kreises p'. Ferner ergiebt sich, da Φ ausserhalb p liegt, dass $F'\mathfrak{P}' > F'\Phi$ ist und dass sich demnach der Punkt Φ innerhalb des rollenden Kreises p' befindet. Wird schliesslich der Punkt A ausserhalb, der Punkt Φ innerhalb p angenommen, dann tritt eine Wechselung der Lagenbeziehungen ein; denn es ergiebt sich, dass für diesen Fall A innerhalb, Φ

---

erzeugt werden, wenn ein Kreis ausschliessend auf einem festen Kreise rollt, so ist dieser von Weissenborn irrthümlich als nothwendig erachtete Name verwerflich. Dieses Buch, welches auch sehr umständliche Constructionen der Krümmungsradien der cyclischen Curven enthält, ist in einzelnen Theilen durch die neueren Fortschritte veraltet.

ausserhalb p' liegt. Diese Unterscheidung hört aber auf in dem einzigen Falle, wenn der bewegte Kreis in einem doppelt so grossen festen Kreise rollt; denn dann liegt der feste Kreismittelpunkt Φ auf der Peripherie des rollenden Kreises. Dieser Ausnahmefall zeichnet sich auch dadurch aus, dass alle Punkte des rollenden Systems, wie schon in Art. 18 bewiesen wurde, Ellipsen beschreiben, welche für die auf der Peripherie des rollenden Kreises liegenden Punkte in Durchmesser des festen Kreises übergehen.

Die Theile einer Trochoide, welche erzeugt werden durch jede vollständige Abrollung der Peripherie des rollenden Kreises an dem festen Kreise, sind congruent; und bei der Construction der Trochoiden werden wir erkennen, dass ein solcher Curventheil, wenn der beschreibende Punkt A und der feste Kreismittelpunkt Φ auf einer Seite, also entweder beide ausserhalb oder beide innerhalb des rollenden Kreises liegen, meistens eine Schlinge besitzt; dass aber dagegen ein solcher Curventheil, wenn sich die Punkte A, Φ zu beiden Seiten des rollenden Kreises befinden, der eine innerhalb, der andere ausserhalb desselben liegt, meistens gestreckt gestaltet ist und erst durch die weitere Fortsetzung der Curve Schlingen gebildet werden. Dem gemäss nennen wir: eine Trochoide verschlungen, wenn der beschreibende Punkt und der feste Kreismittelpunkt beide innerhalb oder beide ausserhalb des rollenden Kreises liegen; dagegen gestreckt, wenn sich der eine innerhalb, der andere ausserhalb des rollenden Kreises befindet. [1])

Je nachdem im ersten Falle der bewegte Kreis auf oder in dem festen Kreise rollt, entsteht eine verschlungene Epitrochoide oder verschlungene Hypotrochoide; und je nachdem im zweiten Falle der bewegte Kreis auf oder in dem festen Kreise rollt, entsteht eine gestreckte Epitrochoide oder gestreckte Hypotrochoide.

Ist der feste Kreis unendlich gross, geht derselbe also in

---

[1]) Bisher wurden die Benennungen „verkürzte" oder „verlängerte" cyclische Curve gebraucht, je nachdem der beschreibende Punkt innerhalb oder ausserhalb des rollenden Kreises liegt. Durch die gegebene Begriffsbestimmung, die Ch. Wiener in der *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. 1881. B. 26. S. 263 mitgetheilt hat, sind die Widersprüche verbannt, welche infolge der erkannten doppelten Erzeugung aufgedeckt wurden. Wir haben die Benennung „gestreckt" den anderen vorkommenden Benennungen „gedehnt" oder „geschweift" vorgezogen.

eine Gerade über, dann beschreibt ein mit dem rollenden Kreise verbundener Punkt eine allgemeine Cycloide. Diese wird eine verschlungene Cycloide oder gestreckte Cycloide genannt, je nachdem sich der beschreibende Punkt ausserhalb oder innerhalb des rollenden Kreises befindet, und als gespitzte Cycloide oder kurz Cycloide bezeichnet, wenn dieser Punkt auf der Peripherie dieses Kreises liegt. Ist der rollende Kreis unendlich gross, geht derselbe also in eine Gerade über, die auf dem festen Kreise rollt, dann beschreibt ein an dieser Geraden befestigter Punkt eine allgemeine Kreisevolvente. Diese heisst eine verschlungene Kreisevolvente oder eine gestreckte Kreisevolvente, je nachdem der beschreibende Punkt auf der Berührungsseite oder auf der anderen Seite der rollenden Geraden liegt. Als gespitzte Kreisevolvente oder kurz als Kreisevolvente wird sie bezeichnet, wenn der beschreibende Punkt sich auf dieser Geraden befindet.

Bei der allgemeinen Cycloide ist, wie man leicht aus der Gestaltung jenes Parallelogramms $\Phi FAF'$ erkennt, die zweite Erzeugungsweise geometrisch nicht verwendbar, weil der feste und der rollende Kreis unendlich gross werden und weil auch beide im Unendlichen liegen. Bei der allgemeinen Kreisevolvente zeigt sich, dass beide Erzeugungsweisen identisch sind.

59. **Construction der Krümmungsmittelpunkte der cyclischen Curven.** Um in Fig. 159 den Krümmungsmittelpunkt A für den Punkt A der erzeugten cyclischen Curve α auf der Curvennormalen $A\mathfrak{P}$ zu bestimmen, verfahren wir, wie in Art. 47b) und Art. 48c) gezeigt wurde. Wir errichten im Pol $\mathfrak{P}$ auf $A\mathfrak{P}$ die Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, ziehen durch den beschreibenden Punkt A und den entsprechenden Mittelpunkt F des rollenden Kreises p die Gerade AF, welche diese Senkrechte in $\mathfrak{Q}$ trifft, und verbinden $\mathfrak{Q}$ mit dem Mittelpunkte Φ des festen Kreises π. Dann schneidet $\Phi\mathfrak{Q}$ die Curvennormale $A\mathfrak{P}$ in dem Krümmungsmittelpunkte A. Befindet sich der beschreibende Punkt A insbesondere auf der Peripherie des rollenden Kreises p, dann liegt auch der Punkt $\mathfrak{Q}$ in dieser Peripherie dem Punkte A diametral gegenüber.

Diese Construction können wir auch leicht direct kinematisch in folgender Weise ableiten. Der Krümmungsmittelpunkt A ist der Punkt, in welchem die bewegte Curvennormale $A\mathfrak{P}$ momentan ihre Hüllbahncurve berührt. Zeichnen wir das Parallelogramm $\Phi FAF'$ und nehmen wir an, es sei $F'\Phi$ die lothrechte Geschwindigkeit des um Φ rotirenden Punktes F' der bewegten starren Seite $F'A$, so ist $A\mathfrak{P}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes A; ferner ist dann auch die constante Strecke $\Phi\mathfrak{P}'$, welche $A\mathfrak{P}$ auf $\Phi F'$ bestimmt, die lothrechte Geschwindigkeit, mit welcher sich der Pol $\mathfrak{P}'$ bei der zweiten Erzeugung um Φ dreht. Wird nun zu $\Phi\mathfrak{P}'$ die durch F gehende Parallele $A\mathfrak{Q}$, auf $A\mathfrak{P}$ die Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ gezogen und der Schnittpunkt $\mathfrak{Q}$ mit Φ verbunden; dann ist nach S. 65 (Fig. **66**) der Schnittpunkt A der Geraden $A\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}\Phi$ derjenige Punkt, in welchem die Curvennormale $A\mathfrak{P}$ ihre Hüllbahncurve berührt, und somit auch der entsprechende Krümmungsmittelpunkt. Diese Construction stimmt also mit der vorhin ausgeführten vollständig überein. Wegen der doppelten Erzeugung der von dem Punkte A beschriebenen Curve α erhalten wir eine analoge Construction, wenn wir $F\Phi$ als lothrechte Geschwindigkeit des um Φ rotirenden Punktes F der bewegten starren Seite AF jenes Parallelogramms betrachten. Dem zufolge ist $A\mathfrak{P}'$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes A und $\mathfrak{P}\Phi$ die des Pols $\mathfrak{P}$. Wird nun in $\mathfrak{P}'$ auf $A\mathfrak{P}'$ die Senkrechte $\mathfrak{P}'\mathfrak{Q}'$ errichtet, die AF' in $\mathfrak{Q}'$ trifft, dann bestimmt auch die Gerade $\mathfrak{Q}'\Phi$ auf $A\mathfrak{P}'$ den Krümmungsmittelpunkt A. Diese Constructionen sind nicht ausführbar, wenn, wie in Fig. **160**, der beschreibende Punkt A nach A_0 in die Gerade ΦF gelangt ist, sich also entweder im grössten oder im kleinsten Abstande von Φ befindet. Der Lage A_0 entspricht auf dem Kreise π' in der Verlängerung von $F\Phi$ die Lage $\mathfrak{P}'_0$ des Punktes $\mathfrak{P}'$. Nehmen wir nun an, dass der Punkt A_0 die Geschwindigkeit $A_0A_v = A_0\mathfrak{P}$ besitzt, dann hat $\mathfrak{P}'_0$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{P}'_0\mathfrak{P}'_v = \mathfrak{P}'_0\Phi$, und demnach schneidet die Verbindungsgerade $A_v\mathfrak{P}'_v$ die Gerade ΦF in dem entsprechenden Krümmungsmittelpunkte A_0. Der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte ist die Evolute der betreffenden cyclischen Curve.[1])

60. **Construction der Wendepunkte der cyclischen Curven.** Um zu erkennen, ob eine gestreckte Epitrochoide Wendepunkte besitzt, und wenn dies der Fall ist, dieselben auf ihr zu bestimmen, construiren wir in Fig. **161** für eine Anfangslage p_0 des rollenden Kreises p auf der Centrale ΦF_0 den Wendepol $\mathfrak{W}_0$, der gemäss S. 105 von F_0 um die Strecke $F_0\mathfrak{W}_0 = \overline{F_0\mathfrak{P}_0}^2 : F_0\Phi$ entfernt ist, indem wir über ΦF_0 einen Halbkreis ziehen, der den rol-

---

[1]) Die Evoluten der gestreckten und der verschlungenen Trochoiden sind in Bellermann's „*Epicycloiden und Hypocycloiden* 1867“ und von Ch. Wiener in der *Zeitschrift für Math. und Physik.* 1882. B. 27. S. 129 behandelt.

lenden Kreis p_0 in Z trifft; dann ist der Fusspunkt $\mathfrak{W}_0$ des von Z auf ΦF_0 gefällten Lothes der Wendepol und $\mathfrak{P}_0\mathfrak{W}_0$ der Durchmesser des Wendekreises w_0, der alle Systempunkte enthält, die momentan Wendepunkte auf ihren Bahncurven durchschreiten. Der Wendekreis ändert seine Grösse nicht und wandert während der Abrollung des Kreises p durch den ringförmigen Ebenentheil, der von dem Kreise p_0 und von dem concentrischen mit dem Radius $F_0\mathfrak{W}_0$ beschriebenen Kreise i_0 begrenzt wird; folglich werden alle Punkte des rollenden Systems, die in dem ringförmigen Ebenentheil liegen, gestreckte Epitrochoiden erzeugen, die Wendepunkte besitzen. Diese Curven gehen demnach aus einer Krümmung in eine entgegengesetzte über, und haben somit an den betreffenden Stellen eine geschweifte Form. Durch den auf der Centralen ΦF_0 liegenden Punkt A_0, die Anfangslage des Punktes A, der die gestreckte Epitrochoide α beschreibt, ziehen wir um F_0 den Kreisbogen $A_0\mathfrak{a}_0$ bis an den Wendekreis w_0; ferner ziehen wir die Gerade $F_0\mathfrak{a}_0$, welche die Kreise i_0, p_0 in R, P trifft, und beschreiben über RP als Durchmesser den Kreis w. Dieser Kreis w, der durch A_0 geht und $F_0\mathfrak{P}_0$ noch in einem zweiten Punkte B_0 schneidet, wird Wendekreis, wenn der rollende Kreis die Lage p erhält, bei welcher der Punkt P als Pol oder Berührungspunkt nach dem Punkte $\mathfrak{P}$ des festen Kreises π gelangt ist. Machen wir also vermittelst möglichst kleiner Bogentheile den Bogen $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 P$ und bestimmen wir für die Lage p des rollenden Kreises die entsprechende Lage A des beschreibenden Punktes, indem wir mit dem Radius F_0A_0 um den Mittelpunkt F des Kreises p von der Centralen $F\Phi$ aus den Bogen $\mathfrak{a}A = \mathfrak{a}_0 A_0$ ziehen, dann ist A ein Wendepunkt der gestreckten Epitrochoide α und der zu diesem bezüglich ΦF_0 symmetrisch gelegene Curvenpunkt A' ein zweiter Wendepunkt derselben. Da jener Kreis w auch durch den Punkt B_0 geht, so ergiebt sich auf der Geraden FA, indem wir $FB = F_0 B_0$ machen, der Wendepunkt B der entsprechenden gestreckten Epitrochoide β, und analog ein symmetrisch gelegener zweiter Wendepunkt B' derselben.

Construiren wir in gleicher Weise zu mehreren auf der Strecke $\mathfrak{W}_0\mathfrak{P}_0$ liegenden Punkten die entsprechenden Wendepunkte, dann bilden diese eine Curve η, die in unserer Figur punktirt gezeichnet ist. Nähert sich der Punkt B_0 dem Wendepol $\mathfrak{W}_0$, dann rücken die entsprechenden Wendepunkte B, B' immer näher an einander und fallen schliesslich in dem Wendepol zusammen, wenn B_0 mit demselben coincidirt. Da an der Stelle eines Wendepunktes zwei

Elemente der Curve sich in einer Geraden befinden, so müssen auf der cyclischen Curve, die von einem mit dem Wendepol $\mathfrak{W}_0$ momentan coincidirenden Punkte beschrieben wird, an der Stelle $\mathfrak{W}_0$ vier Elemente in einer Geraden liegen. Auf der gestreckten Epitrochoide γ, die einem innerhalb des Kreises i_0 liegenden Punkte C_0 entspricht, giebt es keine Wendepunkte.

Fällt der Punkt C_0 mit dem Kreismittelpunkte F_0 zusammen, dann geht die entsprechende gestreckte Epitrochoide in den Kreis φ über, der vom Mittelpunkte F des rollenden Kreises beschrieben wird. Wie bei der gestreckten Epitrochoide, so ergiebt sich auch bei den gestreckten Hypotrochoiden durch dieselben Darlegungen, dass alle Punkte des rollenden Systems, die innerhalb des ringförmigen Ebenentheils liegen, der von dem rollenden Kreise und von dem concentrischen, durch den Wendepol gehenden Kreise begrenzt wird, gestreckte Hypotrochoiden mit Wendepunkten erzeugen. Aus der in Fig. **161** gegebenen Construction des Wendepols $\mathfrak{W}_0$ folgt, dass derselbe, wenn der Kreis p ausschliessend auf dem festen Kreise π rollt, auf der Strecke $F_0\mathfrak{P}_0$ liegt und demnach jener ringförmiger Ebenentheil sich innerhalb des Kreises p befindet. Wird dagegen in Fig. **162** der feste Kreis π von dem rollenden Kreise p_0 umschlossen, dann erhalten wir den Wendepol $\mathfrak{W}_0$, indem wir in Φ auf $F_0\mathfrak{P}_0$ eine Senkrechte errichten und in ihren Schnitt J mit dem Kreise p_0 auf F_0J die Senkrechte $J\mathfrak{W}_0$ ziehen, welche $F_0\mathfrak{P}_0$ im Wendepol $\mathfrak{W}_0$ trifft. Hiernach liegt in diesem zweiten Falle mit dem Wendepol auch jener ringförmige Ebenentheil ausserhalb des rollenden Kreises; folglich können nach der Definition der verschlungenen Epitrochoiden diese niemals Wendepunkte besitzen. In analoger Weise kann man leicht nachweisen, dass auch die verschlungenen Hypotrochoiden niemals Wendepunkte enthalten.

Ist in Fig. **163** der Kreis p, der in dem festen Kreise π rollt, halb so gross als dieser, dann beschreiben nach Art. 18 alle Peripheriepunkte des rollenden Kreises p Durchmesser des festen Kreises, und alle innerhalb und ausserhalb des rollenden Kreises liegenden Punkte erzeugen Ellipsen, deren beide Halbaxen beziehlich gleich den beiden Abständen des beschreibenden Punktes von der Peripherie des rollenen Kreises p sind. Die beschreibenden Punkte A, C für die Lage p des rollenden Kreises, deren Anfangslagen resp. A_0, C_0 sind, erzeugen die Ellipsen α, γ. Den beiden Durchmesserendpunkten B, D des rollenden Kreises entsprechen als Bahnen die rechtwinkeligen Durchmesser β, δ des festen Kreises π.

Diese Ellipsen werden also auch durch die Punkte A, C der starren Geraden BD beschrieben, deren Punkte B, D die Durchmesser β, δ durchlaufen. Die Normale $A\mathfrak{P}$ der Ellipse α schneidet die Seite $\Phi F'$ des Parallelogramms $\Phi FAF'$ im Pol $\mathfrak{P}'$ der zweiten Erzeugung dieser Ellipse α; denn beschreiben wir um Φ mit dem Radius $\Phi\mathfrak{P}'$ den Kreis π' und um F' mit dem Radius $F'\mathfrak{P}'$ den Kreis p', der, weil F in der Mitte von $\Phi\mathfrak{P}$ liegt, halb so gross als π' ist, dann erzeugt der mit p' verbundene Punkt A, während der Kreis p' im Kreise π' rollt, auch die Ellipse α. Bei dieser Bewegung drehen sich die beiden Seiten ΦF, $\Phi F'$ des Parallelogramms mit gleichen Drehgeschwindigkeiten im entgegengesetzten Sinne um Φ. Der Wendepol $\mathfrak{W}$ fällt, weil $F\mathfrak{W} = \overline{F\mathfrak{P}}^2 : F\Phi$ und $F\mathfrak{P} = F\Phi$ ist, in diesem besonderen Falle mit dem Mittelpunkte Φ und der Wendekreis mit dem rollenden Kreise zusammen. Jener ringförmige Ebenentheil, der alle Systempunkte enthält, deren Bahncurven Wendepunkte besitzen, degenerirt hier zur Peripherie des rollenden Kreises. In diesem Ausnahmefalle besitzen die gespitzten Hypotrochoiden, die Durchmesser des festen Kreises sind, unendlich viele Wendepunkte, und es giebt hier keine Unterscheidung von gestreckten und verschlungenen Hypotrochoiden.

Construction der cyclischen Curven.

61. **Construction der Trochoiden.** Rollt in Fig. **164** der Kreis p an dem festen Kreise π, ist p_0 die Anfangslage des rollenden Kreises, $\mathfrak{P}_0$ der entsprechende Berührungspunkt, A_0 in der Centralen ΦF_0 die Anfangslage des beschreibenden Punktes A, so müssen wir, um die cyclische Curve α zu zeichnen, welche der Punkt A beschreibt, zunächst in der Richtung des Rollens auf π den Bogen $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}\mathfrak{P}_\varepsilon$ gleich dem halben Umfang von p_0 machen. Sind ϱ, r resp. die Radien des festen und des rollenden Kreises, bezeichnet ϑ^0 in Graden den Winkel $\mathfrak{P}_0\Phi\mathfrak{P}_\varepsilon$, so erhalten wir die folgende Gleichung, in der π die Ludolph'sche Zahl bezeichnet,

$$\frac{\varrho \,.\, \pi \,.\, \vartheta^0}{180^0} = r \,.\, \pi,$$

und demnach

$$\vartheta^0 = \frac{r}{\varrho}\, 180^0.$$

Hiernach können wir vermittelst eines Transporteurs den Winkel ϑ^0 antragen und erhalten somit den Bogen $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}\mathfrak{P}_\varepsilon$. Theilen wir diesen Bogen so wie den Halbkreis $\mathfrak{P}_0 p_0 N$ in eine beliebige Anzahl, z. B. 12, gleicher Theile, dann sind die Bogenlängen zwischen den Theilpunkten $\mathfrak{P}_0, 1, 2, 3$.. auf p_0 und den Theilpunkten $\mathfrak{P}_0, I, II, III$.. auf π gleich, und die gleichartig bezeichneten Theilpunkte werden während des Rollens Berührungspunkte. Ist der rollende Kreis beispielsweise von p_0 nach p gelangt, der Theilpunkt 7 mit dem Theilpunkte VII im Berührungspunkte $\mathfrak{P}$ zusammengefallen und hat der Mittelpunkt des rollenden Kreises die Lage F erhalten, so machen wir das Dreieck $F\,VII\,A$ congruent dem Dreieck $F_0 7 A_0$; dann ist A ein Punkt der cyclischen Curve α. Ist das Radienverhältniss $\varrho : r$ durch ein einfaches Zahlenverhältniss $\nu : n$ gegeben, in welchem also diese ganzen Zahlen nicht gross sind, dann ist, wenn wir die Hälfte des Kreises π in ν gleiche Theile theilen, jener Bogen $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}\mathfrak{P}_\varepsilon$ gleich n dieser Theile, demnach ist in diesen Fällen kein Transporteur erforderlich. Für die praktische Ausführung der vollständigen Zeichnung der erzeugten Curve α ist es aber einfacher, wenn wir mit dem Radius $F_0 A_0$ den Halbkreis $A_0 7' N'$ beschreiben, diesen so wie den Bogen $F_0 F_\varepsilon$, den der Mittelpunkt des rollenden Kreises während der halben Abrollung durchschreitet, in eine Anzahl, z. B. 12, gleicher Theile theilen, und die erhaltenen Theilpunkte resp. mit $A_0, 1', 2', 3'$.., F_0, I', II', III'.. bezeichnen. Ziehen wir beispielsweise um den Theilpunkt VII' mit dem Radius, der gleich $F_0 A_0$ ist, einen Kreisbogen oder eventuell einen von der Geraden $\Phi\, VII'$ begrenzten Halbkreis $\mathfrak{A} A \mathfrak{N}$, ferner um Φ mit dem Radius $\Phi 7'$ einen Kreisbogen, der jenen im Punkte A schneidet, dann ist A ein Punkt der cyclischen Curve; denn es sind auch nach dieser Construction jene Dreiecke $F\,VII\,A$, $F_0 7 A_0$ congruent. Wird der Schnittpunkt A durch ungünstiges Schneiden dieser Kreisbögen nicht hinreichend genau bestimmt, dann können wir den Punkt A auch dadurch genauer auf dem Halbkreise $\mathfrak{A} A \mathfrak{N}$ erhalten, dass wir, je nachdem A in der Nähe von $\mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{A}$ liegt, $\mathfrak{N} A = N' 7'$ oder $\mathfrak{A} A = A_0 7'$ machen.

Verlängern wir die Gerade $7' \mathfrak{P}_0$, bis sie den Kreis π zum zweiten Male im Punkte $\mathfrak{H}^7$ trifft, machen wir ferner auf dem Kreise π den Bogen $\mathfrak{P}\mathfrak{H}_7 = \mathfrak{P}_0 \mathfrak{H}^7$ und auf der Geraden $\mathfrak{H}_7 \mathfrak{P}$ die Strecke $\mathfrak{P} A = \mathfrak{P}_0 7'$, so erhalten wir auf diese einfachere Weise den Punkt A der Trochoide α; denn es ist nach dieser Construction das Dreieck $F_0 \mathfrak{P}_0 7'$ congruent $F_0 7 A_0$ und nach $F \mathfrak{P} A$ verlegt.

In gleicher Weise können wir durch diese Constructionen für die übrigen Theilpunkte die entsprechenden Punkte der cyclischen Curve bestimmen, und wenn dies bis zum Curvenpunkte A_6, der dem 12ten Theilpunkte entspricht, geschehen ist, dann erhalten wir den Curventheil $A_0 A A_\varepsilon$, der während einer halben Abrollung des bewegten Kreises beschrieben wird. Für die weitere halbe Abrollung entsteht der bezüglich $\mathfrak{P}_\varepsilon A_\varepsilon$ symmetrische Curventheil $A_\varepsilon A_\varphi$, und beide vereint bilden einen durch eine volle Abrollung erzeugten Curvenzug, dem alle übrigen Curvenzüge congruent sind. Wenn das Verhältniss der Radien ϱ, r des festen und des rollenden Kreises ein rationales, also

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{\nu}{n}$$

ist, wo ν und n ganze Zahlen sind, die keinen gemeinschaftlichen Factor besitzen, so wird nach ν Abrollungen des Kreises p sein Mittelpunkt n Umläufe vollenden und der beschreibende Punkt seine Anfangslage A_0 wieder erreichen. Die cyclische Curve wird demnach aus ν congruenten Zügen bestehen und sich nach jenen n Umläufen schliessen. Ist dagegen jenes Verhältniss irrational, dann kann ein Schliessen der cyclischen Curve erst nach unendlich vielen Umläufen eintreten.

In Fig. **164** ist für das Verhältniss $\varrho : r = 3 : 2$ die gestreckte Epitrochoide α, welche der im Inneren des Kreises p liegende Punkt A beschreibt, vollständig gezeichnet. Dieselbe besteht demnach von A_0 ausgehend aus drei symmetrisch gestalteten congruenten Curvenzügen $A_0 A_\varepsilon A_\varphi$, $A_\varphi N' A_\psi$, $A_\psi A_\tau A_0$ oder von A_ε beginnend aus den drei symmetrisch geformten Curvenzügen $A_\varepsilon A_\varphi N'$, $N' A_\psi A_\tau$, $A_\tau A_0 A_\varepsilon$.

Um für einen Curvenpunkt A den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt A zu erhalten, ziehen wir, wie in Art. 59 gezeigt wurde, die Curvennormale $A\mathfrak{P}$ von A nach dem betreffenden Pol $\mathfrak{P}$, errichten auf diese in $\mathfrak{P}$ eine Senkrechte, welche FA in $\mathfrak{Q}$ trifft, dann schneidet $\mathfrak{Q}\Phi$ die Normale $A\mathfrak{P}$ in dem Krümmungsmittelpunkte A. Wenn aber der Punkt A mit ΦF in einer Geraden liegt, sich also entweder in der grössten oder kleinsten Entfernung von Φ befindet, dann muss für die Bestimmung des entsprechenden Krümmungsmittelpunktes die in Art. 49 oder 59 gegebene besondere Construction angewendet werden.

In Fig. **165** ist für das Verhältniss $\varrho : r = 3 : 2$ die verschlungene Epitrochoide α, welche der ausserhalb des rollenden Kreises liegende Punkt A erzeugt, vollständig gezeichnet. Je näher der beschreibende Punkt A an dem rollenden Kreise p liegt, desto enger werden die Curvenschlingen, und diese ziehen sich zu Rückkehrpunkten zusammen, wenn A sich auf der Peripherie des Kreises p befindet; und die verschlungene Epitrochoide geht dann in die gespitzte Epicycloide über, deren Rückkehrpunkte an den Stellen auftreten, wo der beschreibende Punkt an die Peripherie des festen Kreises π gelangt. Der Krümmungsmittelpunkt A, der dem Curvenpunkte A angehört, ist wie vorhin mittelst der auf $A\mathfrak{P}$ errichteten Senkrechten $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ und der Geraden $\mathfrak{Q}\Phi$ bestimmt. Um den Wendekreis w zu erhalten, ziehen wir noch zu ΦF die Parallele $\mathsf{A}\mathfrak{Q}_w$ bis zu ihrem Schnitt $\mathfrak{Q}_w$ mit $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, ferner die Gerade $\mathfrak{Q}_w A$, welche ΦF in dem Wendepol $\mathfrak{W}$ trifft. Beschreiben wir um F mit dem Radius $F\mathfrak{W}$ den Kreis i, so erhalten wir den von den Kreisen p, i begrenzten ringförmigen Ebenentheil, in welchem alle diejenigen Punkte des bewegten Systems liegen, die gestreckte Epitrochoiden mit Wendepunkten erzeugen. Allen innerhalb des Kreises i befindlichen Punkten des bewegten Systems entsprechen gestreckte Epitrochoiden, die keine Wendepunkte besitzen.

Soll in Fig. **166** nur ein kurzes Stück von einer Trochoide α gezeichnet werden, die von dem auf der Centralen $F_0\Phi$ liegenden Punkte A_0 ausgeht; dann werden auf dem festen Kreise π und auf dem rollenden Kreise p_0 vom Berührungspunkte $\mathfrak{P}_0$ aus mit möglichst kleiner Zirkelöffnung beziehlich die Theilpunkte $\mathfrak{P}_0, I, II, III, IV$.. und $\mathfrak{P}_0, 1, 2, 3, 4$.. abgestochen, so dass die kleinen gleichartig bezeichneten Bogenstücke beider Kreise als gleich lang angesehen werden können. Auf dem nach p gerollten Kreise, der π im Theilpunkte II berührt und dessen Mittelpunkt F auf ΦII liegt, machen wir $II P_2 = 2\mathfrak{P}_0$ und auf der radialen Geraden FP_2 die Strecke $FA = F_0A_0$; dann ist A ein Punkt der Trochoide α. In gleicher Weise ergeben sich für die übrigen Theilpunkte die entsprechenden Punkte dieser Trochoide. Liegt der Punkt A_0 im Berührungspunkte $\mathfrak{P}_0$, dann ist P_2 ein Punkt der betreffenden Epicycloide.

In Fig. **167** Taf. IX ist für das Radienverhältniss $\varrho : r = 5 : 3$ des festen Kreises π und des in demselben rollenden Kreises p die verschlungene Hypotrochoide α vollständig gezeichnet, welche von dem innerhalb des rollenden Kreises liegenden Punkt A beschrieben wird. In Fig. **168** ist für dasselbe Radienverhältniss die gestreckte Hypotrochoide α vollständig construirt, welche von dem ausserhalb des rollenden Kreises p befindlichen Punkt A erzeugt wird.

62. **Ableitung der Polargleichung der sternförmigen Trochoide.** Befindet sich in Fig. 169 die Anfangslage A_0 des beschreibenden Punktes A in dem festen Kreismittelpunkte Φ, dann entsteht durch Rollung des Kreises p an dem Kreise π eine sternförmige Trochoide. Um die Polargleichung dieser Curve zu erhalten, ziehen wir auf ΦF_0 die Senkrechte $\Phi\Psi$ nach der Richtung, die der von A_0 ausgehenden Bewegung des Punktes A entspricht; bezeichnen wir den Winkel $\Psi\Phi A$ durch ψ und den Abrollungswinkel $\mathfrak{P}FP$ durch θ, so ergiebt sich, wenn r, ϱ resp. die Radien des rollenden und des festen Kreises sind,

$$\sphericalangle\, F_0\Phi F = \frac{r}{\varrho}\,\theta,\quad \sphericalangle\, A\Phi F = 90^\circ - \frac{\theta}{2},$$

$$\psi + 90^\circ - \frac{\theta}{2} - \frac{r}{\varrho}\,\theta = 90^\circ,$$

und hieraus

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\varrho}{\varrho + 2r}\cdot\psi.$$

Ferner ist, wenn wir den Radiusvector oder Fahrstrahl ΦA durch R bezeichnen,

$$R = 2\,.\,\Phi F \sin\frac{\theta}{2},$$

und demnach erhalten wir für die sternförmige Trochoide in Polarcoordinaten die Gleichung

$$R = 2(\varrho + r)\sin\left(\frac{\varrho}{\varrho + 2r}\cdot\psi\right).$$ [1]

Rollt der Kreis p in dem festen Kreise oder umschliessend auf demselben, so ist der Radius r negativ zu nehmen.

Hat der rollende Kreis eine halbe Abrollung vollendet, so ist der beschreibende Punkt nach A_g in den grössten Abstand von Φ gelangt. Es sind dann die Winkel

$$F_0\Phi A_g = \frac{r}{\varrho}\,180^\circ,\quad \Psi\Phi A_g = \frac{\varrho + 2r}{\varrho}\,90^\circ.$$

---

[1]) Die aus dieser Gleichung hervorgehende einfache Construction der sternförmigen Trochoiden findet sich schon in Guido Grandi, *Flores geometrici.* 1728. p. 3. Die sternförmige Trochoide ist auch das anorthoskopische Bild des um F_0 mit dem Radius F_0A_0 beschriebenen Kreises für einen durch das Radienverhältniss $\varrho : r$ bestimmten Verwandlungsmodul. Vergl. „die Theorie des Anorthoskops und der anorthoskopischen Figuren" von Weber in der *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* 1867. B. 12. S. 133.

Wird nun ΦA_ε als Ausgangslage des Radiusvectors genommen, also in jene Gleichung anstatt des Winkels ψ der Werth

$$\psi + \frac{\varrho + 2r}{\varrho} \cdot 90^0$$

gesetzt, so erhalten wir für die sternförmige Trochoide die Gleichung in der Form:

$$R = 2(\varrho + r) \cos \frac{\varrho}{\varrho + 2r} \psi.$$

In Fig. **169** ist die sternförmige Epitrochoide für das Radienverhältniss $\varrho : r = 4 : 1$ gezeichnet, und die Gleichung derselben ist, wenn der Fahrstrahl ΦA von $\Phi \Psi$ ausgeht und $\Phi F = a$ gesetzt wird,

$$R = 2a \sin \frac{2}{3} \psi.$$

Für dasselbe Radienverhältniss ist auch in Fig. **170** die sternförmige Hypotrochoide dargestellt, welche aus vier congruenten Blättern besteht; und ihre Gleichung ist, wenn ψ, von $\Phi \Psi$ aus gerechnet, in der eingezeichneten Pfeilrichtung gemessen wird, wegen des negativ zu nehmenden Radius r

$$R = 2a \sin 2\psi.$$

In dem besonderen Falle, wenn der bewegte Kreis in einem doppelt so grossen Kreise rollt, degenerirt die entsprechende sternförmige Trochoide, weil der beschreibende Punkt in der Peripherie des rollenden Kreises liegt, zu einem Durchmesser des festen Kreises. Wird von diesem Ausnahmefalle abgesehen, so befinden sich bei jeder sternförmigen Trochoide der beschreibende Punkt und der feste Kreismittelpunkt entweder beide innerhalb oder beide ausserhalb des rollenden Kreises und demnach ist die sternförmige Trochoide stets eine verschlungene Trochoide.

63. **Die Pascal'schen Curven als specielle Trochoiden.** In der Folge werden diejenigen cyclischen Curven oft vorkommen, welche durch Rollen eines Kreises p auf einem gleich grossen festen Kreise π entstehen. Für diesen Fall sind in Fig. **171** die verschlungene Epitrochoide α, die gespitzte Epicycloide β und die gestreckte Epitrochoide γ vollständig gezeichnet, welche resp. von den beschreibenden Punkten A, B, C, denen die Anfangslagen A_0, B_0, C_0 entsprechen, erzeugt werden. Bestimmen wir auf der Centralen ΦF_0 den bezüglich des Pols $\mathfrak{P}_0$ zum Punkte A_0 symmetrisch liegenden Punkt $\mathfrak{A}$, indem wir $\mathfrak{P}_0 \mathfrak{A} = A_0 \mathfrak{P}$ machen, und nehmen wir an, der beschreibende Punkt, welcher die verschlungene Epi-

trochoide α erzeugt, befinde sich, wenn der rollende Kreis nach p gelangt ist, in A, dann hat dieser Punkt A, weil die Kreise p, π gleich sind, in Bezug auf ihre gemeinsame Tangente $\mathfrak{P}t$ eine zu $\mathfrak{A}$ symmetrische Lage. Wir können demnach die verschlungene Epitrochoide α auch dadurch construiren, dass wir vom Punkte $\mathfrak{A}$ auf die Tangente $\mathfrak{P}t$ des festen Kreises π die Senkrechte $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ ziehen und auf ihrer Verlängerung die Strecke $\mathfrak{a}A = \mathfrak{A}\mathfrak{a}$ machen. Für die verschiedenen Lagen der Kreistangente $\mathfrak{P}t$ bilden die Fusspunkte $\mathfrak{a}$ eine Fusspunktencurve des Kreises π, und hieraus folgt, was schon in allgemeinerer Form in Art. 23 nachgewiesen wurde, dass die von einem Punkte A beschriebene cyclische Curve derjenigen Fusspunktencurve des festen Kreises π im Verhältnisse $2:1$ homothetisch ähnlich ist, deren Lothpunkt sich in $\mathfrak{A}$ befindet. Ziehen wir durch Φ zu FA die Parallele ΦF_a bis an $\mathfrak{A}A$, so ist $\Phi F_a = FA = \Phi\mathfrak{A}$, demnach liegt der Punkt F_a auf dem mit π concentrischen, durch $\mathfrak{A}$ gehenden Kreise π_a, und die Strecke $F_a A$ ist gleich ΦF oder gleich dem Durchmesser des festen Kreises π. Hieraus folgt, dass die cyclische Curve α auch von einem Punkte A einer starren Geraden AF_a beschrieben wird, die durch den festen Punkt $\mathfrak{A}$ geht und deren Punkt F_a sich auf dem Kreise π_a bewegt, und dass dieselbe also eine Pascal'sche Curve ist. Die Construction dieser Curve gestaltet sich daher am einfachsten, indem wir durch den festen Punkt $\mathfrak{A}$ Gerade ziehen und auf diese, wie z. B. auf $\mathfrak{A}F_a$ von ihrem Schnittpunkte F_a aus, den sie mit π_a bildet, beiderseits jene constante Strecke $F_a A$, $F_a A'$ antragen. Wenn F_a den Kreis π_a einmal durchschritten hat, ist der beschreibende Punkt A nach A' gelangt, und mit der Vollendung des zweiten Umlaufes hat A die vollständige Pascal'sche Curve erzeugt, bei welcher, falls die constante Strecke $F_a A$ kleiner als der Durchmesser des Führungskreises π_a ist, der Punkt $\mathfrak{A}$ als Doppelpunkt auftritt. Die Pascal'sche Curve wird ferner auch durch den Eckpunkt A des aus starren Seiten gebildeten veränderlichen Parallelogramms ΦFAF_a beschrieben, wenn dessen beide Seiten ΦF, ΦF_a um Φ mit Drehgeschwindigkeiten rotiren, die sich wie $1:2$ verhalten. Hiermit empfangen wir den folgenden Satz:

Rollt ein Kreis eines ebenen Systems auf einem gleich grossen festen Kreise, so sind die cyclischen Curven, welche die Systempunkte beschreiben, Pascal'sche Curven.

Die analogen Beziehungen ergeben sich für die Pascal'schen Curven β, γ. Die Curve β ist eine Kardioide; bei derselben ist die constante Strecke BF_b gleich dem Durchmesser des zugehörigen Führungskreises π, auf dem sich der Punkt F_b bewegt, und der Punkt B_0, durch welchen die Gerade BF_b geht, ist ihr Rückkehrpunkt. Bei der Curve γ geht die betreffende Gerade CF_c durch den auf ΦF_0 befindlichen Punkt $\mathfrak{C}$, der in Bezug auf $\mathfrak{P}_0$ zu C_0 symmetrisch liegt, und die entsprechende Strecke CF_c ist grösser als der Durchmesser des zugehörigen Führungskreises π_c.

Die Normale $A\mathfrak{P}$ der Pascal'schen Curve α schneidet die Gerade $F_a\Phi$ im Punkte $\mathfrak{P}_a$ auf dem Kreise π_a, folglich ist bei der zweiten Erzeugungsweise dieser cyclischen Curve auch π_a der feste Kreis, auf welchem der mit $F_a\mathfrak{P}_a$ als Radius um F_a beschriebene Kreis p_a rollt. Hieraus ergiebt sich der schon in Art. 19 enthaltene Satz:

Rollt ein Kreis eines ebenen Systems umschliessend auf einem halb so grossen festen Kreise, so sind die cyclischen Curven, welche die Systempunkte beschreiben, Pascal'sche Curven.

Errichten wir auf die Curvennormale $A\mathfrak{P}$ die Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_a$ bis zu ihrem Schnitt $\mathfrak{Q}_a$ mit FA, dann schneidet die Gerade $\mathfrak{Q}_a\Phi$ diese Curvennormale in dem Krümmungsmittelpunkte A, der zu dem Punkte A der Curve α gehört. In gleicher Weise ergeben sich die Krümmungsmittelpunkte B, Γ, die beziehlich den Punkten B, C der Curven β, γ entsprechen. Die Krümmungsmittelpunkte A, B, Γ, Φ..., welche den Punkten A, B, C, F... einer Systemgeraden entsprechen, liegen nach S. 120 auf einem Kegelschnitt.

Wird die Pascal'sche Curve γ in Fig. **172** durch den Punkt C der starren Geraden CF_c erzeugt, die durch den festen Punkt $\mathfrak{C}$ geht, während der Punkt F_c sich auf dem Kreise π_c bewegt, und deren Länge CF_c gleich dem Durchmesser des Kreises π ist, so können wir auf Grund dieser Erzeugungsweise die zweite auf S. 142 gegebene Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes ableiten. Der dem Punkte F_c diametral gegenüberliegende Punkt $\mathfrak{p}$ ist der vorhin mit $\mathfrak{P}_c$ bezeichnete Pol der bewegten starren Strecke CF_c und der Kreis π_c die Polbahn derselben. Ziehen wir nun auf die Curvennormale $C\mathfrak{p}$ die Senkrechte $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, welche CF_c in $\mathfrak{q}$ trifft, und hierauf die Gerade $\mathfrak{q}\Phi$, so schneidet diese $C\mathfrak{p}$ in dem zu C gehörenden Krümmungsmittelpunkte Γ. Es ist Φ der zu F_c gehörende Krümmungsmittelpunkt, ferner der Winkel, den $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p}\Phi$ bildet, gleich dem Winkel, welchen die in $\mathfrak{p}$ an π_c gelegte Tangente $\mathfrak{p}\mathfrak{t}$ mit $\mathfrak{p}\Gamma$ einschliesst, und demnach stimmen diese

Beziehungen mit der in Art. 48 abgeleiteten Bobillier'schen Construction der Krümmungsmittelpunkte überein.

Beschreiben wir in Fig. **172** über den Radius ΦH als Durchmesser einen Halbkreis und schneiden wir diesen durch einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{C}$, dessen Radius gleich dem des Kreises $\mathfrak{x}$ ist, im Punkte ζ, dann ist, wenn wir durch $\mathfrak{C}\zeta$ die Gerade $C_w F_w$ gleich CF_c ziehen, der Punkt C_w ein Wendepunkt der Pascal'schen Curve γ. Um dies zu beweisen, verbinden wir die Mitte $\mathfrak{q}_w$ der Strecke $C_w F_w$ mit dem entsprechenden Pol $\mathfrak{p}_w$ dieser Strecke; dem zufolge sind, weil $F_w \mathfrak{q}_w = \zeta\mathfrak{C}$ ist, die Strecken $\Phi\mathfrak{q}_w$, $\Phi\zeta$ von gleicher Länge und bilden ebenso wie die beiden Radien $\Phi\mathfrak{C}$, ΦF_w mit $\mathfrak{C}F_w$ je zwei gleiche Winkel; somit sind auch in den beiden Dreiecken $\Phi\mathfrak{q}_w\mathfrak{p}_w$, $\Phi\zeta H$ die Winkel an der gemeinsamen Ecke Φ und die beiden anliegenden Seiten beziehlich gleich; folglich ist $\Phi\mathfrak{q}_w\mathfrak{p}_w$ ein rechter Winkel, und die zu $\Phi\mathfrak{q}_w$ parallele Curvennormale $\mathfrak{p}_w C_w$ ist senkrecht auf $\mathfrak{p}_w\mathfrak{q}_w$. Hieraus ergiebt sich, wenn wir umgekehrt $\mathfrak{p}_w\mathfrak{q}_w$ senkrecht $\mathfrak{p}_w C_w$ ziehen, dass $\mathfrak{q}_w\Phi$ parallel $C_w\mathfrak{p}_w$ und der zu C_w gehörende Krümmungsmittelpunkt auf $C_w\mathfrak{p}_w$ im Unendlichen liegt. Eine andere Bestimmung des Wendepunktes mittelst des Wendekreises wurde in Art. 60 (Fig. **161**) abgeleitet.

64. **Construction der allgemeinen Cycloiden.** Die Construction der allgemeinen Cycloiden ist ein besonderer Fall jener für die Trochoiden abgeleiteten Construction und erfordert die Rectification eines Kreises, d. h. die Ermittelung einer Strecke, deren Länge mit der seines Umfanges möglichst nahe übereinstimmt. Soll in Fig. **173** der Umfang des Kreises p bestimmt werden, so mache man von einem Endpunkte $\mathfrak{P}$ eines Kreisdurchmessers $\mathfrak{P}K$ aus die Sehne $\mathfrak{P}\mathfrak{Z}$ gleich dem Radius, ziehe mit diesem Radius um $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Z}$ zwei sich schneidende Kreisbögen und verbinde ihren Schnitt H mit dem Kreismittelpunkte F. Hierauf lege man an $\mathfrak{P}$ die Kreistangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$, welche FH in G trifft, trage auf dieselbe von G aus über den Berührungspunkt $\mathfrak{P}$ gehend dreimal den Radius bis J auf, so ist KJ sehr angenähert gleich dem halben Kreisumfang. Der Winkel $\mathfrak{P}FG$, der gleich 30° ist, kann auch vermittelst eines 30°-Winkels gezeichnet werden. Aus dieser Construction ergiebt sich

$$KJ = \sqrt{4r^2 + (3r - \mathfrak{P}G)^2},$$

und da

$$\mathfrak{P}G = r\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

ist, so folgt

$$KJ = r\sqrt{4 + (3 - \sqrt{\tfrac{1}{3}})^2} = r\sqrt{13 + \tfrac{1}{3} - \sqrt{12}} = r\,.\,3{,}14153\ldots$$

Der Zahlenfactor stimmt bis zur fünften Decimale mit der Ludolph'schen Zahl $\pi = 3{,}141592\ldots$ überein, und daher ist für graphische Zwecke die Strecke KJ gleich dem Halbkreise.

Rollt in Fig. **174** der Kreis p auf der Geraden π, ist p_0 die Anfangslage des rollenden Kreises, $\mathfrak{P}_0$ der entsprechende Berührungspunkt, A_0 auf dem verlängerten Radius $F_0\mathfrak{P}_0$ die Anfangslage des beschreibenden Punktes A, so machen wir, um die entsprechende verschlungene Cycloide α zu zeichnen, in der Richtung des Rollens auf der zu π parallelen Geraden, die der Mittelpunkt des rollenden Kreises durchläuft, die Strecke F_0F_ε gleich dem halben Umfang des Kreises p_0 und theilen diese Strecke in eine Anzahl, z. B. 12, gleicher Theile. Hierauf beschreiben wir um F_0 mit dem Radius F_0A_0 den Halbkreis $A_0 9' N'$ und theilen denselben ebenfalls in 12 gleiche Theile. Ist nun der rollende Kreis in die Lage p, sein Mittelpunkt F also in den Theilpunkt IX' gelangt, so ziehen wir durch den auf jenem Halbkreise liegenden Theilpunkt $9'$ zur Geraden π die Parallele $9'A$ und um IX', den Mittelpunkt F von p, mit dem Radius gleich F_0A_0 einen Kreisbogen oder Halbkreis $\mathfrak{A}A\mathfrak{N}$, welcher die Parallele im Punkte A der verschlungenen Cycloide α schneidet. Wird dieser Punkt A durch ungünstiges Schneiden nicht hinreichend genau bestimmt, dann kann man den Punkt A auch dadurch erhalten, dass man, je nachdem derselbe in der Nähe von $\mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{A}$ liegt, $\mathfrak{N}A = N'9'$ oder $\mathfrak{A}A = A_0 9'$ macht. Ist auch der Halbkreis $\mathfrak{P}_0 9 N$ in 12 gleiche Theile getheilt, dann wird der Theilpunkt 9 bei der Lage p nach IX, dem Berührungspunkte $\mathfrak{P}$, gelangen und dem entsprechend das Dreieck $9F_0A_0$ die Lage $IXFA$ einnehmen. In einfacherer Weise wird der Punkt A aber erhalten, indem wir die Strecke IXA parallel und gleich $\mathfrak{P}_0 9'$ ziehen, oder die Strecke FA parallel und gleich $F_0 9'$ machen. Nach einer halben Abrollung hat der beschreibende Punkt die höchste Lage A_ε erhalten, die dem 12ten Theilpunkte entspricht. Für die weitere halbe Abrollung entsteht der bezüglich $A_\varepsilon\mathfrak{P}_\varepsilon$ zu A_0A_ε symmetrische Curventheil $A_\varepsilon A_\varphi$ und beide bilden zusammen einen durch eine volle Abrollung erzeugten Curvenzug, dem alle übrigen beim weiteren Fortrollen entstehenden Curvenzüge congruent sind.

In analoger Weise ist die gespitzte Cycloide β construirt, die dem auf p_0 liegenden mit $\mathfrak{P}_0$ coincidirenden Punkte B_0 entspricht.

Diese besitzt an den Stellen $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_\varphi$, .. wo der beschreibende Punkt in die Gerade π gelangt, Spitzen oder Rückkehrpunkte.

Die ebenso construirte gestreckte Cycloide γ, welche dem im Inneren des rollenden Kreises liegenden Punkte C_0 entspricht, trägt die Wendepunkte E, E', E'' .. Diese können analog wie in Art. 60 bei den gestreckten Trochoiden mittelst des Wendekreises w_0 bestimmt werden, der in diesem besonderen Falle, weil der Wendepol $\mathfrak{W}_0$ mit dem Kreismittelpunkte F_0 zusammenfällt, halb so gross als der rollende Kreis ist. Dieser Wendekreis durchwandert während einer Abrollung das Innere des rollenden Kreises, folglich enthalten die Bahnen aller innerhalb desselben befindlichen Punkte auch Wendepunkte; somit besitzt jede gestreckte Cycloide Wendepunkte, und wenn insbesondere der beschreibende Punkt in dem Kreismittelpunkte F liegt, geht die gestreckte Cycloide in die Gerade F_0F über. Werden für mehrere auf dem Durchmesser $\mathfrak{P}_0N$ liegende Punkte die entsprechenden Wendepunkte ihrer Bahnen in analoger Weise wie in Art. 60 construirt, so erkennt man leicht, dass diese Wendepunkte sich auf der punktirt gezeichneten gespitzten Cycloide η befinden, die erzeugt wird, wenn der Wendekreis w_0 auf der Geraden π rollt.

Um den Krümmungsmittelpunkt A des Punktes A der verschlungenen Cycloide α zu bestimmen, ist auf der Curvennormalen $A\mathfrak{P}$ die Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ zu errichten, die AF in $\mathfrak{Q}$ trifft, und zu $F\mathfrak{P}$ die Parallele $\mathfrak{Q}\mathsf{A}$ zu ziehen, welche $A\mathfrak{P}$ in A schneidet. Ebenso ergeben sich die Krümmungsmittelpunkte, welche den Punkten B, C auf β und γ entsprechen. Für den Punkt A_0 erhalten wir, weil der entsprechende Wendepol $\mathfrak{W}_0$ in F_0 liegt, nach S. 104 (Fig. **120**) den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt A_0, indem wir durch A_0 eine beliebige Gerade legen, welche die Parallelen F_0F, π resp. in $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{O}$ schneidet und zu $\mathfrak{U}\mathfrak{P}_0$ die Parallele $\mathfrak{O}\mathsf{A}_0$ ziehen. In gleicher Weise wird der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel A_k bestimmt.

65. **Construction der allgemeinen Kreisevolventen.** Wenn der rollende Kreis unendlich gross ist, also in eine Gerade p übergeht, die in Fig. **175** auf dem festen Kreise π rollt, dann erzeugen die mit der Geraden p verbundenen Punkte allgemeine Kreisevolventen. Ist p_0 die Anfangslage der rollenden Geraden, welche im Punkte $\mathfrak{P}_0$, der auch mit B_0 bezeichnet ist, den festen Kreis π berührt; ist ferner A_0 auf der Berührungsseite in der zu p_0 Senkrechten B_0A_0 die Anfangslage des beschreibenden Punktes A, so machen wir, um die zugehörige verschlungene Kreisevolvente α zu zeichnen,

auf p_0 die Strecke $\mathfrak{P}_0 T$ gleich dem Umfang des festen Kreises π, und theilen die Strecke und den Kreis in dieselbe Anzahl, beispielsweise in 12 gleiche Theile. Ist nun die rollende Gerade von p_0 nach p gelangt, so dass sie den Kreis π im Kreistheilpunkte V berührt, der dem Theilpunkte 5 auf p_0 entspricht, so machen wir auf der Geraden p die Strecke $VB = 5B_0$ und errichten auf ihr nach der Seite des Kreises π die Senkrechte $BA = B_0A_0$; dann ist A ein Punkt der verschlungenen Kreisevolvente α, welche sich beim Fortrollen der Geraden in immer grösser werdenden unendlich vielen Windungen um den Kreismittelpunkt Φ herumzieht. Rollt dagegen die Gerade von p_0 aus im entgegengesetzten Sinne auf dem festen Kreise, so erhalten wir, wie durch einen gestrichelten Curventheil angedeutet ist, unendlich viele Windungen, die in Bezug auf die Gerade $\Phi\mathfrak{P}_0$ zu jenen Windungen symmetrisch sind. Alle Punkte des rollenden ebenen Systems, die auf einer zur Geraden p parallelen Geraden liegen, beschreiben congruente allgemeine Kreisevolventen, die sich in verschiedenen um den festen Kreismittelpunkt Φ gedrehten Lagen befinden.

Coincidirt die Anfangslage A_0 des beschreibenden Punktes A mit dem Mittelpunkt Φ des festen Kreises π, dann ist die Strecke ΦA der rollenden Geraden p beständig parallel und der Drehung derselben proportional. In diesem besonderen Falle ist die von A erzeugte verschlungene Kreisevolvente eine Archimedische Spirale; und folglich beschreiben alle Punkte des rollenden Systems, die auf der durch Φ gehenden zu p parallelen Geraden liegen, congruente Archimedische Spiralen.

Mit jener Construction erhalten wir auch zugleich die gespitzte Kreisevolvente β, welche von dem auf der Geraden p liegenden Punkte B erzeugt wird. Sie besitzt in der Anfangslage B_0 des beschreibenden Punktes eine einzige Spitze oder einen einzigen Rückkehrpunkt und windet sich, wenn die Gerade p in dem einen oder anderen Sinne auf dem Kreise π rollt, in immer grösser werdenden, unendlich vielen Windungen um Φ, die paarweise bezüglich ΦB_0 symmetrisch sind. Eine gespitzte Kreisevolvente ist durch ihren Grundkreis π allein bestimmt. Wenn zu zwei verschiedenen Grundkreisen die zugehörigen gespitzten Kreisevolventen construirt werden, so ergiebt sich aus der Construction, dass dieselben ähnlich sind und somit erhalten wir den Satz:

Alle gespitzten Kreisevolventen sind ähnlich.

Der beschreibende Punkt C, dessen Anfangslage C_0 sich in der zu p_0 Senkrechten $B_0 C_0$ auf der vom Kreise π nicht berührten Seite der rollenden Geraden befindet, erzeugt eine gestreckte Kreisevolvente γ, von der wir also einen Punkt C erhalten, wenn wir in B auf p entgegengesetzt von der Berührungsseite die Senkrechte $BC = B_0 C_0$ errichten. Der Wendepol $\mathfrak{W}_0$ liegt bei dieser Bewegung ausserhalb des festen Kreises π, und sein Abstand $\mathfrak{W}_0 \mathfrak{P}_0$ von dem Pol ist gleich dem Radius dieses Kreises. Der über $\mathfrak{W}_0 \mathfrak{P}_0$ als Durchmesser beschriebene Wendekreis w_0 durchwandert beim Rollen der Geraden den unendlich langen Ebenenstreifen, der zwischen der rollenden Geraden p_0 und der zu ihr parallelen, durch den Wendepol $\mathfrak{W}_0$ gehenden Geraden i_0 enthalten ist. Demnach beschreiben alle Systempunkte dieses Ebenenstreifens gestreckte Kreisevolventen, welche auf jedem ihrer beiden symmetrischen Theile einen Wendepunkt besitzen.

Der Krümmungsmittelpunkt A des Punktes A der verschlungenen Kreisevolvente α ergiebt sich analog den früheren Constructionen, wenn wir auf die Curvennormale $A\mathfrak{P}$ im Pol $\mathfrak{P}$ die Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ bis an AB und dann die Gerade $\mathfrak{Q}\Phi$ ziehen, welche die Curvennormale in A schneidet. Ebenso kann der Krümmungsmittelpunkt des Punktes C der gestreckten Kreisevolvente γ bestimmt werden. Für die gespitzte Kreisevolvente β, die auch kurz Kreisevolvente genannt wird, ist die rollende Gerade die Normale und der jeweilige Pol $\mathfrak{P}$ der entsprechende Krümmungsmittelpunkt.

66. **Die Hüllbahncurve, welche von einer Geraden beim Rollen eines Kreises an einem festen Kreise erzeugt wird.** Um die Hüllbahncurve zu bestimmen, welche ein Durchmesser eines Kreises $\mathfrak{K}$ erzeugt, der an einem festen Kreise π rollt, nehmen wir an, es sei in Fig. **176** der an π rollende Kreis von der Anfangslage $\mathfrak{K}_0$ nach $\mathfrak{K}$, sein Mittelpunkt von $\mathfrak{F}_0$ nach $\mathfrak{F}$ und der betreffende Durchmesser von $B_0 C_0$ nach BC gelangt; dann ist der Fusspunkt A des von dem betreffenden Pol $\mathfrak{P}$ auf BC gefällten Lothes der Berührungspunkt dieses Durchmessers BC auf der erzeugten Hüllbahncurve α. Der Punkt A liegt auf dem über $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$ als Durchmesser beschriebenen Kreise p, demnach ist der abgerollte Bogen $\mathfrak{P}B$ des Kreises $\mathfrak{K}$ gleich dem Bogen $\mathfrak{P}pA$ des Kreises p; folglich wird die Hüllbahncurve α auch durch den Peripheriepunkt A erzeugt, wenn der Kreis p von p_0 ausgehend auf dem festen Kreise π rollt, und somit erhalten wir den Satz:

Die von einem Durchmesser eines rollenden Kreises erzeugte Hüllbahncurve, der an einem festen Kreise rollt, ist eine gespitzte Trochoide; diese wird durch einen Peripheriepunkt eines Kreises beschrieben, der an demselben festen Kreise rollt und halb so gross als jener rollende Kreis ist.

Der Fusspunkt A des vom Pol $\mathfrak{P}$ auf den Durchmesser BC gefällten Lothes liegt stets zwischen den Endpunkten B, C; demnach treten nur die Punkte dieser Strecke und niemals ausserhalb derselben liegende Punkte mit der Hüllbahncurve oder gespitzten Trochoide α in Berührung. Die Hüllbahncurve α ist in Fig. **176** für das Radienverhältniss $\varrho : r = 3 : 1$ der Kreise π, p vollständig gezeichnet.

Ist mit dem rollenden Kreise $\mathfrak{K}$ eine beliebige Gerade bc verbunden, die beispielsweise zu AB parallel sein möge, dann trifft das auf BC gefällte Loth $\mathfrak{P}A$ die Gerade bc im Berührungspunkte a der von ihr umhüllten Curve $\mathfrak{a}$; und da die senkrechte Strecke Aa constant ist, so folgt hieraus der Satz:

Eine in der Ebene eines rollenden Kreises befindliche Gerade erzeugt, wenn derselbe an einem festen Kreise rollt, die Aequidistante einer gespitzten Trochoide, die von dem zu dieser Geraden parallelen Durchmesser des rollenden Kreises umhüllt, oder von einem Peripheriepunkt eines halb so grossen rollenden Kreises beschrieben wird.[1])

In Fig. **177** ist die Hüllbahncurve α des Durchmessers BC eines rollenden Kreises $\mathfrak{K}$ construirt, der in einem doppelt so grossen festen Kreise π rollt. Die Durchmesserendpunkte B, C bewegen sich in diesem Falle auf den rechtwinkeligen Durchmessern β, γ des festen Kreises. Die so bewegte starre Strecke BC umhüllt dann die vierspitzige Hypocycloide α. Dieselbe wird auch von dem Peripheriepunkte A des Kreises p beschrieben, der in dem viermal so grossen festen Kreise π rollt.

Wenn der feste Kreis, wie in Fig. **178**, unendlich gross ist, also in eine Gerade π übergeht, so ist die von einem Durchmesser BC des rollenden Kreises $\mathfrak{K}$ erzeugte Hüllbahncurve α eine gespitzte Cycloide, die der Peripheriepunkt A des auf der Geraden π rollenden Kreises p beschreibt, der halb so gross als jener rollende Kreis ist.

[1]) Diese Beziehungen werden auch von Chasles erwähnt in seiner *Geschichte der Geometrie*, deutsch von Sohncke. 1839. Anmerk. S. 66, wo aber der Druckfehler „Evolute“ entweder durch „Evolvente“ oder durch „Aequidistante“ zu berichtigen ist.

67. **Die Evoluten der gespitzten cyclischen Curve.** Construiren wir in Fig. **179** Taf. X für den Punkt A einer gespitzten Trochoide α auf der Curvennormalen $A\mathfrak{P}$ den Krümmungsmittelpunkt A, indem wir den Durchmesser AB des in der entsprechenden Lage befindlichen auf π rollenden Kreises p und die Gerade $B\Phi$ ziehen, welche $A\mathfrak{P}$ in A trifft, so sind, wenn auf $\mathsf{A}\mathfrak{P}$ die Senkrechte $\mathsf{A}\mathfrak{P}^I$ errichtet wird, welche $\Phi\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{P}^I$ trifft, die Dreiecke $\Phi\mathfrak{P}^I\mathsf{A}$, $\Phi\mathfrak{P}B$ ähnlich. Dem zufolge ist auch Φ Aehnlichkeitspunkt für den rollenden Kreis p und den Kreis p^I, der über $\mathfrak{P}\mathfrak{P}^I$ als Durchmesser beschrieben durch den Krümmungsmittelpunkt A geht. Ziehen wir um den festen Kreismittelpunkt Φ mit dem Radius $\Phi\mathfrak{P}^I$ den Kreis π^I, und lassen wir gleichzeitig mit dem Kreise p, der auf π rollt, auch den Kreis p^I auf π^I rollen; dann beschreibt der Krümmungsmittelpunkt A als Peripheriepunkt des Kreises p^I eine gespitzte Trochoide α^I, die mit der durch den Peripheriepunkt B des Kreises p erzeugten nicht gezeichneten gespitzten Trochoide β in Bezug auf Φ als Aehnlichkeitspunkt homothetisch ähnlich ist. Die gespitzte Trochoide α^I ist demnach die Evolute der von dem Peripheriepunkte A beschriebenen Trochoide α, und auch dieser ähnlich, weil die Trochoiden α, β congruent sind. Befindet sich der beschreibende Punkt A in der Anfangslage A_0, dann coincidirt mit dieser auch die Anfangslage A_0 des beschreibenden Punktes A, und folglich fallen die Spitzen oder Rückkehrpunkte der gespitzten Trochoide α mit den Scheiteln ihrer Evolute α^I zusammen. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Die Evolute einer gespitzten Trochoide ist eine ähnliche gespitzte Trochoide, deren Scheitel in den Spitzen der ersten liegen.

Nach dieser Darlegung wird in Fig. **179** die gespitzte Trochoide α auch als eine Evolvente der gespitzten Trochoide α^I erzeugt, wenn die Abrollung der Tangente in dem Scheitel A_0 beginnt und die Anfangslage A_0 des auf der Tangente liegenden beschreibenden Punktes mit diesem Scheitel coincidirt. Die Länge des Trochoidenbogens $\mathsf{A}_0\alpha^I\mathsf{A}$ ist dann gleich der Länge $A\mathsf{A}$ der abgerollten Tangente.[1]) Bezeichnen wir mit F, F^I die Mittelpunkte der Kreise p, p^I, so ist

---

[1]) Die Bestimmung der Länge einer gespitzten cyclischen Curve findet sich schon in Newton, *Principia mathematica.* 1686. p. 158. *Deutsche Ausgabe* von Wolfers. 1872. S. 157.

$$\frac{\Phi F^I}{\Phi F} = -\frac{\mathfrak{P} F^I}{\mathfrak{P} F},$$

und folglich sind Φ, F^I, $\mathfrak{P}$, F vier harmonische Punkte. Wird nun der zweite Schnittpunkt $\mathfrak{P}'$, in dem die Tangente $\mathsf{A}A$ den Kreis π schneidet, mit Φ und der Mittelpunkt F^I mit A verbunden, dann sind diese beiden Verbindungsgeraden zu FA parallel und demnach ist A der vierte harmonische Punkt zu den drei Punkten $\mathfrak{P}'$, A, $\mathfrak{P}$. Wir erhalten also die Bogenlänge einer gespitzten Trochoide von einem Scheitel A_0 bis zu einem beliebigen Punkte A, wenn wir auf der in A berührenden Tangente zu dem Berührungspunkt A und ihren beiden Schnittpunkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ mit dem scheitelberührenden Kreise den vierten harmonischen Punkt A bestimmen. Dann ist die Strecke $A\mathsf{A}$ gleich jener Bogenlänge.

Bei der in Fig. **179** gezeichneten zweispitzigen Epicycloide α ist das Radienverhältniss der Kreise p, π gleich $1:2$; dem zufolge $A\mathfrak{P}:A\mathfrak{P}' = 1:3$, $\mathsf{A}\mathfrak{P}:\mathsf{A}\mathfrak{P}' = -1:3$ und $\mathfrak{P}\mathsf{A} = \frac{1}{4}\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$.

In Fig. **180** ist in gleicher Weise für die dreispitzige Hypocycloide α, bei der das Radienverhältniss der Kreise p, π gleich $-1:3$ ist, die zugehörige ähnliche Evolute α^I, wie man aus der übereinstimmenden Bezeichnung leicht erkennt, construirt. Die Tangente $\mathsf{A}A$ an der dreispitzigen Hypocycloide α^I schneidet den Kreis π, der dieselbe in den Scheiteln berührt, in den zu A, A harmonischen Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$; demnach ist $A\mathfrak{P}:A\mathfrak{P}' = -1:2$, $\mathsf{A}\mathfrak{P}:\mathsf{A}\mathfrak{P}' = 1:2$ und $\mathfrak{P}\mathsf{A} = -\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$. Rollt diese Tangente von A_0 ausgehend auf α^I bis an die Spitze A_ε, dann hat der beschreibende Punkt dieser Tangente, dessen Anfangslage A_0 mit A_0 coincidirt, die Hälfte A_0A_ε des zwischen den Spitzen A_0, A_1 enthaltenen Bogens der Hypocycloide α durchlaufen, und wenn die Tangente von A_ε bis A auf α^I weiter rollt, ist der beschreibende Punkt nach A gelangt.[1])

Bei der in Fig. **181** gezeichneten gespitzten Cycloide α, welche durch einen Punkt A des auf der Geraden π rollenden Kreises p erzeugt wird, erhalten wir den betreffenden Krümmungsmittel-

[1]) Diese dreispitzige Hypocycloide ist vielfach untersucht. Steiner's *Gesammelte Werke*. 1881. B. I. S. 641 und *Journal f. reine u. angew. Mathematik*. 1857. B. 53. S. 231. Cremona und Clebsch, daselbst 1865. B. 64. S. 101. Kiepert, *Zeitschr. für Math. u. Physik* 1872. B. 17. S. 129. Milinowski, daselbst 1874. B. 19. S. 115. Schotten, *Programm des königl. Gymnasiums zu Cassel*. 1884. In allgemeiner Fassung behandelt von Siebeck, *Journal für reine und angew. Mathematik*. 1866. B. 66. S. 344; von Frahm, *Zeitschr. für Math. u. Physik*. 1873. B. 18. S. 362.

punkt A auf der Normalen $A\mathfrak{P}$ der gespitzten Cycloide, indem wir von dem Endpunkte B des Kreisdurchmessers AB auf die Gerade π die Senkrechte $B\mathsf{A}$ ziehen, welche $A\mathfrak{P}$ in A schneidet; denn wir können die Gerade π als einen unendlich grossen festen Kreis betrachten. Aus dieser Construction folgt, weil $B\mathsf{A}$ parallel $F\mathfrak{P}$, dass $\mathsf{A}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}A$ ist. Wird auf $A\mathsf{A}$ die Senkrechte $\mathsf{A}\mathfrak{P}'$ bis an $F\mathfrak{P}$ gezogen, über $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ als Durchmesser der Kreis p' beschrieben, der durch den Krümmungsmittelpunkt A geht, dann ist dieser Kreis dem Kreise p gleich; und wenn nun der Kreis p' auf der zu π Parallelen π' rollt, so erzeugt sein Peripheriepunkt A die Evolute α'. Dieselbe ist der von dem Punkte B beschriebenen und somit auch der vom Punkte A erzeugten gespitzten Cycloide α congruent. Befindet sich der beschreibende Punkt A des rollenden Kreises p in der Anfangslage A_0, dann coincidirt der entsprechende Krümmungsmittelpunkt A_0 mit A_0, und folglich ergiebt sich der Satz:

Die Evolute einer gespitzten Cycloide ist eine congruente gespitzte Cycloide, deren Scheitel in den Spitzen der ersten liegen.

Die gespitzte Cycloide α wird hiernach auch als eine Evolvente der gespitzten Cycloide α' erzeugt, wenn die Abrollung der Tangente $A\mathsf{A}$ in dem Scheitel A_0 beginnt und die Anfangslage A_0 des auf der Tangente liegenden, beschreibenden Punktes A mit diesem Scheitel coincidirt. Die Länge des Cycloidenbogens $\mathsf{A}_0\alpha'\mathsf{A}$ ist also gleich der abgerollten Tangentenlänge $A\mathsf{A}$. Um auf der im Punkte A an die gespitzte Cycloide α' gelegten Tangente $\mathsf{A}\mathfrak{P}$, welche die Scheiteltangente π in $\mathfrak{P}$ trifft, die Länge $A\mathsf{A}$ des Cycloidenbogens $\mathsf{A}_0\alpha'\mathsf{A}$ zu erhalten, brauchen wir nur $\mathfrak{P}A = \mathsf{A}\mathfrak{P}$ zu machen. Die Länge der halben gespitzten Cycloide vom Scheitel bis zur Spitze ist demnach gleich dem doppelten Durchmesser des rollenden Kreises. Die gespitzte Cycloide, welche gewöhnlich einfach als Cycloide bezeichnet wird, ist wegen ihrer zahlreichen schönen Eigenschaften vielseitig eingehend untersucht worden; und die älteren Untersuchungen derselben bilden eine interessante Episode in der Geschichte der Mathematik.[1])

[1]) Montucla, *Histoire des Mathématiques.* 1758. T. II. p. 42. Bossut, *Geschichte der Mathematik*, deutsch von Reimer. 1804. Thl. II. S. 36 u. 493.

Erzeugung der Trochoiden durch ein rotirendes affinveränderliches ebenes System.

68. **Definition der affinen ebenen Systeme und des affin-veränderlichen ebenen Systems.** Wir wollen die in Art. 57 abgeleitete Erzeugung der Trochoiden durch ein veränderliches starrseitiges Parallelogramm, d. h. durch ein Gelenkparallelogramm, bei welchem sich zwei in einer Ecke zusammenstossende Seiten proportional um ihren festen Eckpunkt drehen, in erweiterter Form behandeln. Zu diesem Zwecke müssen wir aber die Definition für die affinen ebenen Systeme und für das affin-veränderliche ebene System geben.

Wir nehmen an, es entsprechen in Fig. **182** den drei Punkten Φ, H, H' eines ebenen Systems S resp. die drei Punkte Φ_1, H_1, H_1' eines ebenen Systems S_1. Zu einem beliebigen Punkte A in S construiren wir den entsprechenden Punkt A_1 in S_1 derart, dass wir durch A im System S zu zweien Dreiecksseiten, z. B. zu ΦH, $\Phi H'$, die Parallelen ziehen, welche die Seiten $\Phi H'$, ΦH in F', F treffen, dann auf den entsprechenden Dreiecksseiten im System S_1 resp. $\Phi_1 F_1 H_1 \sim \Phi F H$, $\Phi_1 F_1' H_1' \sim \Phi F' H'$ machen und durch F_1, F_1' zu $\Phi_1 H_1'$, $\Phi_1 H_1$ Parallele legen, die sich im Punkte A_1 schneiden. Die hierdurch bestimmten ebenen Systeme werden affine ebene Systeme genannt. Denken wir uns zu einem dieser Systeme, z. B. zu S_1, ein ähnliches System S_2 construirt, so dass in diesem die Strecke, welche $\Phi_1 H_1$ entspricht, gleich ΦH ist und mit dieser zusammenliegt; dann coincidirt jeder auf der Geraden ΦH liegende Punkt des Systems S mit dem entsprechenden Punkt des gedachten Systems S_2. Hiernach können wir die Gerade ΦH als die Schnittlinie zweier Ebenen ansehen, welche die Systeme S, S_2 enthalten und das eine dieser Systeme als die Parallelprojection des anderen betrachten. Dem zufolge entspricht einer geraden Punktreihe in dem einen affinen System eine ähnliche Punktreihe in dem anderen, und ferner entsprechen parallelen Geraden in dem einen auch parallele Gerade in dem anderen. Sind insbesondere zwei entsprechende Dreiecke der Systeme S, S_1, z. B. die Dreiecke $\Phi H H'$ und $\Phi_1 H_1 H_1'$, ähnlich oder congruent, dann sind auch diese beiden Systeme resp. ähnlich oder congruent. Die beiden affinen Systeme gehen also in diesen Fällen beziehlich in ähnliche oder congruente Systeme über. Wenn sich ein bewegtes ebenes System so verändert, dass alle seine Phasen affine ebene Systeme sind, so wird dasselbe ein affin-veränderliches ebenes System genannt. Sind in Fig. 182 drei Punkte eines affin-veränderlichen Systems, welches aus einer Phase S in eine Phase S_1 übergeht, von Φ, H, H' resp. nach Φ_1, H_1, H'_1 gelangt, dann wird ein Systempunkt, der mit der Phase S sich in A befindet, mit der Phase S_1 die Lage A_1 einnehmen, die in der angegebenen Weise construirt wird. Die Bewegung eines affin-veränderlichen ebenen Systems ist somit durch die Bewegungen dreier Systempunkte bestimmt. Gelangen aber diese drei Punkte in eine Gerade, so schrumpft die betreffende Phase des affin-veränderlichen Systems in diese Gerade zusammen.

69. **Die Trochoiden als Bahncurven der Punkte eines rotirenden affin-veränderlichen ebenen Systems.** Ist in Fig. 183 der Punkt Φ eines affin-veränderlichen ebenen Systems S fest und rotiren zwei Punkte H, H' desselben um diesen Punkt Φ, so dass ihre Drehungen proportional sind, ihre Geschwindigkeiten, die veränderlich sein können, also in constantem Verhältnisse stehen, dann können wir uns jeden Systempunkt, wie z. B. den Punkt A, durch die Seiten AF, AF' des Parallelogramms $\Phi FAF'$ gleichsam gelenkartig mit den rotirenden Geraden ΦH und $\Phi H'$ verbunden denken. In diesem Falle ist das System S ein besonderes affin-veränderliches System, bei welchem alle in den Geraden ΦH, $\Phi H'$ liegenden oder zu denselben parallelen Strecken ihre Länge nicht verändern. Bilden wir das Parallelogramm $\Phi HPH'$, so können wir den Systempunkt A auch gelenkartig durch die Seiten AT, AT' des Parallelogramms $PTAT'$ resp. mit HP, $H'P$ verbinden. Der Systempunkt A beschreibt nach dem auf S. 136 gegebenen Satze eine Trochoide, die, je nachdem die Drehung der Geraden ΦH, $\Phi H'$ in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne erfolgt, eine Epitrochoide oder Hypotrochoide ist, und in einen Kreis übergeht, wenn der Punkt A auf einer dieser Geraden liegt. Das Gleiche gilt von jedem anderen Punkte des Systems S und demnach empfangen wir den Satz:

Drehen sich zwei Punkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems um einen festen Punkt desselben derart, dass ihre Drehungen proportional sind, so beschreiben alle Punkte dieses Systems Trochoiden, die, je nachdem die Drehungen in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne erfolgen, Epitrochoiden oder Hypotrochoiden sind.

Denken wir uns auf einer durch den festen Punkt Φ gehenden Geraden dieses affin-veränderlichen Systems eine beliebige Punktreihe angenommen, so entspricht derselben in jeder Phase eine ähnliche Punktreihe auf einer Geraden, die durch Φ geht. Demnach beschreiben alle Punkte des affin-veränderlichen Systems, die auf einer durch den festen Punkt Φ gehenden Geraden liegen, homothetisch ähnliche Trochoiden, für welche der selbstentsprechende Punkt Φ aller dieser ähnlichen Punktreihen Aehnlichkeitspunkt ist.

Die in Fig. **184** angenommenen Punkte U, V des betrachteten affin-veränderlichen Systems S, welche so liegen, dass jedes der Parallelogramme $\Phi F U F'$, $\Phi G V G'$ gleichseitig ist, beschreiben sternförmige Trochoiden, wenn die Bewegung dieser Punkte beim Zusammenfallen der Geraden ΦH, $\Phi H'$ vermittelt und dadurch die sonst eintretende Unstetigkeit vermieden wird. Die Systemgeraden ΦU, ΦV, halbiren die Winkel $F \Phi F'$, $G \Phi G'$, stehen daher in jeder Phase auf einander senkrecht, und alle auf diesen Geraden liegenden Systempunkte erzeugen sternförmige Trochoiden. Demnach besteht der geometrische Ort aller Punkte des affinveränderlichen Systems S, welche sternförmige Trochoiden beschreiben, aus den beiden rechtwinkelig bleibenden Systemgeraden ΦU, ΦV. Bei dem Durchgange des Punktes V durch Φ coincidiren die Geraden ΦH, $\Phi H'$, alle Systempunkte, welche die Gerade ΦV trägt, treten dann in Φ zusammen und gehen daher in demselben Momente durch Φ, während gleichzeitig die Systempunkte der Geraden ΦU durch die Gerade schreiten, in welcher ΦH, $\Phi H'$ zusammenfallen. Das Analoge tritt ein, wenn der Punkt U nach Φ gelangt.

70. **Beziehungen der Trochoiden, welche durch ein rotirendes affin-veränderliches ebenes System erzeugt werden.** Nehmen wir bei einem affin-veränderlichen System S, welches um einen Punkt Φ im festen System Σ rotirt, in Fig. **185** an, es sei $F'\Phi$ die lothrechte Geschwindigkeit von F', ferner $F\mathfrak{P}$ diejenige von F, dann würde sich nach Art. 29 die lothrechte Geschwindigkeit des Systempunktes A ergeben, wenn wir durch Φ zu $F'A$, durch $\mathfrak{P}$ zu FA Parallele zögen und ihren Schnittpunkt mit A verbänden. Dieser Schnittpunkt ist aber in diesem Falle der Punkt $\mathfrak{P}$; folglich repräsentirt $A\mathfrak{P}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes A und ist zugleich die Normale an der von A beschriebenen Trochoide α, und somit ist $\mathfrak{P}$ der Pol der bewegten starren Geraden FA in Bezug auf das feste System Σ. Wegen der proportionalen Drehungen der Geraden ΦH, $\Phi H'$ stehen die Geschwindigkeiten der Punkte F, F' in constantem Verhältnisse, dem zufolge ist auch die Strecke $\Phi\mathfrak{P}$ constant, und die Normale $A\mathfrak{P}$ einer von einem System-

punkte A beschriebenen Trochoide α ist eine Gerade des affin-veränderlichen Systems. Hieraus folgt der Satz:

Der geometrische Ort eines Punktes, der die Normale $A\mathfrak{P}$ einer Trochoide in constantem Verhältnisse theilt, ist eine gleichartige Trochoide, resp. Epi- oder Hypotrochoide.[1])

Ziehen wir um Φ, F resp. die Kreise π, p, welche sich in $\mathfrak{P}$ berühren, und denken wir uns die starre Gerade FA mit dem auf π rollenden Kreise p verbunden, so werden alle Trochoiden, welche die Punkte dieser Geraden als Punkte des affin-veränderlichen Systems S erzeugen, auch von diesen Punkten durch die Rollung des Kreises p beschrieben. Die Gerade $A\mathfrak{P}$ schneidet $\Phi F'$ in dem Pol $\mathfrak{P}'$, dem Pol der starren Geraden $F'A$ in Bezug auf das feste System Σ, und demnach erhalten wir in analoger Weise für die bewegte starre Gerade $F'A$ die zwei sich in $\mathfrak{P}'$ berührende Kreise π', p', deren Mittelpunkte resp. Φ, F' sind.

Die beiden auf dem Kreise p liegenden Punkte C, D der Systemgeraden FA sind die einzigen Punkte auf derselben, die für das angenommene Verhältniss jener Geschwindigkeiten gespitzte Trochoiden beschreiben, und dem gemäss liegen alle Punkte des affin-veränderlichen Systems, welche gespitzte Trochoiden erzeugen, auf den beiden Geraden ΦC, ΦD, die zu ΦH, $\Phi H'$ harmonisch sind. Ebenso sind die beiden auf dem rollenden Kreise p' liegenden Punkte C', D' der Systemgeraden $F'A$ ihre einzigen Punkte, welche gespitzte Trochoiden erzeugen; dem zufolge geht die Gerade ΦC durch C', sowie die Gerade ΦD durch D'.

Die Gerade FA umhüllt nach Art. 66 als Durchmesser des rollenden Kreises p eine gespitzte Trochoide, die durch einen auf π rollenden Kreis erzeugt wird, der halb so gross als p, oder dessen Durchmesser gleich $F\mathfrak{P}$ ist. Das Analoge gilt von der Geraden $F'A$. Hiernach umhüllen alle Gerade des affin-veränderlichen Systems, die beziehlich zu ΦH, $\Phi H'$ parallel sind, gespitzte Trochoiden.

Die Normale $C\mathfrak{P}$ in Fig. **185** an der gespitzten Trochoide, die der Punkt C des rollenden Kreises p beschreibt, ist der Halbirungsgeraden ΦU des Winkels $H\Phi H'$ parallel; demnach ist die entsprechende Tangente JJ' auf derselben senkrecht und schneidet die rotirenden Geraden ΦH, $\Phi H'$ in gleichen constanten Abständen von Φ in den Punkten J, J'. Die Tangente JJ' an der von dem

[1]) Vergl. Fouret: *Nouvelles Annales de Mathématiques.* 1880. Sér. II. T. 19. p. 67.

Systempunkte C beschriebenen gespitzten Trochoide ist also eine Gerade des affin-veränderlichen Systems, deren Punkte J, J' sich auf einem Kreise bewegen. Wenn die Punkte unendlich nahe zusammen kommen, geht die Gerade JJ' in eine Kreistangente über; folglich berührt der Kreis die gespitzte Trochoide in ihren Scheiteln, und jede von diesem Scheitelkreise begrenzte Tangente der gespitzten Trochoide wird von dem Berührungspunkte in constantem Verhältnisse getheilt. Wir erhalten somit den Satz:

Bewegen sich zwei Punkte proportional auf einem Kreise, so umhüllt ihre Verbindungsgerade eine Epicycloide oder Hypocycloide, je nachdem die Bewegung dieser Punkte in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne erfolgt; und der Berührungspunkt theilt die Verbindungsstrecke resp. innerhalb oder ausserhalb in constantem Verhältnisse.

Der Schnittpunkt U der Halbirungsgeraden ΦU mit der Geraden JJ' ist der Fusspunkt des von Φ auf JJ' gefällten Lothes, und da jeder auf ΦU liegender Systempunkt eine sternförmige Trochoide beschreibt, so ergiebt sich der Satz:

Die Fusspunktencurve einer gespitzten Trochoide für den festen Kreismittelpunkt Φ als Lothpunkt ist eine sternförmige Trochoide.

Für die vom Punkte D beschriebene gespitzte Trochoide ist die zugehörige Normale $D\mathfrak{P}$ der Geraden JJ' parallel, und folglich ist die Gerade JJ' auch die betreffende Normale für die vom Schnittpunkte D_1 der Geraden ΦD, JJ' erzeugte homothetisch ähnliche gespitzte Trochoide. Es ist also die von der Systemgeraden JJ' umhüllte oder von dem Systempunkte C beschriebene gespitzte Trochoide die Evolute der von dem vierten zu J', C, J harmonischen Punkte D_1 erzeugten gespitzten Trochoide. Bewegen sich die Punkte H, H' unter gleichen Bedingungen entgegengesetzt, dann muss auch die lothrechte Geschwindigkeit $F\mathfrak{P}$ des Punktes F in entgegengesetzter Richtung angenommen werden. Es ergiebt sich durch analoge Betrachtungen, dass eine auf der Halbirungsgeraden ΦU senkrechte Systemgerade JJ' eine gespitzte Trochoide umhüllt, die der ausserhalb JJ' liegende Schnittpunkt D_1 der Geraden ΦD, JJ' beschreibt, und dass diese gespitzte Trochoide in diesem Falle die Evolute von derjenigen ist, die der zu J', J, D_1 gehörende vierte harmonische Punkt C erzeugt. Die gespitzte Trochoide, welche bei der in Fig. **185** angenommenen gleichsinnigen Bewegung dem Punkte C entspricht, ist der von dem

Punkte D beschriebenen congruent; demnach sind auch die beiden von den Punkten C, D_1 erzeugten gespitzten Trochoiden ähnlich. Hiernach sind durch diese Darlegungen die in Art. 67 abgeleiteten Beziehungen in anderer Weise begründet. Zu diesen Beziehungen können wir jedoch auch sehr leicht auf einem anderen Wege gelangen. Die Gerade $D\Phi$ schneidet $C\mathfrak{P}$ in dem Krümmungsmittelpunkte Γ der von C beschriebenen gespitzten Trochoide. Da nun $D\Phi$, $C\mathfrak{P}$ Gerade des affin-veränderlichen Systems sind, so ist auch ihr Schnitt Γ ein Punkt desselben und beschreibt als solcher eine gespitzte Trochoide, welche die Evolute der von C erzeugten gespitzten Trochoide ist. Die Punkte Γ, D beschreiben ähnliche und die Punkte D, C congruente gespitzte Trochoiden; und folglich ist die von C erzeugte gespitzte Trochoide ihrer Evolute ähnlich. Ein Punkt, der die Strecke $C\Gamma$ des affin-veränderlichen Systems in constantem Verhältnisse theilt, gehört auch zu diesem affin-veränderlichen System und beschreibt als solcher eine Trochoide. Demnach erhalten wir den Satz:

Der geometrische Ort eines Punktes, der den Krümmungsradius $C\Gamma$ einer gespitzten Trochoide in constantem Verhältnisse theilt, ist eine Trochoide.[1])

Die Gerade $C\mathfrak{P}$, welche ΦD in Γ und $\Phi H'$ in $\mathfrak{P}'$ auf dem Kreise π schneidet, umhüllt bei der angenommen gleichsinnigen Bewegung im Punkte Γ berührend die Evolute der von dem Punkte C durchschrittenen gespitzten Trochoide. Alle Beziehungen, welche wir für eine auf der Halbirungsgeraden ΦU senkrechte Systemgerade JJ' gefunden haben, gelten in analoger Weise für eine auf der Halbirungsgeraden ΦV senkrechte Systemgerade $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$. Wir können daher die weiteren Resultate unserer Darlegungen in den folgenden Sätzen aussprechen, die sich nur durch die Vertauschung der Geraden ΦC, ΦD unterscheiden:

Alle auf der Halbirungsgeraden ΦU des Winkels $H\Phi H'$ senkrechten Geraden des affin-veränderlichen Systems umhüllen homothetisch ähnliche Epicycloiden oder Hypocycloiden, je nachdem sich die Geraden ΦH, $\Phi H'$ in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne proportional drehen, und die Berührungspunkte liegen beziehlich auf der Geraden ΦC oder ΦD.

Alle zu der Halbirungsgeraden ΦU des Winkels $H\Phi H'$ parallelen Geraden des affin-veränderlichen

1) Fouret, a. a. O.

Systems umhüllen homothetisch ähnliche Epicycloiden oder Hypocycloiden, je nachdem sich die Geraden ΦH, $\Phi H'$ in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne proportional drehen, und die Berührungspunkte liegen beziehlich auf den Geraden ΦD oder ΦC.

71. **Die Trochoiden, welche vermittelst zweier auf concentrischen Kreisen proportional bewegter Punkte erzeugt werden.** Ziehen wir in Fig. **186** durch einen beliebigen Systempunkt A des betrachteten affin-veränderlichen ebenen Systems eine beliebige Gerade, welche die rotirenden Geraden ΦH, $\Phi H'$, resp. in den wieder mit J, J' bezeichneten Punkten schneidet, dann ist das Verhältniss der Strecken JA, AJ' constant, und die Systempunkte J, J' bewegen sich auf zwei Kreisen i, i', deren gemeinsamer Mittelpunkt Φ ist. Hiernach ergiebt sich der Satz:

Bewegen sich zwei Punkte proportional auf concentrischen Kreisen, so beschreibt jeder Punkt, der die Verbindungsstrecke in constantem Verhältnisse theilt, eine Trochoide, die eine Epitrochoide oder Hypotrochoide ist, je nachdem die Bewegung auf den Kreisen in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne erfolgt.

Für den auf der Halbirungslinie des Winkels $J\Phi J'$ liegenden Punkt U der Geraden JJ' ist das constante Verhältniss $JU : J'U = - J\Phi : J'\Phi$; denn, wenn die Punkte J, J' in eine durch Φ gehende Gerade gelangen und zu beiden Seiten von Φ liegen, so fällt U mit Φ zusammen. In gleicher Weise ist für den auf der Halbirungslinie des betreffenden Nebenwinkels liegenden Punkt V der Geraden JJ' das Verhältniss $JV : J'V = J\Phi : J'\Phi$; denn treten die Punkte J, J' in eine durch Φ gehende Gerade und liegen sie nach einer Seite von Φ, so fällt der Punkt V mit Φ zusammen. Die beiden durch diese entgegengesetzt gleichen Verhältnisse auf der Geraden JJ' gegebenen Punkte U, V, welche die Strecke JJ' harmonisch theilen, beschreiben sternförmige Trochoiden. Sind aber die beiden Kreise gleich, bewegen sich also die Punkte J, J' auf demselben Kreise, dann liegt der Punkt U, weil $\Phi J = \Phi J'$ ist, in der Mitte der Strecke JJ'; der Punkt V liegt aber im Unendlichen auf der Geraden JJ' und fällt als solcher aus der Betrachtung.

Nehmen wir an, es seien $J'\Phi$, $J\mathfrak{P}$ beziehlich die lothrechten Geschwindigkeiten, welche die Punkte J', J auf den Kreisen i', i

besitzen, und beschreiben wir um J mit dem Radius $J\mathfrak{P}$ einen Kreis, der die durch J zu $\Phi J'$ parallel gezogene Gerade in den Punkten C, D schneidet, dann tragen die beiden zu ΦJ, $\Phi J'$ harmonischen Geraden ΦC, ΦD alle Punkte des affin-veränderlichen Systems, die gespitzte Trochoiden beschreiben. Die Schnittpunkte C_1, D_1 von JJ' mit ΦC, ΦD sind demnach die beiden einzigen Punkte der Geraden JJ', welche gespitzte Trochoiden erzeugen. Für den zwischen J, J' liegenden Punkt C_1 ist wegen der ähnlichen Dreiecke C_1JC, $C_1J'\Phi$ das constante Verhältniss $JC_1 : J'C_1 = - J\mathfrak{P} : J'\Phi$; und analog ergiebt sich für den ausserhalb der Strecke JJ' befindlichen Punkt D_1 das constante Verhältniss $J\mathfrak{P} : J'\Phi$ oder auch dadurch, dass D_1 der vierte harmonische Punkt zu J', C, J ist. Die Abstände des Punktes C_1 sowie die des Punktes D_1 von den Punkten J, J' verhalten sich also wie die Geschwindigkeiten der Punkte J, J'.

Denken wir uns in gleichem Abstande von J auf jener zu $\Phi J'$ parallelen Geraden CD zwei beliebige Systempunkte angenommen und von Φ aus durch dieselben zwei zu ΦJ, $\Phi J'$ harmonische Gerade gezogen, so beschreiben diese beiden Systempunkte congruente Trochoiden und dem gemäss alle Systempunkte dieser beiden gedachten Geraden lauter ähnliche Trochoiden. Wir empfangen hiermit den Satz:

Bewegen sich zwei Punkte proportional auf concentrischen Kreisen, so erzeugen die beiden Punkte, welche die veränderliche Verbindungsstrecke in constantem Verhältnisse harmonisch theilen, ähnliche Epitrochoiden oder ähnliche Hypotrochoiden, je nachdem die Bewegung auf den Kreisen in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne stattfindet, und gehen beziehlich in Epicycloiden oder Hypocycloiden über, wenn das absolute Verhältniss gleich dem absoluten Verhältnisse der Geschwindigkeiten ist, die jene Punkte besitzen.

Sind die beiden Geschwindigkeiten der Punkte J, J' gleich, ist also $J\mathfrak{P} = J'\Phi$, dann liegt der Punkt C_1 in der Mitte von JJ', der Punkt D_1 im Unendlichen, und umgekehrt, wenn bei gegensinniger Bewegung $J\mathfrak{P} = - J'\Phi$ genommen wird; demnach ergiebt sich der Satz:

Bewegen sich zwei Punkte auf concentrischen Kreisen mit gleicher Geschwindigkeit in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne, so beschreibt die

Mitte der Verbindungsstrecke resp. eine Epicycloide oder Hypocycloide.

Ziehen wir in Fig. **187** durch den Endpunkt $\mathfrak{P}$ der angenommenen lothrechten Geschwindigkeit $J\mathfrak{P}$ des Punktes J zur Geraden JJ' die Parallele $\mathfrak{P}N$, welche die zu $\Phi J'$ parallele Systemgerade JN in N und die Gerade $\Phi J'$ in N' schneidet, ferner die Gerade ΦN, die JJ' im Punkte N_1 trifft, so ist $N\mathfrak{P}$ die Normale der vom Systempunkte N beschriebenen Trochoide und $N_1 J$ die Normale der vom Systempunkte N_1 erzeugten homothetisch ähnlichen Trochoide. Hiernach giebt es auf der Geraden JJ' einen bestimmten Systempunkt N_1, der eine Trochoide durchläuft, für welche die Gerade JJ' beständig die betreffende Normale ist. Wir haben unbeschadet der Allgemeinheit angenommen, dass die lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte J, J' beziehlich durch $J\mathfrak{P}$, $J'\Phi$ dargestellt sind; werden aber die Geschwindigkeiten dieser Punkte allgemein resp. durch v, v' bezeichnet, dann ist $J\mathfrak{P} : J'\Phi = v : v'$; es ergiebt sich demnach für den Punkt N_1, weil NN', $N_1 J'$ sowie NJ, $\Phi J'$ Parallele sind, das constante Verhältniss:

$$N_1 J : N_1 J' = N\mathfrak{P} : NN' = J\mathfrak{P} : J\Phi,$$

oder:

$$N_1 J : N_1 J' = \frac{v}{v'} : \frac{J\Phi}{J'\Phi}.$$

Aus diesen Darlegungen folgt der Satz:

Bewegen sich zwei Punkte proportional auf concentrischen Kreisen, so umhüllt die Verbindungsgerade die Evolute einer Trochoide; diese letztere wird durch einen Punkt erzeugt, der die Verbindungsstrecke nach einem constanten Verhältnisse theilt, welches gleich ist dem Doppelverhältnisse aus den Geschwindigkeiten der beiden Punkte und aus den Radien der entsprechenden Kreise.

Ziehen wir durch den Punkt N_1 zu NJ die Parallele $N_1 F_1$ bis an ΦJ, so folgt, weil $J\mathfrak{P}$ die lothrechte Geschwindigkeit von J ist und weil die Dreiecke $\mathfrak{P}JN$, $JF_1 N_1$ homothetisch ähnlich sind, dass auch $F_1 J$ die lothrechte Geschwindigkeit des rotirenden Punktes F_1 darstellt, und dass demnach der um F_1 mit dem Radius $F_1 J$ gezogene Kreis ι, mit dem der beschreibende Punkt N_1 verbunden gedacht wird, durch Rollung auf dem Kreise i die genannte Trochoide erzeugt. Der betreffende Krümmungsmittelpunkt M_1, der Berührungspunkt, den die bewegte Gerade JJ' mit ihrer Hüllbahncurve bildet, würde sich ergeben, indem man auf $N_1 J$

die Senkrechte $J\mathfrak{Q}_1$ bis an N_1F_1 errichtet und die Gerade $\mathfrak{Q}_1\Phi$ zieht, die N_1J in M_1 schneidet. Es kann dieser Punkt M_1 aber leichter dadurch bestimmt werden, dass man vom Endpunkte $\mathfrak{P}$ der angenommenen lothrechten Geschwindigkeit des Punktes J auf JJ' die Senkrechte $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ fällt, welche die zu $\Phi J'$ parallele Gerade JN in $\mathfrak{Q}$ trifft, und die Gerade $\mathfrak{Q}\Phi$ zieht, deren Schnitt mit JJ' der Punkt M_1 ist. Diese Bestimmung des Berührungspunktes M_1 der bewegten Geraden JJ' ist, weil $J\mathfrak{P}$, $J'\Phi$ die lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte J, J' darstellen, auch durch die auf S. 65 gegebene Construction begründet. Nach derselben erhalten wir auch den Punkt M_1, wenn wir von $\mathfrak{P}$ auf JJ' eine Senkrechte fällen, welche die durch J zu $\Phi J'$ parallel gezogenen Geraden schneidet, diesen Schnittpunkt mit Φ verbinden; dann wird JJ' von dieser Verbindungsgeraden in dem Berührungspunkte M_1 getroffen. Wird zu $F_1\Phi$ die Parallele N_1F_1' bis an $J'\Phi$ gezogen, so beschreibt der Punkt N_1 als Eckpunkt des Parallelogramms $\Phi F_1 N_1 F_1'$ die Trochoide, deren Evolute von der bewegten Geraden JJ' umhüllt wird.

Bei dem in Fig. **188** dargestellten besonderen Falle ist $J\mathfrak{P} = \frac{1}{2}J\Phi$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes J und $J'\Phi$ die des Punktes J'; es ist also $v = \frac{1}{2}J\Phi$, $v' = J'\Phi$ und demnach

$$N_1J : N_1J' = 1 : 2$$

oder

$$N_1J = JJ'.$$

Der rollende Kreis ι ist hier, weil J in der Mitte von ΦF_1 liegt, dem festen Kreise i gleich. Wird von N_1 auf die gemeinsame Tangente $J\mathfrak{t}$ dieser Kreise das Loth $N_1\mathfrak{t}$ gefällt und um seine eigene Grösse bis $\mathfrak{N}_1$ verlängert, dann liegt der Punkt $\mathfrak{N}_1$ auf dem Kreise i', den der Punkt J' durchläuft. Die Trochoide, welche der Punkt N_1 beschreibt oder deren Evolute die bewegte Gerade JJ' umhüllt, ist hiernach die Fusspunktencurve eines Kreises für $\mathfrak{N}_1$ als Lothpunkt. Betrachten wir den festen Punkt $\mathfrak{N}_1$ des Kreises i' als leuchtenden Punkt und den vom Punkte J durchlaufenen Kreis i als reflectirenden Kreis, so folgt, weil $\mathfrak{N}_1J$ und JJ' gleiche Winkel mit ΦJ bilden, auch der Satz:

Bewegen sich zwei Punkte auf concentrischen Kreisen, und ist die Drehgeschwindigkeit des einen doppelt so gross als die des anderen, so umhüllt die Verbindungsgerade dieser Punkte die Brennlinie des langsamer durchlaufenen Kreises, für welche der leuchtende Punkt auf dem schneller durchlaufenen Kreise liegt.

Um noch einen besonderen Fall zu betrachten, nehmen wir in Fig. **189** an, es bewegen sich die Punkte J, J' mit gleicher aber entgegengesetzter Drehgeschwindigkeit auf den Kreisen i, i'; es sei $J\mathfrak{P} = - J\Phi$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes J und $J'\Phi$ die des Punktes J'. Hiernach ist $v = - J\Phi$, $v' = J'\Phi$ und

$$N_1 J : N_1 J' = -1;$$

folglich liegt der beschreibende Punkt N_1 in der Mitte von JJ'. Der rollende Kreis ι ist hier, weil sein Mittelpunkt F_1 in der Mitte von ΦJ liegt, halb so gross als der feste Kreis i, und da der Kreis ι in dem Kreise i rollt, so beschreibt der mit ersterem verbunden gedachte Punkt N_1 eine Ellipse. Demnach ergiebt sich der Satz:

Bewegen sich zwei Punkte auf concentrischen Kreisen mit gleichen entgegengesetzten Drehgeschwindigkeiten, so umhüllt die Verbindungsgerade die Evolute einer Ellipse, die mit den Kreisen gemeinsamen Mittelpunkt hat und deren grosse und kleine Axe resp. gleich der Summe und der Differenz der Radien dieser Kreise ist.[1])

Aus der betrachteten Bewegung des affin-veränderlichen ebenen Systems kann man leicht auf dem befolgten resultatenreichen Wege noch mannigfaltige Eigenschaften der Trochoiden ableiten; und es ergiebt sich eine unübersehbare Fülle neuer Beziehungen, wenn man die verschiedenen gegenseitigen Lagen der durch die Systempunkte erzeugten Trochoiden untersucht.

---

[1]) Mehrere der hier synthetisch abgeleiteten Beziehungen befinden sich in Bellermann's „*Epicycloiden und Hypocycloiden*“ 1867, § 5 ohne Beachtung der Affinität begründet; und einige derselben sind später von Eckardt in der *Zeitschrift für Math. und Phys.* 1870. B. 15. S. 129; 1873. B. 18. S. 107 u. 319 analytisch bewiesen, und auch von Kiepert in einer Abhandlung daselbst 1872. B. 17. S. 129 abgeleitet.

DRITTER ABSCHNITT.

Die Verzahnungen der Stirnräder.

Grundlegende Constructionen.

72. **Allgemeine Constructionen der Hüllbahncurve, die von einer Curve eines rollenden Systems erzeugt wird.** Die Bewegung eines ebenen Systems S in einem festen System Σ ist bestimmt durch die Rollung der in Fig. **190**, Taf. XI, gegebenen Polcurve p des Systems S auf der Polbahn π, die im festen System Σ gegeben ist. Wird im rollenden oder bewegten System S eine beliebige Curve k angenommen, deren Normalen die Polcurve p schneiden, so erzeugt dieselbe im festen System Σ eine Hüllbahncurve $\varkappa$. Die vollständige Construction dieser Hüllbahncurve ist meistens unausführbar, und wenn sie unter bestimmten Bedingungen ausführbar sein sollte, doch sehr schwierig. Unsere Darlegungen sollen aber zunächst zeigen, wie die Hüllbahncurve im Allgemeinen angenähert richtig gezeichnet werden kann. Nur in den besonderen vorzugsweise bei den Verzahnungen vorkommenden Fällen, wenn die Polbahn so wie die Polcurve ein Kreis ist und wenn die Systemcurve k entweder durch eine Gerade, einen Kreis oder durch eine in besonderer Lage befindliche cyclische Curve vertreten wird, ist eine genaue Construction der betreffenden Hüllbahncurve möglich.[1])

[1]) Die erste Bestimmung einiger Hüllbahncurven und deren Anwendung auf die Verzahnungen giebt De La Hire in seinem aus dem Jahre 1694 stammenden „*Traité des épicycloïdes et de leur usage dans les mécaniques*". (*Mém. de l'Acad.* T. IX. p. 341.) Nach De La Hire hat Ch. E. L. Camus in seiner Abhandlung „*Sur la figure des dents des roues et des ailes des pignons pour rendre les horloges plus parfaites*" (*Mém. de l'Acad.* 1733. p. 117) und in seinem vortrefflichen „*Cours des Mathématiques*". III. Partie. „*Elemens de méchanique statique*". 1752. T. II. Liv. X. die Constructionen der Hüllbahncurven oder der

Angenähert constructiv bestimmbar ist die Hüllbahncurve $\varkappa$, wenn wir in Fig. **190** annehmen, dass an den Punkten der Systemcurve k, der Polcurve p und der Polbahn π die Normalen gezogen werden können. Ist $\mathfrak{P}_0$ oder P_0 der Berührungspunkt der Polbahn π und der in der Anfangslage p_0 befindlichen Polcurve, ist ferner $A_0 P'_0$ die Normale für einen Punkt A_0 der Curve k_0, welche die Anfangslage der Systemcurve k vertritt, und P'_0 der Schnitt dieser Normalen mit p_0, so müssen wir auf π den Curvenbogen $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}'$ gleich dem Curvenbogen $P_0 P'_0$ machen. Dies kann nur angenähert dadurch ausgeführt werden, dass wir die Curven p, π als Polygone mit sehr kleinen Seiten betrachten, dass wir also sehr kleine Theile, die als geradlinig angesehen werden können, auf dem Curvenbogen $P_0 P'_0$ mit dem Cirkel abstechen und auf den Curvenbogen $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}'$ abtragen. In P'_0 ziehen wir an die Polcurve p_0 die die Normale $P'_0 N_0$, in $\mathfrak{P}'$ an die Polbahn π die Normale $\mathfrak{P}' N$, beschreiben um P'_0 den Kreisbogen $A_0 N_0$ bis an die Normale $P'_0 N_0$ und mit demselben Radius um $\mathfrak{P}'$ von der Normalen $\mathfrak{P}' N$ aus den Kreisbogen NA, so dass die Strecke $NA = N_0 A_0$ ist; dann sind die gleichschenkeligen Dreiecke $\mathfrak{P}' NA$, $P'_0 N_0 A_0$ congruent. Demnach gelangt die Systemcurve von k_0 nach k und der auf k_0 angenommene Systempunkt von A_0 nach A, wenn die Polcurve auf der Polbahn von p_0 nach p gerollt ist, so dass der Punkt P'_0 Berührungspunkt wird. Da nun $A\mathfrak{P}'$ eine durch den Pol $\mathfrak{P}'$ gehende Normale der Systemcurve k ist, so bewegt sich der Curvenpunkt A momentan in der Richtung der zum Punkte A gehörenden Tangente dieser Systemcurve k; folglich ist A ein Punkt der Hüllbahncurve $\varkappa$ und diese wird in demselben von der Systemcurve k so wie auch von dem Kreisbogen NA berührt. In gleicher Weise ergeben sich, wenn man in verschiedenen Punkten auf k_0 die Curvennormalen zieht, die entsprechenden Punkte der Hüllbahncurve $\varkappa$ in dem ruhenden System Σ.

Verzahnungen weiter ausgebildet und anschaulicher als De La Hire dargestellt. Später hat Euler, ohne die grundlegenden Arbeiten seiner Vorgänger De La Hire und Camus zu erwähnen, die Hüllbahncurven analytisch untersucht und ihre Gleichungen aufgestellt in der Abhandlung „*De aptissima figura rotarum dentibus tribuenda*“ (*Novi Comment. Acad. Petrop.* 1754—1755. T. V. p. 299). In einer zweiten ergänzenden Abhandlung „*De figura dentium rotarum* (daselbst T. XI. 1765. p. 209) hat Euler zuerst die Kreisevolventen als entsprechende Hüllbahncurven erkannt und auf die Verzahnungen angewendet. Die Lehre von den Verzahnungen wurde vorzugsweise von den genannten drei Autoren De La Hire, Camus und Euler gleichsam in drei Epochen begründet und zum Zwecke der praktischen Anwendung weiter entwickelt.

Giebt es ausser $A_0 P'_0$ noch andere Normalen, die von P'_0 aus nach Punkten der Curve k_0 gehen, so entsprechen denselben ebenso viele andere Punkte der Hüllbahncurve, deren Normalen für die betreffende Lage k der Systemcurve durch $\mathfrak{P}'$ gehen. Die Punkte der Curve k_0, denen die von einem Punkte P'_0 ausgehenden Normalen angehören, sind aber oft sehr schwer und in den meisten Fällen garnicht bestimmbar; daher muss man durch eine möglichst grosse Anzahl Punkte der Curve k_0 die Normalen ziehen und wie vorhin die entsprechenden Punkte der Hüllbahn construiren. Träfe zufällig auch die durch einen Punkt B_0 in Fig. **190** gehende Curvennormale den Punkt P'_0 der Polcurve p_0, dann würde für den entsprechenden Punkt B der Hüllbahncurve $\varkappa$ die betreffende Normale $B\mathfrak{P}'$ durch den Pol $\mathfrak{P}'$ gehen.

Will man auf die punktweise Construction der Hüllbahncurve verzichten und diese dagegen als eine von Kreisen berührte Curve zeichnen, so brauchen wir nur in Fig. **191** an die Curve k_0 die Normalen $A'_0 P'_0$, $A''_0 P''_0$, $A'''_0 P'''_0$ .. zu ziehen, die Curvenbögen $\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}' = P_0 P'_0$, $\mathfrak{P}' \mathfrak{P}'' = P'_0 P''_0$, $\mathfrak{P}'' \mathfrak{P}''' = P''_0 P'''_0$ .. zu machen, um $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}'''$ resp. mit $P'_0 A'_0$, $P''_0 A''_0$, $P'''_0 A'''_0$ als Radien Kreisbögen zu beschreiben und an diese berührend die Hüllbahncurve $\varkappa$ zu zeichnen; denn diese Kreisbögen berühren die Hüllbahncurve in denjenigen Punkten, deren oben angegebene Bestimmung hierdurch umgangen wird. Diese kreisweise Construction, welche viel einfacher als jene punktweise Bestimmung und bei einer genügenden Anzahl Kreisbögen ebenso genau ist, kann aber nur bei den Fällen angewendet werden, in welchen die gegebene Systemcurve k_0 in einfacher Gestalt auftritt, so dass die berührenden Kreise in übersichtlicher continuirlicher Reihenfolge die Hüllbahncurve berühren und den Verlauf derselben nicht durch eine complicirte Anordnung dieser Reihenfolge unkenntlich machen.[1])

Aus dieser abgeleiteten Construction folgt, dass es zu jeder Curve k eines bewegten Systems S, deren Normalen die Polcurve schneiden, eine entsprechende Hüllbahncurve in dem festen System Σ giebt. Wenn aber nur die Normalen eines Theiles der Systemcurve k die Polcurve treffen, so kann auch nur dieser Theil bei der Erzeugung der Hüllbahncurve zur Geltung kommen. Ist insbesondere die Systemcurve k derart, dass alle ihre Normalen die

---

[1]) Diese Construction wurde, wie Resal in seinem *Traité de cinématique pure*, 1862. p. 125 mittheilt, schon im Jahre 1827 von Poncelet gelehrt. Vergl. auch Poncelet: *Leçons lithographiées,* redigées par M. Gosselin. Metz. 1830. Part. III. p. 88—90.

Polcurve p unter einem constanten Winkel ν schneiden, so bilden auch alle Normalen der zugehörigen Hüllbahncurve $\varkappa$ denselben Winkel ν mit der Polbahn π. Ist ferner ν ein rechter Winkel, dann ist die Systemcurve k eine Aequidistante der Polcurve p und die entsprechende Hüllbahn $\varkappa$ eine Aequidistante der Polbahn π.

73. **Allgemeine Constructionen der Bahncurve, die von einem Punkte eines rollenden Systems beschrieben wird.** Ist in Fig. **192** ein beschreibender Punkt K in dem bewegten System gegeben, dann ist in diesem besonderen Falle die Systemcurve in einem Punkte K zusammengeschrumpft, und jene Hüllbahncurve geht in die Bahncurve $\varkappa$ dieses Punktes über. Um diese Bahncurve durch punktweise Bestimmung zu erhalten, müssen wir von der angenommenen Anfangslage K_0 des beschreibenden Punktes K eine Gerade K_0P_0' bis an die betreffende Polcurve p_0 und an diese die Normale $P_0'N_0'$ ziehen. Machen wir nun den Curvenbogen $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}' = P_0P_0'$, ziehen auch in $\mathfrak{P}'$ an die Polbahn π die Normale $\mathfrak{P}'N'$, und beschreiben wir um P_0' den Kreisbogen K_0N_0', um $\mathfrak{P}'$ den gleichen Kreisbogen $N'K'$, indem wir die Strecke $N'K' = N_0'K_0$ machen, dann ist K' ein Punkt der Bahncurve $\varkappa$. Ebenso ist noch für einen zweiten Punkt K'' der Bahncurve $\varkappa$, wie man aus der gleichartigen Bezeichnungsweise erkennt, die Construction ausgeführt.

Diese Bahncurve $\varkappa$ kann auch kreisweise construirt werden, wenn man um die Punkte $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$.., die den Punkten P_0, P_0', P_0''.. entsprechen, resp. mit den Radien P_0K_0, $P_0'K_0$, $P_0''K_0$.. die Kreisbögen NK_0, $N'K'$, $N''K''$.. zieht und berührend an diese die Bahncurve $\varkappa$ zeichnet.

74. **Erzeugung der Hüllbahncurven durch einen Punkt eines rollenden Systems.** Wenn in Fig. **193** die Polbahn π und eine Bahncurve $\varkappa$ gegeben ist, deren sämtliche Normalen die Polbahn schneiden, so ergiebt sich durch die folgende Darlegung, dass dann die zugehörige Polcurve p_0 bestimmt ist, durch deren Rollung auf π der betreffende Systempunkt K_0 die Bahncurve $\varkappa$ erzeugt. Denken wir uns durch die auf einander folgenden unendlich nahen Punkte K_0, K', K''.. der Bahncurve $\varkappa$ Normalen an dieselbe gezogen, welche die Polbahn π resp. in den Punkten $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$.. schneiden, und die Dreiecke $K_0P_0P_0'$, $K_0P_0'P_0''$, $K_0P_0''P_0'''$.. construirt, so dass die unendlich kleinen Seiten P_0P_0', $P_0'P_0''$, $P_0''P_0'''$.. resp. gleich $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}''\mathfrak{P}'''$.., ferner die Seiten K_0P_0', K_0P_0'', K_0P_0'''.. beziehlich gleich den Normalen $K'\mathfrak{P}'$, $K''\mathfrak{P}''$, $K'''\mathfrak{P}'''$ sind; dann ist, weil die Punkte K_0, K', K''.. unendlich

nahe auf $\varkappa$ liegen, $\mathfrak{P}_0 K_0 = \mathfrak{P}_0 K'$, $\mathfrak{P}' K' = \mathfrak{P}' K''$, $\mathfrak{P}'' K'' = \mathfrak{P}'' K'''$.., und demnach $K_0 P_0 P_0' \cong K' \mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}'$, $K_0 P_0' P_0'' \cong K'' \mathfrak{P}' \mathfrak{P}''$, $K_0 P_0'' P_0''' \cong K''' \mathfrak{P}'' \mathfrak{P}'''$ u. s. w. Infolge der Congruenz dieser Dreiecke bilden die unendlich nahen Punkte P_0, P_0', P_0'', P_0''', .. die in der Anfangslage befindliche Polcurve p_0, wenn der beschreibende Punkt von K_0 ausgeht. Schneiden aber die Normalen die Polbahn π noch zum zweiten Male, wie z. B. die Normale $K_0 \mathfrak{P}_0$ im Punkte Π_0, dann wird sich eine zweite Curve ergeben, durch deren von Π_0 ausgehende Rollung auf π der angeheftete Punkt K_0 dieselbe Curve $\varkappa$ beschreibt.[1])

In Fig. **194** ist die Polbahn π, ferner die Polcurve p in der Anfangslage p_0 und die Systemcurve k in der entsprechenden Lage k_0 gegeben. Die Curve k_0 können wir uns erzeugt denken durch einen beschreibenden Punkt K, der von K_0 ausgehend an einer auf p_0 rollenden Curve q_0 befestigt ist, welche wir die Hülfsrollcurve nennen wollen. Für die Anfangslage K_0 dieses Punktes sei $\mathfrak{P}_0$ der gemeinsame Berührungspunkt der drei Curven π, p_0, q_0. Um nun für die Hüllbahncurve $\varkappa$, die der Systemcurve k entspricht, eine andere Erzeugungsweise abzuleiten, welche sich von der ersten wesentlich unterscheidet und bei den Verzahnungen von grosser Wichtigkeit ist, nehmen wir an: die gedachte Hülfsrollcurve q_0 sei auf p_0 nach q_0' bis zum Punkte P_0' gerollt, so dass der auf ihr liegende Punkt Q_0' an der Stelle P_0' mit der Curve p_0 in Berührung kommt. Ferner sei bei dieser Rollung die Strecke $K_0 Q_0'$ nach $K_0' P_0'$ und die Curvennormale $Q_0' N_0$, welche gleich $Q_0' K_0$ ist, nach $P_0' N_0'$ gelangt. Hiernach ist K_0' ein Punkt der Curve k_0 und $K_0' P_0'$ die betreffende Normale an derselben. Wir denken uns auf π den Curvenbogen $\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}'$ gleich $\mathfrak{P}_0 P_0'$ oder gleich $\mathfrak{P}_0 Q_0'$ gemacht, dann in der vorhin angegebenen Weise den Punkt K' der Hüllbahncurve $\varkappa$ bestimmt, indem an p_0 die Normale $P_0' N_0 = P_0' K_0'$, an π die Normale $\mathfrak{P}' N'$ gezogen, zu $P_0' N_0' K_0'$ oder $Q_0 N_0 K_0$ das congruente gleichschenkelige Dreieck $\mathfrak{P}' N' K'$ construirt wird, oder indem das Dreieck $Q_0' N_0 K_0$ nebst der Hülfsrollcurve q_0 resp. nach $\mathfrak{P}' N' K'$ und q' gelegt wird. Demnach ergiebt sich, da auch die Curvenbögen $\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}_0 Q_0'$ gleich sind, dass der beschreibende Punkt K auch von K_0 nach K' gelangt, wenn die Curve q_0, an welcher dieser Punkt befestigt ist, auf der festen

[1]) Die angegebene Bestimmung der Polcurve durch Annahme unendlich nahe auf der Bahncurve liegender Punkte wurde schon von De La Hire mitgetheilt in den *Mémoires de l'Academie*. 1706. p. 379.

Polbahn π bis $\mathfrak{P}'$ rollt und in die Lage q' gekommen ist. Hiernach erhalten wir den von Camus gefundenen interessanten Satz:[1])

Wird in einem bewegten System eine Curve k_0 durch einen Punkt beschrieben, der an einer auf der Polcurve p_0 rollenden Hülfsrollcurve q_0 befestigt ist, und wird in dem festen System eine Curve $\varkappa$ von demselben Punkte in gleicher Anfangslage beginnend durch Rollung der Hülfsrollcurve q_0 auf der Polbahn π erzeugt, so wird die Curve $\varkappa$ von der Curve k_0 des bewegten Systems umhüllt.

Hierbei ist zu beachten, dass diese Curve $\varkappa$ meistens nicht die vollständige, der bewegten Curve k_0 entsprechende Hüllbahncurve darstellt, und nur ein Bestandtheil derselben ist; denn, wenn k_0 noch durch eine zweite auf p_0 rollende Hülfsrollcurve erzeugt werden kann, so wird auch von k_0 diejenige Curve umhüllt, welche jener Punkt beschreibt, indem diese zweite Hülfsrollcurve auf π rollt.

75. **Construction der Hüllbahncurve, welche bei Kreisrollung durch eine cyclische Curve erzeugt wird.** In Fig. 195 rollt ein Kreis p_0 eines bewegten Systems S auf einem festen Kreise π. In diesem System S ist als erzeugende Curve k_0 eine dreispitzige Hypocycloide $k_0 k_0^1 k_0^2$ gegeben; dieselbe wird durch einen Peripheriepunkt des in p_0 rollenden Hülfsrollkreises q_0 beschrieben, der dreimal so klein als der Kreis p_0 ist. Hat dieser Hülfsrollkreis q_0 im Kreise p_0 von dem mit $\mathfrak{P}_0$ und P_0 bezeichneten Berührungspunkte ausgehend bis P_0^1 eine volle Abrollung beendet, also ein Drittel des Kreises p_0 durchlaufen, so hat sein von P_0 ausgehender Peripheriepunkt den von den Spitzen P_0, P_0^1 begrenzten Hypocycloidenbogen $P_0 k_0 P_0^1$ beschrieben. Lassen wir dagegen den Hülfsrollkreis q_0 auf dem festen Kreise π von $\mathfrak{P}_0$ bis $\mathfrak{P}^1$ eine volle Abrollung vollenden, dann erzeugt jener von $\mathfrak{P}_0$ ausgehende Peripheriepunkt den von den Spitzen $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}^1$ begrenzten Epicycloidenbogen $\mathfrak{P}_0 \varkappa \mathfrak{P}^1$. Demnach entspricht dem bewegten Hypocycloidenbogen $P_0 k_0 P_0^1$ für die von $\mathfrak{P}_0$ bis $\mathfrak{P}^1$ erfolgte Rollung des Systems S der Epicycloidenbogen $\mathfrak{P}_0 \varkappa \mathfrak{P}^1$ als Hüllbahncurve. Anderseits wird die Hälfte $P_0 k_0^2$ des von den Spitzen P_0, P_0^2 begrenzten Hypocycloidenbogens auch von einem zweiten Hülfsrollkreise $\mathfrak{q}_0$ erzeugt, wenn dieser Kreis in p_0 von P_0 bis P_0^1 rollt und die Anfangslage seines be-

[1]) Camus, *„Sur la figure des dents des roues et des ailes des pignons pour rendre les horloges plus parfaites“*. *Mémoires de l'Academie.* 1733. p. 117.

schreibenden Peripheriepunktes sich in P_0 befindet. Derselbe Peripheriepunkt beschreibt aber, indem der zweite Hülfsrollkreis $\mathfrak{q}_0$ auf dem festen Kreise π von $\mathfrak{P}_0$ bis $\mathfrak{P}^1$ rollt, den Epicycloidenbogen $\mathfrak{P}_0 \varkappa^2$, der für die betreffende Rollung des bewegten Systems S die Hüllbahncurve des bewegten Hypocycloidenbogens $P_0 k_0^2$ ist. Der von der Mitte k_0^1 des Hypocycloidenbogens $P_0^1 k_0^1 P_0^2$ ausgehende Peripheriepunkt des Hülfsrollkreises $\mathfrak{q}_0$, der in p_0 von P_0 bis P_0^1 rollt, beschreibt den Hypocycloidenbogen $k_0^1 P_0^1$; und ferner erzeugt derselbe Punkt, wenn der Kreis $\mathfrak{q}_0$ auf π bis $\mathfrak{P}^1$ rollt, den Epicycloidenbogen $k_0^1 \varkappa^1 \mathfrak{P}^1$ als entsprechende Hüllbahncurve des bewegten Hypocycloidenbogens $k_0^1 P_0^1$. Aus dieser Darlegung erkennt man leicht, dass die weitere Fortsetzung aller dieser Theile der vollständigen Hüllbahn, welche der bewegten dreispitzigen Hypocycloide entspricht, aus wiederkehrenden congruenten Zügen gebildet wird.

Es ist in Fig. **196** zur Erläuterung des betrachteten Bewegungsvorganges noch die Lage der bewegten dreispitzigen Hypocycloide und des rollenden Kreises p gezeichnet, wenn derselbe auf dem festen Kreise π bis zur Mitte $\mathfrak{P}$ des Kreisbogens $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}^1$ gerollt ist. Man erkennt auch hier, da vom Berührungspunkte oder Pol $\mathfrak{P}$ drei Normalen $\mathfrak{P}K$, $\mathfrak{P}K^1$, $\mathfrak{P}K^2$ an die dreispitzige Hypocycloide gezogen werden können, dass die entsprechende Hüllbahncurve aus drei gesonderten Curven bestehen muss. Die drei Spitzen oder Rückkehrpunkte P, P^1, P^2 beschreiben als Peripheriepunkte des rollenden Kreises p drei congruente Epicycloiden, die wir als ausserordentliche Bestandtheile der vollständigen Hüllbahncurve ansehen müssen; denn sie bilden mit den genannten drei gesonderten Curven zusammen das Gesamterzeugniss der bewegten dreispitzigen Hypocycloide in dem festen System. Wenn schon in diesem verhältnissmässig einfachen Falle bei der dreispitzigen Hypocycloide die betreffende vollständige Hüllbahncurve eine so complicirte Gestalt besitzt, so ist wohl zu erwarten, dass bei einer Trochoide die Gestaltung der zugehörigen vollständigen Hüllbahncurve schwer veranschaulicht werden kann.

Wird in Fig. **197** die verschlungene Hypotrochoide $k_0 k_0^1 k_0^2$ durch den im Kreise p_0 rollenden Hülfsrollkreise q_0 erzeugt, der dreimal so klein als der Kreis p_0 ist, und geht der beschreibende Punkt, wenn die Kreise p_0, π, q_0 sich in dem Punkte $\mathfrak{P}_0$ berühren, von dem auf der Centralen liegenden Punkte K_0 aus, dann beschreibt derselbe Punkt durch Rollung des Kreises q_0 auf π die verschlungene Epitrochoide $K_0\varkappa$, die ein Bestandtheil der entsprechenden Hüllbahncurve ist. Durch eine volle Abrollung des Kreises q_0 in p_0 bis P_0^1 oder auf π bis $\mathfrak{P}^1$ entsteht resp. der Hypotrochoidenbogen $K_0 k_0 K_0^1$ und der Epitrochoidenbogen $K_0 \varkappa K^1$. Gleichzeitig erzeugt derselbe Hypotrochoidenbogen $K_0 k_0 K_0^1$ noch zwei andere nicht gezeichnete Curventheile der entsprechenden Hüllbahncurve; denn es gehen ausser $\mathfrak{P}_0 K_0$, wie sich aus der Anschauung ergiebt, von $\mathfrak{P}_0$ noch zwei andere Normalen an den Hypotrochoidenbogen $K_0 k_0 K_0^1$. Es wird die Hypotrochoide $k_0 k_0^1 k_0^2$ auch durch Rollung eines zweiten Kreises $\mathfrak{q}_0$ in dem bewegten System erzeugt; derselbe rollt aber in einem nicht mit p_0 identischen Kreise und kann daher bei der Erzeugung der entsprechenden Curventheile der Hüllbahncurve nicht verwendet werden. Wollen wir noch den Curventheil $K_0 B \varkappa^2$ construiren, der dem Hypotrochoidenbogen $K_0 k_0^2$ entspricht, wenn p_0 auf π bis $\mathfrak{P}^1$ rollt, so müssen wir die Construction nach dem allgemeinen Verfahren ausführen. Wir ziehen von einem Punkte B_0 dieses Trochoidenbogens an der convexen Seite die Normale $B_0 P_0^b$ bis an den Kreis p_0; machen auf dem Radius $P_0^b F_0$ dieses Kreises die Strecke $P_0^b N_0 = P_0^b B_0$, ferner auf π den Bogen $\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}^b = \mathfrak{P}_0 P_0^b$; zeichnen an der Verlängerung des Radius $\Phi \mathfrak{P}^b$ des Kreises π das Dreieck $\mathfrak{P}^b NB$, welches dem Dreieck $P_0^b N_0 B_0$ congruent ist, dann ist B ein Punkt des Curventheiles $K_0 \varkappa^2$, von dem in einem Punkte Ξ eine durch Punktirung gekennzeichnete Abzweigung ausgeht. Es ist in diesem Falle sehr schwierig, die vollständige Hüllbahncurve zu construiren; aber man erkennt leicht, da anschaulich vom Punkte $\mathfrak{P}_0$ sechs Normalen an die verschlungene Trochoide gezogen werden können, dass diese Hüllbahncurve aus sechs gesonderten Curventheilen bestehen muss.

76. **Construction der Hüllbahncurve, welche bei Kreisrollung durch eine Kreisevolvente erzeugt wird.** In Fig. **198** ist an dem Kreise p_0, der auf dem festen Kreise π rollt, eine Kreisevolvente k_0 befestigt, die durch Rollen einer Tangente $K_0 a_0$ an einem mit p_0 concentrischen Kreise o_0 vom Punkte K_0 beschrieben wird, und deren Spitze oder Rückkehrpunkt J_0 sich in der Anfangslage auf der Centralen befindet. Da die Normalen der Kreisevolvente k_0 den rollenden Kreis p_0 unter einem constanten Winkel schneiden, so bilden auch die Normalen der entsprechenden Hüllbahncurve $\varkappa$ denselben constanten Winkel mit dem Kreise π und umhüllen somit den zu π concentrischen Kreis ω, der dadurch bestimmt ist, dass er die durch den Pol $\mathfrak{P}_0$ gehende Normale $K_0 a_0$ der Kreisevolvente k_0, beziehlich die von $\mathfrak{P}_0$ an den Kreis o_0 gelegte Tangente $\mathfrak{P}_0 a_0$ im Fusspunkte α des von Φ auf $\mathfrak{P}_0 a_0$ gefällten Lothes

berührt. Demnach umhüllt k_0 eine Kreisevolvente $\varkappa$, welche der mit K_0 coincidirende Punkt Γ beschreibt, wenn die Tangente $\Gamma\alpha$ auf dem Kreise ω rollt. Dies wird auch in anderer Weise bewiesen, wenn wir beachten, dass der Berührungspunkt a_0 der von $\mathfrak{P}_0$ an den Kreis o_0 gelegten Tangente der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt K_0 der Kreisevolvente k_0 ist. Denn denken wir uns in bekannter Weise den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt für den Punkt Γ der Hüllbahncurve $\varkappa$ bestimmt, indem durch $\mathfrak{P}_0$ auf $\mathfrak{P}_0 a_0$ eine Senkrechte, durch ihren unendlich fernen Schnittpunkt mit $F_0 a_0$ eine Gerade nach Φ gezogen wird, so trifft diese Gerade die gemeinschaftliche Tangente $\mathfrak{P}_0 a_0$ der Kreise o_0, ω in dem Punkte α, und folglich ist α der genannte entsprechende Krümmungsmittelpunkt.

Die zu dem Rückkehrpunkte J_0 gehörende Normale der Kreisevolvente k_0 schneidet den rollenden Kreis p_0 in den beiden zur Centralen $F_0\Phi$ symmetrisch liegenden Punkten P_0', P_0''. Wird auf π der Bogen $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}'$ gleich $\mathfrak{P}_0 P_0'$ und auf der von $\mathfrak{P}'$ an den Kreis ω gelegten Tangente $\mathfrak{P}'\Delta$ die Strecke $\mathfrak{P}'\Delta$ gleich $P_0' J_0$ gemacht, dann tritt, wenn p_0 auf π bis $\mathfrak{P}'$ rollt, der Rückkehrpunkt J_0 an der Stelle Δ mit der erzeugten Hüllbahncurve $\varkappa$ in Berührung. Der Punkt Δ ist auch der Schnitt, den $\varkappa$ mit dem um Φ beschriebenen, durch a_0 gehenden Kreis bildet; denn wegen der congruenten Dreiecke $\Phi\mathfrak{P}_0 a_0$, $\Phi\mathfrak{P}'\Delta$ ist $\Phi\Delta = \Phi a_0$. Demnach ergiebt sich dieser Punkt Δ, wenn die Kreisevolvente $\varkappa$ gezeichnet ist, einfacher vermittelst des genannten Kreises.

Während der Kreis p_0 von $\mathfrak{P}_0$ bis $\mathfrak{P}'$ rollt, erzeugt der bewegte Evolventenbogen $K_0 J_0$ den entsprechenden Theil $\Gamma\Delta$ der Hüllbahncurve $\varkappa$, und beim weiteren Rollen wird von Δ an die bis ins Unendliche gehende, gestrichelt gezeichnete Fortsetzung der Kreisevolvente $\varkappa$ durch den anderen symmetrischen Zweig k_0^1 der bewegten Kreisevolvente erzeugt, der durch Gestrichelung von k_0 unterschieden ist. Rollt dagegen der Kreis p_0 im entgegengesetzten Sinne von $\mathfrak{P}_0$ ausgehend auf π, dann entsteht der von Γ bis zur Spitze B gehende Theil von $\varkappa$; und um den Punkt L_0 der Kreisevolvente k_0 zu bestimmen, der in B zur Berührung kommt, müssen wir in B an den Kreis ω nach der Seite der rollenden Bewegung die Tangente $\mathsf{B}\mathfrak{P}^1$ ziehen, die π in $\mathfrak{P}^1$ trifft, auf p_0 den Bogen $\mathfrak{P}_0 P_0^1$ gleich $\mathfrak{P}_0\mathfrak{P}^1$ und auf der an den Kreis o_0 gelegten Tangente $P_0^1 L_0$ die Strecke $P_0^1 L_0$ gleich $\mathfrak{P}^1\mathsf{B}$ machen. Einfacher ergiebt sich aber dieser Punkt L_0 als Schnitt von k_0 mit dem um F_0 beschriebenen, durch α gehenden Kreise; denn wegen der congruenten Dreiecke $F_0 \mathfrak{P}_0 \alpha$, $F_0 P_0^1 L_0$ ist $F_0 L_0 = F_0 \alpha$. Der nicht gezeichneten über L_0 hinausgehenden Fortsetzung von k_0 entspricht als Hüllbahncurve der zu $\mathrm{B}\varkappa$ symmetrische, nicht gezeichnete Zweig dieser Kreisevolvente. Anderseits wird aber, wenn der auf p_0 liegende Punkt P_0'' der in J_0 an k_0 gezogenen Normale bei der betrachteten Rollung in $\mathfrak{P}''$ mit π in Berührung tritt und $P_0'' J_0$ nach $\mathfrak{P}'' \Delta^1$ gelangt, die bewegte Kreisevolvente k_0 von dem Punkte Δ^1 an, der bezüglich $F_0\Phi$ zu Δ symmetrisch liegt, den ins Unendliche fortgehenden Theil $\Delta^1\varkappa^1$ der symmetrischen zweiten Kreisevolvente $\mathrm{B}^1\varkappa^1$ erzeugen, die in Bezug auf $F_0\Phi$ zur Kreisevolvente $\mathrm{B}\varkappa$ symmetrisch ist. Die von L_0 an den Kreis o_0 gelegte, bis zum Punkte P_0^2 des Kreises p_0 gehende Tangente $L_0 P_0^2$ gelangt, wenn P_0^2 in $\mathfrak{P}^2$ mit π zur Berührung kommt, nach $\mathfrak{P}^2\Psi$; und somit tritt L_0 auch im Punkte Ψ mit $\varkappa^1$ in Berührung. Der gestrichelte Theil $\Delta^1\mathrm{B}^1$ der Kreisevolvente $\varkappa^1$, so wie die nicht gezeichnete, von der Spitze B^1 aus weitergehende symmetrische Fortsetzung wird von $J_0 k_0^1$ umhüllend beschrieben, und der zu L_0 symmetrische Punkt L_0^1 tritt mit der Spitze B^1 in Berührung. Demnach besteht die Hüllbahncurve, die von den beiden symmetrischen Zweigen der bewegten Kreisevolvente $k_0 J_0 k_0^1$ erzeugt wird, aus den beiden zu $F_0\Phi$ symmetrisch liegenden, congruenten, vollständigen Kreisevolventen $\varkappa$, $\varkappa^1$; und ausserdem muss auch die vom Rückkehrpunkte J_0 beschriebene, gestreckte Trochoide ι, welche $\varkappa$, $\varkappa^1$ resp. in Δ, Δ^1 berührt und punktirt gezeichnet ist, als ein ausserordentlicher Bestandtheil der Hüllbahncurve angesehen werden.

Betrachten wir nur den begrenzten Theil $J_0 k_0 L_0$ der bewegten Kreisevolvente und wird die Rollung von $\mathfrak{P}'$ ausgehend über $\mathfrak{P}_0$ bis $\mathfrak{P}^2$ fortgeführt, dann wird zunächst $\Delta\Gamma$ von $J_0 K_0$, weiter $\Gamma\mathrm{B}$ von $K_0 L_0$ erzeugt. Gleichzeitig beschreibt aber J_0 die gestreckte Trochoide $\Delta J_0 \Delta^1 \iota$ und $J_0 k_0 L_0$ beginnt in Δ^1 die Erzeugung des Curvenstückes $\Delta^1\varkappa^1\Psi$. Demnach besteht, wenn wir die noch vom Punkte L_0 beschriebene verschlungene Trochoide unbeachtet lassen die entsprechende Hüllbahncurve aus den beiden von Δ ausgehenden Zweigen $\Delta\Gamma\mathrm{B}$, $\Delta J_0 \Delta^1 \iota$ und aus dem sich in Δ^1 ansetzenden dritten Zweige $\Delta^1\varkappa^1\Psi$.

Einfacher und übersichtlicher gestaltet sich die Erzeugung der Hüllbahncurve, wenn insbesondere in Fig. 199 die Kreisevolvente $K_0 k_0$, welche mit dem rollenden Kreise p_0 verbunden ist, durch Rollen einer Tangente $K_0 T$ auf diesem Kreise von dem Punkte K_0 beschrieben wird, der vom Pol $\mathfrak{P}_0$ ausgeht. Demnach ist die entsprechende Hüllbahncurve eine Kreisevolvente $\Gamma\varkappa^1$, welche durch den vom Pol $\mathfrak{P}_0$ ausgehenden Punkt Γ erzeugt wird, wenn die Tangente $\Gamma\,T$ auf dem festen Kreise π rollt, und zwar entspricht von dieser Kreisevolvente der ins Unendliche fortgesetzte Zweig $\Gamma\,\varkappa^1$ als Hüllbahncurve dem unendlich langen Zweig $K_0\,k_0$ der bewegten Kreisevolvente. Ist z. B. der Peripheriepunkt P_0^1 des im Sinne $\mathfrak{P}_0\,\pi\,\mathfrak{P}^1$ rollenden Kreises p_0 nach $\mathfrak{P}^1$ gekommen, dann ist die betreffende Normale $M_0\,P_0^1$ der Kreisevolvente k_0 nach $\Sigma\,\mathfrak{P}^1$ gelangt. Bei der Rollung im entgegengesetzten Sinne erzeugt der andere unendlich lange nicht gezeichnete Zweig der bewegten Kreisevolvente als Hüllbahncurve den zu $\Gamma\,\varkappa^1$ symmetrischen nicht gezeichneten Zweig. Jene beiden congruenten Kreisevolventen $\varkappa$, $\varkappa^1$, welche vorhin in dem allgemeinen Falle die vollständige Hüllbahncurve bildeten, sind hier in eine einzige Kreisevolvente $\varkappa^1$ zusammengefallen. Die Kreise p_0, π sind hier die Grundkreise der Kreisevolventen k_0, $\varkappa^1$, und hiermit ist der Grenzfall erreicht, der nicht überschritten werden kann. Denn wäre an dem Kreise p_0 eine Kreisevolvente k_0 befestigt, deren Grundkreis grösser als p_0 ist, deren Normalen also p_0 nicht schneiden, so kann diese Kreisevolvente keine Hüllbahncurve erzeugen.

Die Erzeugung dieser Hüllbahncurven ist für das Verständniss der Verzahnungen von grosser Wichtigkeit und deshalb wollen wir in Fig. 200 auch den Fall betrachten, bei welchem der Kreis p_0 in dem Kreise π rollt. Die an p_0 befestigte zu dem Grundkreise o_0 gehörende Kreisevolvente $k_0\,J_0\,k_0^1$, deren Rückkehrpunkt J_0 in seiner Anfangslage auf der Centralen $F_0\,\Phi$ liegt, umhüllt die beiden Kreisevolventen $\varkappa$, $\varkappa^1$, deren gemeinsamer Grundkreis ω die vom Pol $\mathfrak{P}_0$ an o_0 gelegte Tangente $\mathfrak{P}_0\,a_0$ in α berührt. Um auch hier den Vorgang der Erzeugung in seinen Einzelheiten zu überschauen, ziehen wir an die bewegte Kreisevolvente $k_0\,J_0\,k_0^1$ im Rückkehrpunkte J_0 die Normale, welche p_0 beiderseits in P_0', P_0'' schneidet, beschreiben um Φ den durch a_0 gehenden Kreis, der auf den betreffenden Zweigen der beiden erzeugten Kreisevolventen die Punkte Δ, Δ^1 bestimmt, ebenso um F_0 den durch α gehenden Kreis, der auf den Zweigen k_0, k_0^1 resp. die Punkte L_0, L_0^1 bestimmt und bezeichnen den momentanen Berührungspunkt von k_0, $\varkappa$ mit K_0 und Γ. Wenn nun p_0 bis $\mathfrak{P}'$ rollt, so dass P_0' nach $\mathfrak{P}'$ gelangt, dann erhält die Normale $P_0'\,J_0$ die Lage $\mathfrak{P}'\Delta$ und der Evolventenbogen $K_0\,J_0$ erzeugt das Stück $\Gamma\Delta$ der entsprechenden Hüllbahncurve. Beim Weiterrollen in diesem Sinne erzeugt der Bogen $J_0\,L_0^1$ des anderen Zweiges k_0^1 der bewegten Kreisevolvente das Stück $\Delta\,\mathsf{B}$ und hier tritt der Punkt L_0^1 mit der Spitze B in Berührung. Von da an entsteht durch den ins Unendliche ausgedehnten Theil $L_0^1 k_0^1$ der nicht gezeichnete zu $B\varkappa$ symmetrische Zweig. Rollt dagegen p_0 im entgegengesetzten Sinne, dann erzeugt der unendlich lange Theil $K_0 k_0$ die ins Unendliche gehende Fortsetzung $\Gamma\varkappa$ der Hüllbahncurve. Wenn bei dieser Rollung der Peripheriepunkt P_0'' an der Stelle $\mathfrak{P}''$ mit π in Berührung tritt, ist die Normale $J_0 P_0''$ nach $\Delta^1 \mathfrak{P}''$ gekommen; demnach beginnt von Δ^1 an durch $J_0 L_0$ die Erzeugung des Stückes $\Delta^1 B^1$. Und beim Weiterrollen wird durch $L_0 k_0$ der unendlich lange Zweig $B^1 \varkappa^1$ der zweiten Kreisevolvente umhüllend beschrieben.

77. **Construction der Hüllbahncurve, welche bei Rollung eines Kreises auf einer Geraden von einer Kreisevolvente erzeugt wird.** In Fig. **201** ist schliesslich noch der besondere Fall dargestellt, in welchem der Kreis π unendlich gross ist, also durch eine Gerade π vertreten wird. Die von der bewegten Kreisevolvente $k_0 J_0 k_0^1$ erzeugte Hüllbahncurve geht hier in zwei zu $F_0 \Phi^\infty$ symmetrisch liegende Gerade $\varkappa$, $\varkappa^1$ über; denn, da alle Normalen der bewegten Kreisevolvente den auf π rollenden Kreis p_0 unter gleichem Winkel schneiden, so bilden auch alle Normalen der Hüllbahncurve gleiche Winkel mit der Geraden π, und demnach besteht die Hüllbahncurve einentheils aus zwei zu $F_0 \Phi^\infty$ symmetrisch gelegenen Geraden $\varkappa$, $\varkappa^1$, die beziehlich auf den vom Pol $\mathfrak{P}_0$ an den Grundkreis o_0 gelegten Tangenten senkrecht stehen. Die durch den Berührungspunkt a_0 zu π parallel gezogene Gerade bestimmt auf $\varkappa$, $\varkappa^1$ die Punkte Δ, Δ^1. Nehmen wir an, der Peripheriepunkt P_0' sei in $\mathfrak{P}'$ mit π in Berührung gekommen, dann hat die Normale $P_0' J_0$ die Lage $\mathfrak{P}' \Delta$ erhalten, und $\mathfrak{P}' \Delta$ ist auf $\varkappa$ senkrecht. Lassen wir nun den Kreis p_0 von $\mathfrak{P}'$ bis $\mathfrak{P}_0$ rollen, so erzeugt der Evolventenbogen $J_0 K_0$ die Strecke $\Delta \Gamma$, und beim Weiterrollen entspricht $K_0 k_0$ die unendlich lange Strecke $\Gamma\varkappa$. Ist bei dieser Rollung P_0'' nach $\mathfrak{P}''$ gelangt, die Normale $P_0'' J_0$ in die Lage $\mathfrak{P}'' \Delta^1$ gekommen, dann beginnt in diesem Momente durch $J_0 k_0$ die Erzeugung der unendlich langen Strecken $\Delta^1 \varkappa^1$ auf den anderen Geraden. Die gestrichelten Theile der Geraden $\varkappa$, $\varkappa^1$ werden von dem zweiten gestrichelten Zweige k_0^1 der bewegten Kreisevolvente umhüllend beschrieben. Ausser den beiden Geraden muss auch die vom Rückkehrpunkte J_0 beschriebene gestreckte Cycloide, welche diese Geraden in Δ, Δ^1 berührt, als ein ausserordentlicher Bestandtheil der vollständigen Hüllbahncurve angesehen werden. Wenn insbesondere der rollende Kreis p_0 auch der Grundkreis der bewegten Kreisevolvente ist, dann verschwinden die beiden

Geraden, und der ordentliche Bestandtheil der entsprechenden Hüllbahn wird durch einen mit $\mathfrak{P}_0$ coincidirenden Punkt der Geraden π vertreten; die Kreisevolvente gleitet in diesem Falle beständig durch diesen Punkt.

78. **Die Kreisevolvente durch Rollung einer logarithmischen Spirale erzeugt.** In Fig. 202 sind $K_0 P_0$, $K_0' P_0'$, $K_0'' P_0''$, .. unendlich nahe Normalen einer zu dem Grundkreise o_0 gehörenden Kreisevolvente k_0, welche mit dem auf π rollenden Kreise p_0 verbunden ist, und ferner sind P_0, P_0', P_0'', .. die Schnittpunkte, in denen diese Normalen den rollenden Kreis p_0 einerseits unter einem constanten Winkel φ schneiden. Werden nun die unendlich schmalen Dreiecke $K_0 \mathfrak{P}_0 Q'$, $K_0 Q' Q''$, .. so construirt gedacht, dass die unendlich kleinen Seiten $P_0 Q'$, $Q' Q''$, .. resp. gleich $P_0 P_0'$, $P_0' P_0''$, .. die endlichen Seiten $K_0 \mathfrak{P}_0$, $K_0 Q'$, $K_0 Q''$ beziehlich gleich $K_0 P_0$, $K_0' P_0'$, $K_0'' P_0''$ .. sind, dann bilden die Punkte $\mathfrak{P}_0 Q' Q''$ ... eine Hülfscurve q_0, welche die von K_0 ausgehenden Fahrstrahlen unter dem constanten Winkel φ schneidet und demnach eine logarithmische Spirale ist. Rollt also diese logarithmische Spirale q_0 an dem Kreise p_0, so beschreibt der mit ihr verbundene Punkt K_0 die Kreisevolvente k_0[1]). Die Kreisevolvente $\varkappa$, welche von der Kreisevolvente k_0 als Hüllbahn erzeugt wird, wenn der Kreis p_0 auf einem festen Kreise π rollt, wird hiernach auch von dem Punkte K_0 beim Rollen von q_0 auf π beschrieben. Vermittelst der zweiten Schnittpunkte, welche die Normalen der Kreisevolvente k_0 anderseits mit dem Kreise p_0 bilden, ergiebt sich eine zweite symmetrisch congruente logarithmische Spirale, von der die gleichen Beziehungen gelten.

79. **Construction der Hüllbahncurve, welche bei Kreisrollung durch einen Kreis erzeugt wird.** Ist in Fig. 203 an den Kreis p, der auf dem festen Kreise π rollt, ein Kreis k befestigt, so kann die Hüllbahncurve des bewegten Kreises k leicht construirt werden. Wir nehmen an, der Mittelpunkt dieses Kreises k liege insbesondere auf der Peripherie des rollenden Kreises p und wenn dieser rollende Kreis von p_0 ausgeht, befinde sich der an ihm befestigte Kreis in k_0, sein Mittelpunkt C_0 coincidire mit dem Berührungspunkt $\mathfrak{P}_0$ der Kreise p_0, π. Der von C_0 ausgehende Kreismittelpunkt, der ein Peripheriepunkt des rollenden Kreises ist, beschreibt eine Epicycloide γ, die in $\mathfrak{P}_0$ einen Rückkehrpunkt besitzt; und der bewegte von k_0 ausgehende Kreis k erzeugt eine Hüllbahn-

[1]) Diese Erzeugung der Kreisevolvente wurde von Airy mitgetheilt in den *Transactions of the Cambrigde Society* 1827. p. 277.

curve, die aus den beiden Curventheilen $\varkappa$, $\varkappa^1$, den beiden Aequidistanten der Epicyloide γ, besteht. Ist der Kreis p_0 auf π von $\mathfrak{P}_0$ bis $\mathfrak{P}$ gerollt, also nach p gelangt und mit ihm der Kreis k_0 in die Lage k gekommen, dann brauchen wir nur durch den Mittelpunkt C des Kreises k an die Epicycloide γ die Normale $C\mathfrak{P}$ zu ziehen, welche diesen Kreis beiderseits in den Punkten K, K^1 der äquidistanten Curven $\varkappa$, $\varkappa^1$ schneidet. Ist die Epicycloide γ gezeichnet und werden um Punkte derselben Kreise beschrieben, die dem Kreise k gleich sind, dann kann man auch die Curven $\varkappa$, $\varkappa^1$ berührend an diese Kreise zeichnen. Construiren wir die Evolute γ^I der Epicycloide γ, so können wir uns die beiden Curven $\varkappa$, $\varkappa^1$ auch als Evolventen von γ^I entstanden denken. Demnach erkennen wir, dass die Curve $\varkappa$ an der Stelle, wo sie an die Evolute γ^I stösst, einen Rückkehrpunkt Ξ_1 besitzt. Dieser Punkt Ξ_1 entspricht als Krümmungsmittelpunkt dem Punkte C_1 der Epicycloide γ, dessen zugehöriger Krümmungsradius $C_1\Xi_1$ dem Radius des Kreises k gleich ist. Ebenso hat auch die Curve $\varkappa^1$ an der Stelle, wo sie die Evolute γ^I trifft, einen Rückkehrpunkt Ξ_1^1, der in Bezug auf die Centrale ΦF_0 zu Ξ_1 symmetrisch liegt. Beim Beginn der Bewegung berührt der Kreis k_0 die Hüllbahncurve in den beiden Punkten K_0, K_0^1, die auf der in $\mathfrak{P}_0$ berührenden Tangente des Kreises π liegen. Es muss aber auch, da die Hüllbahncurve aus der vollen Umhüllung aller Lagen des bewegten Kreises k besteht, auch der Kreis k_0 als ein Bestandtheil der Hüllbahncurve angesehen werden, bei welcher der Kreis k_0 in den Punkten K_0, K_0^1 gleichsam eine beiderseitige Abzweigung von den äquidistanten Curven $\varkappa$, $\varkappa^1$ bildet. Durch die von $\mathfrak{P}_0$ im entgegengesetzten Sinne ausgehende Rollung des Kreises p_0 werden die Curven $\varkappa$, $\varkappa^1$ resp. über K_0, K_0^1, wie durch Gestrichelung angedeutet ist, in symmetrischen Zügen fortgeführt, die nach jeder Abrollung des Kreises p_0 in gleicher Gestalt wieder auftreten. Da der Evolutenbogen $\mathfrak{P}_0\Xi_1$ gleich dem Radius des Kreises k_0 ist, so liegen die Rückkehrpunkte Ξ_1, Ξ_1^1 stets innerhalb dieses Kreises, und die Aequidistante wird daher von dem Kreise k_0 durchschnitten. Je kleiner aber dieser Kreis ist, desto näher liegen jene Rückkehrpunkte an der Peripherie, so dass man bei verhältnissmässig kleinem Kreise k_0 diese Durchschneidung bei der nachfolgenden praktischen Anwendung auf die Verzahnungen unbeachtet lassen kann. Zu dem Punkte C_ε, der auf der Epicycloide γ der halben Abrollung des Kreises p_0 entspricht, gehört als Krümmungsmittelpunkt der Rückkehrpunkt Ξ_ε der mit γ ähnlichen Evolute γ^I; demnach verschwinden, wenn der Radius des Kreises k grösser oder gleich $C_\varepsilon \Xi_\varepsilon$ ist, die Rückkehrpunkte Ξ_1, Ξ_1^1 auf den Curven $\varkappa$, $\varkappa^1$.

80. **Die Zahncurven und die Eingriffscurve im Allgemeinen.** Ist an dem Kreise p, der in Fig. **204**, Taf. XII auf dem festen Kreise π rollt, eine beliebige Curve k befestigt, deren Normalen den Kreis p schneiden, so erhalten wir die entsprechende Hüllbahncurve punktweise nach der bekannten Construction. Wir ziehen in einem beliebigen Punkte E der gegebenen Curve k die Normale EP_I bis an den Kreis p; machen auf dem Radius $P_I F$ dieses Kreises die Strecke $P_I N = P_I E$, ferner vom Berührungspunkte $\mathfrak{P}$ der Kreise p, π aus auf π den Bogen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_I = \mathfrak{P} P_I$; zeichnen an der Verlängerung des Radius $\Phi \mathfrak{P}_I$ des Kreises π das gleichschenkelige Dreieck $\mathfrak{P}_I N_I E_I$, welches dem Dreieck $P_I N E$ congruent ist. Demnach ist E_I ein Punkt der Hüllbahncurve $\varkappa$ und diese berührt in der gezeichneten Lage die Curve k in dem Punkte A, dessen zugehörige Curvennormale durch $\mathfrak{P}$ geht.

Nehmen wir nun an, die Kreise p, π drehen sich beide resp. um ihre festgehaltenen Mittelpunkte F, Φ in einem festen System $F\Phi$, so dass die Curven k, $\varkappa$ in steter Berührung bleiben, dann rollen die beiden rotirenden Kreise auf einander und ihre in dem festen System $F\Phi$ stattfindende Drehungen sind proportional. Während der Peripheriepunkt $\mathfrak{P}_I$ durch Drehung des Kreises π im Sinne des Pfeiles σ nach dem Punkte $\mathfrak{P}$ in die Centrale $F\Phi$ gelangt, rollen die beiden Kreisbogen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_I$, $\mathfrak{P} P_I$ auf einander. Der Drehung des Kreises π um den Winkel $\mathfrak{P}_I \Phi \mathfrak{P}$ entspricht demnach die entgegengesetzte Drehung des Kreises p um den Winkel $P_I F \mathfrak{P}$ im Sinne des Pfeiles s. Die Dreiecke $P_I N E$, $\mathfrak{P}_I N_I E_I$ bewegen sich durch diese Drehungen in die gemeinsame Lage $\mathfrak{P} N_1 E_1$. Die beiden auf einander gleitenden Curven k, $\varkappa$, die nach S. 33 Gleitcurven, bei der Verzahnung aber insbesondere Zahncurven, genannt werden, gelangen resp. in die Lagen k_1, $\varkappa_1$; und wir erhalten ihren entsprechenden Berührungspunkt E_1, indem wir an der Centralen ΦF das zu jenen Dreiecken congruente gleichschenkelige Dreieck $\mathfrak{P} N_1 E_1$ construiren. Während der gedachten Drehungen hat also der Berührungspunkt der Zahncurven sich in dem festen System $F\Phi$ auf einer Curve $\mathfrak{e}$ von A bis E_1 bewegt. Die Punkte dieser Curve $\mathfrak{e}$, welche die Eingriffscurve[1]) genannt

---

[1]) Diese von dem Berührungspunkte der Zahncurven beschriebene Curve wurde zuerst von Reuleaux in seiner „*Constructionslehre für den Maschinenbau.*" 1862. S. 321 eingeführt und dort Eingrifflinie genannt.

wird, kann man also durch Normalenziehung an eine der Curven k, $\varkappa$ bestimmen. Um eine andere Entstehung der Eingriffscurve $\mathfrak{e}$ zu gewinnen, nehmen wir an, es sei die Curve k durch einen von A ausgehenden Punkt beschrieben, der mit einer an dem Kreise p rollenden Curve q verbunden ist. Denken wir uns diese Hülfsrollcurve von $\mathfrak{P}$ bis P_I gerollt, so dass sie nach q_I, der beschreibende Punkt nach E gelangt, und verlegen wir das Dreieck $P_I N E$ nebst der Curve q_I resp. nach $\mathfrak{P} N_1 E_1$ und q_1, so ergiebt sich, dass jener mit der Curve q verbundene, von A ausgehende Punkt, der nach E_1 gelangt, auch die Eingriffscurve $\mathfrak{e}$ erzeugt, wenn die Curve q auf dem ruhenden Berührungselemente der Kreise p, π schleifend bewegt wird.[1])

81. **Definition der Stirnräder.** Die Praxis erfordert, dass durch continuirliche Drehung eines Rades eine proportionale Drehung eines zweiten Rades hervorgebracht wird und dass bei diesen Drehungen die Widerstände überwunden werden, welche eventuell auftreten. Eine proportionale Uebertragung der Drehung von einem Rade auf ein anderes würde am allereinfachsten erreicht, wenn wir die Flächen der beiden Kreise p, π in Fig. **204** als Grundflächen zweier materieller Rotationscylinder von zweckmässig gewählter Höhe betrachten, die sich um ihre in F, Φ auf der Zeichnungsebene senkrechten Axen drehen und infolge der Reibung auf einander rollen. Da die Uebertragung der Drehung in diesem Falle nur durch die Reibung bewirkt wird, so können auch auf diese Weise keine grösseren Widerstände überwunden werden; denn die Kraftgrösse, welche von dem einen dieser rotirenden Cylinder auf den anderen übertragen wird, ist durch die bald begrenzte Grösse der Reibung allein bedingt. Die Hervorbringung proportionaler Drehungen und gleichzeitige Ueberwindung grösserer Widerstände kann aber infolge unserer Darlegungen ermöglicht werden, wenn wir die beiden Kreise p, π durch zwei Räder ersetzen, welche sich um zwei in F und Φ auf der Zeichnungsebene senkrechte Axen drehen, und diese Räder an Stelle der Gleitcurven k, $\varkappa$ mit auf einander gleitenden widerstandsfähigen Cylinderflächen versehen, welche den Axen parallel sind. Durch die Drehung des Rades $\Phi\pi$ gleitet die mitgedrehte Cylinderfläche $\varkappa$ an der anderen Cylinderfläche k und setzt dadurch das Rad Fp in proportionale Drehung, die aber nur so lange vor sich geht, bis die

[1]) Vergl. Blaha, *„Theorie der Verzahnungen“*. *Technische Blätter*. 1877. B. 9. S. 73.

Berührung der auf einander gleitenden begrenzten Cylinderflächen aufhört. Bevor dies geschieht, müssen, damit eine continuirliche Drehung stattfindet, zwei andere gleichgestaltete gleitende Cylinderflächen $\varkappa_1$, k_1 in Berührung gelangen u. s. f. Die Cylinderflächen k, k_1 und $\varkappa$, $\varkappa_1$ müssen daher auf den Kreisen p, π gleiche Bogenstücke KK_{11}, $\Gamma\Gamma_{11}$, welche aliquote Theile dieser Kreise sind, zwischen sich fassen, und ferner muss die Anordnung so getroffen werden, dass jede Cylinderfläche des einen Rades durch zweckmässig ausgehöhlte Lücken in dem anderen frei hindurchgehen kann. Damit die Drehung nicht nur in dem einen, sondern auch in dem anderen Sinne erfolgen kann, müssen die Räder anderseits mit entsprechenden Cylinderflächen versehen sein, welche der Einfachheit wegen meistens zu jenen Cylinderflächen k, $\varkappa$ beziehlich symmetrisch gestaltet sind. Somit werden durch diese Cylinderflächen die Zähne der in einander greifenden Zahnräder gebildet, und diese Zähne müssen congruente Formen besitzen, damit der Eingriff in beständiger Folge vor sich gehen kann. Die so mit cylindrisch geformten Zähnen versehenen Zahnräder, deren Axen parallel sind, werden **Stirnräder** genannt; und die beiden aufeinander rollenden Kreise p, π, die nur in geometrischer Hinsicht vorhanden sind, heissen die **Theilkreise**, **Rollkreise** oder **Polkreise**. Jedes Zahnrad besitzt so viel Zähne als der betreffende Theilkreis von jenen aliquoten Theilen enthält und daher müssen sich die Zähnezahlen der Räder wie die Radien der entsprechenden Theilkreise verhalten. Die Grösse jener gleichen aliquoten Bogentheile, KK_{11}, $\Gamma\Gamma_{11}$, die resp. auf den Theilkreisen p, π von je zwei auf einander folgenden gleich gelegenen Zahnflächen k, k_1 oder $\varkappa$, $\varkappa_1$ begrenzt werden, nennt man die **Zahntheilung** oder kurz die **Theilung**, und den zwischen zwei auf einander folgenden Zähnen befindlichen Zwischenraum die **Zahnlücke**. Das Bogenstück, welches auf den Theilkreisen während des Gleitens zweier Zahnflächen abrollt, wird der **Eingriffsbogen** genannt. Der aus den Theilkreisen nach ihrer Berührungsseite hin hervortretende Zahntheil heisst der **Kopf**, der übrige Zahntheil der **Fuss** des Zahnes; und die seitlichen Begrenzungsflächen dieses Fusses werden auch als **Zahnflanken** bezeichnet. Nach der angegebenen Construction der Gleitcurven können wir für die congruenten Zähne des einen Rades stets eine beliebige cylindrische Begrenzungsfläche annehmen und die entsprechende cylindrische Begrenzungsfläche der congruenten Zähne des anderen Rades bestimmen. Hierbei ist aber vor Allem zu beachten, dass nur solche Zahnflächen angewendet werden können, die praktisch ausführbar und zweckmässig sind; daher dürfen die Zahncurven k, $\varkappa$ keine Rückkehrpunkte und Schlingen besitzen, ferner wegen ihrer freien Bewegung keine solche Lücken in den Rädern erfordern, die der Stärke der Zähne nachtheilig sind. Es müssen diese Zahncurven auch derart gestaltet sein, dass die in ihrem jeweiligen Berührungspunkte an dieselben gezogenen Normalen $A\mathfrak{P}$, $E_1\mathfrak{P}$, . . ., welche beständig durch den auf der Centralen $F\Phi$ ruhenden Pol $\mathfrak{P}$ gehen, mit dieser Centralen Winkel bilden, die im Allgemeinen möglichst wenig von einem rechten Winkel abweichen, weil anderen Falls bei der praktischen Ausführung Pressungen und Axendrücke entstehen können, durch welche die Ueberwindung der Widerstände erschwert wird. Es ist daher die Aufgabe der Lehre von den Verzahnungen: die für die Praxis zweckmässigsten Zahnformen zu bestimmen, welche die mannigfach gestellten Anforderungen erfüllen. Werden die Zahncurven aus Bogenstücken von Epicycloiden, Hypocycloiden, Cycloiden, resp. aus Bogenstücken von Aequidistanten dieser Curven gebildet, oder werden die Zahncurven insbesondere durch Kreise, gerade Strecken, Trochoiden, und theilweise durch Punkte vertreten, dann heisst die in allen diesen Fällen entstehende Gestaltung der Zähne eine cycloidische Verzahnung. Wenn dagegen jede Zahncurve beider Räder aus einem Bogenstücke einer Kreisevolvente besteht, so wird in diesem Falle die Gestaltung der Zähne eine Evolventen-Verzahnung genannt. Die Verzahnung ist eine äussere oder eine innere, je nachdem die Zähne nach aussen oder innen gewendet sind. Wenn die beiden Aussenseiten der Theilkreise an einander rollen, haben beide Räder äussere Verzahnung; wenn aber die Aussenseite des kleineren Theilkreises und die Innenseite des grösseren Theilkreises an einander rollen, besitzt nur das kleinere Rad äussere Verzahnung, das grössere Rad dagegen innere Verzahnung. Im ersten Falle sagt man, dass bei den Rädern äusserer Eingriff, im zweiten, dass innerer Eingriff stattfindet. Diese Unterscheidung ist aber nicht in voller Strenge aufrecht zu erhalten; denn es kann insbesondere auch der Fall eintreten, dass ein Zahn den anderen stets berührend vollständig umläuft.

Die cycloidische Verzahnung.

82. **Kreisförmige Verzahnung des einen Rades und cycloidisch-aequidistante Verzahnung des anderen Rades. (Triebstock-Verzahnung).** In Fig. 205 sind die Theilkreise p, π, deren Radien sich beispielsweise wie 1 : 4 verhalten, gegeben, und für die Zähne des kleineren Rades Fp ist als Zahncurve der durch den Pol $\mathfrak{P}$ gehende Kreis k angenommen, dessen Mittelpunkt C auf dem Kreise p liegt. Halten wir den Kreis π fest und lassen wir auf demselben den Kreis p rollen, so beschreibt sein Peripheriepunkt C die Epicycloide γ, und dem mitbewegten Kreise k entspricht einerseits als Hüllbahn die Aequidistante $\Gamma\varkappa$ dieser Epicycloide. Diese Aequidistante bildet die Form der Zähne des anderen Rades $\Phi\pi$. Wir nehmen nun die Theilung CC_1 auf dem Theilkreise π gleich dem 8tel Theil des Umfanges desselben an; beschreiben um die Theilpunkte C, C_1 .. die gleichen Kreise k, k_1 .., machen auf π den Bogen $\Gamma\Gamma_1$ gleich $\frac{1}{32}$ vom Umfang des Theilkreises π, also gleich dem Bogen CC_1 und zeichnen an π die zu $\Gamma\varkappa$ congruente Curve $\Gamma_1\varkappa_1$. Dann berührt diese Curve den Kreis k_1 in dem auf der Geraden $C_1\mathfrak{P}$ liegenden Punkte E_1. Hierdurch ist die Länge der Zahncurve $\Gamma_1\varkappa_1$ bestimmt; denn diese Zahncurve muss den Kreis k_1 mindestens so lange berühren, bis die nachfolgende Zahncurve $\Gamma\varkappa$ im Punkte $\mathfrak{P}$ oder Γ ihre Berührung mit dem Kreise k beginnt. Nehmen wir nun auf dem Theilkreise π den Punkt Γ_1' an, dessen kleiner Abstand von dem Kreise oder Zahne k, den nothwendigen Spielraum des Zahnes in der Lücke darstellt, ziehen wir durch die Mitte μ des Bogens $\Gamma_1'\Gamma_1$ die radiale Gerade $\Phi\mu$, welche die Zahncurven $\Gamma_1\varkappa_1$ im Punkte Θ_1 trifft, und construiren wir zu derselben bezüglich dieser Geraden die anderseitige symmetrische Zahncurve $\Gamma_1'\Theta_{11}$, so ist hierdurch die Form des Kopfes für die Zähne des Rades $\Phi\pi$ bestimmt. Die Spitze Θ_1 des Zahnes, welche oberhalb des Berührungspunktes E_1 abgestumpft werden muss, würde in dem Rade Fp eine verschlungene Epitrochoide beschreiben, die constructiv bestimmt wird, wenn wir uns den Kreis p fest denken und auf demselben den Kreis π rollen lassen, an den der Punkt Θ_1 befestigt ist. Die Zähne dieser vorzugsweise in Mahlmühlen angewendeten Räder sind meistens aus Holz hergestellt; und die Zähne des Rades $\Phi\pi$ sind in den Radkranz radial eingekeilt: daher werden auch die Zahnlücken dieses Rades innerhalb des Theilkreises seitlich radial und unten kreisförmig begrenzt.

Die kreiscylindrischen Zähne des Rades Fp heissen in der Praxis **Triebstöcke**, und dieses Rad, welches aus zwei parallelen Kreisscheiben besteht, zwischen denen die Triebstöcke eingesetzt sind, wird **Drehling** oder **Drilling** genannt. Während der Kreis k_1 an der Zahncurve $\Gamma_1 \varkappa_1$ von Γ_1 bis E_1 entlang gleitet, ist von diesem Kreise k_1 nur der verhältnissmässig kleine Bogen $E_1 b$, der durch E_1 und den auf p liegenden Punkt b begrenzt wird, in Berührung gekommen. Aus diesem Grunde, und weil auch ein und derselbe Triebstock während einer Umdrehung des Rades $\Phi\pi$ bei dem angenommenen Theilkreisverhältniss 1 : 4 vier mal auf vier verschiedenen Zähnen dieses Rades gleitet, müssen die Triebstöcke k, k_1, k_2 . . sich weit mehr abnutzen, als die Zahnflächen $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ . . In der Mühlenbaukunst wird daher der Triebstockdurchmesser nach alter Regel[1]), sofern es die gegebenen Grössenverhältnisse gestatten, grösser als die Dicke $\Gamma_1'\Gamma_1$ des Zahnes und zwar im Verhältniss 4 : 3 genommen. Um aber die rasche Abnutzung der meistens aus weissbuchenem Holze hergestellten Triebstöcke zu verhindern, erhalten dieselben oft einen in der Richtung der Drehlingsradien FC, FC_1 länglichen symmetrischen Querschnitt, von dem beiderseits, wie in Fig. **205** a, nur ein kleiner Theil bb' kreisförmig ist und beim Eingriff zur Geltung kommt. In dem betrachteten Beispiel hat der Drehling 8 Triebstöcke, das Rad 32 Zähne; es gleitet demnach ein bestimmter Triebstock bei jeder Umdrehung des Rades, wie schon erwähnt, stets über dieselben vier Zähne. Zu Gunsten der gleichmässigen Abnutzung der Zähne werden bei in einander greifenden Rädern thunlichst die Zähnezahlen so gewählt, dass sie keinen gemeinschaftlichen Factor haben; denn dann kommt jeder Zahn des einen Rades periodisch mit jedem Zahn des anderen Rades zusammen. Hätten wir in dem betrachteten Beispiel, da es uns scheinbar freigestellt war, den Kreis k grösser, den Triebstock also stärker, genommen, dann würde mit dem Punkte Γ_1' auch μ näher an Γ_1 rücken und dadurch die Zahnlänge $\mu\Theta_1$ sich verkürzen, so dass der Berührungspunkt E_1 über die Zahnspitze Θ_1 hinausfällt. Demnach würde schon vor dem Eintritt der Berührung von $\varkappa$ und k die Zahncurve $\varkappa_1$ den Kreis k_1 verlassen. Das Gleiche ergiebt sich, wenn wir bei den gegebenen Grössenverhältnissen die Theilung kleiner, etwa den Bogen CC_1 gleich $\frac{1}{10}$ des Kreises p annehmen. Bei einer Thei-

[1]) **Bélidor**, *Architecture hydraulique.* 1737. § 318, oder deutsch von **Chr. Wolff.** 1. Aufl. 1740, und 2. Aufl. 1764. § 318; auch **H. Ernst**, *Anweisung zum praktischen Mühlenbau.* 1818. I. Th. S. 81.

lung, die grösser als $\frac{1}{8}$ ist, weicht die Normale $E_1\mathfrak{P}$ um so mehr von der zur Centralen $F\Phi$ senkrechten Richtung ab, und dies hat eine ungünstige Uebertragung des Druckes zur Folge. In unserem Beispiele haben wir für die angenommenen Grössenverhältnisse gleichsam den Grenzfall eines richtigen noch brauchbaren Eingriffes; und es steht uns nur noch frei, um eine bessere den praktischen Anforderungen entsprechende Verzahnung dieser Art für das gegebene Verhältniss der Theilkreisradien zu erhalten, den Durchmesser der Triebstöcke zu verkleinern und die Zahl derselben zu vermehren. In Fig. **206** ist dies bei demselben Radienverhältnisse 1:4 der Theilkreise p, π geschehen; die Theilung ist dort gleich $\frac{1}{16}$ des Theilkreises p genommen. Dem zufolge besitzt der Drehling 16 Triebstöcke und das Rad 64 Zähne. Die Normale $\mathfrak{P}E_1$ weicht, wenn der nachfolgende Zahn $\mathfrak{P}\varkappa$ mit dem Triebstocke k in Berührung tritt, nur um einen verhältnissmässig kleinen Winkel von der zur Centralen $F\Phi$ senkrechten Richtung ab, und die Berührung des Zahnes $\Gamma_1\Theta_1$ mit dem Triebstocke k_1 hört erst auf, nachdem der Berührungspunkt des nachfolgenden Zahnes um eine bestimmte Wegstrecke nach dem Durchgang durch die Centrale fortgeschritten ist. Die Zahnspitze Θ_1, welche wir durch einen Kreis, der S c h e i t e l k r e i s genannt wird, abgestumpft haben, kann auch in anderer Weise abgerundet werden, um die scharfen Kanten zu beseitigen.

Die Eingriffscurve $\mathfrak{e}$, welche in Fig. **205** von dem Berührungspunkte E_1 in dem festen System $F\Phi$ beschrieben wird, ist hier ein Stück einer P a s c a l'schen Curve; denn dieselbe wird constructiv erhalten, wenn wir vom Pol $\mathfrak{P}$ aus verschiedene Sehnen in den Kreis p legen und auf dieselben von diesem Kreise aus den Radius C_1E_1 des Triebstockes auftragen. Benutzen wir das Rad $\Phi\pi$ als das treibende Rad und dreht sich dasselbe im Sinne $\Gamma\Gamma_1$, so durchschreitet der Eingriffspunkt oder Berührungspunkt des Zahnpaares die Eingriffscurve $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{P}$ bis zu ihrem Schnitt mit dem Scheitelkreise, und der Triebstock gleitet vom Fusse bis zum Scheitel des Zahnes. Betrachten wir dagegen den Drehling als das treibende Rad und wird derselbe im Sinne C_1C gedreht, dann findet die Berührung der Zähne stets vor der Centralen statt, der Eingriffspunkt durchläuft jenes Stück der Eingriffscurve im entgegengesetzten Sinne und der Triebstock gleitet vom Scheitel bis zum Fusse des Zahnes. Dies hat zur Folge, dass leicht eine Stemmung des Triebstockes gegen den Zahn eintritt, wodurch die Uebertragung des Druckes und die proportionale Drehung erschwert wird; daher muss in der Regel das Rad $\Phi\pi$ als das treibende benutzt werden.

Wenn der Kreis p in dem Kreise π rollt, dann muss die Verzahnung des Rades $\Phi\pi$ im Innern desselben ausgeführt werden; in diesem Falle ist die entsprechende Zahncurve eine Aequidistante einer Hypocycloide. Wird das Rad $\Phi\pi$ durch eine Zahnstange vertreten, liegt also der Mittelpunkt Φ im Unendlichen, dann ist die Zahncurve eine Aequidistante einer Cycloide. Wenn umgekehrt der Radius des Drehlings unendlich gross wird, geht die Zahncurve in eine Kreisevolvente über.

Ein besonderer interessanter Fall einer inneren Verzahnung ist in Fig. **207** dargestellt[1]). Die Radien der Theilkreise p, π stehen im Verhältnisse 1:2, und die Theilung ist gleich der Hälfte des Umfanges von p genommen. Der Drehling Fp enthält demnach zwei Triebstöcke und das Rad $\Phi\pi$ vier Zähne. Der Mittelpunkt des Kreises k beschreibt, wenn der Theilkreis p in dem Theilkreise π rollt, eine radiale Gerade und folglich erhalten jene vier Zähne geradlinige Profile. Wird das Rad $\Phi\pi$ im Sinne $\Gamma\Gamma_1$ gedreht, dann gleitet der Kreis k auf der Geraden $\Gamma\varkappa$ von Γ bis Θ, und nachdem k den Mittelpunkt Φ überschritten hat, gleitet dieser Kreis längs der Geraden $\Gamma_2\varkappa_2$ von Θ_2 bis Γ_2. Der Berührungspunkt von k und $\varkappa$ bewegt sich von $\mathfrak{P}$ ausgehend auf der Eingriffscurve $\mathfrak{e}$, die einen Theil einer Pascal'schen Curve bildet, bis die Berührung einerseits aufhört; dagegen beginnt anderseits die Berührung von k mit $\varkappa_2$, und der betreffende Berührungspunkt bewegt sich auf der Eingriffscurve $\mathfrak{e}'$ bis $\mathfrak{P}$, die einen zweiten Bestandtheil derselben Pascal'schen Curve darstellt. In der gezeichneten Stellung beginnt der Eingriff von $\varkappa_3$ mit k_1 auf der Curve $\mathfrak{e}'$. Der Eingriffspunkt durchschreitet also $\mathfrak{e}'$ bis $\mathfrak{P}$, von da an aber $\mathfrak{e}$ und beim Uebergange des Triebstockes über den Mittelpunkt Φ tritt eine Unterbrechung der Pascal'schen Curve ein. Wird das Rad $\Phi\pi$ im entgegengesetzten Sinne gedreht und die entsprechende Eingriffscurve construirt, dann bildet diese mit $\mathfrak{e}\mathfrak{P}\mathfrak{e}'$ zusammen eine vollständige Pascal'sche Curve.

83. **Kreisförmige Verzahnung des einen Rades nebst trochoidisch-äquidistanter Verzahnung des anderen Rades und Uebergang zu Parallelrädern.** Bei den in Fig. **208** dargestellten Rädern Fo, $\Phi\omega$ liegen die zugehörigen Rollkreise p, π weit ausserhalb der Zahnkränze dieser Räder. Die Radien dieser Kreise verhalten sich beispielsweise wie 5:6, und der kleinere Kreis p rollt in dem grösseren π. Wir nehmen zu dem Rade Fo gehörend innerhalb des

---

[1]) Redtenbacher, *Der Maschinenbau.* 1862. B. I. S. 354.

Kreises p einen Punkt C an. Dieser beschreibt dann in dem Rade $\Phi\omega$, weil C und Φ beide innerhalb p liegen, nach der S. 140 gegebenen Regel eine verschlungene Hypotrochoide γ, die in bekannter Weise construirt ist. Die Lage des Punktes C muss nach jener Regel, wie auch die Lage der Rollkreise p, π zu einander und deren Grössenverhältniss angenommen ist, stets so gewählt werden, dass derselbe in dem anderen Rade eine verschlungene Trochoide beschreibt. Um den Punkt C beschreiben wir einen Kreis k, der einen Zahn oder Triebstock des Rades Fo repräsentirt und zeichnen die zur Trochoide γ gehörende Aequidistante $\varkappa$, welche einerseits in der Schleife dieser Trochoide von k erzeugt wird. Diese Aequidistante bildet einen Zahn des Rades $\Phi\omega$. Wird nun das Rad Fo mit 10 Triebstöcken versehen, so erhält das Rad $\Phi\omega$ entsprechend dem Verhältnisse 5 : 6 der Rollkreisradien 12 Zähne, und diese werden ringsherum von den betreffenden Triebstöcken umlaufen. Dem zufolge müssen die Triebstöcke, so wie die Zähne als Zapfen in je eine cylindrische Scheibe eingesetzt werden, und wir können daher auch die Zähne des Rades $\Phi\omega$ als trochoidisch-äquidistant umgrenzte Triebstöcke betrachten. Hinsichtlich dieser Gestaltung hat Reuleaux[1]) nach Zonca's[2]) Vorgange die Räder dieser Art Schildräder genannt. Die Grösse des Kreises k muss jedoch so gewählt werden, dass derselbe frei zwischen den Triebstocklücken des anderen Rades hindurchgehen kann. Die vom Pol $\mathfrak{P}$ nach dem Mittelpunkt C_1 des Kreises k_1 gezogene Gerade bestimmt den Berührungspunkt, welchen k_1 mit $\varkappa_1$ bildet, und in gleicher Weise ergeben sich die übrigen Berührungspunkte. Demnach ist die Eingriffscurve ein Stück von einer Kreisconchoide, deren Grundkreis o die Mittelpunkte C, C_1 . . trägt.

Betrachten wir das Rad Fo als das treibende, dann findet der wirksame Eingriff nur nach dem Uebergange der Triebstöcke über die Gerade $\Phi\mathfrak{P}$ statt. Die gemeinsame Normale der sich berührenden Triebstock-Querschnitte bildet zwar mit der Centralen ΦF einen verhältnismässig kleinen Winkel, es entsteht aber hierdurch in diesem Falle keine störende Stemmung, weil der Pol $\mathfrak{P}$ ausserhalb ΦF liegt. Nehmen wir dagegen das Rad $\Phi\omega$ als das treibende, so findet der Eingriff stets vor jenem Uebergange über $\Phi\mathfrak{P}$ statt.

---

1) Reuleaux, *Konstrukteur.* 4. Aufl. S. 536.

2) Zonca, *Novo Teatro di Machine.* 1607. p. 20. Dort wird ein mit cylindrischen Zapfen verzahntes Kammrad „Scudo di denti" genannt.

Wenn wir den Abstand ΦF der beiden Axen unverändert beibehalten, aber die Rollkreise p, π mehr und mehr vergrössern und unendlich gross annehmen, also den Pol $\mathfrak{P}$ ins Unendliche verlegen, dann geht die Hypotrochoide γ, sowie ihre Aequidistante $\varkappa$ in einen Kreis über. Für diesen Grenzfall sind in Fig. **208** a die beiden Schildräder gezeichnet und mit gleicher Anzahl Triebstöcke z. B. mit je 8 auf den gleich grossen Kreisen o, ω versehen. Die Radien der Triebstöcke können wir gleich oder ungleich annehmen, müssen aber so gewählt werden, dass ein freier Durchgang durch die Lücken ermöglicht wird. Beide Räder vollziehen dieselben Bewegungen, parallele Radien derselben bleiben parallel, und deshalb hat Reuleaux diese Räder als Parallelräder bezeichnet.[1]) Die Eingriffscurve ist hier ein Kreis, der den Kreisen o, ω gleich ist. Ein Triebstock des einen Rades umläuft beständig berührend einen Triebstock des anderen Rades, und von jedem Paar dieser Triebstöcke kann der eine auch durch eine Rolle ersetzt werden. Wenn wir aber jeden dieser Triebstöcke durch eine Rolle ersetzen, so ist keine Zwangläufigkeit vorhanden. Durch Vereinigung eines Rollenpaares k_1, $\varkappa_1$ zu einem Stücke entsteht dann ein Gelenkparallelogramm $\Phi F C_1 \Gamma_1$.

84. **Theils punktförmige, theils epicycloidische Verzahnung beider Räder.** In Fig. **209** soll für die beiden Räder Fp, $\Phi\pi$, deren Theilkreisradien sich wie 4:25 verhalten, die Gestalt der Zähne und der Lücken nach gegebener Theilung bestimmt werden, wenn ein Bestandtheil der Zahncurve durch einen Punkt vertreten wird. Nehmen wir im Rade Fp auf dem Theilkreise p einen solchen Punkt K an, der momentan mit dem auf der Centralen $F\Phi$ liegenden Berührungspunkte $\mathfrak{P}$ der Theilkreise p, π coincidirt, so beschreibt dieser Peripheriepunkt K, wenn der Theilkreis p auf dem festgehaltenen Theilkreise π rollt, im Rade $\Phi\pi$ eine Epicycloide $\varkappa$. Der Bogen $\Gamma\varkappa\Delta$ dieser Epicycloide, der einerseits durch den auf π liegenden, mit $\mathfrak{P}$ momentan coincidirenden Punkte Γ und anderseits durch einen noch näher zu bestimmenden Punkt Δ begrenzt wird, ist die entsprechende Zahncurve für das Rad $\Phi\pi$. Denken wir uns dieses Rad im Sinne $\Gamma\Gamma_1$ gedreht, so beginnt der Eingriff in $\mathfrak{P}$ und endet, während der Punkt K auf der Zahncurve $\Gamma\varkappa\Delta$ von Γ bis Δ gleitet, in dem mit e bezeichneten Punkte, wo Δ aus dem Theilkreise p heraustritt oder wo dieser Theil-

---

[1]) Reuleaux, „Ueber Parallelräder". *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen* 1875. Jahrg. 52. S. 296.

kreis einerseits von dem durch Δ gehenden, um Φ beschriebenen Scheitelkreise geschnitten wird. Der Bogen $\mathfrak{P}\mathfrak{e}e$ des Theilkreises p vertritt während dieser Bewegung die Eingriffscurve $\mathfrak{e}$, und der Punkt Δ beschreibt in dem Rade Fp die verschlungene Epitrochoide d, welche einerseits die Umgrenzung der Zahnlücke oder die Gestalt der Zahnflanke in diesem Rade bildet. Soll nun das Rad Fp mit vier Zähnen versehen werden, ist also die gegebene Theilung KK_1 gleich $\frac{1}{4}$ des Theilkreises p, dann genügt aber die Länge des Eingriffsbogens $\mathfrak{P}e$ nicht; denn er ist kleiner als die Theilung KK_1, und es beginnt noch kein neuer Eingriff, wenn der Punkt K die Zahncurve $\Gamma\varkappa\Delta$ verlässt. Um eine von $\mathfrak{P}$ bis ε gehende Fortsetzung der Eingriffscurve $\mathfrak{e}$ zu erhalten, müssen wir zu dem Punkte Γ des Theilkreises π die entsprechende epicycloidische Zahncurve Kc im Rade Fp bestimmen, die durch den Peripheriepunkt Γ erzeugt wird, wenn der Theilkreis π auf dem festgehaltenen Theilkreise p rollt, und in einem noch näher zu bestimmenden Punkte L endet.

Denken wir uns jetzt das Rad Fp im Sinne KK_I gedreht, so beginnt der Eingriff der Zahncurve c in $\mathfrak{P}$ und endet, während der Punkt Γ auf derselben von K bis L gleitet, in dem mit ε bezeichneten Punkte, wo L aus dem Theilkreise π heraustritt oder wo dieser Theilkreis einerseits von dem durch L gehenden, um F beschriebenen Scheitelkreise geschnitten wird. Der Bogen $\mathfrak{P}\mathfrak{e}'\varepsilon$ des Theilkreises π vertritt während dieser Bewegung die entsprechende Eingriffscurve $\mathfrak{e}'$, und der Punkt L beschreibt in dem Rade $\Phi\pi$ die verschlungene Epitrochoide λ, welche einerseits die Umgrenzung der Zahnlücke oder die Gestalt der Zahnflanke in diesem Rade bildet.

Betrachten wir nun Fp als das treibende Rad, welches etwa in dem Sinne KK_I gedreht wird, dann beginnt der Eingriff des Punktes K gegen die Zahncurve $\varkappa$ in e und endet in $\mathfrak{P}$; von da an übernimmt die Zahncurve c den Eingriff gegen den Punkt Γ, bis dieser Eingriff in ε aufhört. Hat Γ auf dem Theilkreise π den Bogen $\mathfrak{P}\mathfrak{e}'$, der gleich dem Bogen K_1e ist, durchschritten, dann beginnt aber schon bei den nachfolgenden Zähnen der Eingriff des Punktes K_1 gegen die Zahncurve $\varkappa_1$ im Punkte e; und folglich befinden sich, während Γ den Bogen $\mathfrak{e}'\varepsilon$ durchläuft, gleichzeitig zwei Zähnepaare im Eingriff. Hierdurch wird bei diesen Rädern, welche eine verhältnissmässig grosse Uebersetzung gestatten, die Uebertragung des Druckes und die Sicherheit des Ganges sehr gefördert. Theoretisch würde es zwar genügen, wenn mit dem

Aufhören des Eingriffs in ε erst der Eingriff der beiden nachfolgenden Zähne begönne, wenn also die Bogensumme $e\mathfrak{P} + \mathfrak{P}\varepsilon$ gleich der Theilung KK_1 oder $\Gamma\Gamma_I$ wäre. Es braucht dann, falls die Bogenlänge $\mathfrak{P}\varepsilon$ bleiben soll, die Bogenlänge $e\mathfrak{P}$ nur gleich $\varepsilon\Gamma_I$ zu sein. Dadurch wird die Zahncurve $\Gamma\varkappa\Delta$ kürzer, die entsprechende Zahnlücke im Rade Fp flacher und die Stärke der Zähne dieses Rades vergrössert. Um aber den praktischen Vortheil, den das gleichzeitige Eingreifen zweier Zahnpaare darbietet, nicht zu verschmähen und doch bei tieferer Zahnlücke die nöthige Festigkeit für die Zähne, sowie für das Rad zu bewahren, werden diese Zähne nicht als freistehende hergestellt, sondern durch Ausfraisen der Lücken aus dem massiven die Radaxen tragenden Cylinder erhalten, so dass diese Zähne mit dem Cylinder ein Stück bilden und demnach durch den seitlichen Zusammenhang an Festigkeit gewinnen.

Auf dem Theilkreise p wird als Zahndicke ein Bogen KK' nach praktischem Ermessen so gross angenommen, dass noch eine durch den Bogen $K'K_1$ bestimmte Lückenweite bleibt, die einem hinreichend starken Zahne des Rades $\Phi\pi$ freien Durchgang nebst dem nöthigen Spielraum gewährt. Hierauf wird bezüglich der durch die Mitte m des Bogens KK' gehenden radialen Geraden Fm zu der Zahncurve KcL die symmetrisch gelegene Zahncurve $K'c'L'$ construirt. Hierdurch ergiebt sich die Form des Zahnkopfes und durch eine geringe Abstumpfung seiner Spitze U wird auch die Lage des Punktes L und L' näher bestimmt. Zwar kann man durch Vergrössern der Dicke KK' des Zahnes auch die Länge der Zahncurven vergrössern, also L weiter von K entfernen und infolge dessen den Eingriffsbogen $\mathfrak{P}\varepsilon$ verlängern; damit wird aber die Lückenweite $K'K_1$ verengert und dem gemäss die Dicke $\Gamma_1\Gamma_1'$ des eingreifenden Zahnes verkleinert. Auf dem Theilkreise π machen wir den Bogen $\Gamma\Gamma'$ ein wenig kleiner als den Bogen $K'K_1$ und zeichnen bezüglich der durch die Mitte μ des Bogens $\Gamma\Gamma'$ gehenden radialen Geraden $\Phi\mu$ zu der Zahncurve $\Gamma\varkappa\Delta$ die symmetrisch gelegene Zahncurve $\Gamma'\varkappa'\Delta'$. Hierdurch ist die Form dieses Zahnkopfes bestimmt; und seine Spitze Θ muss derart abgestumpft werden, dass einerseits dadurch der Eingriffsbogen $\mathfrak{P}e$ nicht sehr verkürzt, anderseits die erforderliche ausgefraiste Lücke nicht zu gross wird und die nothwendige Festigkeit des Rades Fp gewahrt bleibt. Demnach ist die willkürliche Lage des Punktes Δ auf der Zahncurve in sehr enge Grenzen eingeschlossen.

Um die Begrenzung der Zahnlücke zu erhalten, ziehen wir die radiale Gerade $\Delta\Phi$, die den Theilkreis π in χ trifft, machen auf dem Theilkreise p den Bogen $\mathfrak{P}x = \mathfrak{P}\chi$ und auf dem Radius Fx die Strecke $xs = \chi\Delta$, dann ist s der Scheitel der von dem Punkte Δ in dem Rade Fp beschriebenen verschlungenen Trochoide d, die in der bekannten Weise gezeichnet ist. Der Bogen Kds derselben bildet die Form der Zahnflanke und einerseits die Begrenzung der Zahnlücke. Anderseits wird, nachdem auf dem Theilkreise p der Bogen KK_I gleich K_1K' gemacht ist, die symmetrische Zahnflanke $K_Id_Is_I$ construirt, und ferner wird um F der Fusskreis beschrieben, der die Punkte ss_I verbindet. In analoger Weise ergiebt sich die Begrenzung der Zahnlücke in dem anderen Rade. Wir ziehen die radiale Gerade LF, welche den Theilkreis p in n schneidet, machen auf dem Theilkreise π den Bogen $\mathfrak{P}\nu = \mathfrak{P}n$ und auf dem Radius $\Phi\nu$ die Strecke $\nu\sigma = nL$, dann ist σ der Scheitel der von dem Punkte L im Rade $\Phi\pi$ beschriebenen verschlungenen Trochoide λ, deren Bogen $\Gamma\lambda\sigma$ die Form der Zahnflanke und einerseits die Begrenzung der Zahnlücke bildet. Anderseits ist die symmetrische Begrenzung $\Gamma'_1\lambda'_1\sigma'_1$ construirt und der Fusskreis um Φ beschrieben, der die Punkte $\sigma\sigma'_1$ verbindet.

Bezeichnen wir die Theilung oder die Länge des Bogens KK_1 mit τ, und nehmen wir im Voraus auf dem Theilkreise innerhalb gewisser Grenzen für die Länge des Eingriffsbogens $\mathfrak{P}\varepsilon$ eine bestimmte Grösse, etwa den Bogen $\mathfrak{P}\varepsilon = \frac{6}{8}\tau$, so erhalten wir mittelst des Scheitelkreises, der durch ε geht, auf der Zahncurve KcL den Punkt L. Wird nun ferner eine zweckmässige Abstumpfung LL' angenommen und die symmetrische Zahncurve $K'c'L'$ gezeichnet, so ist K' und damit die Lückenweite $K'K_1$, sowie die Zahndicke $\Gamma'_1\Gamma_1$ oder $\Gamma'\Gamma$ für das andere Rad bestimmt. Hierauf können wir noch innerhalb gewisser Grenzen die Grösse des Eingriffsbogens $e\mathfrak{P}$ wählen, jedoch so, dass $e\mathfrak{P} + \mathfrak{P}\varepsilon$ grösser als die Theilung τ ist; etwa $e\mathfrak{P} = \frac{5}{8}\tau$, dann ist $e\mathfrak{P} + \mathfrak{P}\varepsilon = \frac{11}{8}\tau$. Da nun der Umfang des Theilkreises p gleich $4.\tau$ ist, so ist $e\mathfrak{P} + \mathfrak{P}\varepsilon$ grösser als $\frac{1}{3}$ dieses Umfanges und demnach könnte in diesem Falle unter der Voraussetzung, dass der Theilkreis π eine ganze Anzahl Theile enthält, die gleich $\frac{1}{3}$ des Theilkreises p sind, die Uebertragung der Drehung auch durch drei Zähne des Rades Fp ermöglicht werden.

In Fig. **210** ist für den Fall, dass das treibende Rad Fp, welches in eine Zahnstange eingreift, drei Zähne erhält, die Verzahnung, wie aus der gleichartigen Bezeichnung leicht erkenntlich wird, nach der obigen Angabe gezeichnet. Für die Zähne ergiebt sich hier eine grössere Dicke, weil die Theilung $KK_1 = \tau$ den dritten Theil des Theilkreises p beträgt. Auf der Theilgeraden π wurde die Eingriffsstrecke $\mathfrak{P}\varepsilon = \frac{11}{16}\tau$ und auf dem Theilkreise p der Eingriffsbogen $e\mathfrak{P} = \frac{8}{16}\tau$ genommen; demnach ist $e\mathfrak{P} + \mathfrak{P}\varepsilon = \frac{19}{16}\tau$, und es beginnt bei der Drehung des Rades Fp im Sinne KK_1 der Eingriff der nachfolgenden Zähne, der des Punktes K_1 gegen die Zahncurve $\Gamma_1\varkappa_1$ im Punkte e, wenn der Punkt Γ auf der Geraden π die Strecke $\mathfrak{P}\mathfrak{e}' = K_1 e = \frac{8}{16}\tau$ durchschritten hat. Somit befinden sich, während Γ die Strecke $\mathfrak{e}'\varepsilon = \frac{3}{16}\tau$ durchläuft, zwei Zähnepaare im Eingriff.

Vermittelst des durch ε gehenden Scheitelkreises wurde auf der Zahncurve KcL, welche hier eine Kreisevolvente ist, der Grenzpunkt L bestimmt. Die Abstumpfung LL' wurde ziemlich klein und so gewählt, dass der Punkt K' der symmetrischen Zahncurve $K'c'L'$ mit e zusammenfällt. Denn dann ist die Zahndicke KK' gleich der Lückenweite $K'K_1$, und es erhält dadurch die Zahnstange möglichst starke Zähne. Wohl hätte man durch eine grössere Zahndicke KK' eine längere Zahncurve KcL und eine längere Eingriffscurve $\mathfrak{P}\varepsilon$ erreichen können; aber dadurch würden nicht nur die Zähne der Zahnstange schwächer, sondern auch die Lücken in derselben tiefer geworden sein. Die durch e zu π parallel gezogene Gerade bestimmte auf der Zahncurve $\Gamma\varkappa\Delta$, die eine Cycloide ist, den Grenzpunkt Δ. Die vom Punkte Δ im Rade Fp beschriebene seitliche Umgrenzung Kds der Zahnlücke ist ein Bogenstück von einer verschlungenen Kreisevolvente und die vom Punkte L in der Zahnstange erzeugte seitliche Umgrenzung $\Gamma\lambda\sigma$ der Zahnlücken ist ein Bogenstück einer verschlungenen Cycloide. Die betrachtete Verzahnung besitzt den Vortheil eines langen Eingriffes und ermöglicht eine starke Uebersetzung; dagegen erleiden aber die Zähne besonders an den Punkten, die über die Zahncurven gleiten, eine rasche Abnutzung.

85. **Radiale geradlinige Verzahnung des einen Rades und epicycloidische Verzahnung des anderen Rades.** Die einfachste Form für eine Zahnflanke erhalten wir durch die Annahme einer radialen geradlinigen Begrenzung, und derartige Zahnflanken werden wegen ihrer leichteren Herstellbarkeit oft und meistens bei den Uhrrädern angewendet. In Fig. **211**, Taf. XIII, ist für das kleinere der beiden Räder Fp, $\Phi\pi$, deren Theilkreisradien sich wie 1:4 verhalten, die mit der Centralen $F\Phi$ coincidirenden radialen Begrenzung Kks der Zahnflanke angenommen. Die Gerade k wird auch durch den mit dem Pol $\mathfrak{P}$ coincidirenden Peripheriepunkt K des

über $\mathfrak{P}F$ als Durchmesser beschriebenen Hülfsrollkreises q erzeugt, wenn dieser in dem Theilkreise p rollt, und die zugehörige Zahncurve $\varkappa$ wird von demselben Peripheriepunkte durch Rollung des Hülfsrollkreises q auf dem Theilkreise π beschrieben. Wird nun die Theilung KK_1 gleich $\frac{1}{10}$ des Theilkreises p genommen, so dass also das Rad Fp zehn Zähne erhält; wird hierauf die mit k_1 bezeichnete radiale Gerade K_1F gezogen, dann von dem mit $\mathfrak{P}$ identischen Punkte Γ aus auf dem Theilkreise π der Bogen $\Gamma\Gamma_1 = KK_1$ gemacht und zu der epicycloidischen Zahncurve $\Gamma\varkappa$ die congruente Zahncurve $\Gamma_1\varkappa_1$ gezeichnet, so berührt diese die Gerade k_1 im Punkte E_1 auf dem Kreise q im Fusspunkte des vom Pol $\mathfrak{P}$ auf k_1 gefällten Lothes. Denken wir uns das Rad $\Phi\pi$ im Sinne $\Gamma\Gamma_1$ gedreht, so beginnt der Eingriff im Pol $\mathfrak{P}$ und der Eingriffspunkt bewegt sich auf dem Kreise q, bis der Endpunkt der Zahncurve $\varkappa$ aus diesem Kreise heraustritt; und dieser Eingriff muss mindestens so lange dauern, bis der nachfolgende Zahn die entsprechende Zahnflanke im Pol $\mathfrak{P}$ berührt. Demnach muss die zu $\Gamma_1\varkappa_1$ symmetrische Zahncurve $\Gamma'_1\varkappa'_1$ so gezeichnet werden, dass die auf der radialen Symmetrallinie $\Phi\mu$ liegende Zahnspitze Θ_1 über den Berührungspunkt E_1 hinausfällt und noch eine, wenn auch kleine Abstumpfung gestattet. Mit der so auf dem Theilkreise π erhaltenen Zahndicke $\Gamma'_1\Gamma_1$ ist auch die Zahndicke KK' auf dem Theilkreise p bestimmt; denn wir brauchen nur auf p den Bogen KK' um den erforderlichen Spielraum kleiner als den Bogen $\Gamma\Gamma'_1$ zu nehmen, der die Lückenweite im Rade $\Phi\pi$ darstellt. Die Zahnlücke im Rade Fp wird in der Regel der Einfachheit wegen durch den um F beschriebenen Fusskreis und seitlich durch die radialen Geraden begrenzt. Von der radialen Zahnflanke kommt aber nur der Theil zur Geltung, welcher beim Aufhören der Berührung ausserhalb des Kreises q liegt; daher kann man auch, um dem Zahne mehr Festigkeit zu geben, für die übrige Umgrenzung der Zahnlücke die verschlungene Trochoide t nehmen, welche die Zahnspitze Θ_1, oder falls diese abgestumpft ist, der Endpunkt der Zahncurve $\Gamma_1\varkappa_1$ in dem Rade Fp beschreibt. Um die scharfen Kanten der Zähne dieses Rades zu vermeiden, werden dieselben nicht durch den Theilkreis p, sondern durch Halbkreise begrenzt, die bei dem Eingriff nicht zur Geltung kommen. Die Lücken in dem Rade $\Phi\pi$ erhalten am Grunde der Einfachheit wegen eine kreisförmige und seitlich eine radiale Begrenzung.

Das grössere Rad $\Phi\pi$ ist bei dieser Verzahnung als das treibende Rad zu betrachten. Der Eingriff beginnt dann in der Centralen und setzt sich nach dem Durchgange durch die Centrale so lange auf dem Kreise q fort, bis die Berührung des Zahnpaares in e aufhört; und bei dieser Bewegung gleitet die Flanke auf dem eingreifenden Zahne nach dem Scheitel hin. Die Eingriffscurve wird demnach bei dieser Verzahnung durch ein Bogenstück $\mathfrak{P}e$ des Kreises q vertreten, welches durch den Pol $\mathfrak{P}$ und durch den vom Scheitelkreise nach der Bewegungsrichtung hin mit q gebildeten Schnittpunkt e begrenzt ist. In dem betrachteten Falle enthält das kleinere getriebene Rad, welches auch das Trieb genannt wird, die möglichst kleinste Zähnezahl 10. Hätten wir für das Trieb weniger als 10 Zähne, die Theilung also grösser genommen, dann würde, um einen hinreichend lange dauernden Eingriff zu erhalten, die Dicke $\Gamma_1'\Gamma_1$ des entsprechenden symmetrisch geformten Zahnes so gross werden, dass im Rade $\Phi\pi$ trotz der grösseren Theilung die Lückenweite $\Gamma\Gamma_1'$ verschwindet, und damit wird die Verzahnung unausführbar. Dies gestaltet sich noch um so ungünstiger, je kleiner das treibende Rad $\Phi\pi$ ist. Wenn auch dieses Rad grösser als in dem betrachteten Falle ist, selbst wenn es in eine Zahnstange übergeht, also unendlich grossen Radius besitzt, kann aus dem angegebenen Grunde die Zähnezahl des Triebes nicht kleiner als 10 sein. Daher werden in der Uhrmacherei bei sorgfältig und genau gearbeiteten Werken keine Triebe mit weniger als 10 Zähnen angewendet [1]). Nur bei der seltener vorkommenden inneren Verzahnung des treibenden Rades kann die Zähnezahl des Triebes kleiner als 10 sein. Wenn der betrachtete Grenzfall nicht durch besondere Bedingung gefordert wird, so ist es stets zweckmässiger, dem Triebe mehr als 10 Zähne zu geben; denn dann wird beim Aufhören des Eingriffes die Normale $\mathfrak{P}E$ der betreffenden Zahncurve weniger von der zur Centralen senkrechten Richtung abweichen, und dadurch wird die Uebertragung der Bewegung gefördert.

In Fig. **212** ist ein 12-zähniges Trieb und eine eingreifende Zahnstange construirt. Die Zahncurve $\Gamma\varkappa$, welche durch Rollung des Hülfsrollkreises q auf der Geraden π erzeugt wird, ist in diesem Falle eine Cycloide. Der Eingriff wird trotz der Abstumpfung der Zähne der Stange noch ein wenig fortgeführt, nachdem der nachfolgende Zahn seinen Eingriff im Pol $\mathfrak{P}$ begonnen hat. Durch die Annahme von mehr als 12 Triebzähnen hätte

---

[1]) Saunier, *Traité d'horlogerie moderne*. 1872. Art. 1123, oder deutsch von M. Grossmann. 1879. B. 3. S. 50.

man den Winkel, welchen die Normale der Zahncurve beim Aufhören des Eingriffes mit der zur Centralen $F\Phi^{\infty}$ senkrechten Richtung oder mit der Geraden π bildet, noch verkleinern können; aber damit werden auch die Zähne der Zahnstange schwächer, und demnach zeigt sich, dass auch bei der Erhöhung der Zähnezahl des Triebes bald eine Grenze erreicht wird.

86. **Geradlinige Verzahnung des einen Rades und epicycloidisch-äquidistante Verzahnung des anderen Rades.** Bei den beiden in Fig. **213** gezeichneten Rädern Fp, $\Phi\pi$, deren Theilkreisradien im Verhältnisse 4 : 1 stehen, sind die geradlinigen Flanken k, k_1 des grösseren Rades Fp nicht radial, sondern Tangenten eines mit F concentrischen Kreises i, so dass der Zahn nach seiner Wurzel hin stärker wird und der von der Festigkeit geforderten Form mehr entspricht[1]). Rollt der Theilkreis p auf π, dann erzeugt die Gerade k als Hüllbahn nach Art. 66 die Aequidistante $\varkappa$ der Epicycloide φ, die umhüllend von dem zu k parallelen Radius Fr, oder von dem auf Fr liegenden Peripheriepunkt f des auf π rollend gedachten Kreises q beschrieben wird, dessen Durchmesser $\mathfrak{P}F$ ist. Wir erhalten demnach einen Punkt z der Aequidistante $\varkappa$, indem wir die Epicycloide φ construiren und auf der Normalen derselben die Strecke $z\zeta$ gleich dem Radius jenes Kreises i machen; oder wir zeichnen $\varkappa$ als berührende Curve an die mit diesem Radius beschriebenen Kreise, deren Mittelpunkte auf φ liegen. Hierdurch sind die Zähne des 10-zähnigen Rades, sowie des 40-zähnigen Rades bestimmt; denn wir zeichnen am Theilpunkte K_1 des Theilkreises p die Zahnflanke k_1, welche den Kreis i tangirt, an den Theilpunkt Γ_1 des Kreises π die zu $\varkappa$ congruente Curve $\varkappa_1$, ferner die symmetrische Curve $\varkappa_1'$, so dass der Zahn über den Berührungspunkt E_1, den Fusspunkt des vom Pol $\mathfrak{P}$ auf k_1 gefällten Lothes hinausragt und für den Zahn kk' genügende Stärke und ein wenig Spielraum lässt. Die Eingriffscurve $\mathfrak{e}$ ergiebt sich als die Fusspunktencurve des Kreises i in Bezug auf den Pol $\mathfrak{P}$ als Lothpunkt, und dieselbe ist nach Art. 63 eine Pascal'sche Curve. Der Eingriff beginnt, wenn das Rad $\Phi\pi$ im Sinne $\mathfrak{P}\Gamma_1$ gedreht wird, bei $\mathfrak{P}$ und endet im Schnittpunkte e, den der Scheitelkreis dieses Rades mit der Eingriffscurve $\mathfrak{e}$ bildet.

87. **Geradlinige und epicycloidische Verzahnung beider Räder.** Soll bei der betrachteten Verzahnung sowohl das eine als das

---

[1]) Vergl. Schmidt, „Ueber eine allgemeine Geradflankenverzahnung", *Praktischer Maschinen-Constructeur.* 1878. S. 314.

andere Rad treibend wirken, dann ist es nothwendig, in Fig. **214** auch für das Rad Fp die Form des Zahnkopfes zu bestimmen, die der geradlinigen Flanke des anderen Rades $\Phi\pi$ entspricht. Dadurch wird ein längerer Eingriff erreicht, der sich von der einen Seite der Centralen $F\Phi$ auf die andere derselben fortsetzt. Das Radienverhältniss der Theilkreise p, π sei wieder beispielsweise 1:4, die Theilung KK_1 gleich dem 12tel Theil von p. Demnach erhalten die Räder Fp, $\Phi\pi$ resp. 12 und 48 Zähne. Der mit dem Pol $\mathfrak{P}$ coincidirende Peripheriepunkt des Hülfsrollkreises q, dessen Durchmesser $\mathfrak{P}F$ ist, beschreibt, wenn dieser Kreis in p rollt, die radiale Zahnflanke Kk und wenn derselbe an π rollt, die Zahncurve $\Gamma\varkappa$. Es ist auf dem Theilkreise π der Bogen $\Gamma\Gamma_1$ gleich der Theilung KK_1 gemacht, die Lückenweite $\Gamma\Gamma'_1$ auf π mit dem nöthigen Spielraum zweckmässig gewählt, und ferner sind, wie vorhin angegeben wurde, die Zahnköpfe für das Rad $\Phi\pi$ construirt. Um aber den Zähnen des Rades Fp an der Wurzel eine grössere Stärke zu geben, ist die radiale Begrenzung der Flanke nur so weit fortgeführt, als es die Berührung erfordert; also gleich der Strecke gemacht, welche beim Aufhören der Berührung auf der Flanke K_1k_1 ausserhalb des Kreises q liegt; und die übrige Umgrenzung der Zahnlücke im Rade Fp wird durch die verschlungene Trochoide t_1 bestimmt, welche von der Zahnspitze Θ_1 in diesem Rade erzeugt wird.

In analoger Weise beschreibt der mit dem Pol $\mathfrak{P}$ coincidirende Peripheriepunkt des durch Φ gehenden, zweiten Hülfsrollkreises η die radiale Zahnflanke $\Gamma\gamma$, wenn dieser Kreis η im Kreise π rollt, und die entsprechende Zahncurve Kc, wenn derselbe auf dem Kreise p rollt. Durch die zu Kc symmetrisch gezeichnete Zahncurve $K'c'$ ist die Kopfform der Zähne des Rades Fp bestimmt. Die Spitze O dieses Zahnes beschreibt im Rade $\Phi\pi$ eine verschlungene Trochoide. Es sind aber die Lücken dieses Rades nicht nach dieser Trochoide, sondern, weil die Zähne noch genügend stark bleiben, einfach radial und am Grunde durch den Fusskreis begrenzt.

Wir haben in Fig. **214** die theoretischen Zahnformen vollständig mit ihren Spitzen, die jedoch in der Praxis abgestumpft werden, gezeichnet. Demnach wird bei der Drehung des Rades $\Phi\pi$ im Sinne $\Gamma\Gamma_1$ der Eingriff auf dem Kreise η im Punkte ε beginnen, in welchem der um F beschriebene Kreis $O\varepsilon$ nach der Eintrittsseite hin schneidet, wird ferner auf dem Kreise η den Bogen $\varepsilon\mathfrak{P}$, auf dem Kreise q den Bogen $\mathfrak{P}e$ durchschreiten und in dem Schnittpunkte e enden, welchen der um Φ beschriebene Kreis Θe nach der Austrittsseite hin mit dem Kreise q bildet. In der gezeichneten Stellung berühren sich gleichzeitig drei Zahnpaare resp. in den Punkten E_l, $\mathfrak{P}$, E_1, und wenn die Berührung bei E_1 aufhört, setzt sich die Berührung der beiden anderen Zahnpaare fort. Bevor aber die Berührung des vorangehenden dieser beiden Zahnpaare endet, hat schon der Eingriff eines neuen dritten Zahnpaares begonnen, so dass beständig wenigstens zwei Zahnpaare sich gleichzeitig im Eingriff befinden.

Das Analoge findet statt, wenn das Rad Fp z. B. im Sinne KK_l gedreht wird. Dann beginnt der Eingriff in e, der Berührungspunkt eines Zahnpaares bewegt sich auf q bis $\mathfrak{P}$ und von da auf η bis ε. Bei dieser Verzahnung kann daher sowohl das eine als das andere Rad treibend wirken. Hierbei tritt nur insofern ein Unterschied ein, dass in jenem ersten Falle beim Beginn des Eingriffs die betreffende Normale $\mathfrak{P}E_l$ mit der zur Centralen senkrechten Richtung einen kleineren Winkel bildet, als die betreffende Normale $\mathfrak{P}E_1$ beim Aufhören; während im letzten Falle umgekehrt am Eintritt dieser Winkel grösser ist als am Austritt.

88. **Satzräder mit cycloidischer Verzahnung.** Bis jetzt haben wir nur für zwei in einander greifende Räder die Verzahnungen construirt, die eine gleichförmige Uebertragung der Bewegung hervorbringen. Sollen aber mehrere Zahnräder beliebig combinirt richtig in einander greifen und eine gleichförmige Uebertragung der Bewegungen bewirken, so müssen sämtliche derartige Zahnräder, die Satzräder heissen, nicht nur gleiche Theilung und gleiche Lückenweite besitzen, sondern die Zahncurven müssen auch durch einen Peripheriepunkt eines einzigen Hülfsrollkreises q beschrieben werden, der an den betreffenden Theilkreisen rollt. Für die Satzräder muss demnach eine festgestellte Theilung τ gegeben sein und der Radius des Kreises q gleich $\vartheta . \tau$ genommen werden, wo ϑ eine praktischen Bedingungen entsprechende, bestimmte Zahl ist; ferner müssen die Umfänge der Theilkreise stets die Theilung τ eine ganze Anzahl Male enthalten. Der Radius des kleinsten Theilkreises der Satzräder darf nicht kleiner als der Durchmesser des Hülfsrollkreises q sein; denn die Zahnflanke, welche dieser Kreis q durch Rollung in dem kleinsten Theilkreise erzeugt, würde, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, sich so gestalten, dass die betreffenden Zähne an der Wurzel eine verhältnissmässig geringe Stärke erhalten und somit zur Anwendung nicht geeignet sind. Dagegen darf der Kreis q auch nicht zu klein gewählt

werden, weil sonst die durch ihn erzeugten Zahncurven bei der gegebenen Theilung nicht die erforderliche Länge erhalten.

In Fig. 215 sind die Theilkreise $p, \pi, \mathfrak{p}$, dreier Satzräder $Fp, \Phi\pi$, $\mathfrak{F}\mathfrak{p}$ gezeichnet, deren Radien resp. in den Verhältnissen 4:3:2 stehen, und der Hülfsrollkreis q ist halb so gross als der kleinste Theilkreis $\mathfrak{p}$ genommen. Wenn der Hülfsrollkreis q in dem Theilkreise p oder auf dem Theilkreise π rollt, so beschreibt sein Peripheriepunkt, der von dem mit Γ und K bezeichneten Berührungspunkte dieser Theilkreise ausgeht resp. die Zahnflanke KJ in dem Rade Fp und die Zahnkopfcurve $\Gamma\Delta$ des Rades $\Phi\pi$. In analoger Weise entsteht, wenn der Kreis q in π oder auf p rollt, resp. die Zahnflanke ΓB des Rades $\Phi\pi$ und die Zahnkopfcurve KL des anderen Rades Fp. Die zu den Zahnkopfcurven gehörenden Grenzpunkte Δ, L, welche durch die Grösse der gegebenen Theilung und eventuell auch durch die Tiefen der Zahnlücken bedingt sind, bestimmen die Grenzpunkte B, J der Zahnflanken; denn beschreiben wir resp. um F und Φ die Scheitelkreise $L\varepsilon$, Δe, welche die beiden Kreise q, q beziehlich in ε, e treffen, dann ergeben sich durch die resp. um F und Φ beschriebenen Kreise eJ, εB auf den betreffenden Zahnflanken die entsprechenden Grenzpunkte J, B, von denen aus die weitere Umgrenzung der Zahnlücke so geformt werden muss, dass alle eingreifenden Zähne freien Durchgang finden. Die Eingriffscurve besteht aus den beiden Kreisbögen $\varepsilon\Gamma$, Ke.

Um nun die Zahncurve $\mathfrak{J}\mathfrak{K}\mathfrak{L}$ des dritten Rades $\mathfrak{F}\mathfrak{p}$ zu erhalten, die bei dem mit $\mathfrak{K}$ und Γ_x bezeichneten Berührungspunkte der Theilkreise $\mathfrak{p}$, π in das Rad $\Phi\pi$ eingreift, zeichnen wir zu $B\Gamma\Delta$ die congruente Zahncurve $B_x\Gamma_x\Delta_x$, construiren die geradlinige Zahnflanke $\mathfrak{K}\mathfrak{J}$, die der betreffende Peripheriepunkt des in $\mathfrak{p}$ rollenden Kreises q beschreibt, und die Zahnkopfcurve $\mathfrak{K}\mathfrak{L}$, welche derselbe Punkt erzeugt, wenn der Kreis q auf $\mathfrak{p}$ rollt. Die entsprechenden Eingriffsbogen $\varepsilon_x\Gamma_x$, $\mathfrak{K}e_x$ werden durch die Kreise εB, Δe bestimmt, und dem zufolge würden sich die Grenzpunkte $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{L}$ der Zahncurve des Rades $\mathfrak{F}\mathfrak{p}$ durch die um $\mathfrak{F}$ beschriebenen Kreise $e_x\mathfrak{J}$, $\varepsilon_x\mathfrak{L}$ ergeben; aber diese Bestimmung ist nicht maassgebend, weil noch andere Bedingungen hinzutreten. Hierbei ist zu beachten, dass die Länge der Zahnkopfcurve $\mathfrak{K}\mathfrak{L}$ auch eventuell durch die gegebene Theilung τ bedingt sein kann und infolge dessen kürzer genommen werden muss. Ferner wird diese Länge in derselben Weise wie vorhin auch durch die Grenzpunkte der Zahncurve des Rades Fp bestimmt, welches ebenfalls mit dem Rade $\mathfrak{F}\mathfrak{p}$ im richtigen Eingriff zusammen gehen soll; daher müssen hier diejenigen Bedingungen in Geltung kommen, welche die kürzeste Länge der Zahnkopfcurve $\mathfrak{K}\mathfrak{L}$ erfordern; und somit werden hierdurch auch die entsprechenden Eingriffsbögen kürzer. Aus diesen Darlegungen ergiebt sich: Alle Räder, deren Zähne nach der angegebenen Weise construirt sind, greifen richtig in einander und sind somit Satzräder.

89. **Satzräder mit kreisförmiger, angenähert richtiger Verzahnung.** Von den vorhin erzeugten s-förmigen Zahncurven kommen meistens und besonders bei grösseren Zähnezahlen nur kurze Stücke zur Verwendung; deshalb ersetzt man diese Curven, um sie leichter zeichnen und herstellen zu können, in der Praxis oft durch zwei Kreisbögen, die sich möglichst nahe an die betreffende Zahncurve anschliessen. In der Regel wird ein Kreisbogen, der durch drei günstig gewählte Curvenpunkte geht, besser mit dem Curvenstücke übereinstimmen, als ein Bogenstück eines Krümmungskreises, der drei unendlich nahe Punkte mit dem Curvenstücke gemeinsam hat. Ein kurzes Curvenstück kann aber in der Praxis oft hinreichend angenähert durch ein Bogenstück eines an passender Stelle bestimmten Krümmungskreises ersetzt werden.

Für Satzräder kann der Hülfsrollkreis q so gewählt werden, dass sein Umfang gleich dem 6-fachen der gegebenen Theilung τ, sein Durchmesser also gleich $6 . \tau : 3{,}141 .. = 1{,}909\tau$ ist. Nehmen wir in Fig. 216 auf dem oberen Hülfsrollkreise q den Bogen $\mathfrak{P}E = \frac{1}{2}\tau = 30^0$, oder ziehen wir durch den Pol $\mathfrak{P}$ die Gerade $\mathfrak{P}E$, die mit der Centralen $F\Phi$ den Winkel von 75^0 bildet, und fällen wir auf diese Gerade von dem zu $\mathfrak{P}$ diametralen Punkte R des Kreises q ein Loth, so ist E auch der Fusspunkt dieses Lothes. Je nachdem der Kreis q an dem Theilkreise p oder π rollt, beschreibt sein Peripheriepunkt E die Zahnfusscurve KJ des Rades Fp oder die Zahnkopfcurve $\Gamma\Delta$ des Rades $\Phi\pi$, und beide Zahncurven berühren sich im Punkte E. Um nun für den Berührungspunkt E dieser beiden Curven die zugehörigen auf der Curvennormalen $\mathfrak{P}E$ liegenden Krümmungsmittelpunkte zu bestimmen, die resp. mit J^m, Δ^m bezeichnet sind, ziehen wir in $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}E$ die Senkrechte, welche die beiden Kreise q in $\mathfrak{Q}_p$, $\mathfrak{Q}_\pi$ trifft; dann wird nach Art. 59, weil $\mathfrak{Q}_p$ Diametralpunkt von E ist, die Curvennormale $\mathfrak{P}E$ von den Geraden $F\mathfrak{Q}_p$, $\Phi\mathfrak{Q}_p$ beziehlich in den Krümmungsmittelpunkten J^m, Δ^m geschnitten. Hiernach stimmen die resp. um diese Punkte beschriebenen durch E gehenden Kreisbögen KJ, $\Gamma\Delta$ mit jenen Zahncurven angenähert überein. In analoger Weise ergeben sich, wenn wir anderseits auf der Geraden $\mathfrak{P}E$ die Strecke $\mathfrak{P}E_I = E\mathfrak{P}$ machen, ferner uns vom Peripheriepunkte E_I durch Rollen des unteren Kreises q an π oder p resp. die Zahnfusscurve $\mathsf{B}_I\Gamma_I$ oder die Zahnkopfcurve $L_I K_I$ erzeugt denken, die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte B_I^m, L_I^m auf der Curvennormalen $\mathfrak{P}E_I$ vermittelst der Geraden $\Phi\mathfrak{Q}_\pi$, $F\mathfrak{Q}_\pi$. Somit können auch diese Curven angenähert durch die um B_I^m, L_I^m beschriebenen durch E_I gehenden Kreisbögen $\mathsf{B}_I\Gamma_I$, $L_I K_I$ ersetzt werden. Zeichnen wir zu $\mathsf{B}_I\Gamma_I$ den congruenten Kreisbogen $\mathsf{B}\Gamma$, ebenfalls zu $L_I K_I$ den congruenten Kreisbogen LK, so stimmen die aus je zweien Kreisbögen gebildeten Zahnprofile mit den betreffenden Zahncurven sehr angenähert überein und können diese in der Praxis oft ersetzen.[1]) Der Winkel, unter welchem die Kreisbögen $\mathsf{B}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ in Γ auf π zusammenstossen, ist sehr stumpf und fast ein gestreckter, denn die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte geht in der Regel sehr nahe an dem Punkte Γ vorbei. Das Gleiche gilt von den Kreisbögen JK, KL, die in K auf p zusammenstossen, und somit kann dieser kleine Uebelstand bei der praktischen Ausführung als verschwindend betrachtet werden.

Da wir für die Satzräder den Durchmesser des Kreises q gleich $6\tau : 3{,}141\ldots$ genommen haben und die Gerade $\mathfrak{P}E$ mit der Centralen $F\Phi$ den Winkel von 75^0 bildet, so ist die auf $\mathfrak{P}E$ errichtete Senkrechte

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}_p = \mathfrak{P}\mathfrak{Q}_\pi = \frac{6.\tau}{3{,}141\ldots} \sin 75^0 = 1{,}845.\tau$$

von constanter Grösse. Hiernach ist das aus den beiden Kreisbögen bestehende Zahnprofil eines jeden dieser Räder durch den zugehörigen Theilkreis bestimmt; und wenn die Zahnlücken genügend weit geformt werden, so dass ein freier Durchgang der eingreifenden Zähne stattfindet, dann können wir sagen: **Alle Räder, deren Zähne auf diese Weise durch je zwei Kreisbögen profilirt sind, greifen angenähert richtig ineinander und sind somit Satzräder.**

---

[1]) Die Verzahnungsweise stammt von Willis: *„On the Theeth of Wheels“*, Transactions of the Institution of Civil-Engineers. 1838. V. II, pag. 89, auch *Principles of Mechanism*. 1841. Art. 139, und 1870. Art. 181.

Die Evolventen-Verzahnung.

90. **Die äussere Evolventen-Verzahnung im Allgemeinen.** Sind in Fig. 217 die beiden Theilkreise oder Rollkreise p, π der Räder Fp, $\Phi\pi$ gegeben und wird als Zahncurve des Rades Fp ein Stück JKL einer Kreisevolvente k angenommen, deren Grundkreis o kleiner als der Theilkreis p und mit diesem concentrisch ist, so erzeugt diese Kreisevolvente, wenn p um eine bestimmte Bogenlänge auf π rollt, nach Art. 76 als zugehörige Zahncurve des anderen Rades $\Phi\pi$ auch ein Stück $\mathsf{B}\Gamma\Delta$ einer Kreisevolvente $\varkappa$, deren Grundkreis ω mit dem Theilkreise π concentrisch ist und die vom Pol $\mathfrak{P}$ an den Kreis o gelegte Tangente $\mathfrak{P}a$ in dem mit α bezeichneten Punkte berührt. Die grösste brauchbare Länge oder die natürliche Begrenzung, welche diese Zahncurven erhalten, damit ihre Berührung die betreffenden Rückkehrpunkte J, B nicht überschreitet, wird durch die Berührungspunkte a, α der gemeinsamen Tangente der Grundkreise o, ω bestimmt; denn der mit dem Radius $F\alpha$ um F beschriebene Kreis trifft die Zahncurve k in dem Grenzpunkte L, und der mit dem Radius Φa um Φ beschriebene Kreis schneidet die Zahncurve $\varkappa$ in dem Grenzpunkte Δ. Beim Drehen des Rades $\Phi\pi$ im Sinne $\mathfrak{P}\pi$ beginnt der Eingriff im Punkte α. In diesem Punkte tritt B mit L in Berührung, und der Berührungspunkt oder Eingriffspunkt, der in der gezeichneten Stellung mit K und Γ bezeichnet ist, durchschreitet die Tangentenstrecke αa. Während dieser Eingriffspunkt die Strecke $\alpha\Gamma$ zurücklegt, gleitet LK auf $\mathsf{B}\Gamma$, und während derselbe von da an bis zum Punkte a schreitet, wo der Eingriff aufhört, gleitet der Bogen KJ auf $\Gamma\Delta$.

Die vom Punkte Δ an den Kreis ω gelegte Tangente $\Delta\mathfrak{P}'$ schneidet den Theilkreis π in dem zunächst liegenden Punkte $\mathfrak{P}'$, und der Normalen $\mathfrak{P}'\Delta$ der Zahncurve $\varkappa$ entspricht die Normale $P'J$ der Zahncurve k. Die vom Punkte L an den Kreis o gelegte Tangente LP^1 trifft den Theilkreis p in dem zunächst liegenden Punkte P^1, und dieser Normalen P^1L der Zahncurve k entspricht die Normale $\mathfrak{P}^1\mathsf{B}$ der Zahncurve $\varkappa$. Beim Beginn des Eingriffs an der Stelle α coincidiren die beiden Punkte P^1, $\mathfrak{P}^1$ der rollenden Theilkreise im Pol $\mathfrak{P}$ auf der Centralen, und die beiden Normalen P^1L, $\mathfrak{P}^1\mathsf{B}$ fallen mit $\mathfrak{P}\alpha$ zusammen. Beim Aufhören des Eingriffs an der Stelle a gelangen die beiden Punkte P', $\mathfrak{P}'$ der rollenden Theilkreise nach dem Pol $\mathfrak{P}$ und die beiden Normalen

$P'J$, $\mathfrak{P}'\Delta$ gleichzeitig nach $\mathfrak{P}a$. Während also der Eingriffspunkt die Strecke αa durchschreitet, kommt der Bogen $P'\mathfrak{P}P'$ des Theilkreises p mit dem gleich grossen Bogen $\mathfrak{P}'\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ des Theilkreises π rollend in Berührung; demnach ist dies die grösste Länge des Eingriffsbogens, die bei dieser äusseren Verzahnung auftreten kann. Die Eingriffscurve wird hier durch die gerade Strecke $a\alpha$ vertreten. Obgleich die beiden durch den Theilkreis geschiedenen Theile einer Zahncurve hier einer Kreisevolvente angehören und sich nicht wie bei den früheren Verzahnungen durch die Verschiedenheit ihrer Erzeugung unterscheiden, so pflegt man doch auch bei dieser Verzahnung, sie mag eine äussere oder innere sein, den auf der Berührungsseite des Theilkreises befindlichen Theil des Zahnes den Kopf und den übrigen Theil den Fuss des Zahnes zu nennen. Da bei der inneren Verzahnung auch der Fall eintreten kann, dass die Zahnprofile von dem betreffenden Theilkreise gar nicht geschnitten werden, und der Zahnkranz ganz innerhalb dieses Kreises liegt, so hört jedoch in diesem Falle jene Unterscheidung auf.

Um die theoretische Begrenzung der betreffenden Zahnlücke in dem Rade Fp zu erhalten, ziehen wir, wie schon früher angegeben wurde, die radiale Gerade $\Delta\Phi$, die den Theilkreis π in χ trifft, machen auf dem Theilkreise p den Bogen $\mathfrak{P}x = \mathfrak{P}\chi$ und auf dem Radius Fx die Strecke $xs = \chi\Delta$; dann ist s der in Betracht kommende Scheitel der von dem Punkte Δ in dem Rade Fp beschriebenen, verschlungenen Trochoide d, die in bekannter Weise gezeichnet ist. Ebenso ergiebt sich, wenn wir die radiale Gerade LF ziehen, die p in n schneidet, dann auf π den Bogen $\mathfrak{P}\nu = \mathfrak{P}n$ und auf dem Radius $\Phi\nu$ die Strecke $\nu\sigma = nL$ machen, der betreffende Scheitel σ der vom Punkte L im Rade $\Phi\pi$ beschriebenen, verschlungenen Trochoide λ, welche die theoretische Begrenzung der Zahnlücken des Rades $\Phi\pi$ bestimmt. Die beiden Trochoiden d, λ berühren resp. die Zahncurven k, $\varkappa$ in den Punkten J, B, weil für diese Punkte die Normalen der Zahncurven beziehlich mit denen der Trochoiden identisch sind.

91. **Die innere Evolventen-Verzahnung im Allgemeinen.** In Fig. **218** rollen die Innenseite des Theilkreises π und die Aussenseite des Theilkreises p an einander; und es sind die beiden entsprechenden Kreisevolventen k, $\varkappa$ gezeichnet, deren Grundkreise o, ω die durch den Pol $\mathfrak{P}$ gehende gemeinsame Tangente $\mathfrak{P}a$ resp. in den Punkten a, α berühren. Von der Kreisevolvente oder Zahncurve $\varkappa$ des grösseren Rades $\Phi\pi$ kommt der Theil $\Delta\beta$, der innerhalb

des um Φ mit dem Radius Φa beschriebenen Kreises $a\Delta$ liegt, mit der Kreisevolvente oder Zahncurve k nicht in Berührung. Bei der Drehung im Sinne der Pfeile beginnt der Eingriff im Punkte a, und es coincidiren in demselben die beiden Punkte J, Δ der Zahncurve k, $\varkappa$. Der Eingriffspunkt, welcher in dem dargestellten Bewegungsmomente mit K und Γ bezeichnet ist, bewegt sich von a auf der Tangente $\mathfrak{P}\varepsilon$ in der Richtung $a\varepsilon$. Während dieser Bewegung gleiten zunächst die Zahncurventheile JK, $\Delta\Gamma$, dann Kk, $\Gamma\varkappa$ auf einander, und der Eingriff kann sich bis ins Unendliche fortsetzen. Die praktische Ausführung erfordert aber begrenzte Zahncurven, und dem gemäss muss der Eingriff in einem durch betreffende Bedingungen gegebenen Punkt ε aufhören. Die Eingriffscurve wird also durch eine gerade Strecke $a\varepsilon$ vertreten. Hiernach sind dann auch auf den Zahncurven k, $\varkappa$ die Grenzpunkte L, γ bestimmt; denn dieselben liegen resp. auf den beiden durch ε gehenden um F und Φ beschriebenen Kreisen. Ziehen wir an die Zahncurve k die beiden Normalen JP', $LP^{\prime}$, welche den Kreis o berühren und den Kreis p resp. in den Punkten P', $P^{\prime}$ schneiden, dann ist $P^{\prime}\mathfrak{P}P'$ auf dem Theilkreise p der Eingriffsbogen. In analoger Weise ergiebt sich, wenn an die Zahncurve $\varkappa$ die Normalen $\gamma\mathfrak{P}^{\prime}$, $\Delta\mathfrak{P}'$ gezogen werden, die den Kreis ω berühren und den Kreis π resp. in den Punkten $\mathfrak{P}^{\prime}$, $\mathfrak{P}'$ schneiden, der entsprechende Eingriffsbogen $\mathfrak{P}^{\prime}\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ auf dem Theilkreise π.

Bei einem innen verzahnten Rade kann der Fall eintreten, dass die Zahnecken desselben in die Zähne des anderen aussen verzahnten Rades einschneiden und keinen freien Durchgang finden. Es muss daher die erste Bedingung sein, dieses gefährliche Einschneiden, welches sich besonders dann ereignet, wenn die Theilkreise der beiden Räder nur wenig differiren, durchaus zu vermeiden. In Fig. **219**, Taf. XIV, sind wie vorhin die beiden Kreisevolventen k, $\varkappa$ construirt, die sich auf der gemeinsamen Tangente $\mathfrak{P}a$ der Grundkreise o, ω in dem Punkte K berühren. Der durch den um Φ beschriebenen Kreisbogen $a\Delta$ bestimmte Grenzpunkt Δ der Kreisevolvente $\varkappa$, der hier zufällig auf der Centralen ΦF liegt, beschreibt als Zahnecke in dem anderen Rade Fp eine verschlungene Trochoide d, die also erzeugt wird, indem der Kreis π auf dem kleineren Kreis p rollt. Dieselbe berührt die Kreisevolvente k im Rückkehrpunkte J, bildet eine kleine Schlinge und schneidet k in einem Punkte U; und demnach darf sich diese Zahncurve k höchstens bis zu dem Schnittpunkt U erstrecken. Ist aber diese Zahncurve k z. B. durch den über U hinausliegenden

Punkt L begrenzt, so wird in diesem Falle die Verzahnung unbrauchbar; oder man muss die Zahncurve $\varkappa$ nicht durch den theoretischen Grenzpunkt Δ, sondern durch einen weiter von dem Grundkreise ω entfernten Punkt auf Kosten des längeren Eingriffs verkürzen, damit möglicherweise die entsprechende Trochoide d über L hinweggeht. Ferner kann auch durch Verkleinerung des Winkels $\Phi\mathfrak{P}\alpha$, den die gemeinsame Tangente $\mathfrak{P}\alpha$ mit der Centralen bildet, erreicht werden, dass die Trochoide d die Zahncurve k in einem Punkte U schneidet, der genügend weit von J entfernt ist, und auf diese Weise werden wir in Art. 94 jenes gefährliche Einschneiden der Zähne bei der inneren Verzahnung zu vermeiden suchen.

Der besseren Uebersichtlichkeit wegen haben wir in bekannter Weise noch die Epicycloide h gezeichnet, welche der vom Pol $\mathfrak{P}$ ausgehende Peripheriepunkt des auf p rollenden Kreises π beschreibt und die verschiedenen Lagen I, II, III, IV, V, VI desselben angegeben, wenn sein Mittelpunkt Φ resp. nach 1, 2, 3, 4, 5, 6 gelangt. Wir erhalten hiernach z. B. einen Punkt Δ_V der Trochoide d, indem wir auf der Geraden V5 die Strecke $V\Delta_V = \mathfrak{P}\Delta$ machen.

Fallen insbesondere die beiden Grundkreise o, ω beziehlich mit den Rollkreisen p, π zusammen, ist also die gemeinsame Tangente senkrecht zur Centralen, dann coincidiren die Punkte Δ, J im Pol $\mathfrak{P}$ und die entsprechende auch von $\mathfrak{P}$ ausgehende Kreisevolvente k umschliesst, weil p ihr Grundkreis ist, die Epicycloide h; dem zufolge schneidet der Zahn des Rades $\Phi\pi$ sogleich an der Stelle $\mathfrak{P}$ in den Zahn des Rades Fp hinein, und daher dürfen die Theilkreise hier niemals als Grundkreise genommen werden.

92. **Construction der Evolventenzähne für äusseren Eingriff.** Um in Fig. **220** für zwei Räder Fp, $\Phi\pi$, bei welchen beispielsweise das Verhältniss der Uebersetzung oder der Theilkreisradien 1:6 ist, die Zähne zu construiren, deren Profile Kreisevolventen sind, bestimmen wir zunächst im unteren Theile unserer Figur auf der Centralen $F\Phi$ den Pol $\mathfrak{P}$, so dass $F\mathfrak{P}:\mathfrak{P}\Phi = 1:6$ ist, beschreiben die sich in $\mathfrak{P}$ berührenden Theilkreise p, π und ziehen durch $\mathfrak{P}$ die Eingriffsgerade αa, so dass sie von der zur Centralen senkrechten Richtung um einen willkürlich gewählten, verhältnissmässig kleinen Winkel abweicht. Die von F und Φ auf diese Eingriffsgerade gefällten Lothe Fa, $\Phi\alpha$ sind dann die Radien der Grundkreise o, ω der construirten Evolventen k, $\varkappa$, deren in $\mathfrak{P}$

befindlicher Berührungspunkt mit Γ, K bezeichnet ist. Der Grenzpunkt Δ auf $\varkappa$ ergiebt sich durch den mit dem Radius Φa beschriebenen Scheitelkreis, und dieser Grenzpunkt Δ tritt im Punkte a berührend mit dem auf o liegenden Punkte J des Gegenzahnes zusammen. Wird nun die Theilung KK_1 auf dem Theilkreise p so angenommen, dass wir eine den praktischen Anforderungen entsprechende Zahnstärke erhalten, also etwa gleich $\frac{1}{16}$ von dem Umfange des Theilkreises p, dann müssen wir ferner die Lückenweite $K'K_1$ zweckmässig wählen, damit der Scheitel LL' nicht zu schmal und der Zahn $\Gamma'_1\Gamma_1$ nicht zu schwach wird. Hierauf zeichnen wir die zu k symmetrische Evolvente k' und stumpfen diesen Zahn durch den Scheitelkreis $\varepsilon LL'$ ab, so dass die Eingriffsstrecke $a\varepsilon$ möglichst lang, der Zahnkopf aber nicht zu spitz wird. Bei dem betrachteten Beispiel kann man diese Abstumpfung auch derart einrichten, dass der Zahn fast bis an den Grundkreis ω reicht, oder dass die Zähne beider Räder gleiche Höhe erhalten. Somit sind auf diese Weise die Zähne des Rades Fp bestimmt, wenn wir die Lücken noch innerhalb des Grundkreises o seitlich radial und am Grunde kreisförmig begrenzen. Sollte aber die radiale Begrenzung eine ungünstige Schwächung der Zähne zur Folge haben, so kann man auch, wie in unserer Zeichnung, die geradlinige Begrenzung JH parallel zur radialen Symmetrallinie des Zahnes ziehen; denn in der Praxis wird die scharfe Zahnkante Δ abgerundet, und daher wird auch diese geradlinige Begrenzung JH dem entsprechenden Zahne freien Durchgang gewähren.

Die Zähne des anderen Rades Φπ ergeben sich, indem wir auf dem Theilkreise π den Bogen $\Gamma\Gamma_1$ gleich der Theilung KK_1, also gleich $\frac{1}{28}$ von dem Umfange des Kreises π machen, ferner den Bogen $\Gamma'_1\Gamma_1$ wegen des nöthigen Spielraumes ein wenig kleiner als die Lückenweite $K'K_1$ nehmen, und hierauf die symmetrischen Evolventen $\mathsf{B}_1\Gamma_1\Delta_1$, $\mathsf{B}'_1\Gamma'_1\Delta'_1$ zeichnen, welche einerseits durch den schon gezogenen Scheitelkreis Δa, anderseits durch den Grundkreis ω begrenzt sind. Wenn die Zähne des Rades Fp so wie in unserer Zeichnung abgestumpft werden, dann kann dieser Grundkreis ω zugleich als Fusskreis für die Zähne des Rades Φπ dienen. Von diesen Zähnen kommt aber nur der Theil in Thätigkeit, der ausserhalb des um Φ mit dem Radius Φε beschriebenen Kreises liegt. Bezeichnet $\varkappa$ zugleich den Schnittpunkt, den dieser Kreis mit der Evolvente $\mathsf{B}\varkappa$ bildet, so kommt von derselben nur das Stück ΔΓ$\varkappa$ mit dem entsprechenden längeren Stücke JKL in Berührung, und zwar entspricht dem Bogentheil ΔΓ ein kürzerer

JK, dem Bogentheil $\Gamma\varkappa$ ein längerer KL. Da durch statische Untersuchung der Zahndruck bei dieser Uebertragung sich als constant erweist, so folgt, dass die Zähne innerhalb der Theilkreise eine stärkere Abnutzung erleiden [1]).

Die Radien der Theilkreise p, π verhalten sich wie die Radien der Grundkreise o, ω; demnach wird, wenn wir uns die Tangente αa durch einen Faden ersetzt denken, dessen Fortsetzungen auf die Grundkreise gewickelt sind, bei der Drehung der Räder dieser Faden von dem einen Grundkreise auf den anderen gewickelt. Statt wie bisher auf den Theilkreisen können wir dem zufolge auch auf den Grundkreisen die entsprechende Theilung t annehmen, die in dem betrachteten Beispiel $\frac{1}{16}$ vom Umfange des Grundkreises o oder $\frac{1}{96}$ vom Umfange des Grundkreises ω beträgt. Denken wir uns auf die Tangente αa die Strecken $\mathfrak{P}E_I$, $E_I E_{II}$, $E_{II} E_{III}$ nach der einen und ebenso nach der anderen Seite von $\mathfrak{P}$ gleich der Theilung t aufgetragen, dann beschreiben die so erhaltenen Punkte, je nachdem die Tangente auf o oder ω rollt, für das Rad Fp oder $\Phi\pi$ die gleichgelegenen Zahncurven. Wird Fp als das treibende Rad betrachtet und im Sinne $K_1 K$ gedreht, dann beginnt der Eingriff in a, schreitet der Drehung proportional auf der Geraden $a\alpha$ fort und hört in ε auf. Inzwischen hat der Eingriff des nachfolgenden Zahnpaares von a an schon die Strecke $\overline{a\varepsilon}$ — t zurückgelegt; oder im Momente des Eingriffs in a hat der Eingriffspunkt des vorangehenden Zahnpaares auf $a\alpha$ eine Strecke gleich der Theilung t durchschritten. Es befinden sich demnach während der Drehung, die der Strecke $\overline{a\varepsilon}$ — t entspricht, gleichzeitig zwei Zahnpaare in Berührung. Das gleichzeitige Eingreifen

[1]) Die Anwendung der Kreisevolventen auf die Verzahnungen wurde zuerst von Euler in der Abhandlung: *Supplementum. De Figura dentium rotarum.* (*Novi Com. Acad. Petrop.* T. XI. 1765. p. 207) mitgetheilt. Die Einführung der Evolventen-Verzahnung in die Praxis hat aber erst begonnen, nachdem Willis in seinen „*Principles of Mechanism* 1841" diese Verzahnungs-Methode einem grösseren Leserkreise zugänglich machte. Eytelwein, der im ersten Bande seiner „*Statik fester Körper* 1808" die Verzahnung der Räder eingehend behandelt und die erwähnte Abhandlung von Euler citirt, widmet der Evolventen-Verzahnung keine Beachtung. In der kleinen Schrift, „*Zur Theorie der Evolventen-Verzahnung* von B. Saalschütz. 1870. p. 2," sagt dieser Verfasser, der Eytelwein citirt und durch diesen die älteren in unserer Anmerkung S. 173 genannten Abhandlungen über die cycloidischen Verzahnungen von De La Hire und Camus kennen musste, in seltsam irrthümlicher Weise: „Die Cycloide wird von Euler als zu Zahnwölbungen geeignet nicht erwähnt, so dass also das Princip der Evolventen-Verzahnung älter ist, als dasjenige der Cycloiden-Verzahnung".

zweier Zahnpaare hört aber in dem Grenzfalle auf, in welchem $\overline{a\varepsilon}$=t ist; daher muss bei der Verzahnung die Eingriffsstrecke stets grösser als die auf den Grundkreisen genommene Theilung t sein. Ist dagegen diese Strecke gleich 2t, dann befinden sich beständig zwei Zahnpaare im Eingriff. Die Eingriffsstrecke $a\mathfrak{P}$ vor dem Durchgange des Berührungspunktes durch die Centrale ist kleiner als die entsprechende Eingriffsstrecke $\mathfrak{P}\varepsilon$ nach diesem Durchgange, deshalb ist es für die Uebertragung der Bewegung günstiger, wenn das kleinere Rad treibend wirkt.

Werden die Mittelpunkte F, Φ ein wenig auseinander gerückt, dann vergrössern sich zwar die Theilkreise p, π und der Winkel, welchen die gemeinsame Tangente αa der Grundkreise mit der zur Centralen senkrechten Richtung bildet; aber es bleibt das Verhältniss $F\mathfrak{P}:\mathfrak{P}\Phi$ der Theilkreisradien und die Theilung auf den Grundkreisen unverändert. Dagegen wird die Eingriffsstrecke, welche durch die Scheitelkreise bestimmt ist, verkleinert; dieselbe darf sich aber nicht bis auf die Länge t verkürzen, und damit ist die Grenze gegeben, bis wie weit jene Mittelpunkte ohne Störung des Eingriffs auseinander gerückt werden können. Die Mittelpunkte F, Φ dürfen auch nicht näher zusammengeschoben werden, als bei dem in unserer Figur gezeichneten Grenzfalle geschehen ist, selbst wenn die Tiefen der Zahnlücken dies auch gestatten; denn beim Näherrücken dieser Mittelpunkte würde der Eingriff den Rückkehrpunkt J der Evolvente k überschreiten, es würde dem zufolge ein falscher Eingriff, wie man in der Praxis sagt, stattfinden, der eine ungleichförmige, stossende Uebertragung der Bewegung bewirkt. Wir erhalten demnach das Ergebniss: **Bei den Rädern mit Evolventen-Verzahnung kann der Axenabstand innerhalb bestimmter Grenzen ohne Störung des richtigen Eingriffs verändert werden.**

Wird der Radius des grösseren Rades unendlich gross genommen, also dieses Rad durch eine Zahnstange ersetzt, die in dem oberen Theile der Fig. **220** gezeichnet ist, dann wird der betreffende Theilkreis durch die Gerade $\mathfrak{p}$ vertreten, die im Pol $\mathfrak{P}$ den Theilkreis p berührt, und die Zähne der Zahnstange werden nach Art. 77 durch Gerade begrenzt, die auf den von $\mathfrak{P}$ an den Grundkreis o gehenden Tangenten senkrecht stehen. Diese Zähne kann man im Uebrigen ebenso wie die des Rades $\Phi\pi$ bestimmen. Es wird auf der Geraden $\mathfrak{p}$ vom Pol $\mathfrak{P}$ aus die Strecke $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ gleich der Theilung KK_1 des Theilkreises p gemacht, ferner die Strecke $\mathfrak{C}'_1\mathfrak{C}_1$ wegen des nöthigen Spielraumes ein wenig kleiner als die Lückenweite $K' K_1$ des Rades Fp genommen. Die geradlinigen Zahnprofile werden einerseits begrenzt von der zu $\mathfrak{p}$ parallelen Geraden $a\mathfrak{D}$, welche durch den Berührungspunkt a der von $\mathfrak{P}$ an den Kreis o gelegten Tangente geht, und anderseits von der zu $\mathfrak{p}$ parallelen Geraden, welche die nöthige Tiefe der Zahnlücken in der Stange bestimmt. Der Scheitelkreis des Rades Fp schneidet die Tangente $a\mathfrak{P}$ im Punkte ε, und demnach kommt von den Stangenzähnen nur der Theil mit den Radzähnen in Berührung, welcher von der durch ε zu $\mathfrak{p}$ parallel gezogenen Geraden nach der Fussseite hin begrenzt wird. Der Eingriff beginnt, wenn das Rad im Sinne $K_1 K$ gedreht wird, im Punkte a und schreitet bis zum Punkte ε fort.

Wird die Zahnstange ein wenig von F abgerückt, etwa in der Richtung des Zahnprofiles $\mathfrak{C}\mathfrak{k}$ parallel verschoben, dann bleibt die Eingriffsgerade, sowie die Eingriffsstrecke $\mathfrak{P}\varepsilon$ und der Theilkreis p unverändert; dagegen wird aber die Eingriffsstrecke $a\mathfrak{P}$ verkürzt, und zwar bis auf Null, wenn die geraden Zahnscheitel mit der an p gelegten Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ zusammenfallen. So lange die gesamte Eingriffsstrecke noch grösser als die Theilung $\mathfrak{t}$ des Grundkreises o ist, so lange findet auch eine richtige Uebertragung der Bewegung statt. Die gezeichnete Lage der Zahnstange ist die nächste an F; denn bei näherer Lage an F würde das Zahnprofil $\mathfrak{k}\mathfrak{D}$ die entsprechende Evolvente KL über ihren Rückkehrpunkt hinaus berühren und somit einen falschen Eingriff hervorbringen.

Mit dem Vergrössern der Axenabstände bei den Rädern Fp, $\Phi\pi$ werden auch die Theilkreise p, π wie oben dargelegt, vergrössert, aber das Verhältniss ihrer Radien wird nicht verändert. Bei jener Verschiebung der Zahnstange bleibt jedoch der Theilkreis p unverändert und demnach können für das Zwischenrad, welches gleichzeitig in das Rad $\Phi\pi$ und in die Zahnstange $\mathfrak{F}^{\infty}\mathfrak{p}$ eingreift, zwei verschiedene Theilkreise auftreten. Wegen der Veränderlichkeit der Theilkreise ist es rathsam, die Construction der Evolventen-Verzahnungen nicht mehr, wie es zweckmässig bei den anderen Verzahnungen geschah, allein auf die Theilkreise und deren Theilung zu stützen, sondern es wird hier dem Wesen der Beziehungen besser entsprechen, wenn wir die unveränderlichen Grundkreise o, ω und ihre Theilung, die wir mit $\mathfrak{t}$ bezeichnet haben, als Grundlage für die Construction der Evolventenzähne nehmen.

Um von dieser Grundlage ausgehend, unten in Fig. **220**, die Evolventenzähne der jetzt mit Fo, $\Phi\omega$ bezeichneten beiden Räder zu construiren, wird auf der Centralen $F\Phi$ der Pol $\mathfrak{P}$ so bestimmt, dass $F\mathfrak{P}:\mathfrak{P}\Phi$ gleich dem gegebenen Verhältnisse der Uebersetzung ist, und die Gerade $\alpha\mathfrak{P}a$ gezogen; ferner werden tangirend an derselben die Grundkreise o, ω beschrieben und die Evolventen Jk, $\mathsf{B}\varkappa$ gezeichnet, die sich in $\mathfrak{P}$ berühren. Hiernach machen wir resp. auf den Grundkreisen o, ω die Bögen JJ_1, $\mathsf{B}\mathsf{B}_1$ gleich der zweckmässig angenommenen Theilung t; wählen ferner auf o den Punkt J', so dass die Zähne der beiden Räder eine den praktischen Anforderungen entsprechende Stärke erhalten, die man entweder nach reiner Anschauung oder nach gewonnener Erfahrung beurtheilt. Dadurch ist die Lage der zu Jk symmetrischen Evolvente $J'k'$ bestimmt und mit Rücksicht auf den nöthigen Spielraum auch die Lage der Evolvente $\mathsf{B}_1'\Delta_1'$ bedingt, die zu den schon gezeichneten Evolventen $\mathsf{B}_1\Delta_1$ oder $\mathsf{B}\Delta$ symmetrisch ist. Die Scheitel der Zähne werden wie vorhin durch die Scheitelkreise $a\Delta$, εL erhalten. Für die Uebertragung der Bewegung ist es vortheilhaft, wenn die gemeinsame Tangente αa mit der zur Centralen senkrechten Richtung einen verhältnissmässig kleinen Winkel bildet. Dieser Winkel darf jedoch auch nicht zu klein genommen werden, weil dadurch die Zähne und ihre Eingriffsstrecke sich unzweckmässig verkürzen. Theoretisch kann man zwar bei äusserer Verzahnung die gemeinsame Tangente senkrecht zu $F\Phi$ nehmen, dies hat aber zur Folge, dass dann zu der Evolvente k, wie in Art. 76 (Fig. **199**) gezeigt wurde, der in dem Rückkehrpunkt ansetzende zweite symmetrische Zweig von der Evolvente $\varkappa$ als entsprechende Zahncurve gehört. Durch diesen Zweig erhalten aber die Zähne eine praktisch unbrauchbare Form.

Sollen nun auch in Fig. **220** die Zähne der in das Rad Fo eingreifenden Zahnstange ohne Benutzung des Theilkreises p, der hier nur in seiner Eigenschaft als Rollkreis zur Geltung kommt, gezeichnet werden, so muss doch der betreffende Pol $\mathfrak{P}$ gegeben sein; damit ist dann die Bewegung der Zahnstange resp. die Bewegung der Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ bestimmt, die sich in sich selbst verschiebt und gleichzeitig bei der Drehung des Rades Fo auf dem gedachten Theilkreise p rollt. Bei der Zahnstange ist aber der Grundkreis nicht zugänglich; denn sein Mittelpunkt $\mathfrak{F}^\infty$, sein Berührungspunkt $\mathfrak{a}^\infty$ auf der von $\mathfrak{P}$ an den Grundkreis o gelegten Tangente $a\mathfrak{P}$ und er selbst liegt im Unendlichen [1]). Deshalb tragen

[1]) Die Auffassung von A. **Büttner** in seiner vortrefflichen Abhandlung „Die Evolventen-Verzahnung für Satzräder“ in der *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 1871. B. 15. S. 314, dass bei der Zahnstange der Grund-

wir in diesem Ausnahmefalle auf die an o gelegte Tangente $a\mathfrak{P}$ nach beiden Seiten von $\mathfrak{P}$ die Theilung t des Grundkreises o ab und ziehen durch die Theilpunkte .. $\mathfrak{E}_{II}$, $\mathfrak{E}_{I}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$.. senkrecht auf diese Tangente die einerseits gelegenen geradlinigen Zahnprofile. Die anderseitigen geradlinigen Zahnprofile, die auf der zweiten von $\mathfrak{P}$ an o gehenden Tangenten senkrecht stehen, ergeben sich, wenn wir mit Berücksichtigung des erforderlichen Spielraumes die entsprechende Lückenweite auf die Gerade $\mathfrak{p}$ abstechen, und ferner werden die Profile wie oben angegeben begrenzt.

Wir haben bei dieser letzten Construction vorausgesetzt, dass das Rad Fo schon als ein fertiges vorhanden sei. Ist dies aber nicht der Fall, so kann man, nachdem der Mittelpunkt F und der Pol $\mathfrak{P}$ gegeben ist, den Grundkreis o, sowie die Theilung auf demselben noch zweckentsprechend wählen. Lässt man insbesondere diesen Grundkreis mit dem betreffenden Rollkreis p zusammenfallen, dann coincidiren die Tangenten $\mathfrak{P}a$, $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$; demnach stehen in diesem Falle die beiderseitigen geradlinigen Zahnprofile senkrecht auf $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$, und von denselben kommt nur ein einziger Punkt mit den entsprechenden Evolventen in Berührung.

Die Construction der Zahnstange, welche in ein Rad mit einer dem Grundkreise angehörenden Theilung t eingreift, erfordert also nur die Auftragung der Theilung t auf eine zu den parallelen Zahnprofilen senkrechte Gerade $\mathfrak{P}a$, die einen zweckmässig gewählten kleinen Winkel, der auch gleich Null sein kann, mit der Längsrichtung der Zahnstange bildet, und die Bestimmung der Lückenweite, so dass die Zähne des eingreifenden Rades freien Durchgang finden. Demnach kann die in Fig. **220** gezeichnete Zahnstange $\mathfrak{F}^{\infty}\,\mathfrak{p}$ auch direct richtig in das grössere Rad $\Phi\omega$ eingreifen, und bei diesem Eingriff ist dann der Abstand des Mittelpunktes Φ von dem auf der Centralen $\Phi\mathfrak{F}^{\infty}$ liegenden Berührungspunkte der beiden betreffenden Zähne gleich dem Radius des entsprechenden Rollkreises.

Wird bei den folgenden Constructionen der Evolventen-Verzahnungen eine bestimmte Theilung t des Grundkreises, die wir in Fig. **220** angenommen haben, als Grundlage benutzt, dann ist der betreffende Grundkreisradius eines Rades, welches n Zähne erhalten soll, gleich dem Verhältnisse $n.\mathrm{t}:2.3{,}141\ldots$ Durch den Grundkreis nebst der Theilung auf demselben und durch eine

---

kreis durch eine zur Tangente $\mathfrak{P}a$ parallele Gerade vertreten werde, ist nicht richtig; denn eine Gerade kann niemals die Evolute einer Geraden sein.

zweckmässige Umgrenzung der Zahnlücke sind die Evolventenzähne eines Rades bestimmt. Demnach ergiebt sich der Satz:

Alle Räder mit Evolventenzähnen greifen richtig in einander und sind Satzräder, wenn sie auf den Grundkreisen dieselbe Theilung besitzen und wenn die Zahnlücken so umgrenzt sind, dass ein freier Durchgang der eingreifenden Zähne stattfindet.

Wir können uns somit stets eine Reihe von Rädern zeichnen, die richtig in einander greifen und bei denen die Zahnlücken des einen Rades den Zähnen der anderen Räder freien Durchgang gewähren; aber es ist nicht möglich, allgemein unabhängig von einander vollkommen richtige Satzräder in allen Fällen zu construiren.

In Fig. **221** soll für die bisher angenommene Theilung t auf dem Grundkreise die Evolventen-Verzahnung für ein 8-zähniges Rad $\Phi\omega$ ausgeführt werden. Der Radius des zugehörigen Grundkreises ω ist durch das Verhältniss 4.t:3,141.. gegeben. Wir zeichnen nun die Evolvente $B\varkappa$, machen auf dem Grundkreise ω den Bogen BB_1 gleich der Theilung t, also gleich $\frac{1}{8}$ vom Kreisumfange ω, construiren die congruente Evolvente $B_1\varkappa_1$, ferner die symmetrische Evolvente $B'_1\varkappa'_1$, so dass die Zahnlücke dem entsprechenden Zahn eines gegebenen eingreifenden Rades den nöthigen Spielraum gewährt. Je enger aber diese Lücke ist, desto grösser wird der durch die Evolventen $B_1\varkappa_1$, $B'_1\varkappa'_1$ geformte Zahn.

Lassen wir in dieses Rad die in Fig. **220** gezeichnete Zahnstange eingreifen, welche auf der zu den parallelen Zahnprofilen senkrechten Geraden die Theilung t besitzt; dann ergiebt sich der Pol $\mathfrak{P}$, indem wir den Radius $\Phi\alpha$ des Grundkreises parallel zu den geradlinigen Zahnprofilen $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1$.. und die Kreistangente $\alpha\mathfrak{P}$ ziehen, die auf $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_1$.. senkrecht steht und $\Phi\mathfrak{F}^\infty$ in $\mathfrak{P}$ schneidet. Demnach ist für diesen Eingriff $\Phi\mathfrak{P}$ der Radius des Rollkreises π und die Tangente $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$ die in sich selbst bewegte Gerade, welche gleichzeitig auf diesem Kreise rollt. Der tiefste zulässige Eingriff der Zahnstange tritt ein, wenn der Grenzpunkt $\mathfrak{D}_1$ des Zahnprofils $\mathfrak{k}_1$ sich in der durch α zur Stangenrichtung parallel gezogenen Geraden befindet. In diesem Falle beginnt der Eingriff, wenn das treibende Rad $\Phi\omega$ sich im Sinne BB_1 dreht, im Punkt α und schreitet auf der Tangente $\alpha\mathfrak{P}$ bis zum Punkte ε fort, der auf dem durch die Zahnspitzen gehenden Spitzenkreis liegt. Durch die erforderliche Abstumpfung der Zahnspitzen wird diese Eingriffsstrecke noch ein wenig verkürzt, aber dennoch bleibt sie grösser als die Strecke $\mathfrak{P}\mathfrak{E}_1$, die gleich der Theilung t ist, und somit hat, bevor der Eingriff des einen Zahnpaares aufhört, schon der Eingriff des nachfolgenden Zahnpaares begonnen. Durch dieses 8-zähnige Rad wird also ein noch brauchbarer Eingriff in die Zahnstange erreicht und die Uebertragung der Bewegung ermöglicht.

Setzen wir anderseits auch das in Fig. **220** gezeichnete 16-zähnige Rad Fo mit diesem 8-zähnigen Rade in möglichst tiefen Eingriff, so dass im unteren Theile der Fig. **221** der Scheitelkreis $L\varepsilon$ des Rades Fo fast den Fusskreis des kleinen Rades $\Phi\omega$ berührt, und ziehen wir an die Grundkreise o, ω die gemeinsame Tangente $a\alpha$, welche den Berührungspunkt der Zähne enthält und die Centrale $F\Phi$ im Pol $\mathfrak{P}$ schneidet, so wird durch den Scheitelkreis $L\varepsilon$ und den Spitzenkreis Δe auf $a\alpha$ die Eingriffsstrecke εe bestimmt, welche zwar noch durch die Abstumpfung der Zahnspitzen verkürzt wird, aber dennoch grösser als die zu Grunde gelegte Theilung t ist. Diese beiden Räder bewirken demnach auch eine richtige Uebertragung der Bewegung; allein dieselbe wird hier sehr erschwert, weil die gemeinschaftliche Tangente $a\alpha$ schon sehr beträchtlich von der zur Centralen senkrechten Richtung abweicht. Aus diesem Grunde wird dieser Eingriff, der gleichsam einen Grenzfall repräsentirt, in der Praxis wohl thunlichst vermieden. Die beiden Rollkreise p, π' der Räder Fo, $\Phi\omega$ werden durch den Pol $\mathfrak{P}$ bestimmt, in welchem sie sich berühren. Dem Rade $\Phi\omega$ entsprechen also resp. in Bezug auf das Rad Fo oder auf die Zahnstange die Rollkreise π' und π. Geht man mit der Zähnezahl auf 7 herab, dann wird der Eingriff in die Zahnstange unbrauchbar, und noch mehr wird es der Eingriff in jedes andere aussen verzahnte Rad; daher ist bei äusserer Evolventen-Verzahnung mit 8 Zähnen für das kleinste Rad auch die kleinste Zähnezahl erreicht. Alle bisher gezeichneten Räder mit Evolventen-Verzahnung haben dieselbe Theilung t auf dem Grundkreise und sind somit Satzräder.

Die Fig. **222** giebt eine schematische Darstellung dreier mit Evolventenzähnen versehenen Räder Fo, $\Phi\omega$, $\Phi\omega'$, von denen sich die beiden letzteren um die gemeinsame Axe Φ drehen. Das erstere Rad Fo mit dem Zahne k greift gleichzeitig in die beiden coaxialen Räder $\Phi\omega$, $\Phi\omega'$, deren Zähne resp. mit $\varkappa$, $\varkappa'$ bezeichnet sind. Je weniger die Zähnezahlen dieser beiden coaxialen Räder differiren, desto mehr nähern sich die beiden Grundkreise ω, ω' dieser Räder und desto mehr wird der Eingriff für diese beiden Räder in angenähert gleicher Weise vor sich gehen. Der Eingriffspunkt oder Berührungspunkt der beiden zu den Rädern Fo, $\Phi\omega$ gehörenden Evolventenzähne k, $\varkappa$ bewegt sich auf der gemeinsamen Tangente $a\alpha$ der entsprechenden Grundkreise o, ω. Durch den Schnittpunkt, den Pol $\mathfrak{P}$, dieser Tangente mit der Centralen $F\Phi$ sind die beiden sich in $\mathfrak{P}$ berührenden Rollkreise p, π der Räder Fo, $\Phi\omega$ bestimmt. Der Eingriffspunkt des Räderpaares Fo, $\Phi\omega'$ bewegt sich auf der gemeinsamen Tangente $a'\alpha'$ der Grundkreise o, ω', und der Schnittpunkt oder Pol $\mathfrak{P}'$, den diese Tangente mit der Centralen $F\Phi$ bildet, liefert die beiden entsprechenden Rollkreise p', π' der Räder Fo, $\Phi\omega'$.

Die kleinste zulässige Zähnezahl zweier gleicher Räder mit Evolventenzähnen kann man leicht bestimmen, wenn angenommen wird, dass in Fig. 223 die gemeinsame Tangente $a\alpha$ der beiden gleichen Grundkreise o, ω mit der Centralen $F\Phi$ einen Winkel von mindestens 75° bildet. Bezeichnet $\mathfrak{t}$ die Theilung auf den Grundkreisen, ferner ϱ den Radius dieser beiden gleichen Kreise und x die Zähnezahl, so folgt, weil im Grenzfalle die Länge $a\alpha$ der gemeinsamen Tangente gleich $\mathfrak{t}$ sein kann, dass

$$2\varrho \,.\, \cot 75^\circ = \mathfrak{t}, \quad 2\varrho \,.\, 3{,}141\ldots = x \,.\, \mathfrak{t}$$

und somit

$$x = 3{,}141\ldots \tan 75^\circ = 11{,}724\ldots$$

Hiernach ist 12 die kleinste Zahl der Evolventenzähne zweier in einander greifender gleicher Zahnräder. In allen Fällen aber, wenn nicht besondere Gründe diese kleinste Zähnezahl erfordern, ist es besser, eine grössere Zähnezahl zu wählen, weil dadurch ein längerer gleichzeitiger Eingriff von zwei oder mehreren Zähnepaaren erhalten wird.

Oft genügt es auch in der Praxis, dass ein Evolventenbogen, der die Zahncurve bildet, angenähert durch zwei Kreisbögen ersetzt wird; zumal da durch die Abnutzung der theorethisch richtige Eingriff doch allmählig verloren geht. Um in Fig. 224 den Evolventenbogen $\mathsf{B}\Delta$ durch zwei Kreisbögen sehr angenähert zu ersetzen, nimmt man ungefähr in mittlerer Lage zwischen $\mathsf{B}\Delta$ einen dritten Punkt Γ auf dem Evolventenbogen an, errichtet auf den Sehnen $\mathsf{B}\Gamma$, $\Gamma\Delta$ in den Mitten μ_1, μ_2 die Senkrechten $\mu_1\mathrm{I}$, $\mu_2\mathrm{II}$, welche die Tangenten $a_\gamma\Gamma$, $a_\delta\Delta$ des Grundkreises ω resp. in den Punkten I, II schneiden, und beschreibt um I den Kreisbogen $\mathsf{B}\Gamma$, um II den Kreisbogen $\Gamma\Delta$. Diese so erhaltenen beiden Kreisbögen werden sich sehr nahe an den Evolventenbogen anschmiegen. Will man sich aber mit einem einzigen Kreisbogen, also mit nicht so genauer Anschmiegung begnügen, dann beschreibt man um den Schnittpunkt III jener beiden Senkrechten den durch ΒΓΔ gehenden Kreisbogen.

93. **Construction der evolventenförmigen Hebedaumen.** Die in Fig. **225**, Taf. XV. dargestellten Hebedaumen, welche in der Welle Φ eingekeilt sind, sollen die vertikale Hebung der Stange *s* nebst Pochstempel derart bewirken, dass die Stange der Wellendrehung proportional gehoben wird, und nach Beendigung des Eingriffs frei herabfallen kann. Bei dem Eingriff der Evolventenzähne in eine Zahnstange haben wir erkannt, dass die Zahnprofile der Zahnstange im Allgemeinen geradlinig sind und sich in schräger Stellung gegen die Längsrichtung der Zahnstange befinden. Durch diese schräge geradlinige Verzahnung der Zahnstange wird aber ein seitlicher Druck auf die Stange verursacht, der die Reibung in den Führungslagern der Stange vergrössert. Dieser seitliche Druck kann durch eine entsprechende Anordnung vermieden werden, wenn man den Grundkreis ω der Evolventenform der Daumen mit dem zugehörigen Rollkreise des durch Welle und Daumen vertretenen Rades $\Phi\omega$ zusammen fallen lässt; dann degenerirt aber das Profil des Zahnes der Stange *s* zu einem Punkte *K*. Dieser Punkt *K* wird durch die Ecke eines an der Stange *s* seitlich befestigten leistenartigen Vorsprungs ersetzt, und die untere zur Wellenaxe parallele Kante *K* dieses Vorsprunges vertritt den Zahn der Stange *s*. Die Hebedaumen können dann neben der Stange vorbeigehen.

Ist die Hubhöhe *h* des Pochstempels gegeben und soll die Welle beispielsweise mit drei Hebedaumen versehen sein, dass also während einer Wellendrehung die Stange dreimal gehoben wird, und nehmen wir an: die Stange *s* durchfalle die Höhe *h*, bevor die Welle $\frac{1}{12}$ Umdrehung gemacht hat, so können wir den Hebedaumen in folgender Weise construiren. Wir bringen den Stangenpunkt *K* in seine höchste Stellung, ziehen die vertikale Gerade Ko, machen auf dieser $K\mathfrak{P}=h$, beschreiben den Kreis ω, der diese Gerade in $\mathfrak{P}$ berührt und dessen Umfang gleich $4.h$ ist. Durch Rollung der Tangente $K\mathfrak{P}$ auf dem Viertelkreis Β$\mathfrak{P}$ erzeugt der Punkt *K* den Evolventenbogen Β$\varkappa K$, der die Daumencurve bildet. Während einer Vierteldrehung der Welle in der Richtung des Pfeils gleitet der Zahnpunkt *K* auf diesem Evolventenbogen von Β bis *K*; die Stange wird dadurch um die Höhe *h* gehoben und fällt frei herab, sobald der Daumen den Zahnpunkt *K* verlässt. Dieser Zahnpunkt *K* gelangt dann nach $\mathfrak{P}$, bevor er von dem nachfolgenden Daumen $B_1 \varkappa_1$, der auf dem Kreise ω um $\frac{1}{3}$ des Umfanges von B entfernt ist, mit einem Stoss erfasst wird. Da die Drehung der Welle stets in einem Sinne erfolgt, so werden die Daumen rückseits am einfachsten radial begrenzt.

Wenn die Stange s soweit von der Welle Φ entfernt wird, dass die Daumen vor derselben vorbei gehen können, dann wird jener leistenförmige Vorsprung, dessen untere Kante K den Zahn bildet, an die nach der Welle gewendete Seitenfläche der Stange angebracht. Je weiter aber diese Kante K von der Stange entfernt ist, desto mehr wird durch entstehenden seitlichen Druck die Reibung in den Führungslagern der Stange vergrössert. Der Stangenzahn wird sehr rasch abgenutzt, weil derselbe von den Daumen nur längs der Kante K berührt wird. Um dies zu vermeiden und auch die Zahnreibung zu verringern, kann die scharfe Kante K durch eine Rolle i, die in Fig. **225** punktirt gezeichnet ist und deren Axe mit dieser Kante coincidirt, ersetzt werden. Unter den gegebenen Bedingungen muss dem gemäss der Daumen nach der punktirten Kreisevolvente $\varkappa'$ geformt werden, die als Aequidistante der Kreisevolvente $\varkappa$ von dieser um den Rollenradius absteht.

94. **Construction der Evolventenzähne für inneren Eingriff.** In Fig. **226** soll die innere Evolventen-Verzahnung eines 24-zähnigen Rades $\Phi\omega$ construirt werden, in welches dasselbe vorhin betrachtete 16-zähnige Rad Fo eingreift. Der Radius $\Phi\alpha$ des Grundkreises ω des erstgenannten Rades, welcher durch den gegebenen Radius Fa des Grundkreises o und durch die Zähnezahl 24 bestimmt wird, ist gleich dem Werthe $24 \,.\, Fa : 16 = \frac{3}{2} Fa$. Mit diesem Radius $\Phi\alpha$ beschreiben wir den Grundkreis ω, so dass der Grundkreis o des gegebenen Rades Fo aus ihm heraustritt, und legen an die beiden Kreise ω, o die gemeinsame Tangente αa, welche dieselben resp. in α, a berührt und die Centrale $F\Phi$ im Pol $\mathfrak{P}$ schneidet. Construiren wir die durch $\mathfrak{P}$ gehende Kreisevolvente $\beta\varkappa$, die durch Rollung von $\mathfrak{P}\alpha$ auf ω entsteht und deren Spitze auf ω mit β bezeichnet ist, dann wird diese Evolvente $\beta\varkappa$ im Pol $\mathfrak{P}$ von der zu dem Grundkreise o gehörenden Evolvente k des gezeichneten fertigen Rades berührt und einerseits von dem um Φ beschriebenen Scheitelkreise $a\Delta$ im Punkte Δ begrenzt. Auf dem Grundkreise ω machen wir den Bogen $\beta\beta_1$ gleich der Theilung t, also gleich $\frac{1}{24}$ von ω, zeichnen zu $\Delta\varkappa$ die congruente Evolvente $\Delta_1\varkappa_1$, deren Spitze β_1 ist, und zu dieser die symmetrische Evolvente $\Delta_1'\varkappa_1'$, so dass die Zahnlücke in dem Rade

$\Phi\,\omega$ noch den nöthigen Spielraum bietet. Der Scheitelkreis εL für die Zähne des fertigen aussen verzahnten Rades Fo schneidet die gemeinsame Tangente, die Eingriffsgerade $\mathfrak{P}a$, im Punkte ε, und durch den mit dem Radius $\Phi\,\varepsilon$ beschriebenen Kreis werden anderseits die Zähne des Rades $\Phi\,\omega$ begrenzt, so weit sie beim Eingriff zur Geltung kommen. Da die Zähne bei der inneren Verzahnung eine für die Festigkeit sehr günstige Gestalt haben, so werden sie durch Vertiefung der Lücken nicht geschwächt, und daher kann man dieselben durch einen grösseren Fusskreis $\gamma\gamma_1$ begrenzen. Wird das innere Rad Fo im Sinne $\beta_1\beta$ gedreht, dann beginnt der Eingriff in a und schreitet auf $a\mathfrak{P}$ bis ε fort.

Um sicher zu sein, ob auch die Zahnecken des Hohlrades an den Zähnen des anderen Rades frei vorbeigehen, haben wir die Trochoide d_x gezeichnet, welche die Zahnecke Δ_x in dem Rade Fo beschreibt. Diese Trochoide berührt die betreffende Zahncurve k_x auf dem Grundkreise o, bildet eine sehr kleine Schlinge und zieht sich sehr nahe an der Zahncurve k_x entlang, ohne dieselbe zu schneiden. Hiermit ist erst die Brauchbarkeit dieser Verzahnung bewiesen. Um der Gefahr des Einschneidens der Zähne noch mehr auszuweichen, werden die Zahnecken stets abgerundet. Der Axenabstand ΦF kann hier nur dann unbeschadet des richtigen Eingriffs ein wenig verkleinert werden, wenn dadurch nicht das Einschneiden der Zähne verursacht wird. Je mehr sich aber hierdurch die gemeinsame Tangente $\mathfrak{P}a$ der senkrechten Stellung auf $\mathfrak{P}\Phi$ nähert, desto grösser wird jene Gefahr. Soll dagegen bei Erhaltung des richtigen Eingriffs der Axenabstand ΦF grösser genommen werden, dann muss man die Zähne des Rades $\Phi\,\omega$ durch den entsprechenden um Φ beschriebenen grösseren Scheitelkreis $a\Delta$ verkürzen; denn in diesem Falle vergrössert sich auch der Winkel, den die gemeinsame Tangente mit der zur Centralen senkrechten Richtung bildet, und die Entfernung des Punktes a von Φ.

Die Praxis erfordert oft innere Verzahnungen, bei denen die Grundkreisradien möglichst wenig verschieden sind, resp. die Differenz der Zähnezahlen der ineinander greifenden Räder möglichst klein ist, wie z. B. bei den Differentialflaschenzügen von Eades[1]),

---

[1]) *Specification* Nr. 1672 vom 22. Juni 1866, ferner *Engineer* 1867. Febr. 15. S. 135., *Polyt. Journal* 1867. B. 184. S. 476. Die von Eades angewandte Verzahnung ist aber mangelhaft und bewirkt keine gleichförmige Uebertragung.

Pickering[1]) und Moore[2]), wo diese Differenz, um die nöthige Uebersetzung zu erreichen, nur 1 oder 2 beträgt. Soll zu dem bisher betrachteten 16-zähnigen Rade Fo, dessen Grundkreisradius Fa ist, in Fig. 227 ein 18-zähniges Hohlrad $\Phi\omega$ construirt werden, dessen Grundkreisradius also gleich $\frac{9}{8}Fa$ ist, so zeigt es sich als zweckmässig, wenn wir an den Grundkreis o die Tangente $\mathfrak{P}a$ legen, die mit der zur Centralen $\mathfrak{P}F$ senkrechten Richtung den leicht zu construirenden Eingriffswinkel von $52^{\circ}30'$ bildet. Hierauf machen wir auf $\mathfrak{P}a$ die Strecke $\mathfrak{P}\alpha = \frac{9}{8}\mathfrak{P}a$, dann ist die auf $\mathfrak{P}a$ in α errichtete Senkrechte $\Phi\alpha$ der Radius des Grundkreises ω. Zu der Kreisevolvente k, deren Verlängerung die gemeinsame Tangente $\mathfrak{P}a$ in K schneidet, zeichnen wir in bekannter Weise die entsprechende Kreisevolvente $\varkappa$, die von dem mit K coincidirenden Punkte Γ der auf ω rollend gedachten Tangente $\mathfrak{P}\alpha$ erzeugt wird und einerseits im Punkte Δ vor dem Fusskreise des Rades Fo aufhören muss, um das Einschneiden der Zahnecke Δ zu vermeiden. Wenn die Zahnlücke dieses Rades tiefer gewesen wäre, und das freie Vorbeigehen der Zahnecke nicht gefährdet würde, hätte man die Kreisevolvente $\varkappa$ bis an den letzten Grenzpunkt ziehen können, der auf dem mit Φa beschriebenen Kreise liegt. Ferner construiren wir zu der Zahncurve $\Delta\varkappa$ die symmetrische Zahncurve $\Delta_1'\varkappa_1'$, so dass für den Scheitel LL' noch ein wenig Spielraum bleibt, und begrenzen anderseits diese Zahncurven durch den Kreis $\gamma\gamma_1'$. Hierdurch sind dann auch die Zähne des Hohlrades $\Phi\omega$ bestimmt, deren Stärke nach dem Scheitel hin rasch abnimmt. Aus der Gestalt der gezeichneten Trochoide d, welche die Zahnecke Δ im Rade Fo beschreibt, erkennen wir, dass das Einschneiden der Zähne vermieden wird; denn diese Trochoide berührt die Zahncurve k, bildet eine Schlinge und zieht sich in genügender Entfernung über die Zahnecke L hinweg. In einem solchen ungewöhnlichen Falle darf man aber nicht unterlassen sich zu überzeugen, ob auch die Zähne des Rades Fo hier freien Durchgang finden; deshalb haben wir noch die Trochoide λ_x construirt, die von der Zahnecke L_x im Hohlrade $\Phi\omega$ beschrieben wird. Es zeigt sich jedoch, dass diese Trochoide, welche die betreffende Zahncurve $\varkappa_x$ berührt und eine kleine Schlinge bildet, in das Zahnprofil des Hohlrades nicht einschneidet und in genügender Entfernung über die Zahnecke Δ_x hinweggeht.

---

[1]) *Engineering.* 1868. Jan. 17. p. 55. *Polyt. Journal.* 1868. B. 188. S. 108.
[2]) *Mechanics Magazine.* 1871. p. 403. *Polyt. Journal.* 1871. B. 201. S. 383.

Die beiden Scheitelkreise $\Delta\Delta_1'$, LL' schneiden die Eingriffsgerade $\mathfrak{P}a$ resp. in den Punkten e, ε und bestimmen die Eingriffsstrecke $e\ \varepsilon$, welche, weil sie hier ungefähr $\frac{3}{2}$ der Theilung t beträgt, hinreichend lang ist. Wird das Rad Fo in der Richtung des Pfeils gedreht, so beginnt der Eingriff in e und hört schon weit vor der Centralen in ε auf. Die beiden Rollkreise p, π liegen hier weit ausserhalb der Zahnkränze, während sie bei den bisher betrachteten Evolventen-Verzahnungen sich innerhalb derselben befanden. Da bei dieser inneren Verzahnung, wo die Radaxen Φ, F verhältnissmässig nahe liegen, nicht wie bei der äusseren Verzahnung, wenn die gemeinsame Normale der sich berührenden Zahncurven sehr von der zur Centralen ΦF senkrechten Richtung abweicht, Pressungen und Stemmungen der Zähne entstehen, so wird hier aus diesem Grunde die Grösse des Winkels, den die Eingriffsgerade $a\mathfrak{P}$ mit der genannten Richtung bildet und den wir beispielsweise gleich $52^\circ 30'$ genommen haben, nicht bedingt. Dieser Winkel muss aber doch so gewählt werden, dass das Einschneiden der Zähne vermieden wird.

Bei praktisch ausgeführten Flaschenzügen findet man, dass diese inneren Verzahnungen meist nach Gutdünken profilirt sind; und eine genauere Untersuchung der so hergestellten Zahnformen zeigt, dass denselben von Kreisen abweichende Rollcurven entsprechen. Dem zufolge kann auch keine gleichförmige Uebertragung der Bewegung eintreten, die doch so leicht erreichbar ist, wenn die Verzahnung in der angegebenen Weise richtig construirt wird. [1])

95. **Räder mit schraubenförmiger Verzahnung. Schraubenräder oder Hooke'sche Räder.** Zeichnen wir in Fig. **228** mehrere congruente Zahncurven k_1, k_2, k_3.. des einen Rades Fo in nahen Abständen auf einander folgend und die entsprechenden unter sich congruenten Zahncurven $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$.. des anderen Rades $\Phi\omega$, so berühren sich diese Zahncurvenpaare in den Punkten E_1, E_2, E_3.. auf der Eingriffscurve $\mathfrak{e}$, die in unserer Figur eine Gerade ist, weil wir beispielsweise als Zahncurven Kreisevolventen genommen haben. Um diese Idee praktisch auszuführen, denken wir uns ein Zahnrad senkrecht zur Axe in gleich dicke dünne Scheiben zerschnitten, dieselben auf der Axe in gleichem Sinne um gleiche Winkel gegen einander gedreht, wie die parallelperspec-

[1]) Vergl. Krebs, „Innenverzahnung". *Praktischer Maschinen-Constructeur* 1881. B. 14. S. 109.

tivische Darstellung in Fig. **229** zeigt, wo der besseren Uebersichtlichkeit wegen nur eine Zahnreihe in Betracht gezogen ist, und die so gedrehten Scheiben wieder fest mit einander vereint. In gleicher Weise denken wir uns das zweite zugehörige nicht gezeichnete Zahnrad verändert. Wird nun die Einrichtung so getroffen, dass von den 6 gezeichneten Zähnen der schraubenförmigen Zahnreihe der Zahn k_1 seinen Eingriff begonnen hat, bevor der Eingriff des Zahnes k_6 endet, so befinden sich alle 6 Zähne gleichzeitig im Eingriff. Durch diese Anordnung wird die Gleichmässigkeit und Sicherheit der Uebertragung der Bewegung sehr gefördert und bei einer ungewöhnlich grossen Uebersetzung eine sehr schnelle gleichförmige Bewegung ermöglicht. Die Fusspunkte J_1, J_2, J_3.. der Zahncurven liegen auf dem Grundkreis-Cylinder in einer Schraubenlinie l, und die Zahncurven J_1k_1, J_2k_2, J_3k_3.. befinden sich auf einer Schraubenfläche.

Denken wir uns die gleich dicken Scheiben unendlich dünn, also in unendlicher Anzahl vorhanden, und jene gleichen Verstellungswinkel unendlich klein genommen; dann geht aus jener stufenartigen Zahnreihe eine Schraubenfläche k_0k_6 als Zahnfläche hervor, die in Fig. **230** parallelperspectivisch dargestellt ist. Die mit solchen schraubenförmigen Zähnen versehenen Rädern wurden zuerst von Hooke[1]), später auch von White und Woollams ausgeführt.[2]) Jene Schraubenfläche wird also auch dadurch erzeugt, dass die Curve k, die irgend eine der bisher betrachteten Zahncurven sein kann, schraubenförmig um die Radaxe F_0F_6 längs der Schraubenlinie l bewegt wird.[3]) Wenn die Zahncurve k,

---

[1]) Schon im Jahre 1666 hat Robert Hooke diese Räder im Modell der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in London vorgezeigt. Beschrieben sind dieselben in Hooke, *Lectiones Cutlerianae or a Collection of Lectures.* Nr. 2. *Animadversions on the first part of the Machina Coelestis.* 1674. p. 70. Fig. 20 und 21.

[2]) Im *Repertory of Arts, Manufactures and Agriculture*, 1822. Sec. Ser. Vol. XL. p. 142, hat White diese Schraubenräder in unklarer Weise beschrieben, und eine Uebersetzung befindet sich im *Polytech. Journal*, 1822. B. 7. S. 287; deshalb sind diese Räder von einigen Autoren auch White'sche Räder genannt worden. Klarer und ausführlicher sind diese Schraubenräder von Woollams, *Specification*, Nr. 4477 vom 20. Juni 1820 beschrieben. Diese Beschreibung befindet sich auch im *Repertory* etc. a. a. O. p. 1, im *Polytech. Journal* a. a. O. S. 137. Theoretisch wurden diese Räder zuerst von Olivier in seiner *Theorie géométrique des engrenages* 1842 behandelt.

[3]) Die auf diese Weise durch cyclische Curven erzeugten Schraubenflächen habe ich in der *Zeitschrift für Math. und Physik*, 1873. B. 18. S. 185 behandelt.

wie in unserer Darstellung, durch eine Kreisevolvente vertreten ist, dann ist die betreffende Zahnfläche $k_0 k_6$ in Fig. 230 eine abwickelbare Schraubenfläche. Denn denken wir uns den Cylindermantel straff gehalten von dem Cylinder abgewickelt, so beschreiben die Punkte $J_6, J_5, J_4 \ldots$ resp. die Kreisevolventen $k_6, k_5, k_4 \ldots$, die auf der Schraubenfläche liegen, welche von den Tangenten der Schraubenlinie l gebildet wird.

Durch eine derartige schraubenförmige Verzahnung entsteht aber ein zur Radaxe parallel gerichteter Druck. Um diesen Druck aufzuheben, wird die Zahnfläche, wie in Fig. 231 parallelperspectivisch dargestellt ist, von einer Schraubenfläche $k_0 k_6$ längs der Schraubenlinie l und von einer symmetrischen Schraubenfläche $k_0 k_{VI}$ längs der Schraubenlinie l' gebildet, die zu l in Bezug auf den mittleren Cylinderkreis o_0 symmetrisch ist.

In Fig. 232 ist der Eingriff zweier Räder mit schraubenförmiger Verzahnung parallelperspectivisch dargestellt. Die abwickelbare Schraubenfläche $k_0 k_6$ eines Zahnes des Rades Fo berührt die entsprechende und analog erzeugte Schraubenfläche $\varkappa_0 \varkappa_6$ des Gegenzahnes des anderen Rades $\Phi\omega$ längs einer Geraden $\mathfrak{e}$, der gemeinsamen Tangente der Schraubenlinie l und der entsprechenden entgegengesetzt gewundenen Schraubenlinie λ. Für die Zahncurven k_0, $\varkappa_0$ beginnt der Eingriff im Punkte e, für die mittleren Zahncurven k_3, $\varkappa_3$ befindet sich derselbe in der Mitte E der Berührungsgeraden $\mathfrak{e}$ der Zahnflächen, und für die Zahncurven k_6, $\varkappa_6$ endet der Eingriff im Punkte ε. Die Eingriffsgerade $\mathfrak{e}$, welche in der einen gemeinsamen Tangentialebene der beiden Cylinder o, ω bleibend sich auf beiden Zahnflächen $k_0 k_6$ und $\varkappa_0 \varkappa_6$ entlang bewegt, berührt in dem betrachteten Momente die beiden Schraubenlinien l, λ resp. in e und ε. Die Schraubenlinie L, welche einerseits die Schraubenfläche $k_0 k_6$ begrenzt, streift an der Schraubenlinie λ entlang und geht frei durch die im Rade $\Phi\omega$ enthaltene schraubenförmige Zahnlücke hindurch. Ebenso streift die Schraubenlinie Λ, welche die Schraubenfläche $\varkappa_0 \varkappa_6$ einerseits begrenzt, an der Schraubenlinie l entlang und bewegt sich frei durch die schraubenförmige Zahnlücke des Rades Fo.

VIERTER ABSCHNITT.

Die Kapselräderwerke.

Construction der Kapselräder mit stetigem Eingriff.

96. **Die Kapselräder im Allgemeinen.** Sind in Fig. **233**, Taf. XVI, zwei ohne Spielraum richtig in einander greifende Stirnräder von einer Kapsel dicht umschlossen, an der sich zu beiden Seiten des Eingriffs Canäle befinden, und werden diese Räder in der eingezeichneten Pfeilrichtung bewegt, so kann man, wenn der untere Canal in einem mit Wasser gefüllten Behälter steht, vermittelst dieser Vorrichtung das Wasser durch die Zahnlücken an den cylindrischen Wandungen der Kapsel entlang in den oberen Canal hinauf treiben. Denn die beständig schliessende Berührung der Zähne, sowie die dicht an den Rädern anliegenden Cylinderflächen und die ebenen beiderseitigen Deckelflächen der Kapsel verhindern das Zurückfliessen des Wassers. Diese Vorrichtung, welche schon in den ältesten technischen Werken Erwähnung findet[1]), wurde von

---

[1]) Diese zum Wasserheben angewendete Maschine wird zuerst mit vierzähnigen Rädern als „une belle fontaine" erwähnt in dem seltenen Buche *Récréations mathématiques*, part. I, p. 190, welches in Rouen 1634 anonym erschien und dessen Verfasser nach einer von Schott an der unten citirten Stelle gegebenen Notiz der Jesuit Jean Leurechon ist, der auch unter dem Namen van Etten schrieb. Ebenso auch in der commentirten Ausgabe: *Examen du livre des Récréations mathématiques* par C. Mydorge. Paris. 1639. p. 285. Aus dem Buche von Leurechon haben die nachfolgenden Autoren geschöpft. Es befindet sich auch diese Maschine mit vierzähnigen Rädern in D. Schwenter, *Mathematische Erquickstunden*, 1636. S. 485, sowie in C. Ens, *Thaumaturgus mathematicus*, 1651. p. 216; ferner ist das eine Rad mit 20, das andere mit 19 Zähnen fehlerhaft gezeichnet in G. Schott, *Mechanica Hidraulico-pneumatica*, 1663. pars II, p. 222, und hier wird dieselbe auch „Hydracontisterium antiquum" (alter Wasserspeier) genannt. Ferner ist diese Maschine beschrieben mit fünfzähnigen Rädern nebst einer theoretisch nicht gehbaren rotirenden Bewegungsübertragung in Grollier de Servière,

Becher[1]) Wasserschloss oder Pappenheim'sche Maschine, von Leupold[2]) Kapselkunst und von Reuleaux[3]) Kapselräderwerk genannt.

Werden die Räder in Bewegung gesetzt, und bilden die Zähne derselben in ihrem Eingriff und auch an den Kapselwänden einen möglichst dichten Verschluss, so kann diese Maschine als rotirende Wasserpumpe dienen oder auch zur Fortbewegung luftförmiger Körper verwendet werden. Wird dagegen das Wasser oder ein luftförmiger Körper vermittelst Druck in diese Maschine getrieben, dann kann man dieselbe auch als rotirende Kraftmaschine benutzen und manche rotirende Dampfmaschine hat man hierauf zu gründen versucht[4]); aber es wird für eine solche Anwendung nicht möglich sein, die hierzu erforderliche dichte Schliessung dauernd zu erhalten. Nach Anbringung eines Zählapparates, der die Umdrehungen der Räder zählt, hat man diese Maschine auch als Wassermesser brauchbar erachtet.

In Fig. **233** sind die beiden sechszähnigen Kapselräder $\Phi\pi$, Fp, um eine typische Form zu betrachten, beispielsweise mit geradlinig und epicycloidisch geformten Zähnen versehen, wie sie Lecocq zuerst ausgeführt hat.[5]) Durch Rollung des über $\mathfrak{P}F$ als Durchmesser beschriebenen Kreises q auf dem Theilkreise π wird von dem momentan mit $\mathfrak{P}$ coincidirenden Peripheriepunkt das

---

Recueil d'ouvrages curieux, 1719. p. 48, mit sechszähnigen Rädern in Leupold, *Schau-Platz der Wasser-Künste.* 1724. B. I. S. 123.

[1]) J. J. Becher, *Närrische Weisheit und Weise Narrheit*, 1708. enthält als Anhang den von Leupold a. a. O. erwähnten „*Kurzen doch gründlichen Bericht von Wasserwerken und Wasserkünsten*" und in demselben S. 205 die folgende Mittheilung: — — „Noch ist eine Manier Wasser zu heben durch gezähnte Räder, die in einander schliessen und ein Diaphragma machen, wodurch das Wasser gepresst hinauf muss; dies wird genannt ein Wasser-Schloss oder Machina Pappenheimiana, sie will fleissig gemacht sein, giebt viel Wasser aber nicht hoch."

[2]) Leupold, *Schau-Platz der Wasser-Künste.* 1724. B. I. S. 123.

[3]) Reuleaux, der im Kapitel X seiner *Theoretischen Kinematik*, 1875. S. 393, die Kapselräder systematisch behandelt hat, vermuthet daselbst, dass die gegebene Notiz von Becher in dem „*Trifolium Becherianum 1679*" enthalten sei; dies ist aber nicht der Fall. Dieses Becher'sche Büchlein bietet überhaupt nichts Lesenswerthes.

[4]) Murdock's rotirende Dampfmaschine in Bataille-Jullien, *Machines à vapeur.* 1847—49. B. I. p. 434. J. Klein's Gaskraftmaschine, *Deutsches Reichspatent* Nr. 19447 vom 13. December 1881.

[5]) *Descriptions des machines.* 1843. T. 47. p. 430. Brevet d'addition 9 oct. 1832. Vergl. auch *Deutsches Reichspatent* Nr. 7987 vom 27. April 1879 und Nr. 13076 vom 25. Juli 1880.

Profil des Zahnkopfes, die Epicycloide $\mathfrak{P}\Delta$ erzeugt; und durch Rollung dieses Kreises q in dem Theilkreise p entsteht als Profil der Zahnflanke die geradlinige Hypocycloide $\mathfrak{P}k$. Von k bis an den Punkt s des Fusskreises ist die Zahnlücke durch die Epitrochoide ks begrenzt, die der Punkt Δ in dem Rade Fp erzeugt. Diese Verzahnung ist also ebenso, wie in Art. 87 angegeben wurde, ausgeführt. Der Scheitelkreis Δe schneidet den Hülfsrollkreis q einerseits in dem Punkte e; und der Scheitelkreis $L\varepsilon$ schneidet den anderen Hülfsrollkreis q' in dem Punkte ε. Die Gesamtlänge $\varepsilon\mathfrak{P}e$ der Eingriffsbogen auf den Kreisen q', q ist nur noch wenig länger als die Theilung, welche $\frac{1}{6}$ der Theilkreise beträgt; daher darf hier die Zähnezahl nicht kleiner als 6 genommen werden. Der momentan mit dem Pol $\mathfrak{P}$ coincidirende Berührungspunkt der Zahncurven durchschreitet, in ε beginnend, auf q' den Kreisbogen $\varepsilon\mathfrak{P}$, dann weitergehend auf q den Kreisbogen $\mathfrak{P}e$, und hört in e auf. Der Eingriff des Zahnpaares ist also in dem betrachteten Falle unstetig und beginnt mit dem Eintritt der Berührung des nachfolgenden Zahnpaares in ε von Neuem. Dem zufolge entsteht, wie aus der gezeichneten Räderstellung ersichtlich ist, in der betreffenden Zahnlücke ein schädlicher Raum $\mathfrak{P}\Delta sk$, der sich mit Wasser des Austrittscanals füllt. Dieses eingeschlossene Wasser wird eine Klemmung erleiden, und wird theils durch die Zahnberührung bei $\mathfrak{P}$ nach dem Eintrittscanal zurückgeführt. Dieser Uebelstand wird aber vermieden, wenn die Zähne so geformt sind, dass ein stetiger Eingriff stattfindet, der Berührungspunkt also niemals sprungweise seine Lage verändert. Die diesem Zwecke entsprechend gestalteten Zähne sind aber meistens nicht geeignet, die Bewegung von dem einen Rade auf das andere selbst zu übertragen, und in solchen Fällen wird dieselbe durch zwei besondere ausserhalb der Kapsel angebrachte Zahnräder bewirkt. Im Folgenden sollen zunächst die Constructionen für die Verzahnung mit stetigem Eingriff abgeleitet werden, bei welcher dem gemäss kein schädlicher Raum entstehen kann.

97. **Construction der Hüllbahncurve eines Kreises, die durch Rollung eines Kreises auf einem gleich grossen Kreise erzeugt wird.** Wir wollen in Fig. **234** die Hüllbahncurve eines Kreises k betrachten, dessen Mittelpunkt C innerhalb des rollenden Kreises p liegt, und zwar für den speciellen aber typischen Fall, in welchem der rollende Kreis p dem festen Kreise π gleich ist; denn wir werden die hier abgeleiteten Beziehungen bei den Constructionen der Kapselräder mit stetigem Eingriff verwerthen. Der Mittelpunkt C

beschreibt, wenn der bewegte Kreis p auf dem gleich grossen festen Kreise π rollt, nach Art. 63 eine Pascal'sche Curve γ, und die Hüllbahncurve $\varkappa\varkappa^1$ ist die beiderseitige Aequidistante derselben. Um die Construction dieser Hüllbahncurve in einfachster Weise auszuführen, machen wir auf der Centralen $F\Phi$ die Strecke $\mathfrak{P}\mathfrak{C} = C\mathfrak{P}$ und beschreiben um Φ den durch $\mathfrak{C}$ gehenden Kreis π_c; hierauf ziehen wir von einem Punkte H_1 desselben durch $\mathfrak{C}$ eine Gerade $H_1 C_1 = HC$ resp. gleich dem Durchmesser des Kreises π oder p; dann ist C_1 nach Art. 63 ein Punkt der Pascal'schen Curve γ, die von dem Punkte C_1 der durch $\mathfrak{C}$ gehenden starren Geraden $H_1 C_1$ beschrieben wird, wenn der Punkt H_1 sich auf dem Kreise π_c bewegt. Der zu H_1 diametrale Punkt $\mathfrak{p}_1$ ist der Pol dieser bewegten starren Geraden $H_1 C_1$, und dem zufolge ist $C_1 \mathfrak{p}_1$ die zu C_1 gehörende Normale der Curve γ. Tragen wir auf $C_1 \mathfrak{p}_1$ beiderseits von C_1 die Strecken $C_1 K_1$, $C_1 K_1^1$ gleich dem Radius von k auf, so sind K_1, K_1^1 Punkte der beiderseitigen Aequidistante $\varkappa\varkappa^1$ der Pascal'schen Curve γ. In anderer Weise wird auch nach Art. 63 die Pascal'sche Curve γ erhalten, indem wir an den Kreis π eine Tangente $\mathfrak{P}_1 c$ legen, auf diese von $\mathfrak{C}$ aus das Loth $\mathfrak{C}c$ fällen und auf der Verlängerung desselben $cC_1 = \mathfrak{C}c$ machen. Es ist dann die Gerade $C_1\mathfrak{P}_1$, welche den Curvenpunkt C_1 mit dem Berührungspunkte $\mathfrak{P}_1$ jener Tangente verbindet, die Normale für den Punkt C_1 der Pascal'schen Curve γ, und ferner ist $\mathfrak{P}_1 C_1 = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{C}$. Der Radius $\Phi\mathfrak{P}_1$ ist demnach parallel $H_1 C_1$ und halbirt den Winkel $\mathfrak{C}\Phi\mathfrak{p}_1$.

Der sowohl zu C_1 als zu den beiden Punkten K_1, K_1^1 gehörende Krümmungsmittelpunkt Ξ_1 ergiebt sich nach Art. 63 (Fig. **172**), indem wir auf $C_1\mathfrak{p}_1$ die Senkrechte $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1$ errichten, die $C_1 H_1$ in $\mathfrak{q}_1$ trifft, als Schnitt von $\mathfrak{q}_1\Phi$ mit $C_1\mathfrak{p}_1$. Somit erhalten wir auch punktweise die zu den Curven γ, $\varkappa$, $\varkappa^1$ gehörende Evolute γ^I, γ^{II}, die aus den zwei getrennten Theilen γ^I, γ^{II} besteht, von der Centralen $F\Phi$ symmetrisch getheilt wird und auf derselben zwei in bekannter Weise zu bestimmende Rückkehrpunkte Ξ^I, Ξ^{II} besitzt.

Für den Wendepunkt C_w liegt der entsprechende Krümmungsmittelpunkt im Unendlichen auf der betreffenden Curvennormalen $C_w\mathfrak{p}_w$; dieselbe ist daher eine Asymptote der Evolute γ^{II}, und die auf dieser Asymptote liegenden Punkte K_w, K_w^1 sind auch Wendepunkte der Aequidistanten $\varkappa$, $\varkappa^1$. Um den Wendepunkt C_w und diese Asymptote zu construiren, beschreiben wir, wie in Art. 63 (Fig. **172**) angegeben wurde, über ΦH als Durchmesser einen Kreis, schneiden denselben mit einem Kreisbogen, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{C}$ und dessen Radius gleich dem des Kreises π ist, ziehen durch den erhaltenen Schnittpunkt ζ und durch $\mathfrak{C}$ die Gerade $H_w C_w = HC$; dann ist C_w der Wendepunkt und die von C_w nach dem zu H_w diametralen Punkte $\mathfrak{p}_w$ gezogene Gerade die Asymptote.

Ausser den beiden auf der Centralen $F\Phi$ liegenden Rückkehrpunkten Ξ', Ξ'' befindet sich auf γ' noch ein Rückkehrpunkt Ξ_k, der durch die folgenden Darlegungen bestimmt wird. Wir nehmen an, in Fig. **235** rolle der Kreis p auf einem gleich grossen Kreise π, in beiden seien beziehlich die gleichen concentrischen Kreise p_c, π_c beschrieben, welche von der einen durch den Pol $\mathfrak{P}_k$ gehenden gemeinsamen Tangente resp. in den Punkten C_k, Ξ_k berührt werden; und von $\mathfrak{P}_k$ aus sei eine Secante gezogen, die p_c in zwei nahe an C_k gelegenen Punkten C', C'' schneidet. Wir erhalten dann nach der bekannten Construction zu C' den entsprechenden Krümmungsmittelpunkt Ξ' der von C' beschriebenen Curve, indem wir die radiale Gerade $C'F$ ziehen, welche die in $\mathfrak{P}_k$ auf $\mathfrak{P}_k C'$ errichtete Senkrechte in $\mathfrak{Q}'$ trifft, als Schnitt der Geraden $\mathfrak{Q}'\Phi$, $C'\mathfrak{P}_k$. In gleicher Weise ergiebt sich zu C'' der entsprechende Krümmungsmittelpunkt Ξ'', und ferner entspricht nach dieser Construction dem Berührungspunkte C_k der andere Berührungspunkt Ξ_k. Bezeichnen wir die Fusspunkte der von F und Φ auf $\mathfrak{P}_k C'$ gefällten gleich langen Lothe resp. mit m und μ, dann ist, so lange sich C' innerhalb einer bestimmten Entfernung von C_k befindet, $mC' > \mu\Xi'$, also auch $C'\Xi' > m\mu$; und unter derselben Bedingung ergiebt sich, dass auch $C''\Xi'' > m\mu$ ist. Dem zufolge ist $C_k\Xi_k$ der kleinste Krümmungsradius hinsichtlich aller Punkte, welche auf dem Kreise p_c beiderseits von C_k innerhalb bestimmter Entfernungen liegen.

Ziehen wir in Fig. **234** an die Kreise p_c, π_c die Tangenten CP_k, $\mathfrak{C}\mathfrak{P}_k$, welche die Kreise p, π einerseits resp. in den Punkten P_k, $\mathfrak{P}_k$ schneiden, so tritt beim Rollen des Kreises p der Punkt P_k mit $\mathfrak{P}_k$ in Berührung, während der beschreibende Punkt C nach C_k gelangt; und an dieser Stelle tangirt die verlängerte Curvennormale $C_k\mathfrak{P}_k$ den Kreis π_c in dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte Ξ_k. Demnach entspicht diesem Curvenpunkte C_k der relativ kleinste Krümmungsradius $C_k\Xi_k$, dessen Länge gleich $2 . \mathfrak{P}_k\mathfrak{C}$ ist, und der Krümmungsmittelpunkt Ξ_k ist der oben genannte seitlich von der Centralen $F\Phi$ liegende Rückkehrpunkt der Evolute γ'. Dieser Rückkehrpunkt Ξ_k ergiebt sich also, wenn wir an den Kreis π_c die Tangente $\mathfrak{C}\mathfrak{P}_k$ legen, als Berührungspunkt der zweiten von $\mathfrak{P}_k$ an diesen Kreis gezogenen Tangente, oder als Schnittpunkt, den das von $\mathfrak{C}$ auf den Radius $\Phi\mathfrak{P}_k$ gefällte Loth mit dem Kreise π_c

bildet; und der Curvenpunkt C_k wird erhalten, indem wir $\mathfrak{P}_k C_k$ gleich $\Xi_k \mathfrak{P}_k$ oder $\mathfrak{P}_k \mathfrak{C}$ machen. Die Aequidistante $\varkappa$ enthält demnach keine Rückkehrpunkte, wenn der Radius des erzeugenden Kreises k kleiner oder ebenso gross als der relativ kleinste Krümmungsradius $C_k \Xi_k$ ist, der die Länge $2 . \mathfrak{P}_k \mathfrak{C}$ besitzt; dagegen treten Rückkehrpunkte auf, wenn dieser Radius grösser als $2 . \mathfrak{P}_k \mathfrak{C}$ ist. Bei der anderen Aequidistante $\varkappa^1$ verschwinden die Rückkehrpunkte, wenn dieser Radius ebenso gross oder kleiner als der zu C gehörende in der Centralen liegende Krümmungsradius $C\Xi^{II}$ ist. Da für die auf der Curvennormalen $C_k \Xi_k$ liegenden Punkte K_k, K_k^1 der Aequidistanten $\varkappa$, $\varkappa^1$ auch Ξ_k der zugehörige Krümmungsmittelpunkt ist, so haben die Aequidistanten in diesen Punkten die relativ grösste Krümmung.

Aus den obigen Darlegungen folgt auch, dass wir in Fig. **236** für eine auf dem Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$ des Kreises π angenommene Lage des Punktes $\mathfrak{C}$ den entsprechenden Rückkehrpunkt Ξ_k erhalten, indem wir auf $\mathfrak{P}\mathfrak{R}$ die Senkrechte $\mathfrak{C}\mathfrak{P}_k$ bis an den Kreis π ziehen, ferner von $\mathfrak{C}$ auf $\Phi\mathfrak{P}_k$ das Loth $\mathfrak{C}z$ fällen und dasselbe um seine eigene Länge verlängern, also $z\Xi_k = \mathfrak{C}z$ machen. Verbinden wir nun die Mitte M des Radius $\Phi\mathfrak{P}_k$ mit $\mathfrak{C}$ und Ξ_k, so ist $M\Xi_k = M\mathfrak{C} = M\Phi$, und der Winkel $\mathfrak{P}_k M \Xi_k = 2 . M_0 \Phi M$. Hieraus ersehen wir, dass für alle auf der Geraden $\Phi\mathfrak{P}$ befindlichen Lagen des Punktes $\mathfrak{C}$ oder jenes Punktes C der geometrische Ort ξ der entsprechenden Rückkehrpunkte Ξ_k eine sternförmige Trochoide ist, die der Punkt Ξ_k erzeugt, wenn derselbe mit dem um M beschriebenen Kreise m verbunden wird, der auf dem doppelt so grossen mit Φ concentrischen Kreise μ rollt. Um den rollenden Kreis m in seiner Ausgangslage m_0, der die mit $\mathfrak{P}$ coincidirende Lage Ξ_0 des erzeugenden Punktes Ξ_k entspricht, zu zeichnen, brauchen wir nur um die Mitte M_0 von $\Phi\mathfrak{P}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}\Phi\mathfrak{P}$ den Kreis m_0 zu beschreiben; und ferner ist der Radius des um Φ beschriebenen ruhenden Kreises gleich $\frac{1}{2}\Phi\mathfrak{P}$.

98. **Der Roots'sche Ventilator I.** Um die Construction der Kapselräder auszuführen, deren Zahnköpfe ein kreisförmiges Profil besitzen, wollen wir zunächst die am meisten in Anwendung befindlichen, zweizähnigen Kapselräder mit stetigem Eingriff eingehend betrachten. Es seien p, π in Fig. **237** die beiden gleichen Theilkreise der Räder Fp, $\Phi\pi$; ferner seien auf der Centralen ΦF die beiden Punkte $\mathfrak{C}$, C so angenommen, dass sie vom Berührungspunkte $\mathfrak{P}$ dieser Kreise beispielsweise um $\frac{1}{4}$ ihres Radius entfernt sind. Die Theilkreise theilen wir von $\mathfrak{P}$ aus in je 8 gleiche Theile,

um C als Mittelpunkt beschreiben wir den durch die beiden Theilpunkte K_I, K_{II} gehenden Kreis, dessen Bogen $K_I k K_{II}$ die Form des Zahnkopfes bildet. Hierdurch ist nun nach den in Art. 97 gegebenen Ausführungen die entsprechende Zahnlücke bestimmt. Wir erhalten die Umgrenzungscurve $\varkappa$ derselben als die einseitige Aequidistante der Pascal'schen Curve γ, die von dem Punkte C beschrieben wird, wenn der Kreis p auf dem festgehaltenen Kreise π rollt. Wir beschreiben um Φ den durch $\mathfrak{C}$ gehenden Kreis π_c, ziehen von einem Punkte H_w desselben durch $\mathfrak{C}$ eine Gerade, machen auf dieser $H_w C_w = HC$ resp. gleich dem Durchmesser des Theilkreises und verbinden C_w mit dem Punkte $\mathfrak{p}_w$, der H_w diametral gegenüber liegt; dann ist C_w ein Punkt der Pascal'schen Curve γ und $C_w \mathfrak{p}_w$ die zugehörige Normale, die nach Art. 63 (Fig. 171) auch durch den Endpunkt $\mathfrak{P}_w$ des zu $H_w C_w$ parallelen Theilkreisradius geht. Auf dieser Normalen machen wir $C_w K_w$ gleich dem Radius CK des Kreises k, und dann ist K_w ein Punkt der Aequidistante $\varkappa$. Die durch $\mathfrak{C}$ gehende Gerade $H_w C_w$ haben wir zugleich durch den Schnittpunkt ζ gelegt, in welchem der über ΦH als Durchmesser beschriebene Kreis einerseits von dem um $\mathfrak{C}$ mit dem Radius $\mathfrak{P}\Phi$ gezogenen Kreisbogen geschnitten wird; dem zufolge sind C_w, K_w nach der obigen Darlegung in Art. 97 Wendepunkte der Curven γ, $\varkappa$, und die Curvennormale $C_w \mathfrak{p}_w$ ist eine Asymptote der Evolute $\gamma^I \gamma^{II}$ dieser Curven. Ferner ergiebt sich, wenn wir auf $\Phi\mathfrak{C}$ die Senkrechte $\mathfrak{C}\mathfrak{P}_k$ errichten, vom Punkte $\mathfrak{P}_k$ des Theilkreises π an den Kreis π_c die Tangente $\mathfrak{P}_k \Xi_k$ ziehen, auf derselben $\mathfrak{P}_k C_k$ gleich $\mathfrak{P}_k \mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{P}_k \Xi_k$ machen, der Curvenpunkt C_k, zu dem der relativ kleinste Krümmungsradius $C_k \Xi_k$ gehört. Der Grenzpunkt C_1 des von der Curve γ zur Geltung kommenden Stückes CC_1 wird erhalten, indem wir vom Endpunkte H_1 des auf $\mathfrak{C}H$ senkrechten Durchmessers $H_1 \mathfrak{p}_1$ durch $\mathfrak{C}$ eine Gerade ziehen und auf derselben $H_1 C_1$ gleich dem Durchmesser des Theilkreises machen. Die zugehörige Normale $C_1 \mathfrak{p}_1$ schneidet den Theilkreis π in dem Theilpunkte $\mathfrak{P}_1$, denn, da bei der Pascal'schen Curve der Radius $\Phi\mathfrak{P}_1$ parallel $H_1 C_1$ ist und den Winkel $\mathfrak{C}\Phi\mathfrak{p}_1$ halbirt, so ist $\mathfrak{P}_1\mathfrak{C} = \mathfrak{P}_1\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{P}_1 C_1$; demnach fällt der auf dieser Normalen liegende Punkt K_1 der Aequidistante $\varkappa$ mit dem Punkte $\mathfrak{P}_1$ zusammen, und der um $\mathfrak{p}_1$ beschriebene durch K_1, K_2 begrenzte Kreisbogen $K_1 \varkappa' K_2$ bildet als Profil des Zahnkopfes die Fortsetzung der Zahncurve $\varkappa$ des Rades $\Phi\pi$. Dieser Kreisbogen und die Aequidistante $\varkappa$ haben im Anschlusspunkte K_1 oder $\mathfrak{P}_1$ dieselbe Tangente, aber verschiedene Krümmungsradien; denn ziehen wir auf $C_1\mathfrak{p}_1$ die Senkrechte $\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1$ bis an die Gerade C_1H_1, dann schneidet $\mathfrak{q}_1\Phi$, wie oben angegeben wurde, die Normale $C_1\mathfrak{p}_1$ in dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte Ξ_1, der ein Punkt der Evolute γ^I ist. Hiermit ist die Bestimmung der geschlossenen vollständigen Zahncurve $\varkappa\varkappa'\varkappa''\varkappa'''$ des Rades $\Phi\pi$, die von den rechtwinkeligen Geraden $\mathfrak{C}H$, $H_1\mathfrak{p}_1$ in vier symmetrische Theile getheilt wird, beendet; und ihr entspricht die congruente Zahncurve $kk'k''k'''$ des anderen Rades Fp.

Drehen sich diese beiden Räder mit gleicher Geschwindigkeit um die beiden festen Axen Φ, F in der Richtung der Pfeile, dann gelangen die beiden Punkte K_1, K_I der rollenden Kreise π, p nach $\frac{1}{8}$ Umdrehung auf der Centralen ΦF in Berührung, während der Aequidistantenbogen KK_1 an dem Kreisbogen KK_I entlang gleitet. Die vom Eingriffs- oder Berührungspunkte der Zahncurve $\varkappa$, k erzeugte Eingriffscurve $\mathfrak{e}$ wird erhalten, indem wir um F den durch C gehenden Kreis p_c beschreiben und von einem Punkte $\mathfrak{a}$ desselben durch $\mathfrak{P}$ die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gleich dem Radius CK des Kreises k ziehen; denn es wird, wenn C nach $\mathfrak{a}$ gelangt, der Eingriffspunkt sich in $\mathfrak{b}$ befinden, und somit ist $\mathfrak{b}$ ein Punkt der schleifenartig gestalteten durch $\mathfrak{P}$ gehenden Eingriffscurve. Während das Curvenstück $K\varkappa K_1$ an dem Kreisbogen KkK_I entlang gleitet, durchschreitet der Eingriffspunkt das Curvenstück $K\mathfrak{e}\mathfrak{P}$, von da an gleitet der Kreis $K_1\varkappa'$ an der Aequidistante K_Ik', und der Eingriffspunkt bewegt sich von $\mathfrak{P}$ aus auf der Fortsetzung $\mathfrak{P}\mathfrak{e}'$ der Eingriffscurve weiter. Diese Fortsetzung ergiebt sich, indem wir von einem z. B. auf $\mathfrak{b}\mathfrak{P}$ liegenden Punkte $\mathfrak{a}'$ des Kreises π_c durch $\mathfrak{P}$ die Gerade $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ gleich CK ziehen, oder indem wir $\mathfrak{P}\mathfrak{b}' = \mathfrak{P}\mathfrak{b}$ machen. Während einer Umdrehung wird demnach auch die vollständige, symmetrisch gestaltete Eingriffscurve $\mathfrak{e}\mathfrak{e}'$, deren beide Schleifen Theile je einer Kreiskonchoide sind, von dem Eingriffspunkte stetig durchlaufen. Hierin liegt ein wichtiger Vorzug der in dieser Weise mit kreisförmigen Zahnköpfen versehenen Kapselräder; denn durch diese stetige Berührung der beiden Zahncurven wird ein beständiges Zusammenschliessen der Zähne bewirkt, so dass kein schädlicher Raum entstehen kann, der bei vielen anderen Verzahnungen als grosser Uebelstand unvermeidlich ist. Die beiden durch die tiefsten Lückenpunkte begrenzten Zähne dieser Räder werden, weil sie sich in ihrer Gestalt so sehr von den zur gleichförmigen Bewegungsübertragung dienenden Radzähnen unterscheiden, auch von den Praktikern als „Kolben“ und diese Räder als „Kolbenräder“ benannt.

Die beiden Räder sind nebst ihrer Eingriffscurve in Fig. 238 in der angegebenen Weise, wie man aus der gleichartigen Bezeichnung erkennt, verkleinert gezeichnet und von einer schematisch im Durchschnitt dargestellten Kapsel umschlossen. Sie sind zur Uebertragung der Bewegung nicht geeignet und werden deshalb durch zwei ausserhalb der Kapsel auf ihren Axen festgesetzte gleiche Zahnräder in Bewegung gehalten. Dieses nach Roots[1]) benannte Kapselräderwerk wird in grosser Dimension ausgeführt als Ventilator bei Bergwerken zur Grubenlüftung vielfach angewendet. Das theoretische Luftvolumen, welches bei jeder Umdrehung fortgetrieben wird, ist gleich der doppelten Volumendifferenz von einem vervollständigten, anschliessenden Cylinder und einem Rade, und dieses Luftvolumen ist demnach um so grösser, je tiefer die Zahnlücken sind. Viel früher wurde von Lecocq dieses Kapselräderwerk als rotirende Pumpe mit zweizähnigen und auch mit dreizähnigen Rädern ausgeführt[2]).

Wir haben in Fig. 237 den Abstand des Kreismittelpunktes C von dem Theilkreise p willkürlich gleich $\frac{1}{7}$ des Radius dieses Kreises genommen und hiermit den Radius CK_l der Zahnköpfe der 2-zähnigen Kapselräder und alles Uebrige bestimmt. Legen wir aber den Punkt C näher an den Kreis p, dann wird durch den mit dem Radius CK_l beschriebenen Kreis k die entsprechende Zahnlücke mehr vertieft. Bei dieser Veränderung darf aber der Grenzfall, in welchem dieser Radius CK_l gleich dem relativ kleinsten Krümmungsradius $C_k\Xi_k$ der Pascal'schen Curve γ ist, nicht überschritten werden, weil sonst die Aequidistante $\varkappa$ einen Rückkehrpunkt erhält und deshalb als Zahncurve unbrauchbar wird.

Diesen wichtigen Grenzfall, bei welchem $CK_l = C_k\Xi_k$ oder $\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1 = C_k\Xi_k$ ist, können wir für jede beliebige Theilung, also für einen beliebig auf dem Theilkreise π angenommenen Punkt $\mathfrak{P}_1$ leicht bestimmen. Es ist, wenn wir in diesem Theilkreise die durch $\mathfrak{C}$ gehende Sehne $\mathfrak{P}_1\mathfrak{U}$ ziehen, weil $\mathfrak{C}\mathfrak{P}_k$ senkrecht auf $\Phi\mathfrak{P}$ steht:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1 . \mathfrak{C}\mathfrak{U} = \overline{\mathfrak{C}\mathfrak{P}}_k^2;$$

und da ferner im Grenzfalle:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1 = C_k\Xi_k = 2 . \mathfrak{C}\mathfrak{P}_k,$$

---

[1]) *Specification* Nr. 1333 vom 9. Mai 1866. *Engineer*. 1867. Aug. p. 146. *Propagation industrielle*. IV. 1869. p. 179. *Practischer Maschinen-Constructeur*. 1870. B. 3. S. 341. Taf. 88. J. v. Hauer, *Die Hüttenwesens-Maschinen*. 1876. S. 208, und *Institution of Mechanical-Engineers*. 1877. p. 92.

[2]) *Descriptions des machines*. 1843. T. 47. p. 428. Brevets 14 août et 9 oct. 1832.

so folgt:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1}{4}.$$

Wird nun in Fig. 239 durch den Punkt $\mathfrak{P}_1$ eine beliebige Gerade, etwa eine Senkrechte, auf den Theilkreisradius $\Phi\mathfrak{P}$ gezogen, welche denselben in $\mathfrak{c}$ trifft, und auf dieser die Strecke $\mathfrak{c}\mathfrak{u} = \frac{1}{4}\mathfrak{P}_1\mathfrak{c}$ gemacht, ferner zu $\Phi\mathfrak{P}$ die Parallele $\mathfrak{u}\mathfrak{U}$ bis an den Theilkreis π gezogen; dann schneidet $\mathfrak{U}\mathfrak{P}_1$ den Radius $\Phi\mathfrak{P}$ in dem Punkte $\mathfrak{C}$, durch welchen die obige Beziehung erfüllt wird, und $\mathfrak{C}\mathfrak{P}_1$ ist gleich dem Radius des Zahnprofiles, dem die tiefste Zahnlücke entspricht. Wir erhalten also z. B. den Zahnkopf $\varkappa'$, indem wir mit dem Radius $\mathfrak{p}_1\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{C}\mathfrak{P}_1$ den Kreisbogen $\varkappa'$ beschreiben. Die so construirten 2-zähnigen Kapselräder besitzen die tiefsten Zahnlücken und liefern somit bei einer Umdrehung das grösste Luftvolumen. Der zu dem Punkte $\mathfrak{P}_1$ der Aequidistante $\varkappa$ gehörende Krümmungsmittelpunkt Ξ_1 ist verhältnissmässig weit von dem Mittelpunkte $\mathfrak{p}_1$ des Kreises $\varkappa'$ entfernt, und daher ändert sich an dieser Stelle die Krümmung vom Kreise $\varkappa'$ nach der Aequidistante $\varkappa$ hin sprungweise. In der Nähe derartiger Stellen verändert sich auch nur langsam die Lage des Eingriffspunktes, der das nahe an den Kreisen π, p gelegene Stück der Eingriffscurve $\mathfrak{e}\mathfrak{e}'$ durchläuft; deshalb wird an diesen Stellen die Abnutzung am grössten sein und eine sorgfältige Dichtung erfordert. J. Schönenberger[1]) hat bei solchen mit den tiefsten Zahnlücken versehenen 2-zähnigen Kapselrädern an jene Stellen und auch an die Scheitel der Zahnköpfe zweckmässige Dichtungen angebracht, um dadurch das Zurücktreten des luftförmigen resp. des tropfbarflüssigen Körpers möglichst zu verhindern.

Bei einer beliebigen Zähnezahl n ist der Bogen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ gleich dem $4n$tel Theil des Theilkreises π, und wenn nun in Fig. 239 für diesen allgemeinen Fall die Gerade $\mathfrak{P}_1\mathfrak{c}$ senkrecht auf den Theilkreisradius $\Phi\mathfrak{P}$ gezogen wird, den wir durch ϱ bezeichnen wollen, so ist:

$$\mathfrak{P}_1\mathfrak{c} = \varrho \sin\frac{90^0}{n}, \qquad \Phi\mathfrak{c} = \varrho\cos\frac{90^0}{n},$$

und folglich, weil $\mathfrak{c}\mathfrak{u} = \frac{1}{4}\mathfrak{P}_1\mathfrak{c}$ gemacht wird:

$$\mathfrak{u}\mathfrak{U} = \sqrt{\varrho^2 - \overline{\mathfrak{c}\mathfrak{u}}^2} - \Phi\mathfrak{c} = \sqrt{\varrho^2 - \frac{1}{16}\left(\varrho\sin\frac{90^0}{n}\right)^2} - \varrho\cos\frac{90^0}{n}$$

oder:

$$\mathfrak{u}\mathfrak{U} = \varrho\left[\sqrt{1 - \frac{1}{16}\sin^2\frac{90^0}{n}} - \cos\frac{90^0}{n}\right].$$

[1]) *Deutsches Reichspatent* Nr. 6028 vom 22. October 1878.

Da ferner $\mathfrak{c}\mathfrak{C} = \frac{4}{5}\mathfrak{u}\mathfrak{U}$ ist, so erhalten wir für den Grenzfall den Abstand des Mittelpunktes des Profilkreises von dem des Theilkreises:

$$\Phi\mathfrak{C} = \Phi\mathfrak{c} + \mathfrak{c}\mathfrak{C} = \varrho\left[\frac{4}{5}\sqrt{1 - \frac{1}{16}\sin^2\frac{90^\circ}{n}} + \frac{1}{5}\cos\frac{90^\circ}{n}\right].$$

oder:

$$\Phi\mathfrak{C} = \frac{1}{5}\varrho\left[\sqrt{16 - \sin^2\frac{90^\circ}{n}} + \cos\frac{90^\circ}{n}\right].$$

Bei den 2-zähnigen Rädern ergiebt sich hieraus für $n = 2$ der Abstand $\Phi\mathfrak{C} = 0{,}9288\,.\,\varrho$ [1]) und bei den 6z-ähnigen erhalten wir $\Phi\mathfrak{C} = 0{,}9915\,.\,\varrho$.

Haben die Zahnlücken die grösste Tiefe, so ist auch in Fig. **239** die Differenz $\mathfrak{p}_1\Xi_1$ zwischen dem Radius $\mathfrak{p}_1\mathfrak{P}_1$ des Kreises $\varkappa'$ und dem Krümmungsradius $\Xi_1\mathfrak{P}_1$ für den Punkt $\mathfrak{P}_1$ der Aequidistante $\varkappa$ verhältnissmässig gross, und demnach tritt an der Stelle $\mathfrak{P}_1$ der Zahncurve eine sprungweise Aenderung der Krümmung auf. Der Gang dieser Räder ist aber naturgemäss sanfter und die Abnutzung an der genannten Stelle geringer, wenn diese sprungweise Veränderung der Krümmung vermieden wird. In manchen Fällen wird nicht der grösste Lückenraum verlangt, wie z. B. bei Anwendung dieses Kapselräderwerkes als Wassermesser, dann kann man die Zahncurve durch Verkleinerung der Lückentiefen derart gestalten, dass die Punkte $\mathfrak{p}_1$, Ξ_1 zusammenfallen, und dem zufolge wird jene unstetige Aenderung der Krümmung beseitigt. Dies geschieht, wenn wir in Fig. **240** bei dem 2-zähnigen Kapselrade von dem Theilpunkte $\mathfrak{P}_1$ auf den Radius $\Phi\mathfrak{P}$ des Theilkreises π das Loth $\mathfrak{P}_1\mathfrak{C}$ fällen und den Abstand des Kreismittelpunktes $\mathfrak{p}_1$ von dem Theilkreise π gleich $\mathfrak{C}\mathfrak{P}$ nehmen. Denn beschreiben wir um Φ den durch $\mathfrak{C}$ gehenden Kreis π_c, so coincidirt der Berührungspunkt Ξ_1 der von $\mathfrak{P}_1$ an diesen Kreis gelegten zweiten Tangente mit dem Punkte $\mathfrak{p}_1$, und $\mathfrak{P}_1\mathfrak{p}_1$ ist zugleich der relativ kleinste Krümmungsradius der Aequidistante $\varkappa$, die vermittelst der Pascal'schen Curve γ construirt ist. Wird vom Endpunkte H_1 des Durchmessers $\mathfrak{p}_1 H_1$ durch $\mathfrak{C}$ die Gerade $H_1 C_1$ gleich dem Theilkreisdurchmesser und die durch $\mathfrak{P}_1$ gehende zum Curvenpunkt C_1 gehörende Normale $C_1\mathfrak{p}_1$ gezogen, so steht diese auf $\mathfrak{p}_1 H_1$ senkrecht, und somit fällt nach der früheren Bestimmung der entsprechende Krümmungsmittelpunkt Ξ_1 der Aequidistante mit $\mathfrak{p}_1$ zusammen.

Bei der in Fig. **240** gezeichneten vollständigen Zahncurve

[1]) Der hier für die 2-zähnigen Räder berechnete Werth wurde auch von J. Schmidt im *Practischen Maschinen-Constructeur*, 1879. S. 54, ohne Ableitung mitgetheilt.

$\varkappa\varkappa'\varkappa''\varkappa'''$ geht also die Krümmung von den Aequidistanten $\varkappa$, $\varkappa''$ continuirlich in die der Kreise $\varkappa'$, $\varkappa'''$ über. In diesem Falle sind aber die Zahnlücken sehr flach geworden. Die so geformten Kapselräder werden wegen ihres sanfteren Ganges oft angewendet, und um diesen Zweck in noch höherem Maasse zu erreichen, hat man diesen Kapselrädern auch die in Art. 95 erwähnte schraubenförmige Gestalt der Hooke'schen Räder gegeben, die entsteht, wenn sich die Zahncurve um die auf ihrer Ebene senkrechten Axe Φ dreht und gleichzeitig proportional dieser Drehung in der Richtung dieser Axe verschoben wird.[1])

99. **Das Pappenheim'sche Kapselräderwerk.** In Fig. **241**, auf Taf. XVII, ist das Pappenheim'sche Kapselräderwerk[2]), welches als das Urbild aller späteren mannigfach gestalteten Maschinen dieser Art betrachtet werden kann, wie Leupold a. a. O. angiebt, mit 6-zähnigen Rädern und mit kreisförmig profilirten Zahnköpfen dargestellt. Aber wir haben in der vorhin angegebenen Weise, wie leicht aus der gleichartigen Bezeichnung erkennbar ist, den Punkt $\mathfrak{C}$ so bestimmt, dass die tiefsten Zahnlücken entstehen. Anstatt dieser constructiven Bestimmung kann man auch nach der auf S. 239 abgeleiteten Formel, in der ϱ den Radius der Theilkreise bezeichnet, die Strecke $\Phi\mathfrak{C} = \Phi\mathfrak{p}_1 = 0{,}9915 \,.\, \varrho$ machen. Hiernach liegen bei diesen 6-zähnigen Kapselrädern die Mittelpunkte der Profilkreise sehr nahe an der Peripherie der Theilkreise p, π, so dass man diese Mittelpunkte bei der praktischen Ausführung, wie es in der Leupold'schen Zeichnung geschieht, auf dem Theilkreise selbst liegend annehmen kann. Der Eingriffspunkt der Zähne bewegt sich stetig auf der schleifenförmigen Eingriffscurve $\mathfrak{e}\mathfrak{e}'$, die in gleicher Weise wie vorhin bei dem Roots'schen Ventilator construirt wird. Durch diese Räder kann zwar die Uebertragung der Bewegung von einem Rade auf das andere vermittelt werden, so dass keine äusseren Zahnräder erforderlich sind; aber die Zähne dieser Räder sind zur dauernden Uebertragung der Bewegung nicht geeignet, weil der Winkel, den die gemeinsame Normale der sich berührenden Zahncurven mit der zur Centralen ΦF senkrechten Geraden bildet, sich bei der Berührung der Zahnscheitel mit dem tiefsten Punkt der Zahnlücke bis auf 90° vergrössert. Bei einer guten Verzahnung dagegen soll dieser Winkel stets möglichst klein sein, damit beim Eingriff Stemmungen der Zähne vermieden werden.

[1]) Vergl. H. Krigar, *Deutsches Reichspatent* Nr. 7116 vom 16. Aug. 1878.

[2]) Siehe J. J. Becher a. a. O.

100. **Die Repsold'sche Pumpe.** Bei dem in Fig. **242** schematisch dargestellten, von Repsold zuerst ausgeführten Kapselräderwerke sind die beiden umschlossenen Räder nur mit je einem Zahne versehen, dessen Gestalt sich aus jener von Leupold angenommenen Zahnform durch eine kreisförmige Verbreiterung des Scheitels ergiebt[1]). Jeder der beiden symmetrischen Theile $\varkappa\varkappa'$, $\varkappa_1\varkappa'_1$ des geschlossenen Zahnprofiles besteht aus einem Viertelkreise nebst dem zugehörigen Aequidistantenbogen; die beiden Viertelkreise $\varkappa'$, $\varkappa'_1$ sind durch den Scheitelkreisbogen $\varkappa_2$, die beiden Aequidistantenbogen $\varkappa$, $\varkappa_1$ durch den Fusskreisbogen $\varkappa_3$ verbunden. Die cylindrische Umschliessung der Kapsel muss den Bogen $\varkappa_2$ mindestens zu einem Vollkreise ergänzen und beiderseits gleich weit über den Durchmesser $\alpha\beta$ hervorragen, so dass die beiden Canäle niemals direct communiciren können. Der Viertelkreis $\varkappa'_1$ und sein innerhalb des Theilkreises π liegender Mittelpunkt $\mathfrak{p}'_1$ muss so gewählt oder bestimmt werden, dass erstens der Scheitelbogen $\varkappa_2$ möglichst gross, also der Ein- und Ausfluss am wenigsten durch die cylindrische Umschliessung verengt wird, zweitens die Aequidistante $\varkappa_1$ möglichst tief und somit die durchgeführte Wassermenge möglichst gross wird. Ist der Winkel $\mathfrak{p}_1\Phi\mathfrak{p}'_1$ des Scheitelbogens $\varkappa_2$ zweckmässig gewählt, dann erhalten wir durch die bekannte Construction den Punkt $\mathfrak{C}$, ferner auf dem Schenkel $\Phi\mathfrak{p}'_1$ den Mittelpunkt $\mathfrak{p}'_1$ und damit auch den Radius $\mathfrak{p}'_1\mathfrak{P}'_1$ des Viertelkreises $\varkappa'_1$, an dem sich die tiefste Aequidistante ansetzt, die vermittelst der Pascal'schen Curve γ construirt wird.

Bei der Drehung dieser beiden einzähnigen Kapselräder, die durch zwei äussere, gleiche Zahnräder bewirkt wird, ruht der Eingriffspunkt, während die Kreise $\varkappa_3$, k_3 an einander gleiten, auf der Centralen ΦF in K, durchschreitet, wenn die Aequidistante $\varkappa$ den Kreis k, der Kreis $\varkappa'$ die Aequidistante k' berührt, beziehlich die Theile $Ke\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}e'K'$ der kreiskonchoidischen Eingriffscurve, ruht dann, so lange die Kreise $\varkappa_2$, k_2 an einander gleiten, im Punkte K' und kehrt auf der anderen Hälfte der Eingriffscurve nach Vollendung einer Drehung in K zurück. Es findet also bei diesen einzähnigen Kapselrädern ein stetiger Eingriff und somit eine continuirliche Schliessung statt, und daher kann auch hier kein schädlicher Raum entstehen.

[1]) Die praktische Ausführung der Repsold'schen Pumpe, bei welcher die Räder mit einer besonderen Dichtung versehen sind, ist in den *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen*, 1844, S. 208 ausführlich beschrieben.

101. **Der Knight'sche Ventilator**[1]. Bei dem in Fig. 243 dargestellten Kapselräderwerke wird die Drehung durch zwei äussere Räder vermittelt, deren Theilkreise sich wie 1 : 2 verhalten; daher ist der Theilkreis π des Kapselrades $\Phi\pi$ doppelt so gross als der Theilkreis p des anderen Kapselrades Fp. Jenes ist mit 6 Zähnen, dieses mit 3 Zähnen versehen. Um diese ungleichartig gestalteten Kapselräder, deren Zähne kreisförmig und äquidistantisch profilirt sind, zu construiren, theilen wir den Theilkreis p vom Pol $\mathfrak{P}$ ausgehend in 3 gleiche Theile, ferner den Theilkreis π in 6 gleiche Theile, so dass die Endpunkte α, β des vertikalen Durchmessers Theilpunkte sind; dann liegt der Pol $\mathfrak{P}$ in der Mitte der Theilung $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$. Nehmen wir im Kreise p auf dem Radius $F\mathfrak{P}$ nahe an der Peripherie einen Punkt C an, und lassen wir den Kreis p auf dem als ruhend gedachten Kreise π bis $\mathfrak{P}'$ den Bogen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}' = \frac{1}{2}\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ durchrollen; dann tritt, wenn auf p der Bogen $\mathfrak{P}P' = \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ gemacht ist, P' mit $\mathfrak{P}'$ in Berührung, die Strecke FC gelangt nach $F'C'$, und der Punkt C beschreibt das kleine Stück CC' einer gestreckten Epitrochoide, deren Normale im Punkte C' die Gerade $C'\mathfrak{P}'$ ist, die $\Phi\mathfrak{P}_1$ im Punkte $\mathfrak{p}_1$ trifft. Auf dieser Normalen nehmen wir, um eine möglichst tiefe Zahnlücke zu erhalten, einen Punkt N in der Nähe von $\mathfrak{p}_1$ an; beschreiben mit $\mathfrak{p}_1 N$ als Radius um $\mathfrak{p}_1$ den kleinen Kreisbogen $\varkappa'$, der von N ausgeht und anderseits bezüglich $\Phi\mathfrak{P}_1$ symmetrisch begrenzt wird. Ferner beschreiben wir mit $C'N$ als Radius um C den bezüglich FC symmetrischen Kreisbogen k, der einerseits von der Geraden CP' im Punkte K' begrenzt wird. Durch diese Kreisbögen sind die Radien $\Phi\varkappa'$, FK der anschliessenden beiden Kropfcylinder bestimmt; und wir haben jenen Punkt N in der Nähe von $\mathfrak{p}_1$ so gewählt, dass diese Cylinder gleiche Grösse erhalten. An den Kreisbogen $\varkappa'$ schliesst sich in N die zur gestreckten Epitrochoide CC' gehörende Aequidistante $\varkappa$ an, die dem Kreisbogen k entspricht. Das Zahncurvenstück $K'K_1$, welches sich an den Kreis k anschliesst und von dem Kreise $\varkappa'$ erzeugt wird, ergiebt sich als die Aequidistante k' der vom Punkte $\mathfrak{p}_1$ im Rade Fp beschriebenen gestreckten Epitrochoide.

Die Eingriffscurve $\mathfrak{e}$, welche ovalartig gestaltet ist und aus zwei Bogenstücken zweier verschiedener Kreiskonchoiden zusammengesetzt ist, erhalten wir in der bekannten Weise. Wir ziehen durch den Pol $\mathfrak{P}$ eine Gerade, welche den durch C gehenden

[1]) Knight, *American Mechanical Dictionary.* 1876. Vol. III. p. 1986.

Kreis p_c in $\mathfrak{a}$ trifft, und machen auf dieser Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = CK$ gleich dem Radius des Kreises k; dann ist $\mathfrak{b}$ ein Punkt des Theiles der Eingriffscurve, den der Eingriffspunkt während der Berührung des Kreises k und der entsprechenden Aequidistante $\varkappa$ durchläuft. In analoger Weise erhalten wir durch den Kreis π_c und den Radius des Kreises $\varkappa'$ den anderen Theil der Eingriffscurve, den der Eingriffspunkt während der Berührung des Kreises $\varkappa'$ und der entsprechenden Aequidistante k' durchschreitet. Hier findet also ein stetiger Eingriff statt, so dass sich kein schädlicher Raum bilden kann. Aus diesem Grunde sind alle bisher betrachteten Kapselräderwerke theoretisch vollkommener als alle noch folgenden, bei denen der schädliche Raum unvermeidlich ist.

Construction der Kapselräder mit unstetigem Eingriff.

102. **Das Evrard'sche Kapselräderwerk.** Dieses in Fig. 244 schematisch dargestellte Kapselräderwerk wird durch zwei gleiche äussere Zahnräder bewegt und besteht aus zwei ungleich gestalteten zweizähnigen Kapselrädern $\Phi\pi$, Fp, deren gleiche Theilkreise π, p grösstentheils prakticabel auf einander rollen, wodurch die Abnutzung vermindert und eine dauerhafte Abschliessung bewirkt wird[1]). Das Profil der an dem Cylinder p festgeschraubten beiden Zähne des Rades Fp besteht aus zwei zum Radius FC parallel und symmetrisch gezogenen Geraden, deren Enden durch einen kleinen abrundenden Kreis k verbunden sind. Der Mittelpunkt C des kleinen Abrundungskreises k beschreibt im Rade $\Phi\pi$ eine Pascal'sche Curve γ, die, weil C ausserhalb des Theilkreises p liegt, hier eine verschlungene Trochoide ist, und der Abrundungskreis k erzeugt einerseits die Aequidistante $\varkappa$ von γ. Um diese Curven zu construiren, ziehen wir die Gerade $\Phi\mathfrak{C}$, so dass der Winkel $\mathfrak{C}\Phi\mathfrak{P} = CF\mathfrak{P}$, die Strecke $\Phi\mathfrak{C} = FC$ ist, und beschreiben

[1]) Dieses von Reuleaux in seiner *Kinematik*, S. 400, nach Evrard benannte Kapselräderwerk geht durch eine geringe Abänderung aus dem Eve-schen Kapselräderwerke hervor, welches in Bataille-Jullien, *Machines à vapeur*, 1847—49. T. I. p. 441, ausführlich in verschiedenen Formen beschrieben ist. Das Kapselräderwerk von Laidlow-Thomson im *Engineer*, 1868. Mai 29. p. 394, ist mit dem von Evrard identisch. In der Form abgeändert ist der Baker'sche Ventilator im *Polytech. Journal*. 1874. B. 212. S. 384.

um Φ mit $\Phi\mathfrak{C}$ als Radius den Kreis π_c; ziehen ferner von einem beliebigen Punkte H_x dieses Kreises eine Gerade nach $\mathfrak{C}$ und machen auf derselben die Strecke $H_x C_x$ gleich dem Theilkreisdurchmesser, dann ist C_x ein Punkt der Pascal'schen Curve γ, deren entsprechende Normale $C_x \mathfrak{p}_x$ nach dem H_x diametral gegenüberliegenden Punkt $\mathfrak{p}_x$ geht. Wird auf dieser Normalen die kleine Strecke $C_x K_x$ gleich dem Radius des Abrundungskreises k gemacht, so ist K_x ein Punkt der Aequidistante $\varkappa$, die nebst der Pascal-schen Curve γ von der Geraden $\Phi\mathfrak{C}$ symmetrisch getheilt wird. Um einen Punkt $\mathfrak{b}$ der kreiskonchoidischen Eingriffscurve $\mathfrak{e}$ zu erhalten, ziehen wir vom Pol $\mathfrak{P}$ nach einem Punkte $\mathfrak{a}$ des mit FC um F beschriebenen Kreises p_c eine Gerade und machen auf derselben die Strecke $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gleich dem Radius des Abrundungskreises k. Die so erhaltene Eingriffscurve, welche von einem zu p_c concentrischen Kreise nur wenig abweicht, wird durch den Theilkreis π in den Punkten $\varepsilon, \varepsilon'$ begrenzt.

Werden diese Kapselräder den Pfeilrichtungen gemäss gedreht, dann bewegt sich der Eingriffspunkt, während der Zahn die Lücke durchschreitet, auf der Eingriffscurve $\mathfrak{e}$ von ε bis ε', springt von da auf die Centrale ΦF nach dem Pol $\mathfrak{P}$, ruht dort so lange als die entsprechenden Bogen der Theilkreise auf einander rollen und springt hierauf von $\mathfrak{P}$ nach ε zurück. In der gezeichneten Radstellung wird vom Austrittscanal her eine Luft- resp. Wassermenge von Zahn und Lücke eingeschlossen und durch die Oeffnung, welche sich bei $\mathfrak{P}$ bildet, nach dem Eintrittscanal zurückgedrängt. Gleichzeitig führt aber die andere congruente Lücke an der cylindrischen Wandung fast dieselbe Menge dem Austrittscanal zu, so dass bei Voraussetzung bester Dichtung während jeder Umdrehung die Förderungsmenge angenähert gleich dem Inhalte des Cylinderringes ist, der durch den Theilkreis p und den vervollständigten grossen Kropfkreis bestimmt wird.

Wird bei gegebener Kapsel eine möglichst grosse Förderungsmenge verlangt, dann müssen die Zähne des Rades Fp so lang genommen werden als es die Verhältnisse gestatten. Um die hierbei auftretenden Beziehungen zu erkennen, ist zu beachten, dass einem längeren Zahne eine grössere Lückenweite entspricht, durch welche die Schliessung bei $\mathfrak{P}$ aufhört, bevor der Zahn den Lückenrand erreicht hat, und dass in diesem Falle die beiden Canäle direct communiciren können. Ziehen wir von F und Φ an die beiden gleichen Theilkreise π, p resp. die Tangente FC, $\Phi\mathfrak{C}$, deren Berührungspunkte C, $\mathfrak{C}$ sein mögen, und betrachten wir die aus dem Theilkreise p hervorragende Strecke CD als einen linearen Zahn, dann beschreibt der Punkt C in dem Rade $\Phi\pi$ eine Pascal'sche Curve γ, welche den Theilkreis π im Berührungspunkte C und im Pol $\mathfrak{P}$ schneidet. Denn die Symmetralgerade $\Phi\mathfrak{C}$ dieser Pascal'schen Curve halbirt in dem rechtwinkeligen Dreieck $C\Phi F$ den Winkel $C\Phi\mathfrak{P}$, dessen Grösse, weil die Kathete ΦC halb so gross als die Hypothenuse ΦF ist, 60° beträgt. Wenn wir nun den Zahn CD verlängern, dem gemäss die Zahnlücke erweitern, dann wird der Pol $\mathfrak{P}$ sich innerhalb dieser Zahnlücke befinden, und somit die Schliessung bei $\mathfrak{P}$ aufhören, bevor die Schliessung durch Zahn und Lücke begonnen hat. Hiernach darf der betrachtete Grenzfall nicht überschritten werden. Verkürzen wir dagegen den Zahn, so verengt sich die Lücke; dies hat zur Folge, dass die zwischen Zahn und Lücke eingeklemmte Wassermenge nicht gleich bei $\mathfrak{P}$ eine Oeffnung findet, um nach dem Eintrittscanal zurückzufliessen, und daher eine hemmende Pressung erleidet. Dieser Uebelstand wird aber leicht durch Abrundung der an dem Lückenrande befindlichen Spitzen vermieden.

In Fig. **244**, wo der Zahn nicht in einem Punkte endet, sondern durch einen kleinen Kreis k abgerundet ist, haben wir den Mittelpunkt C dieses Kreises auf der von F an π gelegten Tangente ein wenig vor dem Berührungspunkte angenommen, so dass, gleich nachdem die entsprechende Aequidistante $\varkappa$ mit dem Zahne in Berührung gelangt ist, die Schliessung der Theilkreise π, p aufhört. Die seitliche theoretische Begrenzung des Zahnes wird durch die Kardioiden gegeben, welche die beiden Randspitzen der Zahnlücke in dem Rade Fp beschreiben; daher kann man die Zähne entweder durch diese Kardioiden begrenzen oder innerhalb derselben nach beliebiger Form profiliren. Um eine bessere Schliessung der Zähne an dem Kropfcylinder zu erhalten, kann man den Zähnen eine grössere Breite geben und das Ende derselben durch einen um F beschriebenen Kreisbogen begrenzen. Dies erfordert aber eine Verkürzung des Zahnes, damit die Lückenweite nicht zu gross wird und nicht ein vorzeitiges Aufhören der Schliessung eintritt. Auch diesen Kapselrädern hat H. Krigar[1]) in gleicher Weise wie beim Roots'schen Ventilator die bekannte schraubenförmige Gestalt der Hooke'schen Räder gegeben.

103. **Der Fabry'sche Ventilator.** Dieses zum Ventiliren der Gruben viel in Anwendung befindliche Kapselräderwerk, dessen

---

[1]) Vergl. *Deutsches Reichspatent* Nr. 4121 vom 24. März 1878.

eigenthümlich gestalteten luftfördernden Räder auch Fabry'sche Wetterräder [1]) genannt werden, ist in Fig. **245** schematisch dargestellt. Die zweizähnigen Räder sind mit punktförmiger und epicycloidischer Verzahnung versehen. Um die Construction derselben auszuführen, theilen wir den Theilkreis π in vier gleiche Theile, zeichnen die von einem Theilpunkte Γ ausgehende Epicycloide $\Gamma\varkappa$, die ein Peripheriepunkt des auf π rollenden gleich grossen Kreises p erzeugt, und somit in diesem besonderen Falle eine Kardioide ist, indem wir von einem Punkte ν des Theilkreises π durch Γ eine Gerade $\nu\xi$ gleich dem Theilkreisdurchmesser ziehen; ferner zeichnen wir die symmetrische Epicycloide $\Gamma'\varkappa'$, die von dem Theilpunkte Γ' ausgeht, und beide Epicycloiden würden, bis zum Schnittpunkte Θ geführt, das vollständige Profil des Zahnkopfes bilden. Von diesem Profil kommt aber nur der ausgezogene Theil zur Geltung; denn jene Epicycloiden werden anderseits durch die Punkte Δ, Δ' begrenzt, in denen sie von dem um Φ beschriebenen Kreise ee' getroffen werden, der so gross gewählt wird, dass er vom Theilkreise p mindestens einen Viertelkreis abschneidet [2]). Die epicycloidischen cylindrischen Zahnflächen $\Gamma\varkappa\Delta$, $\Gamma'\varkappa'\Delta'$ sind aus gebogenen Blechtafeln oder aus Holz hergestellt und durch ein Querstück an dem symmetralen Flügel $\Sigma\Sigma_1$ befestigt. Der Theilkreis p schneidet den Epicycloidenbogen $\varkappa$ in dem Punkte K, und durch die von K ausgehende Viertheilung dieses Kreises ergeben sich die Zähne des anderen congruenten Rades. Der mit dem Radius $\Phi\Sigma$ oder $\Phi\Sigma_1$ beschriebene Kreis k_Φ berührt den Axenkreis i_F, so dass die Flügelendpunkte Σ, Σ_1 an diesem Kreise vorbeistreifen. Der Punkt Σ beschreibt in diesem Rade Fp eine Pascal'sche Curve s, die bezüglich der auf SS_1 senkrechten Geraden $F\mathfrak{C}$ symmetrisch ist. Diese Gerade, welche den über SS_1 als Durchmesser beschriebenen Kreis k_F

---

[1]) Diese Wetterräder (Roues pneumatiques) sind in Ponson, *Traité de l'exploitation des mines de houille.* 1853. T. II. p. 186, oder in der deutschen Bearbeitung von C. Hartmann, 1856, S. 339, mit drei Zähnen („Flügeln") und später nach einer Mittheilung im *Polytech. Centralblatt*, 1858. S. 506, mit zwei Zähnen von Fabry ausgeführt worden.

[2]) Bei einem von Ch. Hoppe patentirten Kapselräderwerk ist diese punktförmige epicycloidische Verzahnung vierzähniger Räder vollständig ausgeführt. Auf jeder der beiden Axen befinden sich, um die beiden äusseren Uebertragungsräder zu vermeiden, vier solche gegen einander versetzte innere Räder, welche die Bewegung selbst übertragen. Vergl. *Deutsches Reichspatent* Nr. 19147 vom 27. October 1881.

einerseits in dem Punkte $\mathfrak{C}$ schneidet, trifft den Axenkreis i_F einerseits in dem Scheitel o dieser Pascal'schen Curve s. Um dieselbe zu construiren, ziehen wir von einem Punkte x des Kreises k_F durch $\mathfrak{C}$ eine Gerade xy gleich dem Theilkreisdurchmesser, dann ist y ein Punkt dieser Curve, von der wir nur die eine symmetrische Hälfte $\mathfrak{C}so$ gezeichnet haben. Aus der Gestalt dieser Pascal'schen Curve ist ersichtlich, dass der Punkt Σ ungehindert durch die betreffende Zahnlücke hindurch gehen kann.

Bei der Drehung dieser beiden Kapselräder, die durch zwei äussere gleiche Zahnräder in den gezeichneten Pfeilrichtungen bewegt werden, beginnt im Punkte e das Gleiten des Punktes K auf dem Epicycloidenbogen $\varkappa$ von Δ nach Γ und setzt sich fort, bis der Eingriffspunkt auf dem Theilkreise p den Bogen $e\mathfrak{P}$ durchschritten hat. Von da an gleitet der Punkt Γ auf dem Epicycloidenbogen c von K nach L, bis der jetzt auf dem Theilkreise π fortschreitende Eingriffspunkt den Punkt ε erreicht, wo der Eingriff aufhört. In diesem Momente befindet sich $\Sigma\Sigma_1$ in vertikaler und SS_1 in horizontaler Stellung; und es tritt der Punkt Γ_1 mit dem Epicycloidenbogen c_1 an der Stelle ε' auf dem Theilkreise π in Berührung. Der Eingriffspunkt springt also von ε nach ε', durchläuft auf π den Bogen $\varepsilon'\mathfrak{P}$, weiter auf p den Bogen $\mathfrak{P}e'$, und während dieses ganzen Bewegungsvorganges haben die Räder eine Umdrehung vollendet. In jenem Momente, wenn $\Sigma\Sigma_1$ vertikal und SS_1 horizontal steht, wird vom Austrittscanal her eine beträchtliche Luftmenge in der Zahnlücke $\Gamma\Gamma_1$ eingeschlossen und bei der weiteren Drehung nach dem Eintrittscanal zurückgeführt. Viermal wird während einer Umdrehung ein Luftvolumen hindurchgefördert, welches von dem Halbcylinder der Kapsel und den vertical gestellten Radflügeln umgrenzt wird; aber viermal wird auch jene in der Zahnlücke eingeschlossene Luftmenge zurückgetrieben; und demnach kann nur die Differenz als theoretische Förderungsmenge betrachtet werden. Bei dreizähnigen Kapselrädern ist die in der Zahnlücke eingeklemmte Luftmenge kleiner; dagegen wird dieselbe aber während einer Umdrehung sechsmal in den Eintrittscanal zurückgedrängt. Die cylindrische umschliessende Wandung braucht in diesem Falle sich nur bis auf einen Drittelkreis zu erstrecken.

104. **Der Payton'sche Wassermesser.** Das in Fig. **246** schematisch dargestellte Kapselräderwerk, dessen zweizähnige Räder epi-hypocycloidisch verzahnt sind, ist in ähnlicher Gestalt von

Payton als Wassermesser angewendet worden[1]). Um die Zahncurven zu erhalten, nehmen wir den Hülfsrollkreis q an, dessen Durchmesser kleiner als der Radius der Theilkreise π, p ist, welche sich in $\mathfrak{P}$ berühren; machen auf diesen Kreisen die beiden Bögen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}P_1$ gleich dem halben Umfange von q; ferner auf $\Phi\mathfrak{P}_1$ und FP_1 resp. die Strecken $\mathfrak{P}_1\Delta$, $P_1\sigma$ gleich dem Durchmesser des Kreises q. Dieser Hülfsrollkreis q erzeugt durch seine halbe Abrollung auf π die Epicycloide $\mathfrak{P}\varkappa\Delta$, an die der um Φ beschriebene Kreisbogen $\Delta\Delta'$ angeschlossen ist, und durch seine halbe Abrollung in p die Hypocycloide $\mathfrak{P}k\sigma$, welche sich in σ an den Axenkreis i_F anschliesst. Durch die Zahnkopfcurve $\mathfrak{P}\varkappa\Delta\Delta'$ und die Flankencurve $\mathfrak{P}k\sigma\sigma'$ sind einerseits die congruenten Zähne dieser Kapselräder bestimmt. Anderseits müssen diese Zähne so begrenzt werden, dass der eine Zahn ungehindert an dem anderen vorbeigehen kann. Die theoretische Begrenzung ergiebt sich durch die Pascal'sche Curve Ld', die der Punkt Δ' in dem Rade Fp beschreibt. Diese Pascal'sche Curve wird erhalten, wenn wir den Durchmesser LL_1 ziehen, der den Axenkreis i_F einerseits ihrem Scheitel σ' schneidet, und auf der von einem Punkte x des Kreises k_F nach L gezogenen Geraden die Strecke $xy = L_1\sigma'$ oder gleich dem Theilkreisdurchmesser machen; denn dann ist y ein Punkt der von Δ' beschriebenen Pascal'schen Curve, deren Stück $Ld'\sigma'$ einerseits die Zahnbegrenzung bildet.

Werden die beiden Kapselräder, deren gegenseitige Bewegung zwei äussere gleich grosse Zahnräder vermitteln, in der gezeichneten Pfeilrichtung gedreht, dann durchschreitet der Eingriffspunkt von $\mathfrak{P}$ ausgehend den Halbkreis $\mathfrak{P}qe$, ruht, während die Kreisbögen $\Delta\Delta'$, $\sigma\sigma'$ an einander gleiten, in e, springt dann nach ε, ruht dort, während der Bogen LL' an dem entsprechenden Bogen des Axenkreises i_Φ gleitet, und durchläuft von da an den Halbkreis $\varepsilon q'\mathfrak{P}$. In dem Momente, wenn der Eingriffspunkt von e nach ε springt, wird eine Wassermenge aus dem Austrittscanal von den Zähnen umschlossen und nach dem Eintrittscanal zurückgeführt. Da aber dieses Zurückführen bei jeder Umdrehung regelmässig geschieht, so kann dieses Kapselräderwerk mit einem Zählapparat verbunden, wenn keine grosse Genauigkeit erfordert wird, als Wassermesser benutzt werden.

---

[1]) Vergl. *Engineering*. 1868. Jan. p. 97, und *Engineer*. 1868. Febr. p. 92, wo dieses Kapselräderwerk „Epicycloidal water meter" genannt wird. Ferner auch *Polytechnisches Journal*. 1868. B. 188. S. 22.

105. **Das Reuleaux'sche Kapselräderwerk**[1]). In Fig. 247, Taf. XVIII, sind die Zähne der zweizähnigen Räder nach Kreisevolventen geformt, deren gleiche Grundkreise ω und o sind. Damit die Kreisevolventen k, $\varkappa$ nicht unnütz lang werden, müssen wir ihre Grundkreise ω, o im Verhältnisse zur Centralen ΦF möglichst gross wählen, und um den in unserer Figur genommenen Grenzfall zu erhalten, muss die gemeinschaftliche Tangente αa, welche die beiden Grundkreise ω, o resp. in den Punkten α, a berührt, gleich dem halben Umfang dieser Kreise sein. Denn lassen wir diese Tangente auf dem Grundkreise o rollen, so beschreibt ihr mit α coincidirender Punkt K die Kreisevolvente KkJ, deren Rückkehrpunkt oder Spitze J dem Punkte a diametral gegenüberliegt; lassen wir ferner diese Tangente den halben Grundkreis ω umrollen, so erzeugt derselbe Punkt K die von α ausgehende Kreisevolvente $\Gamma\varkappa\Delta$, die jener ersten Kreisevolvente congruent ist und mit derselben während einer halben Umdrehung der Räder in Berührung bleibt. Bei grösseren Grundkreisen würden sich demnach die so entstandenen Kreisevolventen für zweizähnige Räder zu kurz, bei kleineren aber länger als nothwendig ist, ergeben.

Nach jener Bedingung ist die halbe gemeinschaftliche Tangente $\mathfrak{P}a$ gleich $\frac{1}{4}$ des Kreisumfanges o, also:

$$\mathfrak{P}a = \frac{3{,}1415\,..}{2}\,Fa;$$

und folglich ist, wenn η den Winkel bezeichnet, den die gemeinschaftliche Tangente mit der Centralen bildet:

$$\cot\eta = \frac{3{,}1415\,..}{2} = 1{,}5708\,..$$

oder: $$\eta = 32^\circ\,28'\,53{,}6''.$$

Durch diesen Winkel, dessen Grösse bei zweizähnigen Rädern nicht überschritten werden darf, sind die beiden grössten Grundkreise ω, o bestimmt, die den Schenkel $\mathfrak{P}a$ tangiren.

Die von den Punkten Δ', Δ in dem Rade Fp beschriebenen Pascal'schen Curven d', d sind in bekannter Weise gezeichnet. Um z. B. einen Punkt y auf d' zu erhalten, ziehen wir von einem Punkte x des Kreises k_F eine Gerade nach dem Punkte L', der Δ' symmetral gegenüberliegt, und machen auf dieser Geraden $xy = \Phi F$.

---

[1]) Reuleaux hat in seiner *Kinematik* S. 349 anstatt der epi-hypocycloidischen Verzahnung der Kapselräder des Payton'schen Wassermessers Evolventen-Verzahnung genommen.

Analog ergiebt sich vermittelst des zu Δ symmetrischen Punktes $\mathfrak{L}$ die andere Pascal'sche Curve d. Von diesen beiden Curven bilden die Theile $L'd'\sigma'$, σJ, welche durch einen kurzen Bogen $\sigma\sigma'$ des Axenkreises i_F verbunden sind, die übrige theoretische Begrenzung des Zahnes. Um aber mehr freiere Bewegung zu gewinnen, wird es zweckmässig sein, die Zahnspitzen Δ', L' ein wenig abzurunden. Beginnt die durch äussere gleiche Zahnräder vermittelte Drehung in der Pfeilrichtung, dann springt in der gezeichneten Stellung der Eingriff von a nach α und durchläuft während jeder halben Umdrehung die Gerade αa beständig in derselben Richtung αa.

106. **Die Marcus'sche Saug- und Druckpumpe**[1]. Bei diesem in Fig. **248** dargestellten Kapselräderwerke ist in sehr vortheilhafter Weise die innere Verzahnung angewendet. Das Rad Fo greift in das innen verzahnte Rad $\Phi\omega$, welches von einer cylindrischen Kapsel umschlossen ist. Zwischen den Scheiteln der Zähne beider Räder ist ein Abschlussstück M an die hintere Kapselwand geschraubt, und beiderseits kreiscylindrisch geformt, so dass die Zähne beider Räder mit den Scheiteln dicht anschliessend an diesem Abschlussstücke M entlang gleiten. In der hinteren Kapselwand münden zwei Röhren R_d, R_s, durch welche Zu- und Abfluss der Flüssigkeit stattfinden kann. Durch Drehung des Rades Fo im Sinne des Pfeils tritt das Wasser vom Saugrohr R_s zwischen die Zähne und wird vermittelst der Zahnlücken beiderseits an dem Abschlussstücke M entlang dem Druckrohre R_d zugeführt; denn die zu beiden Seiten des Abschlussstückes befindlichen Räume können wegen des beständigen Eingriffes der Zähne bei K nicht communiciren. Wir haben bei den beiden Rädern Evolventenverzahnung angewandt, und die Construction der Zähne nach der Angabe in Art. 94 ausgeführt. Das Verhältniss der Uebersetzung oder das Verhältniss der Radien der beiden Rollkreise p, π ist $3:4$; das Rad Fo ist mit 12, das Hohlrad $\Phi\omega$ mit 16 Zähnen versehen, und die durch den Pol $\mathfrak{P}$ gehende Eingriffsgerade, welche von den Grundkreisen o, ω resp. in a, α berührt wird, bildet mit der Centralen $F\Phi$ einen Winkel von 60°. Der Eingriff, welcher in a beginnt und in ε aufhört, ist bei dieser Anordnung sehr günstig; denn es wird durch denselben ein dichter Abschluss bewirkt und der schädliche Raum fast vermieden.

Bei der praktischen Ausführung ist die treibende Welle des

[1] Marcus, *Deutsches Reichspatent* Nr. 21413 vom 22. Juli 1882.

Rades Fo in beiden Kapselwänden gelagert und das Hohlrad wird als Zahnring in der Cylinderwandung geführt. Soll aber die Bewegung vom Hohlrade ausgehen, dann ist der Zahnring an eine Scheibe zu befestigen, deren Welle in der vorderen Kapselwand gelagert ist und durch diese hindurch geht. Die Welle des aussen verzahnten Rades dagegen befindet sich in der hinteren Kapselwand gelagert und ragt aus dieser hervor. Sind nun an beiden Wellen z. B. Kurbeln angebracht, so kann bei dieser Anordnung die Bewegung entweder von dem einen oder dem anderen Rade ausgehen.

107. **Roots'scher Ventilator II.** Die zweizähnigen Räder des in Fig. **249** dargestellten auch von Roots ausgeführten Kapselräderwerkes[1]) sind in der allereinfachsten Weise profilirt, so dass bei diesen Rädern nur der Kopfkreisbogen mit dem entsprechenden Fusskreisbogen schliessend in gleitende Berührung tritt. Behufs der Construction der Zähne machen wir auf der Centralen ΦF die gleichen Strecken ΦL, $F\Delta$ gleich $\frac{1}{3}$ von ΦF, beschreiben um Φ, F resp. die Kreise $\varkappa$, k und γ, c, welche sich beziehlich in den Punkten Δ, L berühren und von der Centralen aus in je vier gleiche Theile getheilt sind; ferner construiren wir das Stück $\mathsf{B}\lambda\Delta$ der Pascal'schen Curve, die der von B ausgehende Punkt L des Rades Fp in dem anderen Rade $\Phi\pi$ erzeugt, indem wir auf der von einem Punkte x des Kreises $\varkappa$ nach Δ gehenden Geraden die Strecke $xy = \Phi F$ machen, und anderseits zeichnen wir das symmetrische Curvenstück $\mathsf{B}'\lambda'\Delta'$, welches durch die betreffenden Theilpunkte B', Δ' begrenzt wird. Hierdurch erhalten wir die seitliche theoretische Begrenzung des Zahnes, innerhalb welcher der Zahn beliebig geformt werden kann. Um eine möglichst tiefe Zahnlücke zu bekommen, haben wir die Strecke FL möglichst gross, gleich $\frac{2}{3}F\Phi$, genommen. Bei noch grösserem Abstande des Punktes L von F würde die von L beschriebene Pascal'sche Curve λ sich der Symmetralgeraden des Zahnes zu sehr nähern und dadurch der Zahn zu schwach werden. Wenn die so bestimmten Kapselräder durch zwei äussere gleiche Zahnräder gemäss der Pfeilrichtung in Drehung versetzt werden, dann strömt die vom Austrittscanal her zwischen die Zähne eingeschlossene Luftmenge durch die bei B entstehende Oeffnung nach

[1]) *Specification* Nr. 1181 vom 23. April 1867, und *Deutsches Reichspatent* Nr. 1444 vom 7. December 1877. — Praktische Ausführungen dieses Roots-schen Ventilators sind angegeben in *Institution of Mechanical Engineers*. 1877. p. 92.

dem Eintrittscanal zurück, und während der ersten Vierteldrehung gleitet der Viertelkreis $\Delta\Delta'$ des Zahnkopfes an dem Viertelkreise JJ' des Lückenbodens, wobei der Eingriffspunkt auf der Centralen im Berührungspunkte ruht. Bei der folgenden Vierteldrehung findet der analoge Vorgang wechselseitig statt. Das Volumen der von den Zähnen eingeklemmten zurückgetriebenen Luftmenge ist gleich der Summe der beiden gleichen Volumina, welche in einer Zahnlücke beiderseits von der radialen ebenen Fläche und der trochoidischen Cylinderfläche umschlossen wird. Hiernach ist, wenn wir die Differenz der Dichtigkeiten jener zurückgeführten Luftmenge und der zufliessenden Luft unbeachtet lassen, das theoretische Förderungsvolumen, welches einer Umdrehung entspricht, gleich dem eines Zahnringcylinders, dessen Grundfläche durch den Kopfkreis und Fusskreis begrenzt wird, und dessen Höhe gleich der Breite des Zahnes ist.

Bei den nach dieser Verzahnung in Fig. **250** ausgeführten einzähnigen Kapselrädern können die Fusskreise k, γ beliebig klein genommen werden und bis auf die Mittelpunkte Φ, F zusammenschrumpfen, so dass in diesem Grenzfalle das theoretische Förderungsvolumen gleich dem eines vollständigen Kropfcylinders ist.

Denken wir uns γ und k als fest mit der umschliessenden Kapsel verbundene Cylinder, um welche die Zähne $\Delta\Delta' B' B$ und $LL'J'J$ rotiren, so werden wir durch eine solche Anordnung zu der Construction des folgenden theoretisch interessanten Kapselräderwerkes geleitet, welches sich von dem vorhergehenden principiell unterscheidet.

108. **Der Behrens'sche Motor.** Bei diesem in Fig. **251** gezeichneten, von Behrens[1]) erfundenen Kapselräderwerke sind die vorhin betrachteten Zähne, welche um die hier mit kreisförmigen Ausschnitten versehenen festen Cylinder γ, k rotiren, an seitliche Kreisscheiben befestigt, so dass diese gleichsam den nicht vorhandenen Radboden ersetzen. Der wesentliche und principielle Unterschied dieser Kapselräder von allen übrigen besteht nun darin, dass die Schliessung der Räder nicht, wie bisher, durch Cylinderflächen, welche sich in Linien, sondern durch Kreiscylinderflächen, die sich in Flächen berühren, bewirkt wird; denn die Zahnkopffläche berührt beim Durchgange die ganze Fläche des coaxialen Ausschnittes des betreffenden festen Cylinders. Dem

---

[1]) *Bericht über die Weltausstellung zu Paris* 1867. Wien. 1869. B. II. S. 124. *Propagation industrielle.* 1867. T. II. p. 116.

zufolge findet hier eine dichtere Schliessung statt, so dass dieses Kapselräderwerk als Motor beziehlich als rotirende Dampfmaschine gebraucht werden kann. Diese Schliessung wird sich jedoch wegen der Abnutzung nicht dauernd erhalten, um für einen höheren Dampfdruck zu genügen; daher wird dieses theoretisch interessante, aber schwierig herzustellende Kapselräderwerk wohl schwerlich als Motor Eingang in die Praxis finden.

Die Zähne können seitlich beliebig begrenzt sein, denn es ist nur nothwendig, dass die Zähne ungehindert an einander vorbeigehen und dass, bevor der eine Zahn einerseits den Cylinderausschnitt verlässt, der andere Zahn anderseits den Cylinderausschnitt schon erreicht hat. In unserer Zeichnung haben wir die Zähne in bekannter Weise durch die symmetrischen Pascal'schen Curven begrenzt, welche von den diametralen Spitzen des einen Zahnes in dem anderen erzeugt werden, weil dadurch der entstehende schädliche Raum möglichst klein wird. Die beiden Zahnspitzen Δ, L erreichen gleichzeitig die Ausschnitte der festen Cylinder; und die in diesem Momente von den Zähnen und Ausschnitten umschlossene Dampfmenge wird durch die im Sinne der Pfeile weitergehende Drehung nach dem Eintrittscanal zurückgeführt. Das Volumen derselben vergrössert sich, wie man leicht anschaulich erkennt, bis die beiden Zahnspitzen gleichzeitig die Centrale passiren, und verkleinert sich in dem Momente, wenn die beiden Zahnspitzen Δ, L die Cylinderausschnitte durchschritten haben, wieder bis auf seine ursprüngliche Grösse. Demnach wird bei dieser Maschine in dem schädlichen Raume auch keine Pressung eintreten, wenn dieselbe als Wasserpumpe benutzt wird. Um die Einklemmung des Dampfes oder Wassers z. B. an der Stelle BL zu vermeiden und um eine freiere Bewegung zu erhalten, müssen die Zahnspitzen stets abgestumpft werden, und dem entsprechend muss auch die cylindrische Umschliessung des Kropfes über die verticalen Raddurchmesser hinausragen.

109. **Die Greindl'sche Pumpe.** Nach der Roots'schen Verzahnung, bei welcher die wesentliche Profilirung aus je zwei concentrischen Kreisen besteht, ist auch die in Fig. **252** dargestellte Greindl'sche rotirende Pumpe[1]) construirt; jedoch mit der Abänderung, dass die Zähnezahlen der beiden äusseren treibenden

[1]) Vergl. *Polyt. Journal.* B. 212. S. 454. 1874 und B. 238. S. 380. 1880, ferner *Deutsches Reichspatent* Nr. 2253 vom 19. October 1877. Praktische Ausführungen findet man in *Institution of Mechanical Engineers.* 1878. p. 440.

Zahnräder nicht gleich sind, sondern in dem Verhältnisse 1 : 2 stehen, und dass dem zufolge auch die Drehungen der Kapselräder Fp, $\Phi\pi$, sowie die betreffenden Theilkreise π, p sich wie 1 : 2 verhalten. Dem zweizähnigen Kapselrade Fp entspricht somit ein einzähniges Kapselrad $\Phi\pi$. Die Construction dieser Räder wird in folgender Weise ausgeführt. Wir beschreiben um Φ, F beziehlich die beiden Kreise $\varkappa$, k, die sich auf der Centralen ΦF in einem Punkte Δ etwa in der Mitte derselben berühren, zeichnen die verschlungene Trochoide JdL, die der Punkt Δ des Rades $\Phi\pi$ von J ausgehend in dem Rade Fp erzeugt und anderseits im Punkte L auch von der Centralen begrenzt wird. Hierauf beschreiben wir um Φ, F resp. die Kreise γ, c, die sich in L berühren, zeichnen die verschlungene Trochoide $\mathsf{B}\lambda\Delta$, welche der Punkt L des Rades Fp von B ausgehend im anderen Rade $\Phi\pi$ erzeugt und nach Δ führen muss, weil die beiden Zahnspitzen L, Δ bei der Rotation im Schnittpunkte A der Kreise $\varkappa$, c coincidiren. Zu der Curve JdL construiren wir die symmetrische Curve $J'd'L'$, so dass der hierdurch begrenzte Zahn eine genügende Stärke erhält; machen den Winkel $\Delta\Phi\Delta' = 2 . LFL'$, und zeichnen zu der Curve $\mathsf{B}\lambda\Delta$ ebenfalls die symmetrische Curve $\mathsf{B}'\lambda'\Delta'$. Hiernach sind die Zähne nebst ihren theoretischen Umgrenzungen, durch welche der schädliche Raum möglichst klein wird, bestimmt; sie können innerhalb dieser seitlichen Umgrenzungen zwar beliebig profilirt werden, jedoch nur mit Vergrösserung des schädlichen Raumes. Es müssen die Zahnlücken aber stets über die seitliche theoretische Umgrenzung hinaus ausgehöhlt werden, damit beispielsweise die in der gezeichneten Radstellung von $\mathsf{B}'\lambda'L'L$ umschlossene Wassermenge bei L' vorbeigehen kann und keine störende Pressung erleidet. Bei der Drehung dieser Kapselräder in der gezeichneten Pfeilrichtung fliesst die momentan eingeklemmte Wassermenge durch die bei J entstehende Oeffnung zurück, und die Schliessung wird durch die auf einander gleitenden Kreisbögen LL', $\mathsf{B}\mathsf{B}'$ bewirkt, bis die Zahnspitze Δ' den Kreis k in J' berührt. Von diesem Momente an beginnt das Zurückfliessen der von Neuem eingeklemmten Wassermenge und die Schliessung durch die auf einander gleitenden Kreisbögen $J'kJ_1$, $\Delta'\varkappa\Delta$.

Diese beiden theilweise auf einander gleitenden Kreise k, $\varkappa$ sind in unserer Figur von gleicher Grösse, weil wir ihren Berührungspunkt in der Mitte der Centralen ΦF annahmen. Der Zahnspitze Δ entspricht die gleichzeitig in der Centralen befindliche

Zahnspitze L, und in diesem Punkte L, den wir als Schnitt der Centralen mit der von Δ im Rade Fp beschriebenen Trochoide d erhalten, berühren sich die beiden anderen theilweise auf einander gleitenden Kreise c, γ. Legen wir die Spitze Δ näher an F, so rückt dem gemäss auch die entsprechende Spitze L näher an Φ, dadurch wird der Zahnring und mit diesem auch die Förderungsmenge vergrössert, und der Grenzfall tritt ein, wenn L mit Φ zusammenfällt. Je kleiner aber der Bogen $\mathsf{B}\mathsf{B}'$ im Verhältnisse zu dem Bogen LL' ist, desto mehr wird der erstere durch die Gleitung abgenutzt und die Dichtung der Schliessung verringert; deshalb ist es zweckmässig, Δ nicht zu nahe an F, sondern in der Mitte der Centralen ΦF anzunehmen.

Um die gegenseitige Lagenbeziehung der entsprechenden Punkte Δ, L besser zu überschauen, denken wir uns in Fig. **253** mit den beiden rotirenden Kapselrädern $\Phi\pi$, Fp beziehlich die radialen Geraden $\Phi\varphi$, Ff verbunden, die bei ihrer Rotation gleichzeitig von der Centralen ΦF ausgehen, und zeichnen die vom Schnittpunkte A dieser rotirenden Geraden erzeugte Curve $\alpha\alpha'$, indem wir für verschiedene Lagen von f den Winkel $\mathfrak{P}\Phi\varphi = 2 \,.\, \mathfrak{P}Ff$ machen. Diese Curve $\alpha\alpha'$, von der wir jedoch nur einen Theil $\mathfrak{P}\alpha$ gebrauchen, ist nach Art. 32 eine Hyperbel, für welche der Pol $\mathfrak{P}$ und der Punkt F die beiden Scheitel sind, und Φ ein Brennpunkt ist. Beschreiben wir um Φ, F von einem beliebigen Hyperbelpunkte A aus bis an die Centrale die Kreisbögen $A\Delta$, AL, so sind Δ, L zwei entsprechende Punkte; denn die beiden in A coincidirenden Punkte der Kapselräder haben gleichzeitig die Centrale durchschritten. Oder nehmen wir den Punkt Δ beliebig auf der Centralen an, dann bestimmt der Keisbogen ΔA den Hyperbelpunkt A und der Kreisbogen AL den entsprechenden Punkt L. Ist insbesondere, wie in unserer Figur, der Punkt Δ die Mitte von ΦF, also $\Phi F = 2 \,.\, \Phi A$, so muss, weil auch der Winkel $\mathfrak{P}\Phi\varphi = 2 \,.\, \mathfrak{P}Ff$ ist, in dem Dreieck ΦAF der Winkel an der Ecke A ein rechter sein, und demnach ist der Winkel $\mathfrak{P}\Phi f = 60^\circ$, und der Winkel $\mathfrak{P}Ff = 30^\circ$. In diesem besonderen Falle ergiebt sich somit der entsprechende Punkt L einfach, indem wir FL gleich der von F an den Kreis ΔA gelegten Tangente FA machen. Der um F durch Φ gezogene Kreisbogen ΦA_g liefert auf der Hyperbel den Schnittpunkt A_g und der um Φ beschriebene Kreisbogen $A_g\Delta_g$ bestimmt für jenen genannten Grenzfall den Punkt Δ_g, dem der mit Φ zusammenliegende Punkt L_g entspricht.

FÜNFTER ABSCHNITT.

Von der Stützung und der zwangläufigen Bewegung der Gebilde in der Ebene.

Stützung der Gebilde in der Ebene.

110. **Definitionen.** Eine ebene Figur, bei der wir Undurchdringlichkeit voraussetzen wollen, und deren jedwede Begrenzung wir also als widerstandsfähig betrachten, soll ein ebenes undurchdringliches Gebilde oder auch kurz Gebilde genannt werden. Wir nehmen nun an, ein ebenes undurchdringliches Gebilde sei gezwungen, innerhalb einer festen Ebene eine Bewegung zu vollziehen, die wir conplane Bewegung nennen, dann wird die volle Freiheit der Bewegung in dieser Ebene beschränkt, wenn in derselben ein anderes ebenes undurchdringliches Gebilde festliegend vorhanden ist; denn da wir die Gebilde als undurchdringlich voraussetzen, so werden dem bewegten Gebilde durch das festliegende bestimmte Bewegungen verwehrt. Befindet sich das bewegte Gebilde mit dem festliegenden in steter Berührung, dann wird dies Berühren derselben das Stützen genannt. Das festliegende Gebilde heisst das stützende und wird auch als Stütze bezeichnet. Der jeweilige gestützte Berührungspunkt des bewegten Gebildes heisst der Stützpunkt desselben und der entsprechende stützende Berührungspunkt des festliegenden Gebildes wird der Stützenpunkt genannt. Von einem Punkte, der gezwungen ist sich auf einer vorgeschriebenen Linie, Curve oder Geraden, zu bewegen, sagen wir: er bewege sich zwangläufig. Wird die Bewegung eines Gebildes durch Stützung derart beschränkt, dass die Punkte desselben bestimmte Linien beschreiben, dann befindet sich das Gebilde in zwangläufiger Bewegung. Die Aufgabe der Theorie der Stützung ist: die Bedingungen aufzusuchen, welche

erstens für die Festlegung, zweitens für die Zwangläufigkeit eines Gebildes erforderlich sind.[1])

111. **Beschränkung der Beweglichkeit des ebenen Gebildes durch eine einzige Stütze.** Jede unendlich kleine conplane Bewegung eines ebenen Gebildes kann angesehen werden als eine unendlich kleine Drehung um einen Pol, die aber in eine unendlich kleine Parallelbewegung resp. Verschiebung übergeht, wenn der Pol im Unendlichen liegt. In Fig. **254**, Taf. XIX, ist das gestützte Gebilde IAB vom Stützpunkte I aus durch den Winkel AIB, und die Stütze $1\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ vom stützenden Punkte 1 aus durch den Winkel $\mathfrak{A}1\mathfrak{B}$ begrenzt. Stösst nun das Gebilde IAB mit dem Scheitelpunkte I gegen den Scheitelpunkt 1 der Stütze und ist $A'IB'$ der Scheitelwinkel von AIB, so wird dem Scheitelpunkte oder Stützpunkte I durch die Stütze jede Bewegung verwehrt, deren Richtung von I ausgehend innerhalb des Winkels $A'1\mathfrak{B}$ liegt. Das Feld, welches alle Richtungen enthält, in denen keine Bewegung erfolgen kann, wird in Fig. **254** von dem Schenkel IA' des Scheitelwinkels $A'IB'$ und dem Schenkel $1\mathfrak{B}$ des Stützenwinkels $\mathfrak{A}1\mathfrak{B}$ eingeschlossen. Das genannte Feld wird also von den äussersten Schenkeln des Scheitelwinkels $A'IB'$ und des Stützenwinkels $\mathfrak{A}1\mathfrak{B}$ begrenzt. Wenn in Fig. **255** der Stützenwinkel $\mathfrak{A}1\mathfrak{B}$ von dem Scheitelwinkel $A'IB'$ überspannt wird, dann ist jenes Feld von dem Scheitelwinkel eingeschlossen, und es ist unabhängig von dem Stützenwinkel. Wird dagegen in Fig. **256** der Scheitelwinkel $A'IB'$ von dem Stützenwinkel $\mathfrak{A}1\mathfrak{B}$ überspannt, dann ist jenes Feld durch den Stützenwinkel begrenzt und unabhängig von dem Winkel AIB des gestützten Gebildes.

Damit wir eine Uebersicht über die möglichen Drehungen des Gebildes IAB erhalten, ziehen wir in Fig. **254** durch den gemeinsamen Scheitel auf AI, $\mathfrak{B}1$ resp. die Normalen $a_I a_1$, $\mathfrak{b}_I \mathfrak{b}_1$, nennen die Drehung im Sinne des Uhrzeigers eine Rechtsdrehung, die entgegengesetzte eine Linksdrehung, und bezeichnen dieselben beziehlich mit r, l. Um alle Punkte dieser beiden Normalen können beiderlei Drehungen erfolgen, die sich noch durch ihre endliche und unendlich kleine Grösse unterscheiden. Wenn diese Unterscheidung, weil wir in der Folge nur unendlich kleine Bewegungen betrachten, auch nicht nothwendig

[1]) Die Grundlagen für die Lehre von der Stützung sind von Reuleaux in seiner *Kinematik*, Cap. III, und umfassender von Beck im *Civilingenieur*, 1876. B. XXII. S. 571 gegeben. Vergleiche auch die Bemerkung von Rittershaus daselbst. 1875. B. XXI. S. 438.

ist, so wollen wir doch bemerken, dass um alle Punkte auf Ia_I, so wie um alle Punkte auf $I\mathfrak{b}_1$ die Linksdrehungen nur unendlich klein sein können. Die Punkte, um welche nur Rechtsdrehung möglich ist, liegen innerhalb des Winkels $a_I\mathfrak{b}_1$; daher nennen wir den von diesem Winkel eingeschlossenen Flächentheil das **Rechtsdrehungsfeld** und bezeichnen dasselbe ebenso wie den Winkel durch $a_I\mathfrak{b}_1$. Die Punkte, um welche nur Linksdrehung möglich ist, liegen innerhalb des Winkels $a_1\mathfrak{b}_I$; derselbe schliesst dem gemäss das **Linksdrehungsfeld** $a_1\mathfrak{b}_I$ ein. Von diesen Feldern sind aber die Punkte auf den begrenzenden Winkelschenkeln ausgeschlossen, insbesondere auch der Scheitelpunkt. Um alle Punkte innerhalb der beiden anderen Winkel $a_I\mathfrak{b}_I$, $a_1\mathfrak{b}_1$ können Drehungen in beiderlei Sinn stattfinden und dies ist durch $r.l$ gekennzeichnet. In Fig. **255** überspannt der Scheitelwinkel $A'IB'$ den Stützenwinkel $\mathfrak{A}I\mathfrak{B}$; demnach sind auf IA, IB die Normalen $a_I a_1$, $b_I b_1$ gezogen, und folglich ist $a_I b_1$ das Rechtsdrehungsfeld, $a_1 b_I$ das Linksdrehungsfeld. In Fig. **256** überspannt aber der Stützenwinkel $\mathfrak{A}I\mathfrak{B}$ den Scheitelwinkel $A'IB'$, daher sind auf $I\mathfrak{A}$, $I\mathfrak{B}$ die Normalen $\mathfrak{a}_I\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_I\mathfrak{b}_1$ gezogen, und es ist $\mathfrak{a}_I\mathfrak{b}_1$ Rechtsdrehungsfeld, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_I$ Linksdrehungsfeld.

Ist der Winkel AIB des gestützten Gebildes in Fig. **257** überstumpf, also einspringend, und werden auf IA, IB die Normalen $a_I a_1$, $b_I b_1$ gezogen, so erkennt man, dass dieser Fall sich wesentlich von den vorhergehenden Fällen unterscheidet; denn es kann jetzt um alle Punkte, welche innerhalb der beiden Winkel $a_I b_I$, $a_1 b_1$ liegen, keine Drehung stattfinden. Wir wollen die Flächentheile, um deren Punkte keine Drehung möglich ist, die **Stützungsfelder** nennen. Um die Punkte auf Ia_1, Ib_I und innerhalb des Winkels $a_1 b_I$ kann nur Rechtsdrehung eintreten; demnach ist $a_1 b_I$ das Rechtsdrehungsfeld. Dagegen ist um die Punkte auf Ia_I, Ib_1 und innerhalb des Winkels $a_I b_1$ nur Linksdrehung möglich; folglich ist $a_I b_1$ das Linksdrehungsfeld. Die Grösse des Stützenwinkels $\mathfrak{A}I\mathfrak{B}$, die zwischen Null und AIB variiren kann, hat auf diese Beziehungen keinen Einfluss. Wird umgekehrt AIB als die Stütze und $\mathfrak{A}I\mathfrak{B}$ als das gestützte Gebilde betrachtet, dann bleiben jene beiden Stützungsfelder bestehen. Es erfolgt aber eine Wechselung der Drehungsfelder, indem $a_I b_1$ Rechtsdrehungsfeld und $a_1 b_I$ Linksdrehungsfeld wird.

Besonders zu beachten ist der specielle Fall in Fig. **258**, bei welchem der Winkel AIB des gestützten Gebildes ein gestreckter ist, also durch eine Gerade vertreten wird. In diesem Falle theilt die mit $n_1 n_I$ bezeichnete, durch den Stützpunkt I gehende Normale der Geraden AB die Ebene in ein Rechts- und ein Linksdrehungsfeld; denn um alle Punkte auf der Seite B der Normalen ist nur Rechtsdrehung und um alle Punkte auf der Seite A ist nur Linksdrehung möglich. Dagegen können um alle Punkte auf der Normalen beiderlei Drehungen eintreten. Diese Normale wollen wir in der Folge die Stütznormale nennen. Da die Grösse des Stützenwinkels hier nicht in Betracht kommt, so ist die Stütze mit dem stützenden Punkte 1 schematisch durch eine widerstandsfähige Strecke ersetzt.

111. **Festlegung des ebenen Gebildes und Beschränkung der Beweglichkeit desselben durch mehrere Stützen.** Damit wir den Einfluss, welchen mehrere Stützen auf die Beweglichkeit des Gebildes ausüben, erkennen, ist darauf zu achten, dass um alle Punkte der Ebene, die zugleich in einem Rechtsdrehungsfelde und in einem Linksdrehungsfelde liegen, keine Drehung möglich ist, und dass alle Ebenentheile, welche von ungleichnamigen Drehungsfeldern überdeckt sind, Stützungsfelder werden, um deren Punkte also keine Drehung stattfinden kann. Der besseren Uebersicht wegen wollen wir anfangs die Winkel, welche Stützungsfelder einschliessen, durch einen ausgezogenen Bogen kennzeichnen.

In Fig. **259** befinden sich zwei entgegengesetzte Stützen 1, 2 in den Scheiteln der Einkerbungen oder der einspringenden Winkel $A_I I B_I$, $A_{II} II B_{II}$ des Gebildes, dessen vollständige Stützung oder Unbeweglichkeit in diesem Falle durch die Anschauung erkannt wird. Um dies aber theoretisch zu begründen, ziehen wir auf die Schenkel des Winkels $A_I I B_I$, so wie auf die Schenkel des Winkels $A_I II B_{II}$ die entsprechend bezeichneten Normalen $a_I a_1$, $b_I b_1$ und $a_{II} a_2$, $b_{II} b_2$. Vermöge des Stützpunktes I sind $a_I b_I$, $a_1 b_1$ Stützungsfelder, und vermöge des Stützpunktes II sind $a_{II} b_{II}$, $a_2 b_2$ Stützungsfelder. Der Winkelraum $a_I a_{II}$ wird vollständig überdeckt von dem Linksdrehungsfelde $a_I b_1$ und dem Rechtsdrehungsfelde $a_{II} b_2$. Ebenso wird der Winkelraum $b_I b_{II}$ vollständig überdeckt von dem Rechtsdrehungsfelde $a_1 b_I$ und dem Linksdrehungsfelde $a_2 b_{II}$. Demnach ist die ganze Ebene in ein Stützungsfeld verwandelt und das Gebilde durch die beiden Stützen in den Einkerbungen festgelegt. Analog ergiebt sich in Fig. **260** die Unbeweglichkeit des Gebildes $I\ II$, bei welchem die beiden Stützen $\mathfrak{A}_1 1 \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_2 2 \mathfrak{B}_2$ mit Kerben versehen sind.

Betrachten wir in gleicher Weise die Stützung in Fig. **261**, so ergiebt sich, dass um alle Punkte innerhalb des stärker schraffirten Dreiecks, welches von den Normalen Ia_I, IIa_2, IIb_{II} gebildet wird, Linksdrehung möglich ist, während im Uebrigen die ganze Ebene in ein Stützungsfeld verwandelt ist. Demnach ist in diesem Falle das Gebilde nicht vollständig festgestützt. In Fig. **262**, wo $IA_I \parallel IIA_{II}$ ist, geht jenes Dreieck in die Normale IIa_2 über; es ist also hier noch unendlich kleine Linksdrehung um alle Punkte auf IIa_2 und wegen der symmetrischen Gestaltung unendlich kleine Rechtsdrehung um alle Punkte auf Ia_1 möglich. Aber im Bezug auf den unendlich fernen Punkt dieser Normalen erhalten wir endliche Verschiebung des Gebildes.

Nehmen wir an, es seien in Fig. **263** zunächst nur die beiden Stützen 1 und 2 vorhanden, dann würden noch das Rechtsdrehungsfeld $a_{II} i_I I a_1$ und das Linksdrehungsfeld $a_I i_{II} II a_2$ bestehen bleiben, weil der übrige Ebenentheil Stützungsfeld ist. Um aber auch diese beiden Drehungsfelder in Stützungsfelder zu verwandeln und somit das Gebilde festzulegen, ist noch gegen $B_I B_{II}$ eine dritte Stütze 3 erforderlich, so dass die zugehörige Stütznormale $n_3 n_{III}$ zwischen i_I, i_{II} liegt. Geht diese Stütznormale durch den Punkt i_I, so ist noch eine unendlich kleine Rechtsdrehung um diesen einzigen Punkt i_I möglich; geht sie durch i_{II}, so kann noch unendlich kleine Linksdrehung um den einzigen Punkt i_{II} stattfinden. Liegt dagegen die Stütznormale $n_3 n_{III}$ ausserhalb $i_I i_{II}$, dann wird eins von jenen Drehungsfeldern nicht mehr gänzlich in Stützungsfeld verwandelt.

In Fig. **264** sind drei Stützen 1, 2, 3 gegen das Gebilde gerichtet, welches in den Stützpunkten keine Einkerbungen besitzt. Die zugehörigen Stütznormalen $n_1 n_I$, $n_2 n_{II}$, $n_3 n_{III}$ bilden ein Dreieck $i' i'' i'''$, welches nur von Rechtsdrehungsfeldern überdeckt ist. Da aber alle Punkte ausserhalb dieses Dreiecks im Stützungsfelde liegen, so ist nur um die Punkte dieses Dreiecks Rechtsdrehung möglich. Bringen wir in Fig. **265** noch eine vierte Stütze 4 derart an, dass jenes dreieckige Rechtsdrehungsfeld von dem zu dieser vierten Stütze gehörenden Linksdrehungsfelde bedeckt wird, dann ist das Gebilde vollständig gestützt, und dadurch festgelegt.

Gehen in Fig. **266** die drei Stütznormalen $n_1 n_I$, $n_2 n_{II}$, $n_3 n_{III}$ durch einen Punkt $\mathfrak{P}$, und sind sie derart gelegen, dass mit Ausnahme dieses Punktes die ganze Ebene in Stützungsfeld verwandelt wird, dass also jenes Dreieck in einen Punkt $\mathfrak{P}$ zusammenschrumpft, so kann nur um diesen einzigen Punkt $\mathfrak{P}$ beiderlei Drehung stattfinden. Denn bei jeder einzelnen Stütze ist um jeden Punkt der zugehörigen Stütznormalen sowohl in dem einen als in dem anderen Sinne Drehung möglich. Um auch in diesem Falle die Festlegung zu erreichen, sind in Fig. **267** noch zwei Stützen 4 und 5 erforderlich, die so angebracht werden müssen, dass der Punkt $\mathfrak{P}$ in ungleichnamigen, diesen beiden Stützen entsprechenden Drehungsfeldern liegt. Im Allgemeinen kann also, wenn keine Einkerbungen vorhanden sind, das Gebilde durch vier zweckmässig angeordnete Stützen festgelegt werden.

In Fig. **268** sind die beiden Stützen 1, 2 parallel und gleichgerichtet; dagegen ist die dritte parallele, zwischen den beiden Stütznormalen $n_1 n_I$, $n_2 n_{II}$ gelegene Stütze 3 entgegengesetzt gerichtet. Hierdurch wird die ganze Ebene mit Ausnahme des unendlich fernen Schnittpunktes der drei parallelen Stütznormalen $n_1 n_I$, $n_2 n_{II}$, $n_3 n_{III}$ zum Stützungsfelde. Demnach kann nur noch Verschiebung des Gebildes senkrecht zu den Stütznormalen in beiderlei Sinn stattfinden; und die Vermeidung dieser Verschiebung erfordert zwei neue, zweckmässig anzubringende Stützen.

Steht den beiden parallelen gleichgerichteten Stützen 1, 2, wie in Fig. **269** gezeichnet ist, eine eingekerbte Stütze 3 gegenüber, dann ist das Gebilde, welches hier durch ein Dreieck vertreten wird, fest gelegt. Bei dem Dreieck, Fig. **270**, sind die Stützen durch die vier Stützenpunkte 1, 2, 3, 4 ersetzt, die gleichsam als Repräsentanten eingeschlagener Stifte betrachtet werden können. Die beiden Stützenpunkte 3, 4 sind jener eingekerbten Stütze äquivalent. Das Dreieck ist somit durch die vier Stützenpunkte festgelegt.

Das Parallelogramm, Fig. **271**, ist durch vier Stützenpunkte unbeweglich gemacht. Jedes Stützenpunktpaar 1, 2 und 3, 4 kann auch durch eine äquivalente eingekerbte Stütze ersetzt werden. Anders kann diese Stützung auch durch zwei Stützenpunkte bewirkt werden, welche sich, Fig. **272**, innerhalb gegenüberliegender Ecken des Parallelogramms befinden. Auch durch drei Stützenpunkte, Fig. **273**, ist das Parallelogramm festgelegt. Bei der in Fig. **274** gewählten Lage der vier Stützenpunkte 1, 2, 3, 4, bleibt noch ein Rechtsdrehungsfeld übrig, welches durch stärkere Schraffur gekennzeichnet ist. Dieses Rechtsdrehungsfeld kann aber durch zweckmässige Anbringung eines fünften Stützenpunktes vertilgt werden.

112. **Sonderfälle der Stützung eines ebenen Gebildes.** Das in Fig. **275** gezeichnete Gebilde, welches theilweise durch die Kreisbögen f, l, deren Mittelpunkte resp. F, L sind, convex begrenzt wird, ist vermittelst der vier Stützen 1, 2, 3, 4 festgelegt. Werden

aber bei diesem Gebilde in Fig. **276** anstatt der Stützen 1, 2 und 3, 4 die mit der concaven Seite stützenden Kreisbögen φ, λ angenommen, deren Mittelpunkte beziehlich Φ, Λ sind, und deren Stütznormalen entgegengerichtet in einer Geraden $I\ II$ zusammenfallen, dann treten besondere Beziehungen auf, die wir noch betrachten wollen. Zunächst folgt aus der Anschauung, dass das gezeichnete Gebilde um alle Punkte der Strecke FL beiderlei endliche Drehungen vollziehen kann; dagegen sind um alle anderen Punkte der unendlichen Geraden $\Phi\Lambda$ nur beiderlei unendlich kleine Drehungen möglich. Unter diesen letzten Punkten befinden sich aber zwei ausgezeichnete Punkte $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$, die beim Uebergange der Strecke $I\ II$ über die Gerade $\Phi\Lambda$ als Pole auftreten, wenn das Gebilde so bewegt wird, dass f an φ und gleichzeitig l an λ gleitet. Bei dieser Bewegung können erstens die beiden Berührungspunkte oder Gleitpunkte vor jenem Uebergange während der Bewegung nach einer Seite von $\Phi\Lambda$ gelegen sein, und zweitens kann der eine rechts, der andere links von $\Phi\Lambda$ liegen. Dem ersten Falle entspricht der ausserhalb der Strecke $I\ II$ befindliche Pol $\mathfrak{P}^I$, dem zweiten Falle der innerhalb dieser Strecke liegende Pol $\mathfrak{P}^{II}$. Infolge dieser Bewegung beschreiben die Punkte F, L resp. die Kreisbögen f', l', deren Mittelpunkte beziehlich Φ, Λ sind. Es sind demnach $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$ auch die Pole für den zweiartigen Uebergang der Strecke FL über die Gerade $\Phi\Lambda$, und diese Pole, welche nach S. 114 zu den beiden Punktpaaren ΛF, ΦL harmonisch liegen, können, wie dort gelehrt wurde, in folgender Weise construirt werden. Wir beschreiben über ΛF als Durchmesser einen Kreis k, ferner einen durch ΦL gehenden beliebigen Kreis $\mathfrak{k}$, der k in zwei Punkten G, H schneidet, ziehen die gemeinschaftliche Secante GH bis zum Schnittpunkte O auf der Geraden $\Phi\Lambda$, bestimmen den Berührungspunkt T einer von O an k gelegten Tangente; dann schneidet der um O mit dem Radius OT beschriebene Kreis die Gerade $\Phi\Lambda$ in den Polen $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$ Aus dieser Bestimmung der Pole $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$ ersehen wir, dass dieselben imaginär werden, wenn einer von den Punkten Φ, L innerhalb und der andere ausserhalb der Strecke $F\Lambda$ liegt. Bei den in Fig. **277** und **278** dargestellten Fällen kann sich demnach das Gebilde nicht in der Weise bewegen, dass die Kreise f, l resp. an φ, λ gleiten, auch nicht endliche Drehungen vollziehen, sondern die Bewegung des Gebildes ist somit auf unendlich kleine Drehungen um alle Punkte der unendlichen Geraden $\Phi\Lambda$ beschränkt. Gehen in Fig. **277** die Kreisbögen φ, λ in parallele

Gerade über, befinden sich also die Kreismittelpunkte Φ, Λ im Unendlichen, dann sind die Pole $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$ wieder reell, liegen aber beide ebenfalls im Unendlichen, und demnach ist, wie auch die Anschauung ergiebt, die senkrecht zu $I\,II$ gerichtete endliche Parallelbewegung des Gebildes möglich. Endliche Drehungen können aber nicht auftreten, wenn die Summe der Radien $FI + LII > I\,II$ ist. Gehen in Fig. **278**, wo $FI + LII < I\,II$ ist, die Kreisbögen φ, λ in parallele Gerade über, dann kann ausser der endlichen Parallelbewegung noch endliche Drehung um alle Punkte der Strecke FL stattfinden.

Zwangläufige Bewegung der Gebilde in der Ebene.

113. **Die Erzeugung zwangläufiger Bewegung.** Gleitet das conplan bewegte ebene Gebilde S in Fig. **279**, Taf. XX, an zwei Stützencurven γ_1, γ_2, und wird von der umgrenzenden Curve c des bewegten Gebildes S die Hüllbahncurve γ_3 in dem stützenden Gebilde Σ erzeugt, die wir auch als Stützencurve betrachten, so schneiden sich die drei betreffenden Stütznormalen $n_1 1$, $n_2 2$, $n_3 3$ in dem veränderlichen Pol $\mathfrak{P}$ des bewegten Gebildes. Sind nun diese Stütznormalen beständig so gelegen und gerichtet, dass die ganze Ebene mit Ausnahme des Pols in Stützungsfeld verwandelt wird, dann ist die durch diese Stützung eingeschränkte Bewegung des Gebildes zwangläufig. Werden die Stützencurven durch drei Stützenpunkte 1, 2, 3, wie Fig. **280** zeigt, ersetzt; ist also die theilweise das bewegte Gebilde S begrenzende Curve c identisch mit der Bahn, welche der ruhende Stützenpunkt 3 im Gebilde S beschreibt, dann ist auch, wenn dasselbe an den Punkten 1, 2 hingleitet, in diesem Falle bei Erfüllung jener weiteren Bedingung die Bewegung des Gebildes zwangläufig. Die Zwangläufigkeit besteht selbstverständlich gegenseitig; denn betrachten wir das Gebilde S als fest, so ist auch umgekehrt Σ zwangläufig beweglich gegen S.

Ist in Fig. **281** das bewegte Gebilde S durch eine starre gerade Strecke AB vertreten, deren Endpunkte A, B sich im ruhenden Gebilde Σ beispielsweise auf einer Ellipse ε bewegen, so erzeugt diese Strecke eine von der Ellipse umschlossene Hüllbahncurve γ. Dieselbe wird constructiv punktweise bestimmt, indem wir die zu den Punkten A, B gehörenden Ellipsennormalen

$A\mathfrak{P}$, $B\mathfrak{P}$ ziehen, die sich im Pol $\mathfrak{P}$ der bewegten starren Strecke schneiden und von $\mathfrak{P}$ auf AB das Loth $\mathfrak{P}C$ fällen; dann ist der Fusspunkt C der Berührungspunkt, den die Strecke AB mit der Hüllbahncurve γ bildet. Die drei beständig durch den veränderlichen Pol $\mathfrak{P}$ gehenden Stütznormalen $A\mathfrak{P}$, $B\mathfrak{P}$, $C\mathfrak{P}$ sind, wenn die Länge AB eine bestimmte Grenze nicht überschreitet, stets so gelegen und gerichtet, dass die ganze Ebene mit Ausnahme des Pols in Stützungsfeld verwandelt wird. Das durch die Strecke AB vertretene Gebilde S bewegt sich demnach zwangläufig zwischen der Ellipse ε und der Hüllbahncurve γ.

In Fig. **282** ist derselbe Fall dargestellt, nur mit dem Unterschiede, dass das bewegte Gebilde S durch ein Rechteck $ABB'A'$ ersetzt ist. Die von der Rechtecksseite $A'B'$ erzeugte Hüllbahncurve γ' ist die Aequidistante von jener Curve γ (Fig. **281**); denn, wenn wir vom Pol $\mathfrak{P}$ auf $A'B'$ das Loth $\mathfrak{P}C'$ fällen, so ist der Fusspunkt C' der Berührungspunkt, den $A'B'$ mit der Hüllbahncurve γ' bildet. Das Rechteck bewegt sich demnach aus dem obigen Grunde zwangläufig zwischen der Ellipse ε und der Hüllbahncurve γ'. Wird aber das Rechteck mehr und mehr breiter genommen, so tritt der Fall ein, dass die Hüllbahncurve γ' die Strecke $A'B'$ an der anderen Seite berührt und als Stützencurve unbrauchbar wird, und damit hört dann auch die Zwangläufigkeit auf.

Gleitet in Fig. **283** eine starre Curve c an den beiden Stützpunkten 1, 2 entlang, und soll jeder Punkt dieser Curve c, z. B. der Punkt III, sich in der Curve selbst bewegen, so muss die Curvennormale des Punktes III durch den Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der Stütznormalen $n_1 1$, $n_2 2$ gehen, und eine Curve, deren sämtliche Normalen durch einen einzigen Punkt $\mathfrak{P}$ gehen, ist ein Kreis, der, wenn $\mathfrak{P}$ im Unendlichen liegt, in eine gerade Linie übergeht. Demnach sind die Kreislinie und die gerade Linie die einzigen ebenen Linien, welche in sich selbst bewegt werden können.

Bei dem ringförmigen Gebilde S in Fig. **284** ist auf vier verschiedene Weisen durch drei Stützen zwangläufige kreislinige Bewegung erreicht. Die drei Stütznormalen schneiden sich in dem ruhenden Pol, dem gemeinsamen Mittelpunkte $\mathfrak{P}$ der beiden begrenzenden Kreise, und sind so gelegen, dass durch sie die ganze Ebene mit Ausnahme des Pols in Stützungsfeld verwandelt wird. Das ringförmige Gebilde rotirt also um den festen Mittelpunkt $\mathfrak{P}$. Die Praxis erfordert aber selten das Minimum der Stützpunkte, sondern meistens zur grösseren Sicherung der Bewegung möglichst viele Stützpunkte. In Fig. **285** wird die Stützung des rotirenden ringförmigen Gebildes S durch einen vollen Kreis bewirkt; in Fig. **286** bewegt sich ein Stück S des ringförmigen Gebildes zwischen concentrischen Kreisen, und Fig. **287** stellt eine Modification dieses Falles dar. Werden die beiden stützenden Kreise unendlich gross, gehen sie also in parallele Gerade über, dann erhalten wir den Specialfall, in welchem das Gebilde S eine geradlinige Bewegung in dem stützenden Gebilde Σ vollzieht.

114. **Kinematische Elementenpaare und Gliederpaare.** Die Gesamtheit aller Oberflächentheile des einen festen Körpers, die während der ganzen Bewegung mit einem anderen festen Körper in Berührung kommen, heisst ein kinematisches Element; und die zwei zusammengehörigen Elemente dieser beiden Körper bilden ein kinematisches Elementenpaar[1]). Sind zwei Körper, die auch als Glieder bezeichnet werden, durch Stützung zwangläufig gegen einander beweglich, bewegen sich also die Punkte des einen Gliedes im Bezug auf das andere in bestimmten krummen oder geraden Linien, so wird das betreffende kinematische Elementenpaar ein zwangläufiges genannt, und die beiden Körper heissen ein zwangläufiges Körperpaar oder Gliederpaar. Die genannten Oberflächentheile, welche ein kinematisches Element bilden, können sich in theoretischer Hinsicht sowohl auf Punkte als auf Linien reduciren. Die bewegten Körper oder Glieder werden bei der theoretischen Betrachtung oft durch starre geometrische Gebilde ersetzt, welche dieselbe gegenseitige Beweglichkeit besitzen, sich aber auch gegenseitig durchdringen können; und diese Gebilde werden dann als Systeme bezeichnet.

Betrachten wir die in einer Ebene gegenseitig zwangläufigen, undurchdringlichen ebenen Gebilde S, Σ als die senkrechten Querschnitte zweier cylindrischer Körper, die wir ebenfalls mit S und Σ bezeichnen wollen, so bilden die während der Bewegung in Berührung tretenden Cylinderflächen das betreffende Elementenpaar; und die beiden Körper, welche ausser der cylindrischen Umgrenzung, sofern die Beweglichkeit dadurch nicht beschränkt wird, noch im Uebrigen beliebig gestaltet sein können, bilden das zwangläufige Gliederpaar.

---

[1]) Diese Definition wurde von Schadwill gegeben in den *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen*. 1876. Jahrg. 55. S. 386. Die von Reuleaux in seiner *Kinematik*, S. 46, gewählte Benennung, kinematisches Element für Glied oder Körper, ist unzulässig, weil die Unterscheidung zwischen kinematisches Element und Glied unentbehrlich ist.

Ist die gegenseitige zwangläufige Bewegung zweier Glieder S, Σ derart, dass ein Punkt D des Gebildes S dieselbe Linie im Gliede Σ beschreibt, wie ein zu Σ gehörender Punkt Δ, der mit D zusammentrifft, im Gliede S, so werden die betreffenden Elemente niedere zwangläufige Elemente, im anderen Falle höhere zwangläufige Elemente genannt. Bei einem niederen zwangläufigen Elementenpaar erfolgt demnach keine Aenderung des Bewegungsvorganges, wenn man das eine oder das andere Glied als ruhend betrachtet, wenn also die Bewegung umgekehrt wird. Der Einfachheit wegen sagen wir auch kurz: zwei Glieder sind resp. durch eine niedere Paarung, oder durch eine höhere Paarung verbunden.

115. **Gliederpaare mit niederen zwangläufigen kinematischen Elementen.** Das in Fig. **288** dargestellte Gliederpaar besitzt als Elemente zwei Rotationscylinderflächen. Es dreht sich beispielsweise ein mit Ansätzen versehener Vollcylinder in einem Hohlcylinder. Derselbe Kreis δ, den ein Punkt D des Gliedes S im Bezug auf das ruhende Glied Σ erzeugt, wird gleichzeitig im entgegengesetzten Sinne auch von dem Punkte Δ des Gliedes Σ, der mit D zur Coincidenz gelangt, in dem anderen Gliede S beschrieben. Denken wir uns ferner den Kreis δ zu dem rotirenden System S gehörend, so erzeugt derselbe im ruhenden System Σ einen identischen Kreis; es bewegt sich daher der Kreis δ in sich selbst. Anstatt durch die beiden Rotationscylinderflächen können die kinematischen Elemente zur Hervorbringung der betrachteten kreislinigen zwangläufigen Bewegung durch zwei entsprechende beliebige Rotationsflächen vertreten sein. Ein aus Rotationsflächen oder aus Theilen derselben bestehendes zwangläufiges Elementenpaar nennen wir eine Drehpaarung.

Bei dem in Fig. **289** gezeichneten Gliederpaare, welches als kinematische Elemente prismatische Flächen besitzt, ist das Hohlprisma S auf dem Vollprisma Σ und dieses in jenem verschiebbar. Ein Punkt D des Hohlprismas beschreibt gegen das als ruhend angenommene Vollprisma Σ eine den Kanten parallele Gerade δ; und dieselbe Gerade wird auch von dem zu Σ gehörenden Punkte Δ, der mit D zusammentrifft, im Bezug auf S erzeugt. Betrachten wir die Gerade δ z. B. zu dem System S gehörend, so erzeugt sie im System Σ eine identische Gerade, und bewegt sich also in sich selbst. Ein aus Prismenflächen oder Theilen derselben bestehendes Elementenpaar oder auch ein in anderer Weise gebildetes Elementenpaar, welches geradlinige

Parallelbewegung bewirkt, nennen wir eine **Richtpaarung**. Die Drehpaarung und die Richtpaarung sind bei der ebenen Bewegung die beiden einzigen zwangläufigen Gliederverbindungen durch niedere Elementenpaare; denn die Kreislinie und die gerade Linie sind die einzigen ebenen Linien, die sich in sich selbst bewegen können.

Bei der räumlichen Bewegung giebt es noch ein einziges niederes zwangläufiges Elementenpaar, welches aus Schraubenflächen oder Theilen derselben besteht, und dessen zugehöriges Gliederpaar durch Schraube und Schraubenmutter vertreten wird. Das eine Glied vollzieht gegen das andere eine zwangläufige räumliche Bewegung; die Punkte des einen Gliedes beschreiben im Bezug auf das andere Schraubenlinien. Bei der Behandlung in der Ebene wird dieses Elementenpaar, welches wir Schraubenpaarung nennen, nur als Hülfsmittel zur Erzeugung ebener Bewegung in Betracht kommen.

116. **Gliederpaare mit höheren zwangläufigen kinematischen Elementen.** a) Bogenzweieck in einem gleichseitigen Dreieck. Das Charakteristische der höheren Elementenpaare besteht nach der vorhin gegebenen Definition darin, dass zwei Punkte, die beziehlich den beiden gepaarten Gliedern angehören und bei der Bewegung coincidiren können, in diesen Gliedern verschiedene Bahnen durchlaufen, dass also die Bewegung verschieden ist, wenn wir das eine oder das andere Glied als ruhend betrachten. Wir wollen nun in der Folge einige zwangläufige Gebilde betrachten, die Repräsentanten solcher Gliederpaare sind, denen höhere zwangläufige Elementenpaare angehören.

In Fig. **290** ist ein Bogenzweieck HJ dargestellt, welches sich zwangläufig in einem stützenden gleichseitigen Dreieck $\mathfrak{ABC}$ bewegt, dessen Seitenmitten mit $\mathfrak{m}_a$, $\mathfrak{m}_b$, $\mathfrak{m}_c$ bezeichnet sind. Dieses Bogenzweieck wird aus zwei congruenten Kreisbögen gebildet, deren Radius gleich der halben Dreieckshöhe ist; und der Mittelpunkt des einen dieser Kreisbögen liegt in der Mitte des anderen Bogens. In der gezeichneten symmetrischen Lage des Bogenzweiecks ist die Mitte von $\mathfrak{m}_a\mathfrak{m}_b$ oder die Mitte von der Höhe $\mathfrak{m}_c\mathfrak{C}$ der Mittelpunkt E für den Bogen HDJ, der $\mathfrak{AB}$ in der Mitte $\mathfrak{m}_c$ berührt. Ferner ist der mit $\mathfrak{m}_c$ coincidirende Punkt D der Mittelpunkt des Bogens HEJ, der mit seinen Enden H, J die anderen Dreiecksseiten berührt. Lassen wir zunächst, um die Zwangläufigkeit des Gebildes nachzuweisen, die beiden Bogen HDJ, HEJ resp. an den Dreiecksseiten $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{AC}$ gleiten, dann bewegt sich die Bogenmitte E auf der Geraden $\mathfrak{m}_a\mathfrak{m}_b$ und die Bogenmitte D auf der Geraden $\mathfrak{m}_c\mathfrak{m}_a$, weil $\mathfrak{m}_a\mathfrak{m}_b$ zu $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{m}_c\mathfrak{m}_a$ zu $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ parallel ist. Wenn aber zwei Punkte D, E des Gebildes sich auf Geraden bewegen, die sich in einem Punkte $\mathfrak{m}_a$ schneiden, so rollt nach Art. 18 der durch $DE\mathfrak{m}_a$ gehende Kreis des Gebildes in einem festen um $\mathfrak{m}_a$ beschriebenen Kreise von doppelter Grösse. In der gezeichneten Lage ist $\mathfrak{m}_c\mathfrak{m}_a$ der Durchmesser des rollenden Kreises. Sein Mittelpunkt i, der Schnitt von HJ und $\mathfrak{m}_c\mathfrak{m}_a$, bildet mit den Punkten $\mathfrak{m}_a$, J ein gleichseitiges Dreieck. Es ist demnach, wie man leicht ersieht, der Radius iJ des rollenden Kreises gleich $\frac{1}{3}HJ$ und der um $\mathfrak{m}_a$ mit doppeltem Radius beschriebene feste Kreis geht durch $\mathfrak{m}_c$, $\mathfrak{m}_b$. Alle Punkte des rollenden Kreises bewegen sich in diesem Falle bekanntlich auf Geraden, die durch $\mathfrak{m}_a$ gehen, und da auch die Ecke J auf diesem Kreise liegt und sich in der Dreiecksseite $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ befindet, so bewegt sich auch J in derselben. Die in Fig. **292** für eine beliebige Lage des Bogenzweiecks HJ gezeichneten Stütz, normalen $1\mathfrak{P}$, $2D$, $3E$ schneiden sich beständig in dem betreffenden Pol $\mathfrak{P}$ des bewegten Gebildes und sind stets so gelegen, dass sie die ganze Ebene bis auf den Pol in ein Stützungsfeld verwandeln. Demnach ist die Bewegung des Bogenzweiecks in dem gleichseitigen Dreieck zwangläufig. Aus der Symmetrie der Beziehungen folgt dann, dass die Polbahn durch das Bogendreieck $\mathfrak{m}_a\mathfrak{m}_b\mathfrak{m}_c$ vertreten wird und die Polcurve $DhEi$ ein Bogenzweieck ist, bei welchem der Mittelpunkt des einen Bogens in der Mitte des anderen liegt. Bei der gezeichneten Lage in Fig. **292** rollt der Bogen DhE an dem Bogen $\mathfrak{m}_c\mathfrak{m}_b$. Bei fortgesetzter Bewegung rollt der Bogen EiD an dem Bogen $\mathfrak{m}_b\mathfrak{m}_a$, ferner DhE an $\mathfrak{m}_a\mathfrak{m}_c$ u. s. w. Bis zum Wiederbeginn der Rollung von DhE an $\mathfrak{m}_c\mathfrak{m}_b$, also während einer Periode, treten sechs Bewegungsarten auf.

Wenn ein Kreis in einem anderen von doppelter Grösse rollt, beschreiben die Punkte des bewegten Systems im Allgemeinen Ellipsen. Demnach besteht die Bahn eines mit dem bewegten Bogenzweieck verbundenen Punktes aus sechs Ellipsenstücken, die insbesondere zu geraden Strecken oder zu Kreisbögen degeneriren können; und bei jedem Uebergange der Rollung von einem Bogen auf den anderen bewegt sich der Punkt aus einem Ellipsenstücke in ein anderes.

Die beiden Punkte D, E bewegen sich auf den Seiten des Dreiecks $\mathfrak{m}_a\mathfrak{m}_b\mathfrak{m}_c$. In diesem besonderen Falle sind alle sechs Ellipsenstücke in gerade Strecken ausgeartet, von denen je zwei eine Seite dieses Dreiecks bilden. Die beiden Ecken H, J durchlaufen bestimmte Strecken auf den Seiten des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und drei Ellipsenstücke, welche, wie die Fig. **290** zeigt, die geradlinigen Bahnstrecken verbinden; somit besteht die dreitheilig symmetrische Bahn dieser Ecken aus drei geraden Strecken und drei Ellipsenstücken. Besonders ausgezeichnet ist noch die Bahn der beiden Punkte h, i; denn sie besteht aus drei congruenten Kreisbögen, deren Mittelpunkte resp. $\mathfrak{m}_a$, $\mathfrak{m}_b$, $\mathfrak{m}_c$ sind, und aus drei geradlinigen Ansätzen. Es degeneriren hier also drei Ellipsenstücke zu Kreisbögen und drei Ellipsenstücke gehen in Geradenstücke über. Diese drei betrachteten in Fig. **290** gezeichneten Bahnen können gleichsam als Typen der mannigfaltig gestalteten von den Punkten des Bogenzweiecks beschriebenen Bahnen angesehen werden.

Bei der Umkehrung der Bewegung, also bei festgehaltenem Bogenzweieck HJ in Fig. **292** und bewegtem Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, rollt das Bogendreieck $\mathfrak{m}_a\mathfrak{m}_b\mathfrak{m}_c$ auf dem Bogenzweieck $DhEi$. Wenn aber ein Kreis mit seiner inneren Seite auf einem halb so grossen Kreise rollt, dann beschreiben die Punkte des bewegten Systems nach Art. 19 Pascal'sche Curven und die auf dem rollenden Kreise liegenden Punkte erzeugen insbesondere Kardioiden. Es sind demnach die Bahnen der mit dem bewegten Dreieck verbundenen Punkte aus sechs Stücken von Pascal'schen Curven zusammengesetzt; und in besonderen Fällen können diese Stücke in Kardioidenbögen und Kreisbögen übergehen. Bewegen wir in Fig. **291** die Ecke $\mathfrak{C}$, durch welche die beiden Kreise $\mathfrak{m}_c\mathfrak{m}_a$, $\mathfrak{m}_c\mathfrak{m}_b$ gehen, nach rechts, dann rollt der Bogen $\mathfrak{m}_c\mathfrak{m}_b$ auf dem Bogen DhE und $\mathfrak{C}$ beschreibt den entsprechenden Kardioidenbogen $\mathfrak{C}\mathfrak{C}^1$. Bei fortgesetzter Bewegung rollt der Bogen $\mathfrak{m}_b\mathfrak{m}_a$ auf dem Bogen EiD und $\mathfrak{C}$ durchläuft das Stück $\mathfrak{C}^1\mathfrak{B}$ einer Pascal'schen Curve. Hierauf rollt der Bogen $\mathfrak{m}_a\mathfrak{m}_c$ auf dem Bogen DhE, und da der Punkt $\mathfrak{C}$ auf dem Kreise $\mathfrak{m}_a\mathfrak{m}_c$ liegt, so ist das entsprechende Stück $\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2$ seiner Bahn ein Kardioidenbogen. Die weitere Bewegung erzeugt die andere Hälfte dieser viertheilig symmetrischen Bahn, welche somit aus vier Stücken von Kardioiden und zwei Stücken von Pascal'schen Curven zusammengesetzt ist. Der Punkt $\mathfrak{m}_a$, der Mittelpunkt für den Bogen $\mathfrak{m}_b\mathfrak{m}_c$, durchläuft, während dieser Bogen auf DhE rollt, den Kreisbogen $\mathfrak{m}_a J\mu$; er durchläuft ferner bei der Rollung von $\mathfrak{m}_a\mathfrak{m}_c$ und $\mathfrak{m}_a\mathfrak{m}_b$ auf DiE resp. die Kardioidenbogen $\mathfrak{m}_a E'$ und μD. In diesem Falle besteht die viertheilig symmetrische Bahn des Punktes $\mathfrak{m}_a$, die auch zugleich Bahn der beiden Punkte $\mathfrak{m}_\mathfrak{b}$, $\mathfrak{m}_\mathfrak{c}$ ist, aus vier Kardioidenbögen und zwei Kreisbögen.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Bogenmitten des rollenden Bogendreiecks $\mathfrak{m}_\mathfrak{a}\mathfrak{m}_\mathfrak{b}\mathfrak{m}_\mathfrak{c}$, und betrachten wir den Punkt $\mathfrak{b}$ von i ausgehend, so entsteht, während die Bogenhälfte $\mathfrak{b}\mathfrak{m}_\mathfrak{c}$ auf $\imath D$ rollt, der Kardioidenbogen $i\mathfrak{b}$ seiner Bahn; und weiter wird bei der Rollung des Bogens $\mathfrak{m}_\mathfrak{c}\mathfrak{m}_\mathfrak{b}$ auf DhE von $\mathfrak{b}$ das Bahnstück $\mathfrak{b}\beta$ erzeugt, welches ein Stück einer Pascal'schen Curve ist. Der Curventheil $i\mathfrak{b}\beta$ bildet ein Viertel der viertheilig symmetrischen Bahn, und demnach besteht dieselbe aus vier Stücken von Pascal'schen Curven und zwei Kardioidenstücken, welche zu der Verbindungsgeraden ihrer Rückkehrpunkte h, i symmetrisch liegen. Diese vom Punkte $\mathfrak{b}$ durchlaufene Bahn ist zugleich auch die Bahn der beiden anderen Bogenmitten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$.

Die gegenseitigen Bewegungen bleiben bestehen, wenn wir in Fig. **293** das Bogenzweieck $DHEJ$ mit äquidistanten Kreisbögen umziehen, deren Mittelpunkte D, E, H, J sind, und das gleichseitige umschliessende Dreieck $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ dem gemäss entsprechend vergrössern. Hierdurch wird der Vortheil erreicht, dass jetzt beständig nur Kreisbögen und nicht mehr scharfe Ecken an den Seiten des Dreiecks gleiten; denn bei dem zugehörigen Gliederpaare wird hierdurch die Abnutzung vermindert. Die Zwangläufigkeit wird in den betrachteten Fällen durch drei Stützpunkte erreicht.

b) Reguläres Bogendreieck in einem Quadrat. In Fig. **294** ist ein reguläres Bogendreieck HJK dargestellt, welches sich zwangläufig in einem stützenden Quadrat $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ bewegt. Die Seiten des gleichseitigen Dreiecks HJK sind den Quadratseiten gleich, und je zwei Ecken sind durch einen Kreisbogen verbunden, dessen Mittelpunkt die gegenüberliegende Ecke ist. Lassen wir, um die Zwangläufigkeit des Gebildes zu beweisen, die beiden Bogen HJ, HK resp. an den Quadratseiten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ gleiten, dann bewegt sich die Ecke J auf $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und die Ecke K auf $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$. Demnach rollt der durch $JK\mathfrak{C}$ gehende, mit dem bewegten Gebilde verbundene Kreis, dessen Durchmesser JK ist, in einem doppelt so grossen Kreise $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{C}$ und dessen Radius gleich der Quadratseite ist. Bezeichnen m_h, m_i, m_k die Mitten der Seiten des Dreiecks HJK und verbinden wir je zwei dieser Mitten durch einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt die gegenüberliegende Mitte ist, so repräsentirt das Bogendreieck $m_h m_i m_k$ die Polcurve. Von jenem genannten rollenden Kreise kommt nur das Bogenstück $m_i m_k$ zur Geltung. Die Polbahn wird durch das Bogenviereck $\mathfrak{abcd}$ vertreten, welches sich ergiebt, indem wir um die Ecken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ mit dem Radius gleich der Quadratseite die betreffenden Kreisbögen beschreiben. Während die beiden Ecken J, K auf den Quadratseiten $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{CD}$ gleiten, rollt der Bogen $m_i m_k$ an dem Bogen $\mathfrak{da}$; bei fortgesetzter Bewegung rollt $m_k m_h$ an $\mathfrak{ab}$ u. s. w. Bis zum Wiederbeginn der Rollung von $m_i m_k$ an $\mathfrak{da}$, also während einer Periode treten zwölf Bewegungsarten auf. Die in Fig. **296** für eine beliebige Lage des Bogendreiecks gezeichneten Stütznormalen $1\mathfrak{P}$, $2\mathfrak{P}$, $3\mathfrak{P}$, $4\mathfrak{P}$, von denen je zwei in einer Geraden liegen, schneiden sich beständig in dem Pol $\mathfrak{P}$ des bewegten Gebildes und sind stets so gelegen und gerichtet, dass sie die ganze Ebene bis auf den Pol in Stützungsfeld verwandeln. Folglich ist die Bewegung des Bogendreiecks in dem Quadrat zwangläufig.

Die Bahn eines mit dem bewegten Bogendreieck verbundenen Punktes ist, weil während einer Periode zwölf Bewegungsarten eintreten, aus zwölf Ellipsenstücken zusammengesetzt, die insbesondere in gerade Strecken oder Kreisbögen übergehen können. Wenn in Fig. **294** der Bogen $m_k m_i$ an $\mathfrak{ab}$ rollt, beschreibt die Ecke K, weil sie auf dem Kreise $m_k m_i \mathfrak{C}$ liegt, auf der Quadratseite $\mathfrak{CD}$ eine Strecke $\mathfrak{K}\mathfrak{K}^1$, und wenn weiter $m_i m_h$ an $\mathfrak{bc}$ rollt, ein Ellipsenstück $\mathfrak{K}^1\mathfrak{K}^2$. Die Bahn der Ecke K, die zugleich auch die Bahn der beiden anderen Ecken H, J ist, wird demnach theils aus geraden Strecken, theils aus vier verbindenden Ellipsenstücken gebildet. Die Ecke m_i der Polcurve durchläuft bei der Rollung von $m_i m_k$ an $\mathfrak{da}$ auf der Geraden $\mathfrak{d}\mathfrak{C}$ die Strecke $\mathfrak{d}m_i$, ferner, während $m_k m_h$ an $\mathfrak{ab}$ rollt, den Kreisbogen $m_i \mu$, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{D}$ und dessen Radius gleich der halben Quadratseite ist; und beim Rollen von $m_h m_i$ an $\mathfrak{bc}$ beschreibt m_i auf der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{c}$ die Strecke $\mu\mathfrak{c}$. Es ist ferner noch die Bahn des Punktes h gezeichnet, der auf dem Kreise $m_k m_i$ $\mathfrak{C}$ der Mitte des Bogens $m_k m_i$ diametral gegenüberliegt. Während $m_k m_i$ an $\mathfrak{ab}$ und $m_i m_h$ an $\mathfrak{bc}$ rollt, beschreibt h resp. die gerade Strecke hh^1 und das Ellipsenstück $h^1 h^2$. Diese Bahn ist demnach aus vier geraden Strecken und acht Ellipsenstücken, von denen je zwei symmetrisch benachbart sind, zusammengesetzt. Die viertheilige Form der festen Polbahn $\mathfrak{abcd}$ bedingt die viertheilige Gestaltung der Bahnen der mit dem bewegten Bogendreieck verbundenen Punkte.

Wird umgekehrt in Fig. **295** das Bogendreieck HJK als ruhend betrachtet und das umschliessende Quadrat $\mathfrak{ABCD}$ bewegt, ist also das Bogendreieck $m_h m_i m_k$ die feste Polbahn, dann erzeugt die Quadratecke 𝔈 als Mittelpunkt des Kreisbogens 𝔞𝔡, während dieser an $m_k m_i$ rollt, einen um m_h beschriebenen Kreisbogen 𝔈𝔈'. An diesen schliesst sich, weil 𝔈 auch auf dem Kreise 𝔡𝔠 liegt, ein Kardioidenbogen 𝔈'𝔈², welcher bei der Rollung von 𝔡𝔠 an $m_i m_h$ entsteht; und weiter durchläuft 𝔈 das Stück 𝔈²𝔅 einer Pascal'schen Curve, das durch die Rollung von 𝔠𝔟 an $m_h m_k$ erzeugt wird. Diese Bahn, auf welcher sich alle vier Quadratecken bewegen, besteht somit aus drei congruenten Kreisbögen, sechs Kardioidenbögen, von denen je zwei symmetrisch sind, und aus drei congruenten Stücken einer Pascal'schen Curve. Ferner ist noch die Bahn gezeichnet, die von den vier Ecken 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 der Polcurve durchlaufen wird. Gemäss der Dreitheilung der Polbahn $m_h m_i m_k$ besitzen auch diese Bahnen eine dreitheilige Gestalt.

Die gegenseitigen Bewegungen der betrachteten Gebilde bleiben bestehen, wenn wir in Fig. **297** das Bogendreieck mit äquidistanten Kreisbögen umziehen, deren Mittelpunkte H, J, K sind, und das umschliessende Quadrat 𝔄'𝔅'𝔈'𝔇' entsprechend vergrössern. Dieses so umgrenzte Gebilde hat wie das Bogendreieck HJK die Eigenschaft, dass jede Normale an einem Punkte der Umgrenzung auch zugleich für ihren zweiten mit der Umgrenzung gebildeten Schnittpunkt Normale ist und dass diese beiden Umfangspunkte constante Entfernung besitzen. Derartige umgrenzte Gebilde werden äquidistant umgrenzte Gebilde oder auch Gebilde constanter Breite genannt.

c) Reguläres Bogendreieck in einem Rhombus. In Fig. **298**, Taf. XXI, ist das reguläre Bogendreieck HJK von einem Rhombus 𝔄𝔅𝔈𝔇 umschlossen, bei welchem der Abstand der parallelen Seiten gleich der constanten Breite des Bogendreiecks ist, und bei welchem beispielsweise die beiden Winkel an den Ecken 𝔄, 𝔈 grösser sind als die gleichen Winkel des Bogendreiecks. Dies hat zur Folge, dass das Bogendreieck, wenn z. B. die Ecke K mit 𝔈 coincidirt, eine endliche Drehung um 𝔈 resp. um K vollziehen kann. Wird die Sehne KJ aus der gezeichneten Lage um 𝔈 gedreht und senkrecht zu 𝔄𝔅 in die Lage KJ^1 gestellt, dann hört mit dieser Stellung die Drehung um 𝔈 auf, und bei der weiteren Bewegung gleiten J, K resp. auf den Rhombusseiten 𝔅𝔄, 𝔅𝔈. Beschreiben wir den durch KJ^1𝔅 gehenden Kreis p^1, dessen Durchmesser also gleich der Rhombusseite ist, ferner um 𝔅 als Mittelpunkt den durch 𝔄𝔈 gehenden Kreis $\pi_{\mathfrak{b}}$, so rollt, während die Ecken J, K sich auf jenen Rhombusseiten bewegen, der Kreis p' an dem Kreise π_b. Die Polbahn besteht demnach einen Theils aus den beiden symmetrisch gelegenen Kreisbögen $\mathfrak{A}\pi_b\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}\pi_b\mathfrak{C}$, deren Mittelpunkte beziehlich $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ sind, und anderen Theils aus den beiden Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, um welche das bewegte Bogendreieck eine endliche Drehung vollzieht. Die Polcurve wird aus den drei Kreisbögen p_h, p_i, p_k gebildet, welche mit dem Radius gleich der halben Rhombusseite beschrieben, in den Ecken H, J, K enden. Von der gezeichneten Lage des Bogendreiecks ausgehend, muss zunächst die Ecke J um $\mathfrak{C}$ bis J' gedreht werden, dann erst beginnt der Bogen p_h an π_b zu rollen. Die Bewegung ist auch hier zwangläufig, weil die Stütznormalen, welche sich im entsprechenden Pol auf der Polbahn schneiden, stets so gelegen sind, dass sie die ganze Ebene bis auf den jeweiligen Pol in Stützungsfeld verwandeln. Die gemeinsame Bahn der drei Ecken des Bogendreiecks besteht theils aus vier in den Rhombusseiten liegenden geraden Strecken, von denen je zwei in den Ecken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ zusammenstossen, und theils aus zwei Ellipsenstücken, welche diese Strecken verbinden. Demnach kommt der übrige Theil der Rhombusseiten bei der Stützung nicht zur Geltung.[1])

d) Reguläres Bogendreieck zwischen zwei Kreisbogenpaaren. Die Stützung des zwangläufigen regulären Bogendreiecks HJK kann, wie Fig. **299** zeigt, auch durch zwei Paare concentrischer Kreisbögen α, α' und β, β' hergestellt werden, deren Mittelpunkte resp. A, B sind, und deren Radiendifferenz gleich der constanten Breite des Bogendreiecks ist. Die Polbahn π besteht in dem dargestellten Falle aus drei Curvenstücken; ferner aber auch aus dem Schnittpunkte $\mathfrak{A}$ der Kreisbögen α', β', weil um $\mathfrak{A}$ eine endliche Drehung des Bogendreiecks stattfindet. Die wegen der Unterscheidung feiner gezeichnete Polcurve p ist von so complicirter Gestalt, dass dadurch der Bewegungsvorgang nicht veranschaulicht wird. Die gemeinsame Bahn der drei Ecken H, J, K besteht theils aus den vier stützenden Kreisbogenstücken, ferner aus zwei Kreisbogenstücken φ, ψ, deren Mittelpunkt $\mathfrak{A}$ ist, und aus zwei anderen Curvenstücken δ, ε. Anstatt der durch die Kreisbogenpaare gebildeten äquidistanten Stützung, kann auch durch jede andere passend gewählte äquidistante Stützung die Zwangläufigkeit des Bogendreiecks bewirkt werden.

[1]) In Reuleaux' *Kinematik*, Cap. III, sind die Bewegungen dieser Art sehr ausführlich behandelt und die mannigfaltig gestalteten Bahnen gezeichnet.

e) Reguläres Bogenfünfeck in einem Quadrat. In Fig. **300** ist ein reguläres Bogenfünfeck gezeichnet, welches von einem Quadrat umschlossen ist. Die Ecken $ABCDE$ des Bogenfünfecks sind resp. die Mittelpunkte der gegenüber liegenden Kreisbögen. Lassen wir z. B. den Kreisbogen CD an der Quadratseite $\mathfrak{AB}$ und den Kreisbogen BC an der Quadratseite $\mathfrak{BC}$ gleiten, dann bewegen sich die Ecken A, E resp. auf den gegenüber liegenden Quadratseiten $\mathfrak{CD}$, $\mathfrak{DA}$. Die vier Stütznormalen, von denen je zwei in einer Geraden liegen, schneiden sich beständig in dem Pol des bewegten Gebildes, verwandeln durch ihre Lage und Richtung die ganze Ebene bis auf den veränderlichen Pol in Stützungsfeld; und demnach bewegt sich das reguläre Bogenfünfeck zwangläufig in dem Quadrat.

f) Herzförmiges Gebilde in einem Quadrat. Um in Fig. **301** ein herzförmiges, von Kreisbögen umgrenztes Gebilde constanter Breite zu zeichnen, welches sich zwangläufig in einem Quadrat bewegt, beschreiben wir um die Mitte K der Quadratseite $\mathfrak{CD}$ ein Kreisbogenstück $H'J'$, welches die gegenüber liegende Quadratseite $\mathfrak{AB}$ in der Mitte L berührt und bezüglich KL symmetrisch begrenzt ist; dann bestimmen wir auf der Geraden KH' den Mittelpunkt m_h des Kreisbogenstückes $H'H$, welches die Quadratseite $\mathfrak{AD}$ in H berührt, und beschreiben ferner um m_h den Bogen KJ. In analoger Weise erhalten wir anderseits durch den auf $J'K$ gelegenen Mittelpunkt m_i die Kreisbögen $J'J$ und KH. Wir haben den Winkel $H'KJ'$, der zwischen 0° und 60° variiren kann, beispielsweise gleich 30° genommen. Für die Grenzfälle dieses Winkels 0° und 60° erhalten wir nach dieser Construction resp. einen vollständigen Kreis und ein reguläres Bogendreieck.

In Fig. **302** ist das herzförmige Gebilde anstatt der Kreisbögen theils von einer halben Ellipse HLJ, theils von einer zu derselben gehörenden äquidistanten Curve HKJ umgrenzt. Diese äquidistante Curve wird erhalten, indem wir die Ellipsennormalen n_1n_1', n_2n_2' gleich der grossen Axe HJ der Ellipse machen. Anstatt der Normalen kann man auch um die Ellipsenpunkte Kreisbögen mit dem Radius von der Grösse HJ nach der Seite K hingewendet beschreiben und die Curve HKJ ziehen, welche die Kreisbögen umhüllt. Die halbe Ellipse muss aber so gewählt werden, dass der Krümmungsmittelpunkt λ, der dem Ellipsenscheitel L entspricht und nach S. 94 durch die auf HL senkrechte Gerade $\mathfrak{A}\lambda$ bestimmt wird, innerhalb der Strecke LK liegt, die gleich HJ ist, dass also der Krümmungsradius $L\lambda < HJ$ ist;

denn, wenn λ über K hinausfällt, besitzt die äquidistante Curve Rückkehrpunkte, und es tritt damit eine Ueberschneidung dieser Curve ein. Dadurch würde aber die Umgrenzung des Gebildes $HLJK$ praktisch unbrauchbar für die Zwangläufigkeit, welche durch das umschliessende Quadrat $\mathfrak{ABCD}$ bewirkt wird. In gleicher Weise lassen sich mannigfache Gebilde gleicher Breite herstellen, wenn man anstatt der halben Ellipse eine andere dem Zwecke entsprechende Curve wählt. Auch dem umschliessenden innerlich gleichbreiten Gebilde kann man eine beliebige andere zweckmässige Form geben.

117. **Gliederpaare mit höheren zwangläufigen kinematischen Elementenpaaren anderer Gestalt.** Sollen sich in Fig. **303** zwei Punkte A, B eines Gebildes S auf einer Curve, z. B. auf einer Ellipse α bewegen, so kann die Zwangläufigkeit dieses Gebildes dadurch erreicht werden, dass wir in demselben um A, B resp. die gleichen Kreise a, b beschreiben, welche von den beiden Aequidistanten α', α'' der Ellipse α gestützt werden. Hierbei ist aber zu beachten, dass die gleichen Radien der Kreise a, b kleiner sein müssen als der kleinste Krümmungsradius der Ellipse α, damit die innere Aequidistante α'' keine Rückkehrpunkte enthält. Den kleinsten Krümmungsradius $\theta\mu$ erhalten wir nach S. 94 in der grossen Axe der Ellipse, wenn wir vom Schnittpunkte η der an die Ellipsenscheitel θ, τ gelegten Tangenten auf $\theta\tau$ die Senkrechte $\eta\mu$ ziehen. In diesem Falle ist das zwischen den Aequidistanten α', α'' zwangläufige Gebilde S constanter Breite von den beiden starr verbundenen Kreisen a, b umgrenzt.

In Fig. **304** ist ein äquidistant umgrenztes Gebilde S gezeichnet, welches aus zwei starr verbundenen, congruenten regulären Bogendreiecken HJK, $H'J'K'$ besteht und sich zwangläufig zwischen den beiden äquidistanten Curven $\varkappa$, $\varkappa'$ bewegt. Im dargestellten Momente bewegen sich die beiden Punkte K, K' des Gebildes resp. auf den Curven $\varkappa$, $\varkappa'$.

Um schliesslich noch ein Beispiel eines zwangläufigen Gebildes näher zu betrachten, sind in Fig. **305** zwei symmetrisch gelegene reguläre Bogendreiecke HJK, $H'J'K'$ mit einander starr verbunden. Das Bogendreieck HJK gleitet zwischen parallelen Schienen α, β und das Bogendreieck $H'J'K'$ zwischen parallelen Schienen α', β', die auf den ersteren senkrecht sind, aber, damit die Führung durch die Kreuzung hindurch ermöglicht wird, tiefere Lage haben. Dem gemäss muss auch das Bogendreieck $H'J'K'$ an der Verbindungsstange LL' mittelst eines Zapfens L' befestigt werden, der durch Einschnitte in den oberen Schienen α, β hindurch geht. Für diesen Zapfen L' ist die entsprechende Bahn λ' gezeichnet. Ferner ist noch für die Mitte M der Stange LL' die zugehörige Bahn μ construirt. Bei der praktischen Ausführung dieser Bewegung können auch die beiden Bogendreiecke beziehlich an beiden Seiten der Stange LL' befestigt werden und die Schienenpaare in parallelen Ebenen liegen, zwischen denen sich die Stange LL' bewegt. Die Bahnen der Punkte des zwangläufig bewegten Gebildes sind, wie man leicht erkennt, aus zwölf Ellipsenstücken zusammengesetzt. Während H auf β und K' auf α' gleitet, beschreibt M ein Ellipsenstück 01; während ferner, wie in der gezeichneten Stellung, H auf β und J' auf β' fortschreitet, erzeugt M das Ellipsenstück 12; während weiter K sich auf α und J' sich auf β' bewegt, durchläuft M das Ellipsenstück 23 u. s. w.

Da wir die ebenen Gebilde als die senkrechten Querschnitte cylindrischer oder prismatischer Körper betrachten, so berühren sich die betreffenden Flächen, welche die höheren Elementenpaare bilden, in geraden Linien. Bei den niederen Elementenpaaren kann die Berührung aber in Flächen stattfinden, dadurch wird die Abnutzung vermindert und eine bessere Führung erreicht; und darin besteht für die Praxis der grosse Vorzug der niederen Elementenpaare vor den höheren Elementenpaaren.

118. **Ersetzung eines höheren Elementenpaares durch niedere Elementenpaare.** Ein höheres Elementenpaar kann, wenn bei der ebenen Bewegung eines Gebildes die Bahnen zweier Punkte Kreise oder Gerade sind, durch niedere Elementenpaare ersetzt werden. Ist das Gebilde S in Fig. **306** durch ein bestimmtes höheres Elementenpaar, welches in der Zeichnung aber nicht angegeben ist, zwangläufig, und bewegen sich z. B. die Punkte F, L dieses Gebildes S auf den Kreisen φ, λ, deren Mittelpunkte mit Φ, Λ bezeichnet sind, so können wir um F, L resp. die Kreise f, l beschreiben, die dann gestützt zwischen den concentrischen Kreisen $\varphi'\varphi''$ und $\lambda'\lambda''$ gleiten. Die durch die Kreise f, l und durch die Kreisbögen $\varphi'\varphi''$, $\lambda'\lambda''$ bestimmten cylindrischen Flächen bilden somit ein zweites höheres Elementenpaar, welches jenem erstgedachten äquivalent ist. Die zwangläufige Bewegung des Gliedes S wird also auch durch das Gleiten zweier cylindrischer Zapfen in kreiscylindrischen Schlitzen bewirkt. Der Bewegungsvorgang des Gliedes S gegen das Glied Σ bleibt bestehen, wenn wir auf die dünner gewählten cylindrischen Zapfen F, L in Fig. **307** bogenförmige Schlitten a, b setzen, die in den kreiscylindrischen Schlitzen gleiten.

Demnach wird das höhere Elementenpaar vermittelst der beiden hinzugefügten Glieder a, b durch vier niedere Elementenpaare ersetzt, die alle vier Drehpaare sind. Umgekehrt können auch durch Schmälerung der Schlittenumgrenzung, wie man sagt, die Glieder a, b weggemindert werden, so dass wieder das in Fig. **306** gezeichnete höhere Elementenpaar auftritt. Die Schlitten oder Glieder a, b können auch, wie Fig. **308** zeigt, durch die Stangen a, b ersetzt werden, die sich um die festen cylindrischen Zapfen Φ, Λ drehen; und dadurch entsteht ein Gelenkviereck. Bewegen sich die Punkte F, L auf Geraden, dann bewegen sich in diesem besonderen Falle jene beiden Schlitten in geradlinigen Schlitzen, und jenes höhere Elementenpaar wird dann durch zwei Drehpaarungen und zwei Richtpaarungen ersetzt.

119. **Erklärung des Mechanismus und des Getriebes.** Werden Glieder durch Elementenpaare beweglich verbunden, so entsteht ein Mechanismus, der ein zwangläufiger Mechanismus genannt wird, wenn die gegenseitige Beweglichkeit aller Glieder zwangläufig ist. Bewegen sich insbesondere die Punkte aller Glieder des Mechanismus zwangläufig in parallelen Ebenen, dann nennen wir denselben einen ebenen zwangläufigen Mechanismus oder auch schlechtweg ebenen Mechanismus. Ein Mechanismus, bei welchem ein Glied als festgestellt betrachtet wird, heisst auch ein Getriebe[1]. Das in Fig. **306** gezeichnete Gliederpaar S, Σ, welches durch ein höheres Elementenpaar verbunden ist, bildet demnach einen zweigliederigen Mechanismus. Aus diesem Mechanismus entsteht, wenn das höhere Elementenpaar durch vier niedere Elementenpaare, wie in Fig. **307** und **308**, ersetzt wird, ein viergliederiger ebener Mechanismus, dessen Glieder durch vier Drehpaarungen verbunden sind. Ein aus zwei Gliedern resp. aus einem Gliederpaare bestehender Mechanismus heisst ein elementarer Mechanismus. Wenn die Glieder eines Mechanismus in geschlossener Reihenfolge durch Elementenpaare verbunden und alle gegen einander zwangläufig sind, dann wird derselbe ein einfacher Mechanismus genannt. Bei dem einfachen Mechanismus kann jedes Glied nur mit zwei benachbarten Gliedern durch Paarungen verbunden sein. In jedem anderen Falle, wenn ein Glied oder mehrere Glieder mit mehr als

[1] Eine abweichende Definition der Begriffe „Mechanismus" und „Getriebe" gab Hartig unter Berücksichtigung der technologischen Beziehungen zu den Begriffen „Werkzeug", „Triebzeug" und „Maschine". *Civilingenieur*. 1884. B. XXX. S. 421.

zwei Gliedern durch Paarungen verbunden sind, bezeichnen wir den Mechanismus als einen zusammengesetzten Mechanismus. Wir haben die Benennung Mechanismus der von Reuleaux[1]) gebrauchten Benennung kinematische Kette vorgezogen; denn es zeigt sich keine Veranlassung jene ältere Benennung durch eine neuere zu verdecken.

120. **Umgestaltung der Glieder eines Mechanismus.** Die Glieder eines Mechanismus können ohne Einfluss auf ihre gegenseitige Bewegung mannigfach umgestaltet werden. Um dies an einem Beispiele zu zeigen, betrachten wir den in Fig. **309** gezeichneten, viergliederigen Mechanismus, dessen Glieder a, Σ, b, S durch vier Drehpaarungen verbunden sind. Während einer Umdrehung des Gliedes a um die feste Axe Φ vollzieht das um die feste Axe Λ drehbare Glied b hin- und hergehend eine Schwingung. Durchläuft also der Punkt F den Kreis φ, dann schwingt der Punkt L auf dem Kreisbogen λ hin und her. Wird nun der cylindrische Kurbelzapfen F des Gliedes a derart erweitert, dass er die Axe Φ umfasst, dann entsteht aus dem Kurbelarm a, wie Fig. **310** zeigt, ein Excentrik, welches sich in der ebenfalls erweiterten cylindrischen Umfassung des Gliedes S drehend bewegt. Eine derartige Zapfenerweiterung bietet oft den Vortheil, dass eine Kröpfung der betreffenden Welle vermieden wird, wenn die Lager dieser Welle sich zu beiden Seiten des Gliedes S befinden. Anderseits kann auch der in Fig. **309** schraffirte Zapfen Λ des schwingenden Gliedes b so erweitert werden, dass derselbe die Axe L umfasst, wie dies in Fig. **311** dargestellt ist.

Der Punkt F beschreibt in dem Gliede b einen Kreis, dessen Mittelpunkt L ist. Dem zufolge können wir, wie Fig. **312** veranschaulicht, das Glied S durch einen bogenförmigen Schlitten ersetzen, der in F drehbar mit dem Gliede a verbunden ist und sich im Gliede b innerhalb eines zu L concentrischen kreiscylindrischen Schlitzes bewegt.[2])

121. **Eingriffspaarung, Ueberpaarung, Beharrungsschluss und Kraftschluss.** Die bisher betrachtete zwangläufige Bewegung eines Gebildes in Bezug auf ein anderes wurde durch entsprechende hinreichende Stützung bewirkt. Es kann aber der Fall eintreten, dass in besonderen Lagen des bewegten Gebildes die Stützung nicht genügt, dass infolge dessen die zwangläufige Bewegung unstetig

---

[1]) Reuleaux, *Kinematik.* S. 49.

[2]) Vergl. Reuleaux, *Kinematik.* §§ 71, 76.

oder zweideutig wird und sich sowohl in dem einen oder dem anderen Sinne vollziehen kann. Um dies zu verhindern, wird eine Anordnung getroffen, bei welcher zwei der betreffenden Gebilde oder Glieder eines Mechanismus, wenn sie in die Nähe jener Lagen gelangen, vorübergehend stützend in einander greifen, und diese zahnartige Eingriffsstützung wollen wir Eingriffspaarung nennen. Es können bei einem Mechanismus zwei nicht benachbarte Glieder, obwohl sie zwangläufig gegen einander sind, durch eine hinzugefügte Paarung verbunden werden; indem wir z. B. das eine dieser Glieder mit einem Zapfen, das andere mit einer entsprechenden Nuthe versehen, in welcher dieser Zapfen gleitet, so dass hierdurch die stete Bewegung über Unstetigkeitslagen vermittelt wird. Oder es ist in besonderen Fällen möglich, dass in einen Mechanismus, ohne die Bewegung desselben zu beeinträchtigen, ein Glied eingefügt werden kann, welches an zwei Glieder durch Paarungen angeschlossen ist und die stetige Bewegung über Unstetigkeitslagen vermittelt. Eine derartige Einrichtung nennen wir Ueberpaarung. Befindet sich ein Körper in Bewegung, so wird derselbe infolge des Gesetzes der Beharrung die Bewegung fortsetzen, wenn keine äusseren Ursachen auf ihn einwirken. Tritt nun ein bewegtes Glied in eine Unstetigkeitslage, in der also die Bewegung durch geometrische Bedingungen nicht eindeutig bestimmt ist, so wird das Glied durch das Beharrungsvermögen seine Bewegung stetig fortsetzen. Wir sagen dann, dass in derartigen Fällen die eindeutige Bewegung durch Beharrungsschluss bewirkt wird.

In manchen Fällen, wo eine hinreichende Stützung des bewegten Gebildes nicht vorhanden ist, kann diese Stützung durch eine stete Kraftwirkung ergänzt werden. Das in Fig. **313** gezeichnete Gebilde S, bei welchem der um F beschriebene Kreis f sich zwischen den bezüglich Φ concentrischen Kreisbögen φ', φ'' bewegt und die Curve c an der Curve γ gleitet, ist nur dann gegen das ruhende Gebilde Σ zwangläufig, wenn durch eine Kraftwirkung die Curve c in stetem berührenden Anschlusse an γ gehalten wird; es ist also eine Kraft erforderlich, welche die Trennung der berührenden Theile verhindert. Wir sagen daher mit Reuleaux, dass in solchen Fällen die Zwangläufigkeit durch Kraftschluss mit bedingt wird. Das höhere Elementenpaar, welches den beiden Gliedern S, Σ angehört, kann hier auch zum Theil durch zwei niedere Elementenpaare vertreten werden, welche ein drittes Glied a in Fig. **314** mit dem bewegten Zapfen F und mit dem ruhenden Zapfen Φ verbinden. Es entsteht hierdurch ein dreigliederiger Mechanismus, welcher zwei Drehpaare und ein höheres kraftschlüssiges Elementenpaar enthält. Derselbe dreigliederige Mechanismus, nur anders gestaltet, ist in Fig. **315** gezeichnet. Bei demselben drehen sich zwei Zahnräder S, Σ resp. um die Axen F, Φ, welche das Glied a trägt, und die Zahnflächen c, γ werden durch Kraftschluss in Berührung gehalten. Dieser Kraftschluss kann theoretisch dadurch vermieden werden, dass die Zähne ohne Spielraum in einander greifen; aber in der Praxis ist dies wegen der Abnutzung der Zähne nicht ausführbar. Nehmen wir nun an, es seien keine Zähne vorhanden, und es sollen die beiden Cylinder S, Σ an einander rollen, so ist, damit die Uebertragung der Bewegung von einem Cylinder auf den anderen durch Rollung ermöglicht wird, eine Zusammenpressung der Cylinder erforderlich, um Reibung zu verursachen, welche die Bewegung vermittelt. Die pressende Kraft hat hier nicht die Trennung der berührenden Cylinder zu verhüten, sondern die Reibung hervorzubringen, die als Ersatz für die stützenden Zahnflächen eintritt.

Die Praxis benutzt bei der Uebertragung der Bewegung biegsame und auch bildsame Körper in mannigfacher Art, und daher ist es nothwendig, nicht nur wie bisher ausschliesslich starre Körper als Glieder eines Mechanismus zu betrachten, sondern sowohl biegsame als bildsame Körper anzuwenden. Von den biegsamen Körpern dienen vorzugsweise Riemen und Seile u. s. w. zur Hervorbringung zwangläufiger Bewegungen. In Fig. **316** wird die zwangläufige Bewegung der beiden Kreisscheiben S, Σ, welche sich resp. um die Axen F, Φ in dem festen Gliede a drehen, durch den Treibriemen $b b'$ und dessen Reibung bewirkt. Da das Treibriemenstück, welches auf die eine Scheibe aufzieht, gleich dem Stücke ist, welches von der anderen abläuft, so verhalten sich die Drehgeschwindigkeiten der Scheiben umgekehrt wie ihre Radien, und dem zufolge ist der Schnittpunkt der beiden Kreistangenten b, b' der Pol dieser beiden Scheiben. Demnach können wir diesen Mechanismus durch einen einfachen Mechanismus ersetzen, bei welchem die Scheiben FS, $\Phi\Sigma$ durch zwei Zahnräder vertreten werden, deren Rollkreise sich in dem genannten Pol berühren. Noch in anderer, aber nicht so einfacher Weise können wir einen einfachen Mechanismus erhalten, der dieselbe Bewegung hervorbringt. Wir denken uns die Scheiben durch Zahnräder und den Riemen durch eine in dieselben eingreifende Zahnstange ersetzt, die sich in der Richtung des geradlinigen Riemenstückes b

vermittelt durch Kraftschluss, zwangläufig in dem Gliede a verschiebt, so würden wir in kinematischer Hinsicht dieselbe Bewegung erreichen. Jener durch Riemen erhaltene Mechanismus vertritt demnach diesen letzteren aus vier starren Gliedern bestehenden einfachen Mechanismus. Aber die durch den Riemen vermittelte Bewegung hat den Vortheil, dass sie fortdauernd in dem einen oder in dem anderen Sinne vor sich gehen kann, während durch die Zahnstange wegen ihrer begrenzten Länge die Bewegung in beiderlei Sinn beschränkt ist. Wir wollen aber einen Mechanismus solcher Art, dass wir ihn, wenn auch mit Anwendung des Kraftschlusses, durch einen einfachen Mechanismus ersetzen können, ebenfalls einen **einfachen Mechanismus** nennen. In dem betrachteten Falle können wir auch den Kraftschluss vermeiden und einen einfachen viergliederigen Mechanismus herstellen, wenn an jedes jener Räder eine coaxiale cylindrische Nabe angedreht wird und das Zahnstangenglied mit zwei parallelen Längsschlitzen versehen wird, die resp. über diese Naben gleiten. Es kann auch, um den Kraftschluss zu vermeiden, die Zahnstange durch eine Richtpaarung im festen Gliede a geradlinig parallel geführt werden. Durch diese Anordnung wird das feste Glied aber durch kinematische Paarungen mit drei Gliedern verbunden und der Mechanismus ist dann ein zusammengesetzter.

In Fig. 317 ist eine um die feste Axe Φ drehbare Welle Σ gezeichnet. Um den dickeren Theil derselben ist das Seil b' und um den dünneren das Seil b gewunden. An den nicht mit der Welle verbundenen, freien Enden dieser beiden Seile b, b' wirken vertikale Kräfte Q, Q', die den Kraftschluss hervorbringen. Einer vertikal abwärts gerichteten Bewegung des einen Seiles entspricht eine vertikal aufwärts gerichtete Bewegung des anderen und eine Drehung der Welle Σ. Die Seile können nur auf Zug beansprucht werden und demnach nur als Zugorgane wirken.

Um noch eine Anwendung eines bildsamen incompressibelen Körpers z. B. des Wassers hervorzuheben, sind in Fig. 318 zwei communicirende Hohlcylinder a, a' gezeichnet, in denen sich die Kolben B, B' nebst ihren Stangen b, b' ohne Drehung verschieben. Ist nun der ganze Raum beider Cylinder unter und über den beiden Kolben mit Wasser angefüllt, dann wird eine hin- und hergehende Bewegung des einen Kolbens auf den anderen übertragen, und die Wege verhalten sich umgekehrt wie die Querschnitte der Cylinder. Befindet sich das Wasser nur unterhalb der beiden Kolben, so wird die Bewegung vermittelst Kraftschlusses von einem Kolben auf den anderen übertragen. Diese Bewegung kann nur durch Druck bewirkt werden, und das Wasser tritt demnach hierbei als Druckorgan auf. Ein Analogon zu den betrachteten Uebertragungen der Bewegung (Fig. **317** und **318**) bildet der in Fig. **319** dargestellte viergliederige zusammengesetzte Mechanismus. Derselbe besteht aus einem Doppelzahnrade Σ, welches sich um die feste Axe Φ in dem ruhenden Gliede $a\,a'$ dreht, und aus zwei eingreifenden Zahnstangen b, b', die sich parallel im Gliede $a\,a'$ verschieben. Jene beiden gleichartigen Bewegungsvorgänge können wir demnach auch durch diesen Mechanismus hervorbringen, bei welchem das feste Glied $a\,a'$ durch Paarungen mit den drei Gliedern, dem Doppelzahnrade Σ und den beiden Zahnstangen verbunden ist.

Wenn wir die Körper, welche insbesondere wegen ihrer Elasticität, Biegsamkeit oder Bildsamkeit bei Vermittelung der Bewegungen angewendet werden, als f ü g s a m e K ö r p e r bezeichnen, so können die Mechanismen im weiteren Sinne auch theils aus starren, theils aus fügsamen Gliedern bestehen. In der Kinematik wird ein Mechanismus dieser Art meistens nur betrachtet, wenn derselbe durch einen entsprechenden aus starren Gliedern gebildeten Mechanismus und eventuell vermittelst Kraftschlusses theoretisch ersetzt werden kann.

SECHSTER ABSCHNITT.

Einfache ebene Mechanismen.

Einfache ebene Mechanismen mit vier Drehpaarungen. Kurbelmechanismus und Kurbelgetriebe.

122. **Die drei Hauptarten des Kurbelgetriebes.** Wenn die Glieder eines ebenen Mechanismus in geschlossener Reihenfolge durch Elementenpaare verbunden und alle gegen einander zwangläufig sind, so nennen wir denselben nach Art. 119 einen einfachen ebenen Mechanismus. Ein solcher Mechanismus kann höchstens aus vier Gliedern bestehen, die durch vier Elementenpaare in geschlossener Reihenfolge verbunden sind; denn fünf in dieser Weise verbundene Glieder vollziehen, wie man leicht erkennt, nicht mehr alle gegen einander zwangläufige Bewegungen. Das Gelenkviereck repräsentirt den einfachen ebenen Mechanismus mit vier Drehpaarungen, den wir Kurbelmechanismus nennen. Die Glieder a, b, c, d des in Fig. **320**, Taf. XXII, dargestellten Kurbelmechanismus sind in Φ, F, L, Λ durch Drehpaarungen in geschlossener Reihenfolge verbunden; und wenn eins von diesen Gliedern festgestellt wird, erhalten wir ein Kurbelgetriebe. Das festgestellt gedachte Glied a wird der Steg genannt, das gegenüber liegende bewegliche Glied c heisst die Koppel, und die anderen drehbaren Glieder b, d werden gemeinsam als die Arme bezeichnet. Jeder dieser beiden Arme wird Kurbel oder Schwinge genannt, je nachdem derselbe um seine feste Axe ringsherum oder nur hin und her drehbar ist. Das Kurbelgetriebe wird nach der Beweglichkeit seiner Arme gegen das feste Glied in drei Hauptarten getheilt:

1. Das Schwingkurbelgetriebe oder Kurbelschwinggetriebe, wenn von den beiden Armen der eine Kurbel und der andere Schwinge ist.

2. Das Doppelkurbelgetriebe, wenn beide Arme Kurbeln sind.

3. Das Doppelschwinggetriebe, wenn beide Arme Schwingen sind.

In kürzerer Ausdrucksweise werden diese drei Getriebe auch resp. Schwingkurbel, Doppelkurbel und Doppelschwinge genannt.

Die vollständige oder theilweise Drehung der Arme um die festen Axen ist durch die auf einander folgenden Abstände der Axen Φ, F, L, Λ, d. h. durch die Gliedlängen, welche zugleich durch a, b, c, d bezeichnet werden, bedingt. Um zu erkennen, welche Bedingungen die Gliedlängen erfüllen müssen, damit jene drei Getriebearten auftreten, haben wir die nachfolgenden sechs Fälle zu betrachten, bei denen wir stets voraussetzen, dass alle Gliedlängen von endlicher Grösse sind.

Ist erstens das Glied b das kleinste und das anliegende Glied a das grösste des Kurbelmechanismus, und wird vorausgesetzt, dass die Summe des kleinsten und des grössten Gliedes kleiner sei als die Summe der beiden anderen anliegenden Glieder, dass also die Bedingung:

$$a + b < c + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I)}$$

bestehe, so folgt hieraus, weil $d < a$ ist:

$$d + b < c + a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II),}$$

und weil auch $c < a$ ist:

$$c + b < a + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III).}$$

Ist zweitens wieder das Glied b das kleinste, aber das gegenüber liegende Glied d das grösste, und wird vorausgesetzt, dass die Summe des kleinsten und des grössten Gliedes kleiner sei als die Summe der beiden anderen gegenüber liegenden Glieder, dass demnach die Bedingung:

$$b + d < a + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II)}$$

bestehe, so ergiebt sich hieraus, weil $c < d$ ist:

$$b + c < a + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III),}$$

und weil auch $a < d$ ist:

$$a + b < d + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I).}$$

Es gelten hiernach in den beiden Fällen dieselben drei Bedingungen. Vermöge der Bedingung I) kann für beide Fälle in Fig. **321** und **322** das kleinste Glied b in die Verlängerung des Gliedes a gedreht werden, so dass das Dreieck $\Lambda L F$ gebildet wird. Infolge der Bedingung II) kann das Glied b in a gedreht werden, so dass in Fig. **323** und **324** das Dreieck $\Lambda L F$ entsteht; denn in diesem ist $d < c + a - b$ oder $b + d < a + c$. Demnach kann das eine der beiden Glieder c, d keine ganze Umdrehung in dem anderen vollziehen. Gemäss der Bedingung III) lässt sich das kleinste Glied b in die Verlängerung von c bringen und in Fig. **325** und **326** das Dreieck $\Lambda L \Phi$ bilden. Vermöge der Bedingung I) kann b mit c zusammenfallen, so dass in Fig. **327** und **328** das Dreieck $\Lambda L \Phi$ entsteht; denn in diesem ist $a < d + c - b$ oder $a + b < c + d$. Dem zufolge kann das kleinste Glied b ganze Umdrehungen in dem Gliede a und auch in dem Gliede c ausführen; und umgekehrt a in b, sowie c in b. Dagegen kann aber das eine der Glieder a, d keine ganzen Umdrehungen in dem anderen machen.

Wenn drittens bei der Annahme, dass b das kleinste Glied und das anliegende a das grösste sei, insbesondere die Summe des kleinsten und des grössten Gliedes gleich der Summe der beiden anderen anliegenden Glieder ist, also die Bedingung:

$$a + b = c + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I_0})$$

besteht, so ist auch, weil $d < a$, $c < a$:

$$d + b < c + a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{II})$$

beziehlich:

$$c + b < a + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{III}).$$

Wenn viertens wieder b das kleinste, aber das gegenüber liegende Glied d das grösste ist, insbesondere die Summe des kleinsten und des grössten Gliedes gleich der Summe der beiden anderen gegenüber liegenden Glieder ist, also die Bedingung:

$$b + d = a + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{II_0})$$

besteht, so folgt, weil $c < d$, $a < d$:

$$b + c < a + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{III})$$

beziehlich:

$$a + b < d + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I}).$$

Infolge der Bedingung $\mathrm{I_0}$) würde in Fig. **321** und **327** der Punkt L in die Gerade $\Phi \Lambda$ fallen, und die betreffenden Dreiecke degeneriren dann zu einer Geraden. Vermöge der Bedingung $\mathrm{II_0}$) würde in Fig. **324** und **328** der Punkt L in die verlängerte Gerade $\Lambda \Phi$ fallen; die betreffenden Dreiecke schrumpfen dann in eine Gerade zusammen. Da durch diese Sonderfälle die obigen Folgerungen nicht alterirt werden und da auch im Uebrigen dieselben Bedingungen wie vorhin bestehen, so gelten in dem dritten und vierten Falle die gleichen Beziehungen wie im ersten und zweiten Falle.

Hiernach ist in den vier betrachteten Fällen das kleinste Glied b Kurbel und das gegenüber liegende Glied d Schwinge, wenn das eine der beiden anderen Glieder a oder c festgehalten wird; dagegen sind a und c beide Kurbeln oder beide Schwingen, je nachdem das kleinste Glied b oder das gegenüber liegende d fest ist.

Wird fünftens bei der Annahme, dass b das kleinste Glied und a das grösste sei, vorausgesetzt:

$$a + b > c + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I}'),$$

so ergiebt sich hieraus, weil $c > b$:

$$a + c > b + d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{II}),$$

und weil $d > b$ ist:

$$a + d > c + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{III}).$$

Wird sechstens bei der Annahme, dass b das kleinste Glied und d das grösste sei, vorausgesetzt:

$$b + d > a + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{II}'),$$

so folgt hieraus, weil $a > b$ ist:

$$a + d > b + c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{III}),$$

und weil $c > b$ ist, auch:

$$c + d > a + b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I}).$$

Hier bleiben also im fünften Falle die beiden Bedingungen II), III), und im sechsten Falle die beiden Bedingungen III), I) bestehen.

Wegen der Bedingung I') im fünften Falle ist sowohl in Fig. **321** das Dreieck $\Lambda L F$ als in Fig. **327** das Dreieck $\Lambda L \Phi$ nicht möglich; somit kann das eine der Glieder b, a nur gegen das andere schwingen, und dasselbe gilt von den Gliedern b, c. Da hier ferner die beiden Bedingungen II), III) gelten, so besteht dem gemäss in Fig. **323** das Dreieck $\Lambda L F$ und beziehlich in Fig. **325** das Dreieck $\Lambda L \Phi$; folglich können wie vorhin auch hier die Glieder d, c, so wie die Glieder d, a nur gegen einander schwingen.

Wegen der Bedingung II') im sechsten Falle ist sowohl in Fig. **324** das Dreieck $\Lambda L F$ als in Fig. **328** das Dreieck $\Lambda L \Phi$ nicht möglich; demnach kann das eine der Glieder b, a nur gegen das andere schwingen, und dasselbe gilt von den Gliedern b, c. Da aber hier die beiden Bedingungen III), I) gelten, besteht dem zufolge in Fig. 326 das Dreieck $\Lambda L \Phi$ und beziehlich in Fig. 322 das Dreieck $\Lambda L F$; somit können wie vorhin auch hier die Glieder d, a, so wie die Glieder d, c nur gegen einander schwingen. Da hiermit alle in Betracht kommenden Fälle erschöpft sind, so folgt aus diesen Darlegungen der Grashof'sche Satz:

Der Kurbelmechanismus kann nur dann ein Schwingkurbelgetriebe oder ein Doppelkurbelgetriebe liefern, wenn die Summe der kleinsten und der grössten Gliedlänge nicht grösser als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist; und zwar wird er dann durch Feststellung des kürzesten Gliedes ein Doppelkurbelgetriebe, durch Feststellung eines der beiden diesem benachbarten Glieder ein Schwingkurbelgetriebe, bei welchem das kürzeste Glied die Kurbel ist; in allen anderen Fällen gehen Doppelschwinggetriebe aus dem Kurbelmechanismus hervor[1]).

123. **Bewegungsvorgänge bei dem Schwingkurbelgetriebe und bei dem durchschlagenden Schwingkurbelgetriebe.** Um die Bewegungsvorgänge bei verschiedenen Längenverhältnissen der Glieder des Kurbelgetriebes zu überschauen, wollen wir für die Länge a des festen Gliedes oder Steges verschiedene Grössen annehmen; aber die übrigen Gliedlängen b, c, d, von denen b die kleinste, c die grösste sein möge, als constant betrachten, und mit dem Schwingkurbelgetriebe beginnen.

Der Punkt L kann sich bei dem in Fig. 329 gezeichneten Kurbelgetriebe von Φ höchstens um die Strecke $c+b$, mindestens um die Strecke $c-b$ entfernen; und der Punkt F kann von Λ höchstens den Abstand $c+d$, mindestens den Abstand $c-d$ erhalten. Die in Fig. 329 um Φ mit den Radien $c+b$, $c-b$ beschriebenen Kreise f_{c+b}, f_{c-b} schneiden den Bahnkreis λ des Punktes L beziehlich in den Punktpaaren $L^1 \mathfrak{L}^1$ und $L^2 \mathfrak{L}^2$. Die um Λ mit den Radien $c+d$, $c-d$ beschriebenen Kreise l_{c+d}, l_{c-d} treffen aber den Bahnkreis φ des Punktes F nicht. Demnach sind bei dem betrachteten Kurbelgetriebe die Punkte L^1, L^2 auf dem Kreise λ die Bahngrenzen des Punktes L; denn L gelangt nach L^1, wenn ΦF die Lage ΦF^1 in der Geraden $L^1 \Phi$ annimmt, und nach L^2, wenn ΦF die Lage ΦF^2 erhält, also in die Verlängerung von $L^2 \Phi$ fällt. Die beiden anderen Punkte $\mathfrak{L}^1$, $\mathfrak{L}^2$ sind jedoch nur dann Grenzpunkte für die Bahn des Punktes L,

[1]) Vergl. F. Grashof, *Theoretische Maschinenlehre.* 1883. B. II. S. 117.

wenn wir uns das Kurbelgetriebe um $\Phi\Lambda$ in die Zeichnungsebene umgeklappt denken. Diese Anordnung, welche mit der in Fig. **329** gezeichneten bezüglich der Geraden $\Phi\Lambda$ symmetrisch ist, wollen wir nicht weiter in Betracht ziehen. Da die genannten Kreise l_{c+d}, l_{c-d} den Bahnkreis φ nicht schneiden, so kann das Glied b ganze Umdrehungen um Φ machen. Während dasselbe eine Umdrehung vollendet, durchschreitet der Punkt L hin- und hergehend den Bogen $L^1 L^2$ und das Glied d vollzieht eine Schwingung. In diesem Falle ist also das Glied b eine Kurbel, das Glied d eine Schwinge und dieses Getriebe ist demnach ein Schwingkurbelgetriebe.

Bewegt sich in Fig. **329ª** der Punkt F von F^1 ausgehend in der Pfeilrichtung bis F^2, dann durchschreitet der Punkt L den Bogen $L^1 L^2$, und während F seine Bewegung von F^2 bis F^1 fortsetzt, legt L den Bogen $L^2 L^1$ zurück. In den beiden Momenten, wenn F die Punkte F^1, F^2 durchschreitet, tritt für L in den entsprechenden Punkten L^1, L^2 Umkehr der Bewegung ein; und daher nennen wir die Punkte L^1, L^2 Umkehrpunkte. Denken wir uns den Punkt L von L^1 aus in die Pfeilrichtung getrieben, so kann der in F^1 befindliche Punkt F sich auf dem Bahnkreise φ in dem einen oder dem anderen Sinne bewegen. Dasselbe gilt, wenn L sich in L^2 und dem entsprechend F sich in F^2 befindet; und daher nennen wir die Punkte F^1, F^2 Wechselpunkte. Jene Umkehrpunkte und diese Wechselpunkte werden gemeinsam Todtpunkte genannt, und die entsprechenden Lagen der Koppel c heissen Todtlagen.

Ist insbesondere in Fig. **330** die Summe der beiden benachbarten Glieder gleich der Summe der beiden anderen benachbarten Glieder, also:

$$a + b = c + d,$$

dann ist auch:

$$a - d = c - b.$$

Demnach wird der Bahnkreis φ von dem Kreise l_{c+d} in F^0 und der Bahnkreis λ von dem Kreise f_{c-b} in L^0 berührt; es ist also $F^0 L^0 = FL = c$, und alle Glieder klappen in der Centralen $\Phi\Lambda$ zusammen. In diesem Falle gelangen, wenn in Fig. **330ª** der Punkt F im Sinne des Pfeilbogens rotirt, die Punkte F, L gleichzeitig nach F^0, L^0 und können die Centrale $\Phi\Lambda$ in gleicher Richtung überschreiten. Stösst aber die Koppel FL bei L^0 auf eine angebrachte Stützung, so wird, wenn F von F^1 ausgehend nach F^0 rotirt, der Punkt L den Bogen $L^1 L^0$ durchlaufen; beim Uebergang des Punktes F über die Centrale ist aber der Punkt L gezwungen in L^0 umzukehren, und während F eine ganze Umdrehung vollendet, hat sich L auf dem Bogen $L^1 L^0$ hin- und herbewegt. Das Analoge gilt in symmetrischer Anordnung auf der anderen Seite der Centralen, wenn der Uebergang des Punktes L nach oben hin verhindert wird. Bewegt sich F von $\mathfrak{F}^1$ ausgehend im Sinne des Pfeilbogens bis F^0, von dort weiter bis $\mathfrak{F}^1$, so durchschreitet L den Bogen $\mathfrak{L}^1 L^0$, ist gezwungen in L^0 umzukehren, und gelangt wieder nach $\mathfrak{L}^1$ zurück. Diese zwei Bewegungsvorgänge auf dem Bahnkreise λ sind durch die beiden äusseren Pfeilbogen veranschaulicht.

Wird der Uebergang des Punktes L über die Centrale durch Beharrungsschluss vermittelt und hierdurch die Zweideutigkeit der Bewegung an der Stelle L^0 beseitigt, so bewegt sich, wenn der Punkt F von F^1 ausgehend nach F^0 rotirt, der Punkt L von L^1 nach L^0, und beide Punkte F, L überschreiten gleichzeitig in gleichem Sinne die Centrale. Hat F weiter rotirend den Punkt $\mathfrak{F}^1$ erreicht, dann ist L nach $\mathfrak{L}^1$ gekommen, und nachdem F eine ganze Umdrehung beendet hat, also wieder in F^1 angelangt ist, befindet sich L noch auf dem Wege $\mathfrak{L}^1 L^0$. Beginnt F eine zweite Umdrehung, dann überschreiten F, L resp. bei F^0, L^0 gleichzeitig, aber in entgegengesetzter Richtung die Centrale, und nachdem F zum zweiten Male nach seiner Ausgangslage F^1 zurückgekehrt ist, gelangt dagegen L erst zum ersten Male nach seiner Ausgangslage L^1 zurück. Bei diesem Getriebe, das wir, weil der Bogen $L^1 L^0 \mathfrak{L}^1$ mit seiner convexen Seite nach dem Bahnkreise φ gewendet ist, ein **convexes durchschlagendes Schwingkurbelgetriebe** nennen wollen, macht der Punkt L auf dem Bogen $L^1 \mathfrak{L}^1$ nur einen Hin- und Hergang, d. h. nur eine ganze Schwingung, wenn die Kurbel ΦF zwei ganze Umdrehungen vollendet hat. Dieser Bewegungsvorgang ist durch den innerhalb des Bahnkreises φ gezeichneten doppelten Pfeilkreis und durch den an der Innenseite des Bahnkreises λ gezeichneten, entsprechenden Pfeilbogen veranschaulicht.

Ist in Fig. **331**:

$$b + c = a + d,$$

dann ist auch:

$$c - d = a - b.$$

Demnach wird der Bahnkreis λ von dem Kreise f_{c+b} in L^0 und der Kreis φ von dem Kreise l_{c-d} in F^0 berührt. Der Bewegungsvorgang ist dann analog dem vorigen. Ist der Punkt L

verhindert die Centrale $\Phi\Lambda$ zu überschreiten, so bewegt sich derselbe nur auf einer Hälfte des Bogens $L^2 L^0 \mathfrak{L}^2$ bis L^0 hin- und hergehend, während der Punkt F eine ganze Umdrehung vollendet. Wenn aber der stetige Uebergang des Punktes L über die Centrale durch Beharrungsschluss vermittelt wird, dann durchläuft der Punkt L den Bogen $L^2 L^0 \mathfrak{L}^2$ einmal hin- und hergehend, während der Punkt F zwei Umdrehungen beendet. Diese Bewegungsvorgänge sind in Fig. **331**ᵃ durch die entsprechenden ausserhalb, so wie innerhalb der Bahnkreise φ, λ gezeichneten Pfeile anschaulich gemacht. Dieses Getriebe nennen wir, weil der Bogen $L^2 L^0 \mathfrak{L}^2$ mit seiner concaven Seite nach dem Bahnkreise φ gewendet ist, ein concaves durchschlagendes Schwingkurbelgetriebe.

124. **Bewegungsvorgänge bei dem Doppelkurbelgetriebe und bei dem durchschlagenden Doppelkurbelgetriebe.** In Fig. **332** ist die Steglänge a so weit verkürzt, dass weder der Bahnkreis λ von den nicht gezeichneten Kreisen f_{c+b}, f_{c-b}, noch der Bahnkreis φ von den Kreisen l_{c+d}, l_{c-d} geschnitten wird. Demnach können in diesem Falle die beiden Glieder b, d ganze Umdrehungen machen und vollenden gleichzeitig eine Umdrehung. Dieses Getriebe ist also ein Doppelkurbelgetriebe, das auch in der Praxis Kurbelkuppelung genannt wird. Wenn wir die Steglänge a bis auf Null verkürzen, was im Falle $b + d > c$ möglich ist, so coincidiren die beiden Axen Φ, Λ, und wir erhalten dann ein rotirendes starres Dreieck.

Sind insbesondere in Fig. **333** die Summen der gegenüber liegenden Glieder gleich, ist also:

$$a + c = b + d,$$

so ergiebt sich hieraus auch:

$$b - a = c - d,$$
$$c - b = d - a.$$

Dem zufolge wird der Bahnkreis φ von dem Kreise l_{c-d} in F^0, der Bahnkreis λ von dem Keise f_{c-b} in L^0 berührt, und es ist $F^0 L^0 = FL = c$. In diesem Falle nennen wir das Getriebe ein durchschlagendes Doppelkurbelgetriebe. Die Bewegungsvorgänge sind hier nicht so leicht zu verfolgen, und deshalb haben wir in Fig. **334** die Polbahn π und die Polcurve p eines durchschlagenden Doppelkurbelgetriebes construirt. Die Polbahn π wird von der Centralen $\Phi\Lambda$, die Polcurve p von der Koppel FL symmetrisch getheilt; die Symmetralpunkte $\mathfrak{P}^I$, $\mathfrak{P}^{II}$, P^I, P^{II} wurden, wie wir in Art. 52 angegeben haben, bestimmt.

Der besseren Uebersicht wegen sind die entsprechenden Hälften dieser Curven beziehlich ausgezogen und gestrichelt.

Wenn der Punkt F im Sinne des Pfeiles nach F^0 rotirt, hier die Centrale überschreitet, dreht sich der Punkt L in gleichem Sinne und überschreitet an der Stelle L^0 gleichzeitig, aber in entgegengesetzter Richtung mit F, die Centrale. Während dieses Vorganges rollt der Bogen $\mathfrak{P} P^I$ der Polcurve p auf dem Bogen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}^I$ der Polbahn π, und im Momente der Ueberschreitung der Centralen treten die Punkte P^I, $\mathfrak{P}^I$ in Berührung. Bei fortgesetzter Drehung des Punktes F rollt die ausgezogene Hälfte der Polcurve auf der ausgezogenen Hälfte der Polbahn, und indem F zum zweiten Male nach F^0 gelangt, überschreitet auch L in L^0 zum zweiten Male gleichzeitig mit F in entgegengesetzter Richtung die Centrale; aber diese zweite Ueberschreitung unterscheidet sich von der ersten dadurch, dass jetzt der Punkt P^{II} der Polcurve mit dem Punkte $\mathfrak{P}^{II}$ der Polbahn in Berührung tritt. Vor der ersten Ueberschreitung hat das durchschlagende Doppelkurbelgetriebe beispielsweise die gezeichnete Gestalt $\Phi F L \Lambda$; vor der zweiten dagegen erscheint, wenn L wieder in dieselbe Lage gekommen ist, die durch Punktirung gekennzeichnete Gestalt $\Phi F^I L \Lambda$. Bewegt sich der Punkt F gleichförmig, so ist die Bewegung des Punktes L bei dem ersten Durchgange an der Stelle L^0 langsamer als bei dem zweiten. Der periodische Bewegungsvorgang des Punktes L wiederholt sich in gleicher Weise, während der Punkt F je zwei ganze Umdrehungen vollendet.

Sind bei einem Doppelkurbelgetriebe, dessen kleinstes Glied a, dessen grösstes Glied d ist, die Summen der anliegenden Glieder gleich, ist also $a + d = b + c$, so erhalten wir ebenfalls ein durchschlagendes Doppelkurbelgetriebe, dessen Bewegungsvorgänge in analoger Weise wie vorhin auftreten.

125. **Bewegungsvorgänge bei dem Doppelschwinggetriebe und bei dem durchschlagenden Doppelschwinggetriebe.** In Fig. 335 wird bei vergrösserter Steglänge a der Bahnkreis λ nur von dem Kreise f_{c+b} in den Punkten L^1, $\mathfrak{L}^1$ geschnitten; und anderseits wird der Bahnkreis φ nur von dem Kreise l_{c+a} in den Punkten F^I, $\mathfrak{F}^I$ geschnitten. Die Kreise f_{c-b}, λ und l_{c-d}, φ treffen sich aber nicht. Befindet sich die Koppel FL in der Lage $\mathfrak{F}^I\mathfrak{L}^I$, Fig. 335ᵃ, so kann, wenn F von $\mathfrak{F}^I$ aus bewegt wird, der Punkt L entweder von $\mathfrak{L}^I$ nach L^1 oder $\mathfrak{L}^1$ sich bewegen. Nehmen wir an, dass die erste Bewegung stattfindet, dann gelangt L nach L^1, wenn F den Punkt F^1 überschreitet; und während F bis F^I rotirt, durchläuft L rück-

wärtsgehend den Bogen $L^1 L^I$. Durch die entsprechenden äusseren Pfeilbogen wird diese Bewegung veranschaulicht. Bewegt sich dagegen, wenn F von $\mathfrak{F}^I$ ausgeht, der Punkt L in entgegengesetzter Richtung $\mathfrak{L}^I\mathfrak{L}^1$, so durchschreitet derselbe zunächst den Bogen $\mathfrak{L}^I\mathfrak{L}^1$, hierauf zurückkehrend den Bogen $\mathfrak{L}^1 L^I$, während F von $\mathfrak{F}^I$ nach F^I rotirt. Diese Bewegung ist durch die entsprechenden inneren Pfeilbogen schematisch dargestellt. In diesem Falle kann also jedes der beiden Glieder ΦF, ΛL nur Schwingungen machen und daher ist dieses Getriebe ein Doppelschwinggetriebe. Die Bewegung wird um so mehr beschränkt, je grösser die Steglänge a ist, und wenn $a = b + c + d$ wird, also die grösste Länge erhält, dann ist keine Bewegung möglich.

Verkleinern wir jetzt die Steglänge a, so dass in Fig. **336** nur der Kreis f_{c-b} den Bahnkreis λ in L^2, $\mathfrak{L}^2$ und ferner nur der Kreis l_{c-d} den Bahnkreis φ in F^{II}, $\mathfrak{F}^{II}$ schneidet; dann ist der Bewegungsvorgang analog wie vorhin. Befindet sich die Koppel FL in der Ausgangslage $F^{II}L^{II}$, Fig. **336a**, und bewegt sich der Punkt L, wie der äussere Pfeilbogen anzeigt, in der Richtung $L^{II}L^2$, so durchschreitet L den Bogen $L^{II}L^2$, während F nach F^2 gelangt. Hierauf bewegt sich L zurückkehrend bis $\mathfrak{L}^{II}$, wenn F nach $\mathfrak{F}^{II}$ gekommen ist. Ist dagegen die Anfangsbewegung des Punktes L, wie der innere Pfeilbogen anzeigt, nach $\mathfrak{L}^2$ gerichtet, dann durchläuft L den Bogen $L^{II}\mathfrak{L}^2$, während F von F^{II} nach $\mathfrak{F}^2$ rotirt. Hierauf bewegt sich L zurückkehrend auf dem Bogen $\mathfrak{L}^2\mathfrak{L}^{II}$ bis $\mathfrak{L}^{II}$, wenn F nach $\mathfrak{F}^{II}$ gelangt. Weil die beiden Glieder ΦF, ΛL nur Schwingungen machen können, ist auch dieses Getriebe, wie das vorige, ein Doppelschwinggetriebe. Das vorige Doppelschwinggetriebe unterscheidet sich von diesem dadurch, dass bei jenem die beiden Schwingungsbogen gegen einander convex, bei diesem aber gegen einander concav sind. Wir haben bei den beiden Doppelschwinggetrieben die kürzeste Schwinge ΦF von einer Grenzlage in die andere geführt und die beiden entsprechenden Bewegungen der grösseren Schwinge ΛL verfolgt. Wir können aber auch die grössere Schwinge ΛL von einer Grenzlage in die andere rotiren lassen, dann ergiebt sich, dass auch der Punkt F in analoger Weise zwei verschiedene entsprechende Bewegungen vollziehen kann.

In Fig. **337**, Taf. XXIII, ist ein Doppelschwinggetriebe gezeichnet, bei welchem die Koppel c das kleinste, der Steg a das grösste Glied ist, und die Summen der gegenüber liegenden Gliederpaare gleich sind, also:

$$a + c = b + d.$$

Hieraus folgt:

$$c = b + d - a = F^0 L^0,$$

und demnach erhalten wir ein **durchschlagendes Doppelschwinggetriebe**, dessen Koppel die Centrale innerhalb der Axen Φ, Λ überschreitet. Der um Φ mit dem Radius $b + c$ beschriebene Kreis f_{b+c} schneidet den Bahnkreis λ in den Punkten L^1, $\mathfrak{L}^1$, und der um Λ mit dem Radius $c + d$ beschriebene Kreis l_{c+d} trifft den Bahnkreis φ in den Punkten F^l, $\mathfrak{F}^l$. Bewegt sich F nach dem Wechselpunkte F^1, dann gelangt L nach dem Umkehrpunkte L^1, und während F sich weiter bis F^l bewegt, schreitet L umkehrend nach L^l. Wird nun F rückwärts geführt, so kann L in dem Wechselpunkte L^l sich in dem einen oder dem anderen Sinne bewegen; gleichzeitig mit F überschreitet aber L die Centrale ΦF. Auf der anderen Seite der Centralen sind die Bewegungsvorgänge symmetrisch.

Wir haben in Fig. **337** dieselben Gliedlängen wie bei dem in Fig. **334**, Taf. XXII, gezeichneten durchschlagenden Doppelkurbelgetriebe gewählt. Wir erhalten demnach, wenn wir bei diesem das Glied c feststellen und die Curve π auf der ruhenden Curve p rollen lassen, die Bewegungsvorgänge des durchschlagenden Doppelschwinggetriebes in Fig. **337**.

Bei dem in Fig. **338** dargestellten Doppelschwinggetriebe ist wieder die Koppel c das kleinste, aber der Arm d das grösste Glied, und die Summen der anliegenden Gliederpaare sind gleich. Es ist also:

$$a + b = c + d,$$

und demnach:

$$c = a + b - d = F^0 L^0.$$

In diesem Falle erhalten wir ein **durchschlagendes Doppelschwinggetriebe**, bei welchem die Centrale ausserhalb der Axen Φ, Λ von der Koppel FL überschritten wird. Der um Φ mit dem Radius $b + c$ beschriebene Kreis f_{b+c} schneidet den Bahnkreis λ in den Punkten L^1, $\mathfrak{L}^1$, und der um Λ mit dem Radius $d - c$ beschriebene Kreis l_{d-c} trifft den Bahnkreis φ in den Punkten F^l, $\mathfrak{F}^l$. Die Bewegungsvorgänge ergeben sich wie bisher aus den eingezeichneten Todtlagen der Koppel ohne Schwierigkeit.

Bei allen bisher behandelten Doppelschwinggetrieben fanden zu beiden Seiten der Centralen $\Phi\Lambda$ die Bewegungsvorgänge statt, und daher wollen wir schliesslich in Fig. **339** noch ein Doppelschwinggetriebe betrachten, dessen Bewegungsvorgänge nur an einer Seite der Centralen auftreten. Die beiden um Φ mit den Radien $b+c$, $b-c$ beschriebenen Kreise f_{b+c}, f_{b-c} bestimmen einerseits auf dem Bahnkreise λ die Schnittpunkte L^1, L^2, und die beiden um Λ mit den Radien $d+c$, $d-c$ beschriebenen Kreise l_{d+c}, l_{d-c} treffen einerseits den Bahnkreis φ in den Punkten F^I, F^{II}. Wir haben beispielsweise die beiden Arme b, d gleich lang angenommen, und daher sind die aus den eingezeichneten Todtlagen erkenntlichen Bewegungsvorgänge in diesem Falle bezüglich der in der Mitte auf $\Phi\Lambda$ senkrechten Geraden symmetrisch. Für dieses Getriebe, welches als ein gleicharmiges Doppelschwinggetriebe bezeichnet werden kann, sind in Fig. **340** die symmetrisch gestalteten Rollcurven π, p gezeichnet, von denen die Polcurve p auf der festen Polbahn π rollt. Durch die Rollcurven wird aber, wenn sie complicirt gestaltet sind, die Uebersichtlichkeit der Bewegungsvorgänge im Allgemeinen nicht gefördert[1]). In dem betrachteten Falle rollt die complicirt gestaltete Curve p auf der ruhenden Curve π. Denken wir uns diese Bewegung umgekehrt, also das Glied c festgestellt, dann geht aus diesem Mechanismus ein gleicharmiges Doppelkurbelgetriebe hervor, bei welchem die Curve π auf der jetzt festen Curve p rollt.

126. **Die dreifache Erzeugung der Koppelcurve des Kurbelgetriebes.** Die Curve, welche ein mit der Koppel verbundener Punkt im Bezug auf den Steg beschreibt, nennen wir eine Koppelcurve. Um zu beweisen, dass die Koppelcurve durch drei verschiedene Kurbelgetriebe erzeugt werden kann, müssen wir noch einige für die Folge wichtige Beziehungen ableiten, welche die Grundlage unserer Entwickelung bilden.

Wir nehmen an, es sei in Fig. **341** das Dreieck FAB ähnlich-veränderlich, die Ecke F sei fest, und die Ecken A, B seien resp. in die Lagen A', B' gelangt, so folgt, weil FAB ähnlich $FA'B'$ ist, dass auch die Dreiecke FAA', FBB' ähnlich sind; denn ihre Winkel bei F sind gleich, und für die anliegenden Seiten besteht die Proportion $FA:FB=FA':FB'$. Hieraus ergiebt sich, wenn die eine der beiden Ecken A, B eine Curve beschreibt, so durchschreitet die andere Ecke eine ähnliche Curve. Diese beiden Curven gehören zu ähnlichen ebenen Systemen, die F als selbstentsprechenden Punkt besitzen und unter dem Winkel AFB gegen einander gedreht sind.

---

[1]) Eine allgemeine analytische Behandlung der Rollcurven hat Roberts in den *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1871. Vol. III. p. 310 mitgetheilt. Vergl. auch Chasles, *Comptes Rendus*. 1876. LXXXII. p. 1876.

In Fig. **342** ist $A O_1 \Omega O_2$ ein Gelenkparallelogramm, und an die benachbarten Seiten $A O_1$, $A O_2$ sind die ähnlichen Dreiecke $O_1 F_1 A$, $O_2 A L_2$ geheftet, deren Winkel wir mit $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{o}$ bezeichnen. Wird ferner der Parallelogrammwinkel an der Ecke O_1 mit u und der Winkel $F_1 A L_2$ mit x bezeichnet, so ist:

$$x = 360^\circ - \mathfrak{f} - \mathfrak{l} - (180^\circ - u) = 180^\circ + u - (\mathfrak{f} + \mathfrak{l}),$$

$$x = 180^\circ + u - (180^\circ - \mathfrak{o}) = u + \mathfrak{o},$$

und somit der Winkel:

$$F_1 O_1 \Omega = F_1 A L_2.$$

Ferner besteht infolge jener ähnlichen Dreiecke die Proportion:

$$O_1 F_1 : O_1 \Omega = A F_1 : A L_2.$$

Demnach sind die Dreiecke $F_1 O_1 \Omega$ und $F_1 A L_2$ ähnlich, und folglich ist nach der obigen Darlegung das Dreieck $F_1 \Omega L_2$ ähnlich dem Dreieck $F_1 O_1 A$, sowie auch dem Dreieck $A O_2 L_2$. Durch Veränderung des Gelenkparallelogramms $A O_1 \Omega O_2$ erhalten wir hiermit ein ähnlich-veränderliches Dreieck $\Omega F_1 L_2$.

Ist in Fig. **343** die Axe Ω des Gelenkparallelogramms $A O_1 \Omega O_2$ fest, und führen wir den Punkt F_1 auf einer Curve φ, so beschreibt der Punkt L_2 eine ähnliche Curve λ, und beide Curven entsprechen sich in ähnlichen Systemen, die Ω als selbstentsprechenden Punkt besitzen. Wenn insbesondere φ, λ Kreise sind, deren Mittelpunkte wir resp. mit Φ, Λ bezeichnen, wenn ferner den Lagen F_1, F_1^I, F_1^{II}, .. des auf φ geführten Punktes die Lagen L_2, L_2^I, L_2^{II}, .. des auf λ bewegten Punktes entsprechen, so sind die Punktgebilde $\Omega \Phi F_1 F_1^I F_1^{II} F_1^{III}$ .., $\Omega \Lambda L_2 L_2^I L_2^{II} L_2^{III}$ .. ähnlich, und der Winkel, den die entsprechenden Radien ΦF_1, ΛL_2; ΦF_1^I, ΛL_2^I; .. bilden, ist constant gleich dem Winkel $\mathfrak{o}$.

Die Bewegung dieses Mechanismus wird nicht gehindert, wenn wir in Fig. **344** an $\Phi F_1 A$ das Gelenkparallelogramm $\Phi F_1 A F$ und an $\Lambda L_2 A$ das Gelenkparallelogramm $\Lambda L_2 A L$ anfügen. Da nun die Radien ΦF_1, ΛL_2 mit einander den constanten Winkel $\mathfrak{o}$ bilden, so ist auch der Winkel $F A L = \mathfrak{o}$; demnach ist das Dreieck $F A L$ starr und dem Dreiecke $\Phi \Omega \Lambda$ ähnlich. Infolge dieser Beziehung erhalten wir die drei Kurbelgetriebe $\Lambda \Phi F L$, $\Phi \Omega O_1 F_1$, $\Omega \Lambda L_2 O_2$ mit den ähnlichen Koppeldreiecken $F L A$, $F_1 A O_1$, $A L_2 O_2$, die in A drehbar mit einander verbunden sind, und dem festen Axendreieck $\Phi \Lambda \Omega$ ähnlich sind. Die Koppelcurve α, welche der Punkt A beschreibt, wird also gleichzeitig durch diese drei Kurbelgetriebe auf dreifache Weise erzeugt, und wir erhalten somit den interessanten Roberts'schen Satz[1]):

Vermittelst jedes der drei Kurbelgetriebe $\Lambda\Phi FL$, $\Phi\Omega O_1F_1$, $\Omega\Lambda L_2O_2$ wird vom Punkte A dieselbe Koppelcurve α beschrieben.

Jeder der drei Pole $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ dieser drei Kurbelgetriebe bestimmt mit dem beschreibenden Punkte A verbunden die Normale der Koppelcurve α, und demnach liegen die vier Punkte A, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ in dieser Normalen.

127. **Gestaltungen der Koppelcurve.** Wird in Fig. 345 von einem Koppelpunkte A des Kurbelgetriebes $\Phi FL\Lambda$, dessen Steg $\Phi\Lambda$ ist, eine Koppelcurve α beschrieben, die in der betrachteten Lage von A einen Doppelpunkt G besitzt, dann muss es zwei Lagen AFL, $AF'L'$ des Koppeldreiecks geben, bei denen in G die entsprechenden Lagen des beschreibenden Punktes coincidiren. Verbinden wir diesen Doppelpunkt G mit den festen Axenpunkten Φ, Λ, so werden die gleichen Winkel FGF', LGL' resp. von $G\Phi$, $G\Lambda$ halbirt; folglich ist der Winkel $\Phi G\Lambda = FGL$, und dem gemäss muss der Doppelpunkt G auf dem über $\Phi\Lambda$ beschriebenen Kreise ι liegen, dessen auf $\Phi\Lambda$ stehender Peripheriewinkel gleich dem Dreieckswinkel FAL ist. Dieser Kreis geht durch die bei der dreifachen Erzeugung auftretenden drei festen Axen Φ, Λ, Ω, weil die Dreiecke $\Phi\Lambda\Omega$, FLA ähnlich sind. Bei einem durchschlagenden Kurbelgetriebe giebt es aber noch einen Sonderdoppelpunkt und in speciellen Fällen auch zwei Sonderdoppelpunkte, die nicht auf diesem Kreise ι liegen. Umgekehrt folgt auch aus unserer Darlegung, dass jeder Schnittpunkt, den der Kreis ι mit der von dem betreffenden Punkt A beschriebenen Koppelcurve α bildet, ein Doppelpunkt derselben ist. Die beiden Pole $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, welche den Koppellagen FLA, $F'L'A$ entsprechen, liefern mit G verbunden die beiden zu dem Doppelpunkte gehörenden Normalen der Koppelcurve. Fallen diese beiden Normalen in einer Geraden zusammen, dann geht der Doppelpunkt in einen Selbstberührungspunkt der Koppelcurve über. Coincidiren die beiden betrachteten Koppellagen, dann coincidiren auch diese beiden Pole im Punkte G, der in diesem Falle ein Berührungspunkt der Rollcurven und somit ein Rückkehrpunkt der Koppelcurve ist. Da jeder Punkt der Polcurve im Moment der

[1]) Roberts, Three-bar Motion in Plane Space. *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1875. Vol. VII. p. 14.

Berührung mit der Polbahn in Ruhe ist, und da dies bei allen übrigen mit der Koppel verbundenen Punkten nicht stattfindet, so kann ein Rückkehrpunkt nur in derjenigen Koppelcurve auftreten, die von einem auf der Polcurve liegenden Punkte erzeugt wird. Durch Betrachtung eines speciellen Falles werden wir in Art. 129 erkennen, dass die Koppelcurve des Kurbelgetriebes von sechster Ordnung ist und auf jenem Kreise ι höchstens drei Doppelpunkte enthalten kann; aber es ist nicht leicht, die Bedingungen aufzustellen, denen auf dem Kreise ι eine bestimmte Anzahl von Doppelpunkten entspricht; denn diese Anzahl kann 3, 2, 1 und 0 sein.

In Fig. **346** ist ein durchschlagendes Schwingkurbelgetriebe $\Phi F L \Lambda$ und die von einem Koppelpunkte A beschriebene Koppelcurve α gezeichnet. Beim Durchschlagen gelangt das Koppeldreieck FLA zweimal in die Lage $F^0 L^0 A^0$, und demnach ist der mit A^0 zusammenliegende Punkt G^0 des ruhenden Systems ein Sonderdoppelpunkt der Koppelcurve. Die beiden Curvennormalen für diesen Sonderdoppelpunkt G^0 werden durch die in Art. 52 gegebenen Constructionen der beiden in der Centralen $\Phi\Lambda$ befindlichen Pole bestimmt, die den Durchschlagslagen entsprechen.

Wird, während F über F^0 schreitet, der Punkt L durch ein Hinderniss gezwungen in L^0 umzukehren, so dass derselbe nur auf dem Bogen $L^0 L^1$ schwingt, dann kann der Punkt A den Sonderdoppelpunkt G^0 nicht überschreiten und nur den einen bei G^0 geschlossenen Curventheil beschreiben. Ist dagegen der Punkt L gezwungen sich nur auf dem Bogen $L^0 \mathfrak{L}^1$ zu bewegen, dann beschreibt der Punkt A den anderen bei G^0 geschlossenen Curventheil. Es kann somit im Sonderdoppelpunkte eine Verzweigung des Weges eintreten, und demnach ist ein Sonderdoppelpunkt auch ein Verzweigungspunkt.

Auf dem Kreise ι, dessen über $\Phi\Lambda$ stehender Peripheriewinkel gleich dem Winkel FAL ist, befinden sich zwei Doppelpunkte G^I, G^{II}; und auf diesem Kreise liegt auch der noch bei der dreifachen Erzeugung hinzutretende dritte Axenpunkt Ω, der erhalten wird, indem wir das Dreieck $\Phi\Lambda\Omega$ ähnlich dem Dreieck FLA machen.

Um von den drei Erzeugungsweisen noch eine zweite anzugeben, zeichnen wir das Parallelogramm $\Phi F^0 A^0 F_1$ und machen das Dreieck $F_1 A^0 O_1$ ähnlich $F^0 L^0 A^0$; dann erhalten wir das zweite Kurbelgetriebe $\Phi \Omega O_1 F_1$, bei welchem die vier Axen in einer Geraden liegen und das Koppeldreieck $F_1 O_1 A$ sich also in der

Durchschlagslage befindet. Analoge Beziehungen ergeben sich für das dritte Kurbelgetriebe. Hieraus folgt der Satz:

Wird eine Koppelcurve durch ein durchschlagendes Kurbelgetriebe erzeugt, so werden auch die beiden anderen Erzeugungsweisen dieser Koppelcurve vermittelst durchschlagender Kurbelgetriebe bewirkt.

Wir haben in Fig. **347** dieselben Längenverhältnisse bis auf die Steglänge, welche ein wenig verkürzt wurde, beibehalten; dadurch entsteht ein seitlich schwingendes Schwingkurbelgetriebe, bei welchem der Punkt L auf dem Bogen $L^1 L^2$ hin und hergeht, während der Punkt F den Bahnkreis φ durchläuft. Der Koppelpunkt A beschreibt das gezeichnete Oval α, welches den Kreis ι in den Punkten G^I, G^{II} schneidet und nur einen Bestandtheil der vollständigen Koppelcurve bildet. Bei dem durchschlagenden Kurbelgetriebe wechselt das Koppeldreieck seine Lage gegen das Gelenkviereck; bei dem seitlich schwingenden Schwingkurbelgetriebe kann dies aber nicht eintreten, wir müssen daher, um diese Wechselung zu erreichen, in Fig. **347** das Gelenk bei L auflösen und in der bezüglich des Steges $\Phi\Lambda$ anderseitigen Lage $\mathfrak{L}$ wieder zusammensetzen, so dass das Koppeldreieck die Lage $\mathfrak{F}\mathfrak{L}A'$ erhält. Dann beschreibt der Koppelpunkt A' das punktirt gezeichnete Oval α', welches das Oval α in den Punkten G^I, G^{II}, die Doppelpunkte sind, schneiden muss. Wenn diese beiden Doppelpunkte in einem Punkte zusammenfallen, dann berühren sich die beiden Ovale α, α' auf dem Kreise ι in diesem Punkte. Wird die Koppelcurve von dem Kreise ι nicht geschnitten, dann besitzt sie keine Doppelpunkte und die beiden Ovale α, α' sind in diesem Falle von einander getrennt. Demnach besteht die vollständige Koppelcurve aus den beiden Ovalen α, α'. Diese Curvengestaltung können wir auch aus Fig. **346** ersehen, indem wir dort ausserhalb des Curvendreiecks $G^0 G^I G^{II}$ durch den Sonderdoppelpunkt G^0 einen lösenden Schnitt ziehen, und dadurch entstehen aus der verschlungenen Curve zwei Ovale wie in Fig. **347**.

In Fig. **348** ist beispielsweise ein gleicharmiges, durchschlagendes Doppelkurbelgetriebe dargestellt und die Koppelcurve α gezeichnet, die von der Spitze A eines gleichschenkeligen Koppeldreiecks FLA beschrieben wird. Diese Koppelcurve ist demnach bezüglich der auf dem Stege $\Phi\Lambda$ in der Mitte senkrecht stehenden Geraden AA^0 symmetrisch gestaltet. Beim Durchschlagen gelangt das Koppeldreieck zweimal in die Lage $F^0 L^0 A^0$, und der mit A^0 coincidirende Punkt G^0 des ruhenden Systems ist der

Sonderdoppelpunkt dieser Koppelcurve, die ausserdem noch drei auf dem Kreise ι befindliche Doppelpunkte G^{I}, G^{II}, G^{III} besitzt. Ferner ist noch die von der Koppelmitte B beschriebene Koppelcurve β strichpunktirt gezeichnet, die von den beiden senkrechten Geraden AA^{0}, $\Phi\Lambda$ symmetrisch getheilt wird und drei auf $\Phi\Lambda$ liegende Doppelpunkte besitzt, von denen der mittlere ein Selbstberührungspunkt ist.

In Fig. **349** sind dieselben Längenverhältnisse bis auf die Steglänge $\Phi\Lambda$, welche ein wenig verlängert ist, beibehalten; dadurch entsteht ein Doppelschwinggetriebe. Die Koppelcurve α behält in diesem Falle die drei auf dem Kreise ι befindlichen Doppelpunkte G^{I}, G^{II}, G^{III}, und ihre Gestalt kann aus Fig. **348** erkannt werden, wenn wir dort in der Geraden AA^{0} durch den Sonderdoppelpunkt G^{0} einen lösenden Schnitt legen. Bei der strichpunktirten Koppelcurve β tritt eine gestaltliche Aenderung nur insofern ein, als die Curve sich in der Stegmitte nicht mehr selbst berührt, sondern sich in derselben durchschneidet.

Unter gleichen Bedingungen ist in Fig. **350** die Steglänge $\Phi\Lambda$ ein wenig verkürzt, so dass ein Doppelkurbelgetriebe entsteht. Während die Punkte F, L resp. ihre Bahnkreise φ, λ durchlaufen und gleichzeitig eine Umdrehung vollenden, beschreibt der Koppelpunkt A das Oval α, welches nur ein Bestandtheil der vollständigen Koppelcurve ist; denn bei dieser Bewegung kann das Koppeldreieck $F\Lambda A$ seine Lage gegen das Gelenkviereck $\Phi FL\Lambda$ nicht wie in den beiden vorigen Fällen wechseln. Um aber diese Wechselung zu erreichen, lösen wir eins der Gelenke, z. B. das bei L, und setzen dieses Gelenk an der anderen Seite von $\Phi\Lambda$ in $\mathfrak{L}$ wieder zusammen, so dass wir das Gelenkviereck $\Phi\mathfrak{F}\mathfrak{L}\Lambda$ erhalten, bei welchem das Koppeldreieck $\mathfrak{F}\mathfrak{L}A'$ nach innen gewendet ist. Dann beschreibt der Punkt A' den verschlungenen anderen Bestandtheil α' der Koppelcurve, die auf dem Kreise ι die drei Doppelpunkte G^{I}, G^{II}, G^{III} besitzt. Diese gestaltliche Umwandlung in zwei getrennte Curventheile ersehen wir auch aus Fig. **348**, indem wir dort senkrecht zur Geraden AA^{0} durch den Sonderdoppelpunkt G^{0} einen lösenden Schnitt ziehen. Die Koppelcurve, welche der Koppelmitte B entspricht, besteht in diesem Falle aus den beiden bezüglich $\Phi\Lambda$ symmetrischen Ovalen β, β'. Das strichpunktirte Oval β wird von der Mitte B der Koppel FL, und das einfach punktirte Oval β' wird von der Mitte B' der Koppel $\mathfrak{F}\mathfrak{L}$ beschrieben.

Bei dem in Fig. **351** dargestellten durchschlagenden Doppelschwinggetriebe ist die vom Koppelpunkte A beschriebene Koppelcurve α gezeichnet. Dieselbe besitzt ausser dem Sonderdoppelpunkte G^0 nur noch einen auf dem Kreise ι liegenden Doppelpunkt G^I. In Fig. **352** ist bei dieser Doppelschwinge nur das Glied $L\Lambda$ ein wenig verlängert, damit ein Durchschlagen nicht mehr stattfindet. Die vom Punkte A erzeugte Koppelcurve α hat in diesem Falle nur einen auf dem Kreise ι befindlichen Doppelpunkt G^I, und ihre Gestalt geht auch aus Fig. **351** hervor, wenn wir dort durch den Sonderdoppelpunkt G^0 den lösenden Schnitt s legen. Schliesslich ist in Fig. **353** bei dem betrachteten Doppelschwinggetriebe das Glied ΛL ein wenig verkürzt, so dass dasselbe nur seitlich von $\Phi\Lambda$ schwingen kann. Bei diesem Doppelschwinggetriebe zerfällt die betreffende Koppelcurve in zwei getrennte Bestandtheile, die Schleife α und das Oval α', welches vom Punkte A' vermittelst des anderen Doppelschwinggetriebes $\Phi\mathfrak{F}\mathfrak{L}\Lambda$ beschrieben wird. Diese beiden Bestandtheile ergeben sich aus Fig. **351**, indem wir dort durch den Sonderdoppelpunkt G^0 den lösenden Schnitt s' ziehen.

Das Zeichnen einer Koppelcurve geschieht in der einfachsten Weise vermittelst eines Dreispitzcirkels oder mit Hülfe eines Blattes von Pauspapier resp. Gelatinpapier, auf welchem die drei Punkte F, L, A des bewegten ebenen Systems resp. die Ecken des Koppeldreiecks markirt sind. Wir führen dann die Punkte F, L des Pauspapierblattes beziehlich auf den Kreisen φ, λ; und indem wir in den verschiedenen Lagen mit einer Nadel durch den Punkt A stechen, erhalten wir die Punkte der Koppelcurve in der Zeichnung.

Specielle Kurbelgetriebe.

128. **Das Parallelkurbelgetriebe.** Wenn in Fig. **354**, Taf. XXIV, von einem Gelenkparallelogramm $\Phi\Lambda LF$ ein Glied z. B. $\Phi\Lambda$ festgestellt wird, erhalten wir ein Parallelkurbelgetriebe. Die beiden gleichen Kurbeln ΦF, ΛL, welche während ihrer Rotationen parallel bleiben, machen gleiche Drehbewegungen, und die zum Stege $\Phi\Lambda$ beständig parallele Koppel FL vollzieht eine Parallelbewegung, bei der alle mit der Koppel verbundenen Punkte gleiche Kreise beschreiben, deren Radien gleich ΦF oder ΛL sind. Die Rollcurven befinden sich bei diesem Getriebe im Unendlichen und entziehen sich daher der Betrachtung. Wenn wir

jedem der beiden Glieder $\Phi\Lambda$, FL die Form eines Lineals geben, repräsentirt dieser Mechanismus das bekannte Parallellineal. Tritt die Koppel FL in eine der beiden Durchschlagslagen F^0L^0, $F^\tau L^\tau$, so kann, während der eine der beiden Punkte F, L die Centrale $\Phi\Lambda$ überschreitet, der andere seine Bewegung umkehren. Der gleichsinnige Weitergang der Kurbeln und die Fortführung der Parallelbewegung der Koppel kann leicht in Fig. **355** vermittelst Ueberpaarung durch eine dritte Kurbel ΓC bewirkt werden. Denn der mit der Koppel FL verbundene Punkt C beschreibt einen Kreis γ, dessen Mittelpunkt Γ gegen den Steg $\Phi\Lambda$ so liegt, dass das Dreieck $\Phi\Lambda\Gamma$ dem Koppeldreieck FLC congruent ist, und dessen Radius ΓC gleich ΦF oder ΛL ist. Wenn nun die Koppel FL in die Centrale $\Phi\Lambda$, also in die beiden Todtlagen gelangt, dann wird durch die dritte Kurbel ΓC die stetige Fortführung der Rotationen der Kurbeln vermittelt. Denken wir uns in Fig. **355** eine von den drei Kurbeln z. B. ΦF festgestellt, dann vollziehen die resp. um Φ, F rotirenden Dreiecke $\Phi\Lambda\Gamma$, FLC gleiche stetige Drehungen, weil sie durch zwei Koppeln ΛL, ΓC verbunden sind. Durch die Hinzufügung eines fünften Gliedes erhalten wir aber einen zusammengesetzten Mechanismus.

Diese letzte Anordnung wird in der Praxis behufs der stetigen Fortführung der Drehungen viel angewandt. Es werden, wie die Fig. **356** im Grund- und Aufriss schematisch darstellt, an den Kurbeln ΦF, ΛL rechtwinkelig gleich lange Kurbeln $\Phi F'$, $\Lambda L'$ befestigt, deren Länge man meistens gleich derjenigen des ersten Kurbelpaares nimmt. Die beiden Kurbelwellen sind, wie der Grundriss verdeutlicht, in einem Rahmen $\Phi_1\Lambda_1$ gelagert, und jede derselben trägt, um die Kröpfungen zu vermeiden, an beiden Enden je eine der Kurbeln. Bei dieser Anordnung, die man bei den Triebrädern der Locomotiven stets anwendet, wird, wenn eine Koppel sich in einer Durchschlagslage oder Todtlage befindet, der Uebergang über die Centrale durch die beiden anderen dann zur Centralen senkrecht stehenden Kurbeln und durch deren Koppel vermittelt.

In Fig. **357**, welche den Grund- und Aufriss schematisch darstellt, rotirt um jede der festen Axen Φ, Λ ein System von drei Kurbeln, welche die gleichen Winkel von 120° einschliessen und beziehlich durch die drei Koppeln FL, $F'L'$, $F''L''$ verbunden sind. Bei dieser Anordnung können die drei Koppeln aus Eisendrähten oder Drahtseilen bestehen und eine beträchtliche Länge erhalten; denn während der Drehung wird beständig mindestens eine dieser Koppeln auf Zug in Anspruch genommen. Diese Uebertragung der Bewegung bei grösserer Entfernung der Kurbelaxen wurde von Theobald Böhm[1]) angegeben und von Heilmann[2]) vermittelst gekröpfter Wellen Φ_1, Λ_1 praktisch ausgeführt.

Um die Wellenkröpfungen zu vermeiden, sind, wie in Fig. **358** durch Grund- und Aufriss veranschaulicht ist, die drei Koppeln schräg gegen die Kurbelzapfen gezogen, die sich in den beiden rotirenden Scheiben $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{L}$ befinden. Bei der Drehung dieser Scheiben in den festen Lagern Φ_1, Λ_1 bewegen sich die drei Koppeln an einer elliptischen Cylinderfläche, die beiderseits durch kreisförmige zu den Scheiben parallele Basis begrenzt ist; und demnach können die Koppeln während der Bewegung ungehindert neben einander vorbeigehen.

129. **Die Zwillingskurbelgetriebe.** Sind bei dem in Fig. **359** gezeichneten überschlagenen Gelenkviereck $\Phi \Lambda L F$ wieder je zwei gegenüber liegende Glieder von gleicher Länge, nämlich:

$$\Phi\Lambda = FL = a, \qquad \Phi F = \Lambda L = b,$$

dann wird ein gelenkiges Antiparallelogramm gebildet; und wir erhalten, wenn eins der Glieder festgestellt ist, ein Zwillingskurbelgetriebe. Wird eins der beiden längeren Glieder als Steg genommen, ist also in Fig. **359** das Glied $\Phi\Lambda$ festgestellt, dann sind die Drehungen der Kurbeln ΦF, ΛL entgegengesetzt, und das Zwillingskurbelgetriebe heisst ein gegenläufiges. Wird dagegen eins der beiden kürzeren Glieder z. B. ΦF festgehalten, dann rotiren die Kurbeln $\Phi\Lambda$, FL in gleichem Sinne, und das Zwillingskurbelgetriebe wird ein gleichläufiges genannt.

Wenn wir $\Phi\Lambda$ als Steg betrachten, wird durch den Schnittpunkt der verlängerten Kurbelgeraden ΦF, ΛL der Pol $\mathfrak{P}$ und damit die Polbahn π bestimmt, die eine Hyperbel ist und Φ, Λ als Brennpunkte besitzt. Denn da die Dreiecke $F\Lambda\Phi$, ΛFL symmetrisch congruent sind, so ist $F\mathfrak{P} = \Lambda\mathfrak{P}$ und ferner:

$$\Phi\mathfrak{P} - \Lambda\mathfrak{P} = \Phi F = b.$$

Es ist also die Differenz der Abstände des Pols $\mathfrak{P}$ von den festen Punkten Φ, Λ gleich der constanten Grösse b, und demnach ist die Polbahn π eine Hyperbel, deren Brennpunkte Φ, Λ sind, deren Hauptaxe $\Pi^0\Pi^\tau = b$ ist und deren Scheitel Π^0, Π^τ bezieh-

[1]) *Kunst- und Gewerbeblatt des Polytechn. Vereins in Bayern.* 1834. Heft V. S. 20 und *Polytechn. Journal.* 1837. B. 64. S. 271.

[2]) *Bulletin de la Société Industrielle de Mulhausen.* 1837. T. X. p. 178 und *Polytechn. Journal.* 1837. B. 64. S. 273.

lich in den Mitten der Strecken ΦL^0, ΛF^τ liegen. Wegen der symmetrischen Gestalt dieses Mechanismus ist auch die Polcurve p eine mit der Polbahn congruente Hyperbel, deren Brennpunkte die Gelenkpunkte F, L sind. Hieraus folgt:

Bei dem Zwillingskurbelgetriebe sind die Rollcurven, welche den beiden grösseren Gliedern $\Phi\Lambda$, FL angehören, congruente Hyperbeln, deren Brennpunkte resp. Φ, Λ und F, L sind, und deren Hauptaxe gleich der Länge b der kleineren Glieder ist.

Gelangt die Koppel FL in die Durchschlagslage $F^0 L^0$, dann berühren sich die entsprechenden Hyperbelscheitel P^0, Π^0; gelangt sie in die Durchschlagslage $F^\tau L^\tau$, dann treten die beiden anderen Hyperbelscheitel P^τ, Π^τ in Berührung.

In den Durchschlagslagen kann, während der eine der beiden Punkte F, L seine Bewegung fortsetzt, der andere seine Bewegung umkehren, und das Zwillingskurbelgetriebe geht dann in ein Parallelkurbelgetriebe über. Um dies zu verhindern, kann die stetige Fortsetzung der Drehungen durch Eingriffspaarung vermittelt werden, wenn wir, Fig. **361**, in den Punkten Π^0, Π^τ des Steges $\Phi\Lambda$ zwei Gabeln und in den Punkten P^0, P^τ der Koppel zwei Zapfen anbringen, welche beziehlich in die Gabeln eingreifen. Von der Bahn des Punktes P^τ, die in Π^τ einen Rückkehrpunkt hat, ist ein Stück gestrichelt gezeichnet; und der Zapfen P^τ greift wie ein Zahn in eine Zahnlücke, die bei Π^τ durch die Gabel gebildet wird.

Denken wir uns in Fig. **360** einstweilen das Glied ΦF festgehalten, dann schneiden sich $\Phi\Lambda$, FL im Pol $\mathfrak{P}$. Wegen der symmetrischen congruenten Dreiecke $F\Lambda\Phi$, ΛFL ist $F\mathfrak{P} = \Lambda\mathfrak{P}$, also:

$$L\mathfrak{P} + \Lambda\mathfrak{P} = FL = a,$$
$$\Phi\mathfrak{P} + F\mathfrak{P} = \Phi\Lambda = a.$$

Hieraus folgt:

Bei dem Zwillingskurbelgetriebe sind die Rollcurven, welche den beiden kleineren Gliedern ΦF, ΛL angehören, congruente Ellipsen, deren Brennpunkte resp. Φ, F und Λ, L sind, und deren Hauptaxe gleich der Länge a der grösseren Glieder ist.

Betrachten wir jetzt wieder das Glied $\Phi\Lambda$ festgestellt, dann rollen die beiden resp. um die festen Axen Φ und Λ rotirenden Ellipsen π, p auf einander, und wenn diese beiden Ellipsen entsprechend verzahnt werden, erhalten wir die bekannten, in der

Praxis oft angewendeten elliptischen Räder. Gelangt die Koppel FL in die Lage $F^0 L^0$, dann berühren sich die Ellipsenscheitel P^0, Π^0, und wenn sie in die Lage $F^\tau L^\tau$ gekommen ist, treten die beiden Ellipsenscheitel P^τ, Π^τ in Berührung. Auch hier kann durch Eingriffspaarung der stetige Uebergang der Koppel über die Centrale bewirkt werden, indem wir in Fig. **362** in den beiden Punkten Π^0, Π^τ der einen Kurbel Gabeln und in den Punkten P^0, P^τ der anderen Zapfen befestigen.[1])

Der besondere Fall, bei welchem die beiden Punkte Φ, L im Unendlichen liegen, also $a = \infty$, $b = \infty$ ist, und die Hyperbeln, so wie die Ellipsen in Parabeln übergehen, wird auf S. 334 näher betrachtet.

Wenn auf einer Polbahn eine congruente Polcurve rollt, so dass stets homologe Punkte in Berührung kommen, dann beschreibt, wie in Art. 23 bewiesen wurde, jeder Punkt des bewegten Systems eine Bahncurve, die derjenigen Fusspunktencurve im Verhältnisse 2 : 1 homothetisch ähnlich ist, deren Lothpunkt im ruhenden System zu dem beschreibenden Punkte symmetrisch liegt, und dieser Lothpunkt ist zugleich der zugehörige Aehnlichkeitspunkt. Ist bei dem in Fig. **359** dargestellten gegenläufigen Zwillingskurbelgetriebe ein Punkt A an der Koppel FL befestigt, und wird der Punkt $\mathfrak{A}$ derart bestimmt, dass das Dreieck $\Phi\Lambda\mathfrak{A}$ dem Dreieck LFA symmetrisch congruent ist, dann beschreibt der Punkt A eine Fusspunktencurve α von der bezüglich des Lothpunktes $\mathfrak{A}$ zur Polbahn π im Verhältnisse 2 : 1 homothetisch ähnlichen Hyperbel.

Wir erhalten also auch Punkte dieser Bahncurve α, indem wir auf die Tangenten $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ der Polbahn π von $\mathfrak{A}$ Lothe fällen und dieselben um ihre eigene Länge verlängern. So z. B. fällen wir auf die Hyperbeltangente $\mathfrak{P}\mathfrak{t}$ das Loth $\mathfrak{A}\mathfrak{t}$ und machen auf der Verlängerung desselben $\mathfrak{t}A = \mathfrak{A}\mathfrak{t}$. Hieraus folgt:

Bei dem gegenläufigen Zwillingskurbelgetriebe beschreibt ein an der Koppel befestigter Punkt eine Fusspunktencurve der zur Polbahn homothetisch ähnlichen Hyperbel; bei dem gleichläufigen Zwillingskurbelgetriebe eine Fusspunktencurve der zur betreffenden Polbahn homothetisch ähnlichen Ellipse.

[1]) Die Rollcurven, welche bei den Zwillingskurbelgetrieben auftreten, werden schon in Klügel's *Mathematischem Wörterbuche*, 1805, B. II, S. 128 erwähnt, von J. Jopling im *Mechanics' magazine*, 1830, Vol. XII, p. 329 und später von Reuleaux im *Civilingenieur*. 1859. B. V. S. 99 behandelt.

Liegt der beschreibende Punkt A ausserhalb der Polcurve p, also auch der entsprechende symmetrisch gelegene Punkt $\mathfrak{A}$ ausserhalb der Polbahn π, dann können von ihm zwei Tangenten an die Polbahn π gezogen werden, und demnach besitzt die Fusspunktencurve α in $\mathfrak{A}$ einen Doppelpunkt. Befindet sich dagegen der beschreibende Punkt A innerhalb der Polcurve p, dann hat die Fusspunktencurve keinen Doppelpunkt.

Wenn das Zwillingskurbelgetriebe in einer der beiden Todtlagen oder Durchschlagslagen in ein Parallelkurbelgetriebe übergeht, beschreibt der mit der Koppel FL verbundene Punkt A einen Kreis $\mathfrak{a}$, der den Bahnkreisen φ, λ gleich ist, und dessen Mittelpunkt Ω erhalten wird, indem wir das Dreieck $\Phi\Lambda\Omega$ dem Dreieck FLA congruent machen; und jener Doppelpunkt $\mathfrak{A}$ liegt auf dem durch $\Phi\Lambda\Omega$ gehenden Kreise ι. Die vollständige Koppelcurve, die der Punkt A beschreibt, besteht demnach bei dem Zwillingskurbelgetriebe aus der Fusspunktencurve α und dem Kreise $\mathfrak{a}$. Beachten wir, dass nach dem Beweise auf S. 130 die Fusspunktencurve einer Hyperbel oder Ellipse von vierter Ordnung und der Kreis von zweiter Ordnung ist, so folgt nach dem Princip der Erhaltung der Zahl[1]), **dass auch im Allgemeinen die Koppelcurve eines Kurbelgetriebes von sechster Ordnung ist.**

Der Kreis $\mathfrak{a}$ schneidet die Fusspunktencurve α auf dem Kreise ι in den beiden Punkten G^{I}, G^{II}, die also Doppelpunkte der vollständigen Koppelcurve sind, und ferner in den beiden Sonderdoppelpunkten G^{0}, G^{τ}, in denen sich der Punkt A befindet, wenn die Koppel FL resp. in die Durchschlagslagen $F^{0}L^{0}$, $F^{\tau}L^{\tau}$ gelangt. Diese beiden Sonderdoppelpunkte G^{0}, G^{τ} sind die Endpunkte des durch den Doppelpunkt $\mathfrak{A}$ gehenden, zu $\Phi\Lambda$ parallelen Durchmessers des Kreises $\mathfrak{a}$. Die vollständige Koppelcurve besitzt also in dem betrachteten Falle auf dem Kreise ι die drei Doppelpunkte G^{I}, G^{II}, $\mathfrak{A}$ und ferner die beiden Sonderdoppelpunkte G^{0}, G^{τ}, in denen eine Verzweigung des Weges des Punktes A eintreten kann, und die sich mit einer Längenänderung der Glieder auflösen.

Der Kreis $\mathfrak{a}$ kann den Kreis ι höchstens in zwei Punkten schneiden, und die Fusspunktencurve α kann höchstens einen Doppelpunkt besitzen; hieraus folgt, **dass auch im Allgemeinen die Koppelcurve des Kurbelgetriebes auf dem Kreise ι höchstens drei Doppelpunkte besitzt.**[2])

[1]) Schubert, *Abzählende Geometrie.* 1879.

[2]) Vergl. Cayley, *Proceedings of the London Mathematical Society.* 1876. Vol. VII. p. 136.

Vermittelst der verschiedenen, durch die beiden Sonderdoppelpunkte G^0, G^τ gelegten lösenden Schnitte gewinnen wir eine Vorstellung von den mannigfaltigen Gestalten der Koppelcurve des Kurbelgetriebes.

Wenn insbesondere bei dem gegenläufigen Zwillingskurbelgetriebe der beschreibende Punkt A in der Koppelmitte liegt und die Steg- oder Koppellänge a sich zur Kurbellänge b wie $\sqrt{2}:1$ verhält, dann beschreibt der Punkt A die Fusspunktencurve einer gleichseitigen Hyperbel, deren in der Stegmitte liegender Mittelpunkt der Lothpunkt ist, und in diesem besonderen Falle ist die Fusspunktencurve eine Lemniscate[1]). Die vollständige Koppelcurve besteht aber aus dieser Lemniscate und dem um die Stegmitte mit dem Radius b beschriebenen Kreise.

130. **Das gleichschenkelige Doppelkurbelgetriebe und das gleichschenkelige Schwingkurbelgetriebe.** Diese speciellen interessanten Getriebe, die in mannigfacher Weise theoretische und praktische Verwendung finden, gehen aus dem Gelenkviereck hervor, wenn in demselben zwei benachbarte Glieder unter sich gleich sind und ferner auch die beiden anderen benachbarten Glieder unter sich gleich sind. Es ist bei dem in Fig. **363** dargestellten Gelenkviereck

$$\Phi F = \Phi \Lambda = a, \qquad LF = L\Lambda = c, \qquad a < c;$$

und wir erhalten somit, je nachdem eins der kürzeren oder eins der längeren Glieder festgestellt wird, ein gleichschenkeliges Doppelkurbel- oder Schwingkurbelgetriebe, die beide durchschlagende Getriebe sind, weil $\Phi F + FL = \Phi\Lambda + \Lambda L$ ist. Wenn wir das Glied $\Phi\Lambda$ als fest betrachten, tritt beim Zusammenklappen der Glieder, weil die Axen F, Λ coincidiren, die Eigenthümlichkeit ein, dass die beiden Glieder FL, ΛL vereint um Λ rotiren; demnach bildet der Punkt Λ einen ausserordentlichen Punkt resp. Bestandtheil der Polbahn. Das Gleiche gilt von dem Punkte F, wenn wir das Glied FL festhalten, dann können beim Coincidiren der Axen Λ, F die Glieder $F\Phi$, $\Lambda\Phi$ vereint um den Punkt F rotiren. Wir wollen nun beweisen, dass die Polbahn, so wie die Polcurve eine Pascal'sche Curve ist, und betrachten zunächst das in Fig. **363** gezeichnete gleichschenkelige Doppelkurbelgetriebe, dessen Steg $\Phi\Lambda$ ist. Wir verlängern die beiden Kurbelgeraden $F\Phi$, $L\Lambda$, welche sich in dem Pol $\mathfrak{P}$

[1]) Diese einfache mechanische Erzeugung der Lemniscate hat Haedenkamp mitgetheilt im *Archiv für Mathematik und Physik.* 1843. Th. 3. S. 400.

schneiden, bezeichnen den Fahrstrahl $\Lambda\mathfrak{P}$ mit ϱ, den Winkel $\Phi\Lambda\mathfrak{P}$ mit θ, und ziehen zu den beiden Geraden ΦF, $\Phi\Lambda$ resp. die Parallelen $\Lambda\Xi$, $F\Xi$, welche sich im Punkte Ξ auf der Geraden ΦL treffen. Denken wir uns um Λ mit dem Radius a den durch $\Phi\Xi$ gehenden Kreis beschrieben, so ist:

$$L\Phi \,.\, L\Xi = c^2 - a^2.$$

Ferner ergiebt sich wegen der Parallelen $\Phi\mathfrak{P}$, $\Xi\Lambda$:

$$\frac{c}{c+\varrho} = \frac{L\Xi}{L\Phi}, \qquad \varrho = c \cdot \frac{L\Phi - L\Xi}{L\Xi}.$$

Fällen wir nun von L auf $\Phi\Lambda$ die Senkrechte LN und ziehen wir die Gerade $F\Lambda$, welche die Gerade ΦL im Punkte M senkrecht schneidet, so ist wegen der ähnlichen Dreiecke ΦNL, $\Phi M\Lambda$:

$$\frac{N\Phi}{L\Phi} = \frac{M\Phi}{a} = \frac{L\Phi - L\Xi}{2a},$$

und hiernach erhalten wir mit Rücksicht auf die obigen Gleichungen:

$$\frac{N\Phi}{\varrho} = \frac{c^2 - a^2}{2ac}.$$

Da aber $N\Phi = c \,.\cos\theta + a$ ist, so folgt für die Polbahn π die Gleichung:

$$\varrho = \frac{2ac}{c^2 - a^2}(c \,.\cos\theta + a),$$

welche nach Art. 19 eine Pascal'sche Curve repräsentirt; und wegen der symmetrischen Gestalt des betrachteten Mechanismus ergiebt sich für die Polcurve p eine analoge Gleichung; demnach folgt der Satz:

Bei dem gleichschenkeligen Doppelkurbel- oder Schwingkurbelgetriebe sind die Rollcurven Pascal'sche Curven.[1])

Wir können demnach die Polbahn π auch construiren, indem wir mit dem Radius $ac^2 : (c^2 - a^2)$ den durch Λ gehenden Kreis k beschreiben, dessen Mittelpunkt auf $\Lambda\Phi$ links von Λ liegt; dann durch Λ Fahrstrahlen ziehen und auf dieselben von ihren mit diesem Kreise gebildeten zweiten Schnittpunkten aus die constante Strecke $2a^2c : (c^2 - a^2)$ beiderseits abtragen. Wenn wir die Koppel FL nach $F'L'$ legen, so dass die Kurbel $\Lambda L'$ auf $\Phi\Lambda$ senkrecht steht, also den Kreis k, so wie den Bahnkreis φ in Λ tangirt, und

---

[1]) In anderer Weise wurde dies von Roberts bewiesen. *Proceedings of the London Mathematical Society.* 1870. Vol. III. p. 91.

den entsprechenden Pol $\mathfrak{P}'$ bestimmen, so wird die constante Strecke durch $\Lambda\mathfrak{P}'$ dargestellt. Machen wir auf dem Fahrstrahl $\Lambda\mathfrak{P}$ die Strecke $\mathfrak{P}H = \mathfrak{P}'\Lambda$ und ziehen wir in H auf $\Lambda\mathfrak{P}$ die Senkrechte HJ, welche $\Lambda\Phi$ in J trifft, dann ist ΛJ der Durchmesser des Kreises k. Die Schnittpunkte Π^0, Π^τ, welche die Polbahn π mit der Centralen $\Lambda\Phi$ bildet, erhalten wir, indem wir beiderseits von J die Strecken $J\Pi^0 = J\Pi^\tau = \Lambda\mathfrak{P}'$ auf die Centrale abtragen. Hiernach sind auch auf der Koppel FL die entsprechenden Punkte P^0, P^τ der Polcurve p bestimmt; denn es ist beiderseits von F die Strecke $FP^0 = \Lambda\Pi^0$ und die Strecke $FP^\tau = \Lambda\Pi^\tau$. Wir können dem zufolge auch die Polcurve p construiren, wenn wir die Strecke P^0P^τ im Punkte U halbiren, über UF als Durchmesser den Kreis $\varkappa$ beschreiben, durch F Fahrstrahlen ziehen und auf dieselben von ihren mit diesem Kreise gebildeten zweiten Schnittpunkten aus beiderseits die constante Strecke UP^0 abtragen.

Aus jener Gleichung ergeben sich für $\theta = 0$, $\theta = 180^0$ beziehlich die Abstände der Punkte Π^0, Π^τ von Λ:

$$\Lambda\Pi^0 = \frac{2ac}{c-a}, \qquad \Lambda\Pi^\tau = \frac{2ac}{c+a},$$

die wir auch in anderer Weise construiren können. Um den ersten dieser Abstände zu bestimmen, beschreiben wir in Fig. **364** über $\Phi L^0 = a + c$ als Durchmesser einen Halbkreis, der die in Λ auf $\Phi\Lambda$ errichtete Senkrechte im Punkte ν trifft, und ziehen senkrecht auf den Radius $\mu\nu$ die Kreistangente $\nu\Pi^0$; denn nach dieser Construction ist:

$$\Lambda\Pi^0 \,.\, \mu\Lambda = \overline{\Lambda\nu}^2 = a \,.\, c,$$

ferner $\mu\Lambda = \dfrac{c-a}{2}$ und somit:

$$\Lambda\Pi^0 = \frac{2ac}{c-a}.$$

Dies ist dieselbe Construction, die wir im Art. 51 abgeleitet haben. Man könnte auch, wie dort angegeben wurde, den zweiten Abstand $\Lambda\Pi^\tau$ bestimmen, indem man anderseits $\Lambda L^\tau = c$ macht, über ΦL^τ als Durchmesser einen Halbkreis beschreibt und vom Berührungspunkt χ der von Λ an denselben gezogenen Tangente auf $\Lambda\Phi$ die Senkrechte $\chi\Pi^\tau$ fällt. Es ist aber einfacher, wenn wir auf $\Phi\Lambda$ die Strecke $\Lambda\eta = \mu L^0 = \frac{1}{2}(c+a)$ machen und auf $\eta\nu$ die Senkrechte $\nu\Pi^\tau$ ziehen, welche den Punkt Π^τ auf $\Phi\Lambda$ bestimmt. Denn nach dieser Construction ist, wie man leicht ersieht:

$$\Lambda \Pi^{\tau} = \frac{2ac}{c+a}.$$

Die Polbahn π, die eine Schleife besitzt, hat in Λ einen Doppelpunkt, die mit der Koppel verbundene Polcurve p besteht aus einem Oval; die Punkte P_Λ, P^Λ derselben, welche bei dem Rollen mit dem Doppelpunkte Λ in Berührung kommen, liegen auf einem um L mit dem Radius c beschriebenen Kreise.

Befinden sich die Punkte F, L beziehlich in Λ, L^0, dann sind die Punkte Π^0, P^0 der Rollcurven in Berührung. Rotirt F von Λ aus im Sinne des eingezeichneten Pfeiles, so bewegt sich L von L^0 aus in gleichem Sinne. Wenn F eine halbe Umdrehung beendet hat, also nach F_I gelangt ist, dann befindet sich L senkrecht über der Mitte Φ der Strecke $F_I\Lambda$, und in dieser Lage tangirt $L\Lambda$ die Polbahn im Doppelpunkte Λ. Bei dieser Bewegung ist auf dem Bogen $\Pi^0\pi\Lambda$ der Polbahn der entsprechende Bogen $P^0 p P_\Lambda$ der Polcurve abgerollt. Während F von F_I weiter rotirend nach Λ gelangt, bewegt sich L bis L^τ, und der Punkt P^τ der Polcurve tritt mit dem Punkte Π^τ der Polbahn in Berührung. Der Punkt L hat also, während der Punkt F eine ganze Umdrehung vollendet, erst eine halbe Umdrehung gemacht. Beginnt der Punkt F eine zweite Umdrehung und ist derselbe zum zweiten Male nach F_I gelangt, dann befindet sich L senkrecht unter der Mitte Φ der Strecke $F_I\Lambda$. In dieser Lage tangirt $L\Lambda$ abermals die Polbahn im Doppelpunkte Λ, und mit diesem tritt der Punkt P^Λ in Berührung. Wenn schliesslich der Punkt F weiter rotirend bis Λ gekommen ist, also seine zweite Umdrehung vollendet hat, gelangt L nach L^0 zurück, und die Polcurve p hat eine vollständige Abrollung auf der Polbahn π beendet. Aus dieser Darlegung folgt:

Bei dem gleichschenkeligen Doppelkurbelgetriebe vollendet die kurze Kurbel zwei Umdrehungen, während die lange Kurbel eine Umdrehung macht.

Auf diese Eigenthümlichkeit dieses Getriebes hat Galloway[1]) zuerst hingewiesen, und deshalb hat man dasselbe auch das Galloway'sche Doppelkurbelgetriebe genannt. Die stetige Fortführung der Bewegung über die Durchschlagslagen kann bei diesem Getriebe, wie in Fig. 366 dargestellt ist, durch Eingriffspaarung bewirkt werden, wenn in den Polbahnscheiteln Π^0, Π^τ resp. eine Gabel und ein Zapfen an dem Stege $\Phi\Lambda$ angebracht wird, und

[1]) *Specification* No. 10223 vom 12. Juni 1844. *Repertory of Patent Inventions.* Enlarged Series. 1845. Vol. V. p. 29; ferner *Polytechn. Journal.* 1845. B. 96. S. 9, und vergl. auch daselbst S. 432.

ebenso in den Polcurvenscheiteln P^o, P^τ beziehlich ein Zapfen und eine Gabel an der Koppel FL befestigt wird.

Wir können auch, wie die Fig. **365** veranschaulicht, für die Eingriffspaarung die Scheitel der Rollcurven, welche zu den beiden Kurbeln ΦF, ΛL gehören, benutzen; und da diese Rollcurven resp. mit denen des Steges $\Phi\Lambda$ und der Koppel FL congruent sind, so werden die betreffenden Befestigungsstellen der Zapfen wie der Gabeln in gleicher Weise wie in Fig. **366** bestimmt.[1])

Wird eins der grösseren Glieder von diesem Mechanismus festgestellt, dann erhalten wir das stetig durch die Todtlagen hindurchgehende gleichschenkelige Schwingkurbelgetriebe, und wir werden in Art. 136 erkennen, dass dieses Getriebe durch Formgebung der Glieder gestaltlich modificirt in der Praxis Anwendung findet.

In Fig. **367** ist die Koppelcurve α gezeichnet, die von einem an der Koppel FL befestigten Punkte A durch das gleichschenkelige Doppelkurbelgetriebe beschrieben wird. Diese Koppelcurve kann nach dem Roberts'schen Satze auf dreifache Art erzeugt werden, und hieraus werden wir leicht ersehen, dass sie eine Fusspunktencurve eines Kegelschnittes ist. Denken wir uns das durch die Punkte $\Lambda L A$ bestimmte Parallelogramm $\Lambda L A L_2$ und das mit FLA ähnliche Dreieck $\Phi\Lambda\Omega$ gezeichnet, ferner, weil $L_2 A = LF$ ist, zu LFA das congruente Dreieck $L_2 A O_2$ construirt; dann würde die Koppelcurve α auch durch das Kurbelgetriebe $\Lambda L_2 O_2 \Omega$ erzeugt werden, wenn an dessen Koppel $L_2 O_2$ der Punkt A befestigt ist.

Zeichnen wir anderseits das durch die Punkte $\Phi F A$ bestimmte Parallelogramm $\Phi F A F_1$ und das mit FLA ähnliche Dreieck $F_1 A O_1$, welches $\Phi\Lambda\Omega$ congruent ist; dann wird auch die Koppelcurve α durch das Kurbelgetriebe $\Phi\Omega O_1 F_1$ von dem an die Koppel $F_1 O_1$ befestigten Punkte A beschrieben. In jenem ersten abgeleiteten Kurbelgetriebe $\Lambda L_2 O_2 \Omega$ ist wegen der congruenten Dreiecke LFA, $L_2 A O_2$ die Koppel $L_2 O_2$ gleich der Kurbel ΛL_2, und ferner, weil auch die Punkte $\Omega O_1 A O_2$ ein Parallelogramm bilden, der Steg $\Lambda\Omega$ gleich der anderen Kurbel ΩO_2. Wenn wir wie bisher wieder $\Phi\Lambda = a$, $FL = c$ setzen, so ist $\Omega O_2 : \Lambda L_2 = a : c$. Demnach ist dieses Kurbelgetriebe $\Lambda L_2 O_2 \Omega$, dessen Koppel $O_2 L_2 = A L$, auch gleichschenkelig und dem ursprünglich

---

[1]) Diese Eingriffspaarung hat Reuleaux, *Kinematik*, S. 191, zuerst angegeben, aber ohne die mathematische Bestimmung der betreffenden Eingriffsstellen ausgeführt.

gegebenen ähnlich. In dem zweiten abgeleiteten Kurbelgetriebe $\Phi\Omega O_1 F_1$ ist $\Phi\Omega = F_1 O_1$; und weil $A O_2 = A F$, folgt auch $\Phi F_1 = \Omega O_1$. Hiernach ist dasselbe ein gleichläufiges Zwillingskurbelgetriebe, dessen Kurbeln gleich der Dreiecksseite FA sind und in welchem $\Phi\Omega : \Phi F_1 = a : c$ ist. Construiren wir nun das zu $F_1 O_1 A$ symmetrisch congruente Dreieck $\Omega\Phi\mathfrak{A}$, dessen Eckpunkt $\mathfrak{A}$ auch auf dem um $\Phi\Lambda\Omega$ beschriebenen Kreise ι liegt: so folgt, dass die vermittelst dieses Zwillingskurbelgetriebes erzeugte Koppelcurve α die Fusspunktencurve einer Ellipse in Bezug auf $\mathfrak{A}$ als Lothpunkt ist. Diese Ellipse ist bezüglich dieses Lothpunktes im Verhältnisse 2 : 1 homothetisch ähnlich derjenigen Ellipse, welche von dem Schnittpunkte $\mathfrak{p}$ der Kurbeln ΦF_1, ΩO_1 als Polbahn beschrieben wird, deren Brennpunkte Φ, Ω sind und deren Hauptaxe gleich FA ist.[1]) Je nachdem der Punkt $\mathfrak{A}$ ausserhalb oder auf der von $\mathfrak{p}$ beschriebenen Ellipse liegt, ist $\mathfrak{A}$ ein Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt der Fusspunktencurve α; liegt aber $\mathfrak{A}$ innerhalb dieser Ellipse, dann besitzt diese Fusspunktencurve keinen Doppelpunkt.

Wenn $a > c$ und also durch $\Phi F L \Lambda$ ein gleichschenkeliges Schwingkurbelgetriebe dargestellt wird, gelten analoge Beziehunden; das Zwillingskurbelgetriebe ist dann ein gegenläufiges und die Curve α ist in diesem Falle die Fusspunktencurve einer Hyperbel. Nach diesen Darlegungen ergiebt sich der Satz:

Bei dem gleichschenkeligen Doppelkurbelgetriebe beschreibt ein an der Koppel befestigter Punkt eine Fusspunktencurve einer Ellipse; bei dem gleichschenkeligen Schwingkurbelgetriebe eine Fusspunktencurve einer Hyperbel.

Wenn in Fig. **367** der Punkt F mit Λ zusammenfällt und keine Eingriffspaarung vorhanden ist, dann kann sich das Dreieck FLA vereint mit der Kurbel ΛL um Λ drehen, und der Punkt A beschreibt um Λ einen Kreis $\mathfrak{a}$, dessen Radius gleich FA ist. Die vollständige Koppelcurve besteht demnach aus jener Fusspunktencurve α und diesem Kreise $\mathfrak{a}$. Dieser Kreis schneidet die Fusspunktencurve in den beiden diametralen Sonderdoppelpunkten

[1]) Diese Erzeugung der Fusspunktencurve des Kegelschnittes hat Roberts analytisch bewiesen in den *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1869. Vol. II. p. 133 und 1870. Vol. III. p. 88. Vergl. auch daselbst p. 100 die Abhandlung von Cayley. Einen rein geometrischen Beweis, der aber die Beziehungen nicht so klar erkennen lässt wie der unserige, gab Mannheim in diesen *Proceedings*. 1874. Vol. VI. p. 35.

G^0, G^τ, in denen sich A resp. bei den Durchschlagslagen ΛL^0, ΛL^τ der Koppel FL befindet, und ferner auf dem Kreise ι in den Doppelpunkten G^I, G^{II}. Demnach besitzt die vollständige Koppelcurve auf dem Kreise ι die drei Doppelpunkte G^I, G^{II}, $\mathfrak{A}$, und ausserdem die beiden Sonderdoppelpunkte G^0, G^τ, in denen eine Verzweigung des Weges des Punktes A eintreten kann. Wegen der ähnlichen Dreiecke $\Phi\Omega\Lambda$, $\Lambda G^0 L^0$ und der symmetrisch congruenten Dreiecke $\Phi\Omega\Lambda$, $\Phi\Omega\mathfrak{A}$ liegen die drei Punkte G^0, G^τ, $\mathfrak{A}$ auf einer zu $\Phi\Omega$ parallelen Geraden.

Der Kreis $\mathfrak{a}$ wird aber auch vom Punkte A beschrieben, wenn das Zwillingskurbelgetriebe $\Phi F_1 O_1 \Omega$ bei einer Durchschlagslage in ein Parallelkurbelgetriebe übergeht; denn wegen der congruenten Dreiecke $F_1 O_1 A$, $\Phi\Omega\Lambda$ bildet Λ den Mittelpunkt dieses Kreises, dessen Radius gleich $\Phi F_1 = FA$ ist. Hiernach erhalten wir den Satz:

Das gleichschenkelige Doppelkurbelgetriebe und das gleichläufige Zwillingskurbelgetriebe erzeugen gleichartige Koppelcurven; ebenso auch das gleichschenkelige Schwingkurbelgetriebe und das gegenläufige Zwillingskurbelgetriebe.

Wenn wir bei einem gleichschenkeligen Schwingkurbelgetriebe, dessen Steglänge und Koppellänge im Verhältniss $\sqrt{2}:1$ stehen, die Koppel um ihre eigene Länge über ihren Anschlusspunkt an dem gleich grossen Arme hinaus verlängern, dann beschreibt der so bestimmte Koppelpunkt in diesem besonderen Falle eine Lemniscate, weil, wie S. 306 erwähnt wurde, beim gegenläufigen Zwillingskurbelgetriebe mit gleichem Längenverhältnisse die Koppelmitte eine Lemniscate erzeugt.

Graphische Darstellungen der Geschwindigkeit und des Weges bei dem Kurbelgetriebe.

131. **Allgemeine Bestimmung der Geschwindigkeiten beim Kurbelgetriebe und statische Beziehungen zwischen Geschwindigkeiten und Kräften.** Bei dem in Fig. **368**, Taf. XXV, dargestellten Kurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$, dessen festes Glied oder Steg $\Phi\Lambda$ ist, sei für einen Punkt A des Gliedes ΦF die lothrechte Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ im Bezug auf den Steg gegeben. Um für einen Punkt C des gegenüber liegenden Gliedes ΛL die lothrechte Geschwindigkeit

$CC_\mathfrak{v}$ zu erhalten, ziehen wir zu AF, FL, LC resp. die Parallelen $A_\mathfrak{v}F_\mathfrak{v}$, $F_\mathfrak{v}L_\mathfrak{v}$, $L_\mathfrak{v}C_\mathfrak{v}$, welche auf den Geraden ΦF, ΛL, ΛC die lothrechten Geschwindigkeiten $FF_\mathfrak{v}$, $LL_\mathfrak{v}$, $CC_\mathfrak{v}$ der Gelenkpunkte F, L und des Punktes C liefern. Ist B ein mit der Koppel FL verbundener Punkt, so ergiebt sich, indem wir ferner zu FB, LB die Parallelen $F_\mathfrak{v}B_\mathfrak{v}$, $L_\mathfrak{v}B_\mathfrak{v}$ ziehen, durch ihren Schnittpunkt $B_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit $BB_\mathfrak{v}$ des Punktes B. Wenn aber der Pol $\mathfrak{P}$ der Koppel im Bezug auf den Steg zugänglich ist, erhalten wir den Punkt $B_\mathfrak{v}$ auch als den Schnittpunkt der Geraden $B\mathfrak{P}$ und der zu FB parallelen Geraden $F_\mathfrak{v}B_\mathfrak{v}$.

Gestützt auf das bekannte Princip der virtuellen Verrückungen oder der sogenannten virtuellen Geschwindigkeiten kann die Kinematik sich erfolgreich mit der Statik vereinen. Es ist nach diesem aus der Statik entlehnten Princip, wenn wir die Kräfte, welche auf die Glieder eines Mechanismus wirken, senkrecht auf die Tangenten der Bahnen ihrer Angriffspunkte projiciren und jede dieser Projectionen mit der in einer unendlich kleinen Zeit durchschrittenen Wegstrecke des betreffenden Angriffspunktes multipliciren, die Summe dieser Producte im Gleichgewichtszustande gleich Null; und ist umgekehrt diese Summe gleich Null, dann findet Gleichgewicht statt. Wir erhalten demnach, wenn die Richtungen der wirkenden Kräfte K_1, K_2, K_3, .. mit den Bewegungsrichtungen ihrer Angriffspunkte resp. die Winkel ψ_1, ψ_2, ψ_3, .. bilden und die Angriffspunkte in der unendlich kleinen Zeit dt beziehlich die unendlich kleinen Wegstrecken ds_1, ds_2, ds_3, .. durchschreiten, die Gleichung:

$$K_1 \cos\psi_1\, ds_1 + K_2 \cos\psi_2\, ds_2 + K_3 \cos\psi_3\, ds_3 + \cdots = 0.$$

Hieraus ergiebt sich, da die Geschwindigkeiten der Angriffspunkte:

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt}, \qquad v_2 = \frac{ds_2}{dt}, \qquad v_3 = \frac{ds_3}{dt}, \ldots$$

sind, die wichtige statische Beziehung:

$$K_1 \cos\psi_1 \,.\, v_1 + K_2 \cos\psi_2 \,.\, v_2 + K_3 \cos\psi_3 \,.\, v_3 + \cdots = 0,$$

in welcher aber bei den auftretenden stumpfen oder gestreckten Winkeln der Cosinus selbstverständlich negativ ist.

Wirken z. B. in Fig. **368** an A und C die tangentialen Kräfte K_a, K_c im entgegengesetzten Sinne, so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn:

$$K_a \,.\, \overline{AA_\mathfrak{v}} - K_c \,.\, \overline{CC_\mathfrak{v}} = 0, \text{ oder:}$$

$$\frac{K_a}{K_c} = \frac{\overline{CC_\mathfrak{v}}}{\overline{AA_\mathfrak{v}}} \text{ ist.}$$

Hiernach wird durch eine im Punkte A tangential wirkende Kraft K_a eine in dem Punkte C tangential wirkende Kraft K_c erzeugt. Bei jedem Mechanismus verhält sich demnach die an einem Punkte eines Gliedes tangential wirkende Kraft K_m zu der dadurch erzeugten an einem Punkte eines anderen Gliedes oder auch desselben Gliedes tangential wirkenden Kraft K_n umgekehrt wie die Geschwindigkeiten v_m, v_n ihrer Angriffspunkte; und somit ist in Zeichen:

$$\frac{K_m}{K_n} = \frac{v_n}{v_m}.$$

Durch das Verhältniss der Geschwindigkeiten zweier beliebiger Gliedpunkte eines Mechanismus ist also stets auch das Verhältniss der betreffenden tangential wirkenden Kräfte bestimmt.

132. **Darstellungen der Geschwindigkeit und des Weges bei einem Doppelkurbelgetriebe.** Nehmen wir an, dass bei dem in Fig. **369** gezeichneten Doppelkurbelgetriebe die Kurbel ΦF mit constanter Geschwindigkeit rotire und dass die constante lothrechte Geschwindigkeit des Gelenkpunktes F gleich dem Kurbelradius $F\Phi$ sei, dann bestimmt die zur Koppel FL parallele Gerade $\Phi L_\mathfrak{v}$ auf dem anderen Kurbelradius ΛL die lothrechte Geschwindigkeit $LL_\mathfrak{v}$ des Gelenkpunktes L. Die von dem Endpunkte $L_\mathfrak{v}$ dieser veränderlichen lothrechten Geschwindigkeit gebildete Curve $\mathfrak{v}$ nennen wir das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm des Punktes L; denn dasselbe liefert für jeden Ort dieses Punktes auf dem Radius $L\Lambda$ von L aus nach dem betreffenden Curvenpunkte $L_\mathfrak{v}$ gemessen die zugehörige lothrechte Geschwindigkeit.

Wenn wir auf jener zu FL parallelen Geraden $\Phi L_\mathfrak{v}$ die Strecke $\Phi F_x = FL$ machen und das entstandene Parallelogramm ΦFLF_x als ein Gelenkparallelogramm betrachten, dann stellt $\Phi F_x L\Lambda$ ein Kurbelgetriebe dar, für welches $\Phi\Lambda$ der Steg ist; und der Punkt $L_\mathfrak{v}$ ist der Pol der Koppel F_xL im Bezug auf diesen Steg. Demnach erhalten wir den Satz:

Das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm für den ungleichförmig bewegten Gelenkpunkt L eines Kurbelgetriebes $\Phi FL\Lambda$ ist identisch mit der Polbahn eines anderen Kurbelgetriebes $\Phi F_xL\Lambda$, welches aus jenem durch Vertauschung der gleichförmig gedrehten Kurbel und der Koppel hervorgeht.

Nehmen wir auf dem Radius ΦF, der sich wegen der constanten Geschwindigkeit des Punktes F proportional der Zeit dreht, die Strecke $\Phi V_{IV} = L_0 L$, indem wir einfach parallel zu ΛL die Gerade ΦZ bis an die Koppel FL ziehen und $\Phi V_{IV} = \Phi Z$ machen; dann bilden die für verschiedene Lagen erhaltenen Punkte V_I, V_{II}, V_{III}, V_{IV}, .. eine Curve $\mathfrak{v}_2$, die wir das zeitliche polare Geschwindigkeitsdiagramm des Punktes L nennen. Jeder Fahrstrahl dieses Diagramms repräsentirt die Grösse der Geschwindigkeit des Punktes L zu der Zeit, in welcher der gleichförmig rotirende Kurbelradius sich in diesem Fahrstrahle befindet. In Fig. **369** schneidet dieses Diagramm $\mathfrak{v}_2$ den Bahnkreis φ in zwei Punkten, und diese bestimmen die betreffenden Zeitmomente, in denen die Geschwindigkeit des Punktes L gleich der constanten Geschwindigkeit des Punktes F ist.

Um die in Art. 3 angegebene graphische Darstellung der veränderlichen Geschwindigkeit des Punktes L auszuführen, theilen wir den Bahnkreis φ des Punktes F in eine Anzahl, etwa 24, gleicher Theile, und ebenso in Fig. **369**[a] auf der Zeitaxe eine gerade Strecke $T_0 T_{24}$, die zwar von beliebiger Grösse sein kann, aber gleich dem Umfange des Kreises φ gemacht ist, in dieselbe Anzahl gleicher Theile. Die Abstände dieser Theilpunkte von T_0 betrachten wir als Abscissen, die der Zeit proportional sind, und als orthogonale Ordinaten tragen wir die entsprechenden Geschwindigkeiten des Punktes L an. Wenn der Punkt F von F^0 ausgeht und in der Richtung des gezeichneten Pfeiles auf dem Kreise φ die Theilpunkte $0, 1, 2, 3, 4$, .. durchschreitet, so entsprechen diesen Punkten die gleichbezeichneten Abscissenendpunkte $0, 1, 2, 3, 4$, .. auf der Zeitaxe $T_0 T_{24}$; und die zugehörigen Ordinaten $0 V_0$, $1 V_1$, $2 V_2$, $3 V_2$, $4 V_4$, .. sind beziehlich gleich den in Fig. **369** gezeichneten Geschwindigkeiten oder Fahrstrahlen ΦV^0, ΦV_I, ΦV_{II}, ΦV_{III}, ΦV_{IV}, .. Die Curve $\mathfrak{v}_3$, welche von den Punkten V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, .. gebildet wird, heisst das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm des Punktes L. Dieses Diagramm liefert ein klares übersichtliches Bild von der gesetzmässigen Veränderlichkeit der Geschwindigkeit des Punktes L während einer ganzen Umdrehung der gleichförmig rotirenden Kurbel ΦF; es zeigt ein Maximum und ein Minimum dieser Geschwindigkeit. Die im Abstande gleich ΦF zur Abscissenaxe $T_0 T_{24}$ parallel gezogene Gerade χ repräsentirt das Diagramm für die constante Geschwindigkeit des Punktes F; und aus den Abweichungen des Diagrammes $\mathfrak{v}_3$ von dieser Geraden χ erkennen wir die Ungleichförmigkeit der Bewegung des Punktes L im Vergleiche zu der gleichförmigen Bewegung des Punktes F. Den Schnittpunkten, welche χ mit $\mathfrak{v}_3$ bildet, entsprechen die Zeitmomente, in denen die Punkte F und L gleiche Geschwindigkeit besitzen.

Um eine graphische Darstellung der vom Punkte L in verschiedenen Zeiten durchlaufenen Weglängen zu erhalten, sind in Fig. **369**^{a} zugleich als Ordinaten die entsprechenden Weglängen aufgetragen, welche wir in Fig. **369** auf dem Bahnkreise λ von dem in der Centralen liegenden Anfangspunkte K aus messen. Demnach müssen wir, weil der Ausgangslage F^0 des Punktes F die Lage L^0 des Punktes L auf dem Bahnkreise λ entspricht, die Anfangsordinate oW_0 in Fig. **369**^{a} negativ nehmen und gleich dem Bogen $K\lambda L^0$ machen. In gleicher Weise werden die übrigen Ordinaten gleich dem entsprechenden Bogen gemacht; so ist z. B. die positive Ordinate $4W_4$ gleich dem Bogen KL. Die so erhaltene Curve $\mathfrak{w}$ wird das orthogonale Wegdiagramm genannt. Die Längenbestimmung der Kreisbögen lässt sich angenähert am einfachsten ausführen, wenn wir nach der bekannten Weise, wie in Art. 64, eine auf T_0T_{24} senkrechte gerade Strecke construiren, welche dem Umfange des Kreises λ graphisch gleich ist, dann diese Strecke und diesen Kreis vom Punkte K aus in dieselbe Anzahl gleicher Theile theilen. Zu den Lagen von F in den Theilpunkten des Bahnkreises φ bestimmen wir die entsprechenden Lagen von L auf dem Bahnkreise λ, übertragen dieselben auf jene gerade Strecke, indem wir den kleinen Bogen von einer solchen Lage bis zum nächstliegenden Theilpunkte als geradlinig ansehen, und machen die entsprechenden Ordinaten gleich den so erhaltenen Weglängen. Wäre die Bewegung des Punktes L auf dem Kreise λ gleichförmig, dann würde das zugehörige Wegdiagramm durch die Verbindungsgerade W_0W_{24} dargestellt; und demnach geben uns die Abweichungen der Curve $\mathfrak{w}$ von dieser Geraden ein Bild der ungleichförmigen Zunahme der Weglängen.

Bezeichnet ds die unendlich kleine Zunahme der Weglänge in einer unendlich kleinen Zeit dt, so ist die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Dieser Werth erreicht ein Maximum oder Minimum in den Wendepunkten des Wegdiagrammes $\mathfrak{w}$, und diesen entsprechen beziehlich in denselben Ordinaten liegend die Maximal- oder Minimalpunkte des Geschwindigkeitdiagramms $\mathfrak{v}_3$.

133. **Darstellungen der Geschwindigkeit und des Weges bei einem Schwingkurbelgetriebe.** In gleicher Weise wie vorhin ist

mit gleichartiger Bezeichnung in Fig. **370** bei einem Schwingkurbelgetriebe, unter Annahme, dass die Kurbel ΦF sich gleichförmig dreht und die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes F gleich dem Kurbelradius $F\Phi$ sei, das zugehörige örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ construirt. Der ausgezogene nach dem Innern des Bahnkreises λ gewendete Theil desselben entspricht der Bewegung des Punktes L von L^1 bis L^2 resp. der Drehung des Punktes F von F^1 bis F^2; der strichpunktirte ausserhalb des Bahnkreises λ befindliche Theil entspricht der umgekehrten Bewegung des Punktes L von L^2 bis L^1 beziehlich der im Sinne des Pfeiles fortgesetzten Drehung des Punktes F von F^2 bis F^1. Das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$, welches den Bahnkreis λ in den Umkehrpunkten L^1, L^2 schneidet, besteht hier aus einem Oval.

Bei dem zeitlichen polaren Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_z$ ist es zweckmässig, die Geschwindigkeit $\Phi V = \Phi Z = L_\mathfrak{v} L$ stets von Φ nach F gerichtet auf den Kurbelradius ΦF abzutragen, obwohl die Geschwindigkeit ihren Richtungssinn ändert. Dadurch erhält dieses Diagramm eine schleifenförmige Gestalt. Der ausgezogene Theil desselben entspricht der Bewegung des Punktes L von L^1 bis L^2, der strichpunktirte Theil dagegen entspricht der umgekehrten Bewegung des Punktes L. Richtiger würde es zwar sein, wenn der Punkt L seine Bewegung im entgegengesetzten Sinne vollzieht, auch die Geschwindigkeit auf den Radius ΦF entgegengesetzt, also auf seine über Φ hinausgehende Verlängerung abzutragen; dann erhält das Diagramm aber eine verschlungene Gestalt und dadurch wird die Uebersichtlichkeit beeinträchtigt. Das zeitliche polare Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_z$ schneidet den Bahnkreis φ in vier Punkten und dem gemäss wird in den entsprechenden vier Zeitmomenten die veränderliche Geschwindigkeit des Punktes L gleich der constanten Geschwindigkeit des Punktes F. Zwei dieser Zeitmomente treten ein, wenn die Koppel $F_x L$ des gedachten Kurbelgetriebes $\Phi F_x L \Lambda$ in die Gerade ΛL fällt, die Glieder ΦF, ΛL also parallel werden, und diese beiden Lagen lassen sich auch leicht direct bestimmen. Den beiden anderen Zeitmomenten entsprechen die Lagen, in denen das Viereck $\Phi F L L_\mathfrak{v}$ ein gleichschenkeliges Trapez wird, dessen Seiten ΦF, $L_\mathfrak{v} L$ gleich sind.

Für das betrachtete Schwingkurbelgetriebe ist das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_\mathfrak{z}$ und das orthogonale Wegdiagramm $\mathfrak{w}$ in Fig. **370^a** gezeichnet, bei denen der Abscissenanfang T_0 dem Ausgangspunkte F^0 entspricht. Von dem Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_\mathfrak{z}$ ist analog, wie in Fig. **370**, der Theil ausgezogen, welcher der Bewegung des Punktes L von L^1 bis L^2 oder der Drehung des Punktes F von F^1 bis F^2 entspricht, und der übrige Theil strichpunktirt. Für das Wegdiagramm sind die Weglängen von der Mitte K des Schwingbogens L^1L^2 ausgemessen; der Anfangslage F^0L^0 entspricht demnach die positive Weglänge T_0W_0, die gleich dem Bogen KL^0 ist. Wenn F sich in F^1 befindet, ist die Weglänge gleich dem Bogen KL^1 und im positiven Sinne zu einem Maximum geworden. Von da an nimmt die Weglänge ab, wird gleich Null, wenn L die Bogenmitte K passirt und erlangt in negativer Richtung ein Maximum, wenn F den Punkt F^2 oder L den Umkehrpunkt L^2 erreicht.

134. **Darstellungen der Geschwindigkeit und des Weges bei einem durchschlagenden Schwingkurbelgetriebe.** In Fig. **371** sind in der angegebenen Weise für ein durchschlagendes Schwingkurbelgetriebe, dessen Kurbel ΦF sich gleichförmig dreht, die zugehörigen Geschwindigkeitsdiagramme $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}_z$ gezeichnet, welche in diesem Falle beide von der Centralen $\Phi\Lambda$ symmetrisch getheilt werden. Befindet sich F in dem Wechselpunkte F^1, also L in dem Umkehrpunkte L^1, dann ist die Geschwindigkeit von L gleich Null. Wenn F in der Richtung des Pfeiles nach dem Punkte F^0 gelangt, den wir als Ausgangspunkt betrachten wollen, dann ist L nach L^0 gekommen, und beide Punkte F, L überschreiten durch Beharrungsschluss vermittelt gleichzeitig in gleicher Richtung die Centrale. In diesem Momente klappen alle Glieder zusammen und die Geschwindigkeit von L kann für diese Lage nicht wie bisher bestimmt werden; sie erfordert eine besondere Construction, die wir in Nachfolgendem mittheilen. Hat F den zweiten Wechselpunkt $\mathfrak{F}^1$ erreicht, dann ist L nach dem zweiten Umkehrpunkte $\mathfrak{L}^1$ gelangt, in welchem die Geschwindigkeit wieder gleich Null ist. Für die Durchschreitung des Bogens $L^1L^0\mathfrak{L}^1$ sind in beiden Geschwindigkeitsdiagrammen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}_z$ die entsprechenden Curventheile ausgezogen. Bei fortgesetzter Drehung des Punktes F durchläuft der Punkt L diesen Bogen rückwärts, und wenn F eine ganze Umdrehung vollendet hat, sich also wieder in F^0 befindet, überschreitet L die Centrale in entgegengesetzter Richtung mit einer noch besonders zu bestimmenden Geschwindigkeit. Während F eine zweite von F^0 ausgehende Drehung beendet, bewegt sich L nach L^1 und kehrt nach L^0 zurück. Der Punkt L durchschreitet nur einmal hin- und hergehend den Bogen $L^1L^0\mathfrak{L}^1$, wenn F zwei ganze Umdrehungen vollendet. Für die Durchschreitung dieses Bogens im Sinne $\mathfrak{L}^1L^0L$ sind in beiden Geschwindigkeits-

diagrammen $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}_z$ die entsprechenden Curventheile strichpunktirt gezeichnet.

Um die Geschwindigkeiten $L^0 L_{\mathfrak{v}}'$, $L^0 L_{\mathfrak{v}}''$ des Punktes L in den beiden Durchschlagslagen zu erhalten, haben wir zu beachten, dass die Punkte $L_{\mathfrak{v}}'$, $L_{\mathfrak{v}}''$ identisch sind mit den beiden Polen, welche bei dem gedachten Kurbelgetriebe $\Phi F_x L \Lambda$ auftreten, wenn die Koppel $F_x L$ sich in der Lage $F_x^0 L^0$, also in der Durchschlagslage befindet; denn das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ ist die Polbahn für dieses Kurbelgetriebe, und die Punkte $L_{\mathfrak{v}}'$, $L_{\mathfrak{v}}''$ sind die Scheitel derselben. Diese Punkte liegen nach Art. 51 harmonisch zu den beiden Punktpaaren ΛF_x^0, ΦL^0 und werden, wie dort angegeben, in folgender Weise construirt. Wir beschreiben über das eine dieser Punktpaare, z. B. über ΦL^0, als Durchmesser einen Kreis k, ferner durch das andere Punktpaar ΛF_x^0 einen beliebigen Kreis $\mathfrak{k}$, der k in zwei Punkten G, H schneidet, ziehen die gemeinschaftliche Secante GH bis zum Schnittpunkte O mit der Geraden $\Phi\Lambda$, bestimmen den Berührungspunkt T einer von O an k gelegten Tangente; dann schneidet der um O mit OT als Radius beschriebene Kreis die Gerade $\Phi\Lambda$ in den Punkten $L_{\mathfrak{v}}'$, $L_{\mathfrak{v}}''$.

In Fig. 371[a] ist das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_3$ und das orthogonale Wegdiagramm $\mathfrak{w}$ gezeichnet. Dieselben beginnen mit der Anfangslage F^0 und L^0, in welcher die Koppelpunkte F, L die Centrale in gleicher Richtung überschreiten. Die Anfangsordinate $T_0 V_0$ stellt die eben gefundene Geschwindigkeit $L^0 L_{\mathfrak{v}}'$ dar, welche in diesem Momente ein Maximum erreicht. Die Geschwindigkeit nimmt dann ab, wird gleich Null, schneidet dem entsprechend die Zeitaxe $T_0 T$, erreicht in entgegengesetzter Richtung ein Maximum und darauf nach einem vollen Umlauf von F ein Minimum $T_\tau V_\tau$, welches gleich der eben construirten Geschwindigkeit $L^0 L_{\mathfrak{v}}''$ ist. Für den zweiten Umlauf des Punktes F ergiebt sich der andere symmetrische Curventheil des Geschwindigkeitsdiagrammes $\mathfrak{v}_3$. Da wir die Weglängen von L^0 aus messen und darunter die Bogenlängen verstehen, welche der bewegte Punkt L und der feste Punkt L^0 auf dem Bahnkreise λ zwischen sich fassen, so ist die Anfangsordinate des Wegdiagramms $\mathfrak{w}$ gleich Null. Die Weglänge nimmt zu, bis sie für die Punktlage $\mathfrak{L}^1$ ein Maximum erreicht, welches durch die Ordinate $5 W_5 = \widehat{L^0 \mathfrak{L}^1}$ dargestellt ist. Hierauf nimmt die Weglänge ab und wird wieder gleich Null, wenn der Punkt F eine Umdrehung beendet hat. Für die zweite Umdrehung dieses Punktes ergiebt sich der zweite im Bezug auf den Punkt T_τ centrisch symmetrisch gelegene Curventheil des Wegdiagramms.

135. **Darstellungen der Geschwindigkeit und des Weges bei den Zwillingskurbelgetrieben.** Bei dem in Fig. **372** dargestellten gleichläufigen Zwillingskurbelgetriebe $\Phi F L \Lambda$ nehmen wir an, dass die Kurbel ΦF sich gleichförmig drehe und die constante lothrechte Geschwindigkeit des Punktes F wieder gleich dem Kurbelradius $F\Phi$ sei. Die zur Koppel FL parallele Gerade $\Phi L_{\mathfrak{v}}$ bestimmt auf der verlängerten Geraden $L\Lambda$ die lothrechte Geschwindigkeit $LL_{\mathfrak{v}}$ des Punktes L. Construiren wir nun, indem wir auf dieser parallelen Geraden $\Phi F_x = FL = \Phi\Lambda$ machen, das gleichschenkelige Doppelkurbelgetriebe $\Phi F_x L \Lambda$, so ist das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ für den Punkt L des Zwillingskurbelgetriebes identisch mit der Polbahn dieses gleichschenkeligen Doppelkurbelgetriebes und dem zufolge eine Pascal'sche Curve, die wir auch leicht, wie in Art. 130 angegeben wurde, direct construiren können.

Tragen wir auf die gleichförmig rotirende Kurbel ΦF die Strecke $\Phi V = L_{\mathfrak{v}} L$ ab, dann ist V ein Punkt des zeitlichen polaren Geschwindigkeitsdiagrammes $\mathfrak{v}_z$ des Punktes L. Dieser Punkt V ergiebt sich aber in einfacherer Weise, indem wir zu $\Phi\Lambda$ durch L die Parallele LV bis an die verlängerte Kurbel ΦF ziehen; denn die Gerade LV muss wegen der symmetrischen Gestalt des überschlagenen Vierecks $\Phi\Lambda L F$, und weil $\Phi L_{\mathfrak{v}}$ parallel FL ist, dem Stege $\Phi\Lambda$ parallel sein.

Die Polbahn π ist bei dem gleichläufigen Zwillingskurbelgetriebe nach Art. 129 eine Ellipse, deren Hauptaxe gleich der Kurbellänge c ist und deren Brennpunkte die festen Axenpunkte Φ, Λ sind. Bezeichnen wir den Winkel $\Lambda\Phi\mathfrak{P}$ mit ψ, so ist die Polargleichung dieser Ellipse für den Brennpunkt Φ als Ursprung:

$$\Phi\mathfrak{P} = \frac{1}{2}\,\frac{c^2 - a^2_*}{c - a\cos\psi}.$$

Wegen der Parallelen $\Phi\Lambda$, LV ergiebt sich:

$$\frac{\Phi V}{\Phi\mathfrak{P}} = \frac{\Lambda L}{\Lambda\mathfrak{P}} = \frac{c}{c - \Phi\mathfrak{P}},$$

und demnach erhalten wir für das zeitliche polare Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_z$ die Polargleichung:

$$\Phi V = \frac{c\,(c^2 - a^2)}{c^2 + a^2 - 2\,a\,c\cos\psi},$$

welche eine Ellipse liefert, deren Brennpunkt Φ ist und deren

Hauptaxe in der Centralen $\Phi\Lambda$ liegt. Wenn die Kurbel ΛL senkrecht $\Phi\Lambda$ gedreht wird, befindet sich der Punkt V, weil LV parallel $\Phi\Lambda$ ist, im Endpunkte V_r der kleinen Axe dieser Ellipse. Ihre kleine Halbaxe ist demnach gleich der Kurbellänge c und ihre grosse Halbaxe gleich dem Fahrstrahle ΦV_r, und somit kann diese Ellipse vermittelst ihrer Axen leicht construirt werden. Bezeichnen wir die Endpunkte der grossen Ellipsenaxe mit V^0, V^τ, dann stellt ΦV^0 die grösste und ΦV^τ die kleinste Geschwindigkeit des Punktes L dar.

Analoge Beziehungen ergeben sich bei dem in Fig. **373** dargestellten gegenläufigen Zwillingskurbelgetriebe, wenn wir annehmen, dass die Kurbel ΛL sich gleichförmig drehe und die constante lothrechte Geschwindigkeit des Punktes L gleich dem Kurbelradius $L\Lambda$ sei. Dann bestimmt die zur Koppel LF parallele Gerade $\Lambda F_\mathfrak{v}$ auf der verlängerten Geraden ΦF die lothrechte Geschwindigkeit $FF_\mathfrak{v}$ des Punktes F. Machen wir auf $\Lambda F_\mathfrak{v}$ die Strecke $\Lambda L_x = LF = \Lambda\Phi$, dann wird durch das Gelenkviereck $\Phi F L_x \Lambda$ ein gleichschenkeliges Schwingkurbelgetriebe dargestellt, dessen Pol der Punkt $F_\mathfrak{v}$ ist. Dem zufolge ist das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ des Punktes F des gegenläufigen Zwillingskurbelgetriebes identisch mit der Polbahn dieses gleichschenkeligen Schwingkurbelgetriebes und somit eine Pascal'sche Curve.

Machen wir auf der Verlängerung der gleichförmig rotirenden Kurbel $L\Lambda$ die Strecke $\Lambda V = FF_\mathfrak{v}$, dann ist V ein Punkt des zeitlichen polaren Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}_z$ des Punktes F. Diesen Punkt V erhalten wir aber leichter, indem wir zu $\Phi\Lambda$ durch F die Parallele FV bis an die verlängerte Kurbel $L\Lambda$ ziehen; denn die Gerade FV muss wegen der symmetrischen Gestalt des überschlagenen Vierecks $\Phi\Lambda LF$, und weil $\Lambda F_\mathfrak{v}$ parallel FL ist, zu $\Phi\Lambda$ parallel sein. In gleicher Weise wie vorhin können wir auch hier vermittelst der Polbahn π, die nach Art. 129 in diesem Falle eine Hyperbel ist, die Gleichung dieses Geschwindigkeitsdiagramms ableiten. Dieselbe ergiebt sich aber leichter aus der betreffenden obigen Gleichung durch Vertauschung der Grössen $\Phi\Lambda = c$, $\Lambda L = a$, und es ist demnach, wenn wir den Winkel $\Phi\Lambda L$ mit ψ bezeichnen:

$$\Lambda V = \frac{a(a^2 - c^2)}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\psi}.$$

Dies ist die Polargleichung einer Ellipse, deren einer Brennpunkt Λ

ist und deren Hauptaxe in der Centralen $\Phi\Lambda$ liegt. Da c grösser als a ist, so ist der Fahrstrahl negativ und dem gemäss muss derselbe auf die über Λ hinaus verlängerte Kurbel L abgetragen werden. Wenn die Kurbel ΦF senkrecht auf $\Phi\Lambda$ steht, befindet sich der Punkt V in dem Endpunkte V_r der kleinen Axen dieser Ellipse. Ihre kleine Halbaxe ist also gleich der Kurbellänge a und ihre grosse Halbaxe gleich dem Fahrstrahle ΛV_r.

Aus jener Polargleichung der Ellipse, die in Fig. **372** das Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_z$ darstellt, und aus der eben erhaltenen Polargleichung der Ellipse, die in Fig. **373** das Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_z$ repräsentirt, folgt, dass für denselben Winkel ψ die zugehörigen Fahrstrahlen ΦV, ΛV sich wie $c:a$ verhalten, also im constanten Verhältnisse stehen. Dem zufolge ist das zeitliche polare Geschwindigkeitsdiagramm für den Punkt L in Fig. **373** ähnlich dem zeitlichen polaren Geschwindigkeitsdiagramm für den Punkt F in Fig. **372**. Die Veränderlichkeit der Rotationsbewegung der Kurbel ΛL des gleichläufigen Zwillingskurbelgetriebes in Fig. **372** und der Kurbel ΦF des gegenläufigen Zwillingskurbelgetriebes in Fig. **373** ist also identisch, wenn die anderen Kurbeln dieser beiden Zwillingskurbelgetriebe mit gleicher constanter Drehgeschwindigkeit im entgegengesetzten Sinne rotiren.

Für das in Fig. **373** dargestellte gegenläufige Zwillingskurbelgetriebe ist in Fig. **373**[a] das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_\mathfrak{z}$ und das orthogonale Wegdiagramm $\mathfrak{w}$ des Punktes F gezeichnet, wenn derselbe von F^0 ausgehend sich in der Pfeilrichtung bewegt. Das Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_\mathfrak{z}$ ist im Bezug auf die Mittelordinate $T_\tau V_\tau$ symmetrisch. In den Durchschlagslagen $F^0 L^0$, $F^\tau L^\tau$ der Koppel FL erreicht die Geschwindigkeit des Punktes F resp. ein Maximum $T_0 V_0 = \Lambda V^0$ und ein Minimum $T_\tau V_\tau = \Lambda V^\tau$. In den beiden Momenten, in denen die Kurbeln ΦF, ΛL parallel stehen, sind die Geschwindigkeiten der Punkte L, F gleich. Ziehen wir im Abstande gleich der Kurbellänge a zur Zeitaxe $T_0 T_{24}$ die parallele Gerade χ, welche das Diagramm der constanten Geschwindigkeit des Punktes L darstellt, so wird durch die Abweichung der Curve $\mathfrak{v}$ von dieser Geraden die Abweichung der veränderlichen Geschwindigkeit des Punktes F von der constanten Geschwindigkeit des Punktes L veranschaulicht. Das Wegdiagramm $\mathfrak{w}$ ist bezüglich des Punktes W_τ centrisch symmetrisch; und die Abweichung von der Geraden $T_0 W_{24}$ giebt uns ein Bild von der ungleichförmigen Zunahme des Weges des Punktes F.

136. **Darstellungen der Geschwindigkeiten bei einem gleichschenkeligen Doppelkurbel- und Schwingkurbelgetriebe.** Betrachten wir in Fig. **374**, Taf. XXVI, das gleichschenkelige Doppelkurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$, dessen Gliedlängen mit denen des vorhin behandelten Zwillingskurbelgetriebes übereinstimmen, so erkennen wir leicht, wenn der Punkt F mit der constanten Geschwindigkeit gleich $F\Phi$ rotirt, dass das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ des Punktes L mit der Polbahn π jenes in Fig. **372** dargestellten Zwillingskurbelgetriebes identisch und somit eine Ellipse ist, deren Brennpunkte Φ, Λ sind, und deren grosse Axe die Koppellänge FL hat. Denn ziehen wir zu FL die Parallele $\Phi L_{\mathfrak{v}}$, und machen wir auf derselben $\Phi F_x = FL$, dann erhalten wir das Zwillingskurbelgetriebe $\Phi F_x L\Lambda$, dessen Pol $L_{\mathfrak{v}}$ ist.

Nehmen wir dagegen an, dass sich der Punkt L mit der constanten Geschwindigkeit gleich $L\Lambda$ dreht, dann bestimmt die zu LF parallele Gerade $\Lambda F^{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit $FF^{\mathfrak{v}}$ des Punktes F. Machen wir auf dieser parallelen Geraden die Strecke $\Lambda L^x = LF$, so bildet das entstandene Viereck $\Phi FL^x\Lambda$ nur eine andere Lage des Doppelkurbelgetriebes $\Phi FL\Lambda$; und demnach ist die Polbahn π desselben zugleich das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm für den Punkt F, wenn die grössere Kurbel gleichförmig rotirt.

In Fig. **375** ist eins der grösseren Glieder dieses Mechanismus als Steg $\Phi\Lambda$ genommen. Wir erhalten dann das gleichschenkelige Schwingkurbelgetriebe. Wenn der Punkt F die constante lothrechte Geschwindigkeit $F\Phi$ besitzt, ist die Polbahn π zugleich das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm des Punktes L. Denn das Viereck $\Phi F_x L\Lambda$, welches entsteht, indem wir auf der zur Koppel FL parallelen Geraden $\Phi L_{\mathfrak{v}}$ die Strecke $\Phi F_x = FL$ machen, liefert nur eine andere Lage des Schwingkurbelgetriebes $\Phi FL\Lambda$.

Nehmen wir dagegen an, dass die Schwinge ΛL sich gleichförmig bewegt, der Punkt L also die constante lothrechte Geschwindigkeit $L\Lambda$ besitzt; dann ist das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ des Punktes F mit der Polbahn des betreffenden Zwillingskurbelgetriebes $\Phi FL^x\Lambda$ identisch, und demnach eine Hyperbel, deren Brennpunkte Φ, Λ sind, und deren Hauptaxe gleich der Koppellänge FL ist. Die Annahme der gleichförmigen Bewegung der Schwinge ΛL kann jedoch nur als eine theoretische betrachtet werden; denn die lothrechte Geschwindigkeit $FF^{\mathfrak{v}}$ des Punktes F wird unendlich gross, wenn L sich in den Umkehrpunkten L^1, $\mathfrak{L}^1$ befindet, und praktisch ist es nicht möglich, dass der Punkt L in diesen Umkehrpunkten momentan eine Geschwindigkeit von endlicher Grösse erhalte.

Bei diesem gleichschenkeligen Schwingkurbelgetriebe ist in Fig. **376** die Koppel FL weggemindert und dafür in der Schwinge ΛL ein halbkreisförmiger Schlitz angebracht, der von der Geraden ΛL begrenzt wird und dessen mittlerer Radius gleich LF ist. In diesem Schlitze wird der Kurbelzapfen F geführt. Wenn nun die Kurbel ΦF gleichförmig mit der Geschwindigkeit gleich $F\Phi$ gemäss der Pfeilrichtung rotirt, so bleibt während der halben Kurbelumdrehung von ΦF^τ bis ΦF^0 die Schwinge ΛL in Ruhe, erhält aber in F^0 einen Stoss und wird während der anderen halben Kurbelumdrehung in eine Schwingung versetzt. Das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ des Schwingenpunktes L besteht demnach aus der halben Pascal'schen Curve $L_\mathfrak{v}^0 \mathfrak{P} L_\mathfrak{v}^\tau$ und aus dem isolirten Punkte Φ. Zwar wird bei der Anwendung der Punkt L, wenn F sich in F^0 befindet, nicht momentan die zugehörige theoretische Geschwindigkeit annehmen, welche gleich der Strecke $\Phi L_\mathfrak{v}^0$ ist, aber schon in grösster Nähe von $L_\mathfrak{v}^0$ wird die Abweichung von dem Diagramm $\mathfrak{v}$ verschwinden. Für die gezeichnete Lage liefert die zu FL parallele Gerade $\Phi L_\mathfrak{v}$ für den Punkt L die lothrechte Geschwindigkeit $LL_\mathfrak{v}$, welche allmählig abnimmt, und nachdem L in die äusserste Lage L^1 gekommen ist, gleich Null wird. Von da an nimmt diese Geschwindigkeit rasch zu, erreicht ein Maximum von der Grösse $\Phi L_\mathfrak{v}^\tau$, wenn F nach F^τ gelangt ist. Diese Geschwindigkeit wird in der Praxis meist durch Aufschlagen der Schwinge auf einen angebrachten Widerstand vernichtet. Während der weiteren halben Umdrehung des Punktes F ruht der Schwingenpunkt L in Φ, und der entsprechende Theil des Geschwindigkeitsdiagramms wird dem zufolge durch den Punkt Φ vertreten. In dieser Gestalt wird dieses Getriebe besonders bei der Ladenbewegung der Webstühle angewendet[1]), und ist auch bei der Friedrich'schen Stimmplattenstanze[2]) zweifach angebracht.

---

[1]) Zuerst von J. Todd, *Specification* No. 2698, 14. April 1803, dann von J. Garnett und J. Mason, *Specification* No. 9078, 8. Sept. 1841, ferner von A. Turner, *Specification* No. 1032, 11. April 1865. Vergl. „Zusammenstellung der verschiedenen Ladenbewegnngen an mechanischen Webstühlen" von Kohl in den *Mittheilungen des Gewerbevereins zu Hannover*. 1872. S. 414.

[2]) *Deutsches Reichspatent* Nr. 15810 vom 28. Januar 1881.

Specielle Arten einfacher ebener Mechanismen.

137. **Die vier Hauptspecialfälle einfacher ebener Mechanismen.** Vermittelst Ersetzung von Drehpaarung durch Richtpaarung gehen aus dem einfachen ebenen Mechanismus mit vier Drehpaarungen die folgenden vier Mechanismenarten hervor:

1. Der Schubkurbelmechanismus mit einer Richtpaarung und drei Drehpaarungen.

2. Der Kreuzkurbelmechanismus mit zwei benachbarten Richtpaarungen und zwei benachbarten Drehpaarungen.

3. Der Schleifschiebermechanismus mit zwei gegenüber liegenden Richtpaarungen und zwei gegenüber liegenden Drehpaarungen.

4. Der Dreirichtmechanismus mit drei Richtpaarungen.

138. **Der Schubkurbelmechanismus. — Das Schubkurbelgetriebe und das Schleifkurbelgetriebe nebst deren speciellen Arten.** Um die Umwandlung einer Drehpaarung in eine Richtpaarung anschaulich auszuführen, ersetzen wir in Fig. **377**, Taf. XXVI, bei einem Kurbelmechanismus $\Phi F L \Lambda$, dessen Gliedlängen $\Lambda\Phi$, ΦF, $F L$, $L\Lambda$ wir wieder resp. mit a, b, c, d bezeichnen, das Glied ΛL durch einen in L drehbar an die Koppel FL angeschlossenen Bogenschieber, der sich im Gliede $\Phi\Lambda$ innerhalb eines Bogenschlitzes bewegt, dessen Mittelpunkt Λ ist. Der um Λ mit dem Radius $\Lambda L = d$ beschriebene Bahnkreis λ des Punktes L schneidet $\Phi\Lambda$ einerseits in dem Punkte E, und es ist somit die Strecke $\Phi\mathsf{E} = a - d = \varepsilon$. Denken wir uns nun, ohne die Streckendifferenz $\Phi\mathsf{E} = \varepsilon$ zu verändern, den Radius d des Kreises λ unendlich gross genommen, den Punkt Λ also auf der Geraden $\Phi\mathsf{E}$ ins Unendliche verlegt, dann geht der bogenförmige Schlitz, der auch Schleife oder Schleufe genannt wird, wie die Fig. **378** dargestellt, in einen geradlinigen Schlitz und der Kreis λ in eine Gerade λ über, die im Abstande ε von Φ auf $\Phi\Lambda^\infty$ senkrecht steht. Der so entstandene specielle Mechanismus, bei dem die Längen a, d der beiden Glieder $\Phi\Lambda^\infty$, $L\Lambda^\infty$ unendlich lang sind, wird durch die endlichen Längen b, c der beiden Glieder ΦF, FL und jene endliche Differenz ε der beiden unendlich langen Glieder bestimmt; derselbe wird ein Schubkurbelmechanismus genannt, und aus ihm ergeben sich, je nachdem eins der unendlichen Glieder oder eins der endlichen Glieder als Steg genommen wird, zwei wesentlich verschiedene Getriebe:

Das Schubkurbelgetriebe, wenn eins der unendlichen Glieder $\Phi\Lambda^\infty$, $L\Lambda^\infty$ festgestellt wird.

Das Schleifkurbelgetriebe, wenn eins der endlichen Glieder ΦF, FL festgehalten wird.[1])

Je nachdem bei dem Schubkurbelgetriebe, welches auch, wenn ε nicht gleich Null ist, ein excentrisches Schubkurbelgetriebe heisst, die Koppel $c \gtreqless b + \varepsilon$ ist, erhalten wir resp. die folgenden drei Arten des Schubkurbelgetriebes:

das rotirende Schubkurbelgetriebe,
das durchschlagende Schubkurbelgetriebe,
das schwingende Schubkurbelgetriebe.

In Fig. **378** und **379** ist, wenn wir ΦE als Steg betrachten, ein rotirendes Schubkurbelgetriebe in zwei verschiedenen Formen dargestellt. Im ersten Falle besteht das Glied $L\Lambda^\infty$ aus einem Schlitten, der in einem geradlinigen Schlitze des Gliedes $\Phi\Lambda^\infty$ gleitet, im zweiten aus einer Stange, die sich in einer Hülse des Gliedes $\Phi\Lambda^\infty$ verschiebt. Da $c > b + \varepsilon$ ist, so kann die Kurbel ΦF ganze Umdrehungen vollziehen, und während einer Umdrehung schwingt der Punkt L in der Geraden λ hin und her.

Wenn insbesondere $c = b + \varepsilon$ genommen wird, dann geht, weil der Punkt L mit E coincidiren kann, das Getriebe in ein durchschlagendes Schubkurbelgetriebe über; und bei der Voraussetzung, dass der Punkt L durch Beharrungsschluss den Punkt E überschreitet, wird während zweier Umdrehungen der Kurbel ΦF von dem Punkte L auf λ hin- und hergehend eine Schwingung vollendet.

Bei dem schwingenden Schubkurbelgetriebe ist $c < b + \varepsilon$, und dem zufolge kann wie der Punkt L, so auch der Punkt F nur Schwingungen machen.

Den allerwichtigsten Specialfall erhalten wir, wenn ΦE $= \varepsilon = o$ ist; dem gemäss geht die Gerade λ, die auch Schubgerade genannt wird, durch den festen Axenpunkt Φ, und dann ergeben sich, je nachdem $b \lesseqgtr c$ ist, resp. die drei specielleren Getriebearten:

---

[1]) Diese Benennung haben wir nicht in Hinsicht auf die Schleife oder Schleufe, welche über das Glied $L\Lambda^\infty$ gleitet, gewählt, denn dieselbe kann auch durch eine Stange ersetzt werden, die in einer um L drehbaren Hülse gleitet; sondern weil das eine der beiden Glieder $\Phi\Lambda^\infty$, $L\Lambda^\infty$ an dem anderen entlang schleift, und als eine Schleife d. h. Schlitten, Rutsche betrachtet werden kann. Vergl. Sanders, *Wörterbuch der deutschen Sprache.* 2. Bd. 2. Hälfte. S. 952.

das centrische rotirende Schubkurbelgetriebe,
das gleichschenkelige Schubkurbelgetriebe,
das centrische schwingende Schubkurbelgetriebe.

In Fig. **380** ist das centrische rotirende Schubkurbelgetriebe dargestellt, welches in der Praxis von grösster Wichtigkeit ist und meist auch kurz als Schubkurbel bezeichnet wird. In Fig. **381** ist das gleichschenkelige Schubkurbelgetriebe dargestellt, bei welchem der Punkt L den Axenpunkt Φ überschreiten kann und im Bezug auf denselben symmetrisch hin und her schwingt.

Die Koppelcurve, welche in Fig. **378** von einem mit der Koppel FL verbundenen Punkte A beschrieben wird, ist von vierter Ordnung; denn denken wir uns die Koppel FL in F von der Kurbel ΦF losgelöst, dann den Punkt A auf einer beliebigen Geraden x bewegt, während der Punkt L auf der Geraden λ schreitet, so beschreibt der Punkt F nach Art. 18 eine Ellipse, die den Bahnkreis φ im Allgemeinen in vier Punkten schneidet. Wenn wir jetzt die Koppel in F wieder mit der Kurbel verbinden, so kann der bewegte Punkt A viermal in jene Gerade x gelangen, und folglich wird die Koppelcurve von einer beliebigen Geraden x im Allgemeinen in vier Punkten geschnitten. Der Punkt A beschreibt zunächst das ausgezogene Oval α. Verlegen wir aber den Punkt L nach rechts von E auf die Gerade λ, dann beschreibt der Punkt A das punktirte Oval α'. Die vollständige Koppelcurve besteht hier aus den beiden Ovalen α, α', welche die beiden Doppelpunkte G^I, G^{II} besitzen.

Bei dem allgemeinen Kurbelgetriebe liegen die Doppelpunkte der Koppelcurve auf einem Kreise ι, der durch die Punkte Φ, Λ geht und dessen über $\Phi\Lambda$ stehender Peripheriewinkel gleich dem Winkel FAL ist. In unserem speciellen Falle degenerirt dieser Kreis, weil der Punkt Λ im Unendlichen liegt, zu einer durch Φ gehenden Geraden, bei welcher der Winkel $\iota\Phi\Lambda^x = FAL$ ist. Die Doppelpunkte G^I, G^{II} liegen also in der so bestimmten Geraden ι. Es können aber, weil die Koppelcurve von der vierten Ordnung ist, auf dieser Geraden höchstens zwei Doppelpunkte liegen. Aus diesen Darlegungen ergiebt sich, dass bei dem Schubkurbelgetriebe die Koppelcurve von vierter Ordnung ist und höchstens zwei Doppelpunkte besitzt, die auf einer durch den festen Kurbelaxenpunkt Φ gehenden Geraden liegen.

Wenn wir die bei dem Kurbelgetriebe abgeleitete dreifache Erzeugung der Koppelcurve auch bei dem Schubkurbelgetriebe in

Anwendung bringen, dann erkennen wir, dass hier die Koppelcurve nur noch durch ein zweites Schubkurbelgetriebe erzeugt wird, und dass die dritte Erzeugungsweise wegen des Auftretens unendlich ferner Punkte sich der Betrachtung entzieht.

Verlängern wir in Fig. **381** bei dem gleichschenkeligen Schubkurbelgetriebe die Koppel LF über F hinaus bis J, so dass $FJ = LF = \Phi F$ ist, dann bewegt sich der Koppelpunkt J in der auf λ senkrechten Geraden ΦF^0, und wir erhalten dadurch eine Geradführung desselben. Wenn aber die Punkte L, J sich auf Geraden bewegen, beschreibt ein mit FL verbundener Punkt A nach Art. 18 eine Ellipse α, deren Mittelpunkt Φ ist. In den Durchschlagslagen der Koppel FL gelangt das Dreieck LFA resp. nach $\Phi F^0 G^0$ und $\Phi F^\tau G^\tau$; und die Bewegung kann sich verzweigen, indem das Dreieck LFA sich um den Punkt Φ, mit welchem die Ecke L coincidirt, dreht. Der Punkt A beschreibt dann um den Punkt Φ einen Kreis $\mathfrak{a}$, der die Ellipse α in den vier Punkten G^I, G^{II}, G^0, G^τ schneidet. Die Koppelcurve besteht also in diesem Specialfalle aus der Ellipse α und dem Kreise $\mathfrak{a}$, und besitzt vier Doppelpunkte G^I, G^{II}, G^0, G^τ, von denen G^0, G^τ Sonderdoppelpunkte sind. Die durch den Punkt Φ gehende Verbindungsgerade ι der Doppelpunkte G^I, G^{II} wird auch durch den Winkel $\iota \Phi \Lambda^\infty = FAL$ bestimmt.

Wir können somit auch aus diesem Specialfalle schliessen, dass im Allgemeinen bei dem Schubkurbelgetriebe die Koppelcurve von der vierten Ordnung ist, und können vermittelst lösender Schnitte durch die beiden Sonderdoppelpunkte eine Vorstellung von den verschiedenen Gestalten der Koppelcurve des Schubkurbelgetriebes gewinnen. Wenn der Punkt A in dem Gliede c auf dem Kreise liegt, dessen Mittelpunkt F und dessen Radius gleich FL ist, dann geht die Ellipse α nach Art. 18 in eine gerade Strecke über; und der Punkt A vollzieht in diesem besonderen Falle eine geradlinige Bewegung.

Eine analoge Reihe von speciellen Fällen erfolgt aus dem Schleifkurbelgetriebe, welches in Fig. **378** repräsentirt wird, wenn wir eins der endlichen Glieder, z. B. das Glied FL, als Steg betrachten. Ist $c < b + \varepsilon$, so wird, während das Glied $F\Phi$ eine Umdrehung um F vollendet, der Schlitzrahmen nebst dem Schieber, über welchen er hinwegschleift, auch eine Umdrehung um L machen. In dem besonderen Falle $c = b + \varepsilon$ gelangen die Punkte Φ, E gleichzeitig in die feste Gerade FL. Wenn $c > b + \varepsilon$, wie dies in Fig. **378** thatsächlich der Fall ist, so kann der Schlitzrahmen wie der Schieber nur Schwingungen ausführen, wenn das Glied $F\Phi$ um F ganze Umdrehungen vollzieht. Je nachdem nun bei dem Schleifkurbelgetriebe, welches auch, wenn ε nicht gleich Null ist, ein excentrisches Schleifkurbelgetriebe heisst, die Steglänge $c \lesseqgtr b + \varepsilon$ ist, erhalten wir beziehlich die folgenden drei Arten des Schleifkurbelgetriebes:

das rotirende Schleifkurbelgetriebe,
das durchschlagende Schleifkurbelgetriebe,
das schwingende Schleifkurbelgetriebe.

Aus diesen ergeben sich, wenn insbesondere $\varepsilon = 0$, die Gerade λ also durch den Axenpunkt Φ geht, resp. für $c \lesseqgtr b$ die die specielleren Getriebe:

das centrische rotirende Schleifkurbelgetriebe,
das gleichschenkelige Schleifkurbelgetriebe,
das centrische schwingende Schleifkurbelgetriebe.

Wenn wir in Fig. **381** eines der endlichen Glieder, z. B. das Glied ΦF, als Steg betrachten, erhalten wir ein gleichschenkeliges Schleifkurbelgetriebe. Bei diesem beschreibt ein Punkt des Gliedes $L\Lambda^{\infty}$, welches hier die Koppel vertritt, nach Art. 19 im Bezug auf den Steg eine Pascal'sche Curve, d. h. eine Fusspunktencurve eines Kreises. Fällt FL mit $F\Phi$ zusammen, dann kann Verzweigung der Bewegung des Gliedes $L\Lambda^{\infty}$ eintreten, und jener Punkt dieses Gliedes beschreibt um Φ einen Kreis. Die von dem gedachten Punkte beschriebene vollständige Koppelcurve besteht demnach aus der Pascal'schen Curve und aus diesem Kreise. Zwei der Schnittpunkte, welche dieser Kreis mit der Pascal'schen Curve bildet, entsprechen den beiden Durchschlagslagen und sind daher Sonderdoppelpunkte; und ausserdem können nur noch zwei Schnittpunkte resp. Doppelpunkte auf dem früher mit ι bezeichneten Kreise auftreten, der durch beide feste Axenpunkte des Steges geht. Wenn die Pascal'sche Curve, die von vierter Ordnung ist, einen Doppelpunkt besitzt, liegt auch dieser auf dem Kreise ι, und demnach enthält in dem betrachteten besonderen Falle die vollständige Koppelcurve fünf Doppelpunkte, von denen zwei Sonderdoppelpunkte sind. Durch auflösende Schnitte dieser Sonderdoppelpunkte ergiebt sich hiernach, dass bei dem Schleifkurbelgetriebe ebenso wie bei dem Kurbelgetriebe die Koppelcurve von sechster Ordnung ist und höchstens drei auf dem genannten Kreise ι befindliche Doppelpunkte besitzt.

In der Praxis kommt das centrische Schleifkurbelgetriebe am häufigsten vor. Wird in Fig. **380** das Glied c als Steg betrachtet, dann erhalten wir ein centrisches schwingendes Schleifkurbelgetriebe, bei welchem die in der Mittellinie des Schleifencylinders liegenden Punkte Kreisconchoiden beschreiben, die also von sechster Ordnung sind. Wird dagegen b als Steg genommen, dann entsteht ein centrisches rotirendes Schleifkurbelgetriebe, bei welchem die in der Mittellinie des Schiebergliedes liegenden Punkte Kreisconchoiden beschreiben.

139. **Der Kreuzkurbelmechanismus. — Das Kreuzkurbelgetriebe, das Kreuzschiebergetriebe und das Kreuzschleifengetriebe nebst deren speciellen Arten.** Damit wir in anschaulicher Weise durch eine weitergehende Specialisirung des einfachen ebenen Mechanismus mit vier Drehpaarungen, von denen zwei benachbarte in Richtpaarungen verwandelt werden, zu dem Kreuzkurbelmechanismus gelangen, ersetzen wir erstens in Fig. **382** bei dem Kurbelmechanismus $\Phi F L \Lambda$ das Glied $\Phi\Lambda$ durch einen in Φ drehbar an das Glied ΦF angeschlossenen Bogenschieber, der im Gliede $L\Lambda$ innerhalb eines kreisförmigen Schlitzes gleitet, dessen Mittelpunkt Λ ist; und ebenso ersetzen wir zweitens auch das Glied FL durch einen in F mit dem Gliede ΦF drehbar verbundenen Bogenschieber, der sich im Gliede $L\Lambda$ innerhalb eines kreisförmigen Schlitzes bewegt, dessen Mittelpunkt L ist. Das Glied $L\Lambda$ wird demnach durch die beiden gekreuzten bogenförmigen Schlitzrahmen vertreten, und in diesem Gliede beschreiben die Punkte F, Φ resp. die Kreise i_f, i_φ, welche sich im Punkte P unter dem mit i bezeichneten spitzen Winkel schneiden. Nehmen wir nun die Radien $FL = c$, $\Phi\Lambda = a$ der Kreise i_f, i_φ unendlich gross, verlegen wir also die beiden benachbarten Axenpunkte L, Λ ins Unendliche, dann gehen diese Kreise, wie die Fig. **383** darstellt, in die Geraden i_f, i_φ über, deren spitzer Schnittwinkel i dem spitzen Schnittwinkel der Geraden FL^∞, $\Phi\Lambda^\infty$ gleich ist, und jene kreisförmigen Schlitzrahmen werden geradlinig. Der so entstandene specielle Mechanismus, bei welchem die Längen der drei Glieder $\Phi\Lambda^\infty$, FL^∞, $L^\infty\Lambda^\infty$ unendlich gross sind, ist der K r e u z k u r b e l m e c h a n i s m u s; und in demselben kommen nur noch die endliche Länge b des Gliedes ΦF und der Winkel i als Bestimmungsgrössen vor. Aus dem Kreuzkurbelmechanismus gehen, wenn wir zunächst annehmen, dass der Winkel i kein rechter sei, drei verschiedene Getriebearten hervor, weil hier hinsichtlich der drei unendlich langen Glieder und des endlichen

Gliedes drei wesentlich verschiedene Gliedfeststellungen möglich sind:

das schräge Kreuzkurbelgetriebe, wenn eins von den unendlich langen, auch mit a_∞, c_∞ bezeichneten Gliedern $\Phi\Lambda^\infty$, FL^∞, welche an das endliche Glied ΦF angeschlossen sind, festgestellt wird;

das schräge Kreuzschiebergetriebe, wenn das unendlich lange, auch mit d_∞ bezeichnete Glied $L^\infty\Lambda^\infty$, welches dem endlichen Gliede ΦF gegenüber liegt, festgehalten wird;

das schräge Kreuzschleifengetriebe, wenn das endliche Glied ΦF fest ist.

Betrachten wir in Fig. **383** das Glied $\Phi\Lambda^\infty$, d. h. den Gleitbacken oder Schieber a_∞ als den Steg, dann ist das Getriebe ein schräges Kreuzkurbelgetriebe oder kurz benannt eine schräge Kreuzkurbel. Wenn die Kurbel ΦF um den festen Axenpunkt Φ rotirt, schwingt der Kreuzschlitzrahmen d_∞ des Gliedes $L^\infty\Lambda^\infty$ mit seinem einen Schlitze über dem festen Gleitbacken a_∞ gleitend hin und her, während der um F drehbare Schieber c_∞ in dem anderen Schlitze auf und nieder gleitet. Eine andere Form des schrägen Kreuzkurbelgetriebes ist in Fig. **384** gezeichnet. Hier ist der eine geradlinige Schlitz durch eine prismatische Stange λ ersetzt, welche sich in einer Hülse H des festen Gliedes a_∞ verschiebt.

Nehmen wir an, es sei in Fig. **383** das Glied $L^\infty\Lambda^\infty$, d. h. der Kreuzschlitzrahmen d_∞ fest, dann repräsentirt dasselbe das schräge Kreuzschiebergetriebe, bei welchem die beiden Schieber a_∞, c_∞ in den Schlitzen hin und her gleiten. Wird dagegen das Glied ΦF festgehalten, dann stellt die Fig. **383** ein schräges Kreuzschleifengetriebe dar. Bei demselben gleitet der Kreuzschlitzrahmen d_∞ über die beiden Schieber oder Gleitbacken a_∞, c_∞, welche resp. um die festen Axenpunkte Φ, F rotiren.

In Fig. **385** und **386** sind für den Specialfall, dass der Winkel i ein rechter ist, die Kreuzung der Geraden i_f, i_φ also senkrecht genommen wird, zwei specielle Formen des Kreuzkurbelmechanismus gezeichnet. Aus diesem speciellen aber besonders wichtigen Kreuzkurbelmechanismus erhalten wir, je nachdem erstens eins der beiden Glieder a_∞, c_∞, zweitens das Glied d_∞ und drittens das Glied b festgestellt wird, beziehlich:

das rechtwinkelige Kreuzkurbelgetriebe,
das rechtwinkelige Kreuzschiebergetriebe,
das rechtwinkelige Kreuzschleifengetriebe.

Die Fig. **385** repräsentirt ein rechtwinkeliges Kreuzkurbelgetriebe, wenn wir das Glied a_∞ als Steg betrachten. Das Glied c_∞ vollzieht dann im Bezug auf den Steg eine kreisförmige Parallelbewegung, bei welcher alle Punkte dieses Gliedes gleiche Kreise beschreiben. Ist dagegen das Glied d_∞ fest, so erhalten wir ein rechtwinkeliges Kreuzschiebergetriebe, und ein beliebiger Punkt des Gliedes ΦF beschreibt im Bezug auf das feste Glied nach Art. 18 eine Ellipse, die in eine gerade Strecke übergeht, wenn insbesondere der Punkt auf dem über ΦF als Durchmesser beschriebenen Kreise liegt. Wird ferner das Glied b oder ΦF festgehalten, so entsteht ein rechtwinkeliges Kreuzschleifengetriebe, und ein beliebiger Punkt des Gliedes d_∞ erzeugt bezüglich des festen Gliedes ΦF im Allgemeinen eine Pascal'sche Curve. Dagegen beschreibt aber ein Punkt des festen Gliedes b in dem bewegten Gliede d_∞ im Allgemeinen eine Ellipse, und hierauf beruht das S. 41 schon erwähnte Ovalwerk von Leonardo da Vinci. Bei dieser Ovaldrehbank wird durch das feste Glied b das Gestell, durch das Glied a_∞ die Spindel vertreten, und ferner wird das Glied c_∞ zur Vereinfachung weggemindert. Der am Gestell festsitzende, aber verstellbare Zapfen F wird erweitert und ringförmig gestaltet. Das Glied d_∞ trägt die Planscheibe mit dem Werkstücke, und in diesem beschreibt ein Punkt des festen Gliedes b als Stichelspitze eine Ellipse.[1])

140. **Der Schleifschiebermechanismus. — Das Schleifschiebergetriebe und dessen specielle Arten.** Eine andere Specialisirung des einfachen ebenen Mechanismus mit vier Drehpaarungen wird dadurch gewonnen, dass wir bei demselben zwei gegenüber liegende Drehpaarungen durch Richtpaarungen ersetzen. Um dies zu veranschaulichen, ist in Fig. **387** bei einem Kurbelmechanismus $\Phi F L \Lambda$ das Glied ΦF durch einen Bogenschieber vertreten, der sich in F drehbar an das Glied FL anschliesst und in einem zu Φ concentrischen kreisförmigen Schlitze des Gliedes $\Phi\Lambda$ gleitet. Ferner ist das Glied ΛL durch einen in Λ drehbar mit dem Gliede $\Phi\Lambda$ verbundenen Bogenschieber ersetzt, der in einem zu L concentrischen Schlitze des Gliedes FL gleitet. Der von dem

[1]) Vergl. Plumier, *L'Art de tourner.* 1706, pp. 89, 114, oder die deutsche Ausgabe, 1776, S. 79, 97. Geissler, *Der Drechsler.* 1796. Theil II. S. 60; Theil III, 2. Abth. S. 42. Prechtl, *Technologische Encyklopädie.* 1833. B. 4. S. 425 und B. 7. S. 246. Die Mittheilungen von Wellner im *Polytechnischen Journal.* 1867. B. 184. S. 119, von Kick daselbst. 1868. B. 187. S. 458. Reuleaux, *Kinematik,* 1875. S. 336.

Punkte F im Gliede $\Phi\Lambda$ beschriebene Bahnkreis φ begrenzt auf der Geraden $\Phi\Lambda$ die Strecke $\Lambda\Lambda_0 = b - a = \nu$, und der von dem Punkte Λ im Gliede FL beschriebene Bahnkreis l bestimmt auf der Geraden FL die Strecke $FF_0 = c - d = n$. Nehmen wir nun, ohne die Strecken ν, n zu ändern, die Radien $\Lambda_0\Phi = b$, $F_0L = d$ der Kreise φ, l unendlich gross, verlegen wir also die beiden gegenüber liegenden Axenpunkte Φ, L ins Unendliche, dann gehen diese Kreise, wie in Fig. **388** dargestellt ist, in die Geraden φ, l über, welche beziehlich auf den unveränderten Strecken $\Lambda\Lambda_0$, FF_0 senkrecht stehen, und jene kreisförmigen Schlitze werden geradlinig. Der so entstandene specielle Mechanismus, der in Fig. **389** noch in einer anderen Gestalt gezeichnet ist, wird Schleifschiebermechanismus genannt. Bei demselben sind die Längen a, b, c, d aller jener vier Glieder $\Lambda\Phi$, ΦF FL, $L\Lambda$ unendlich gross; und diese Glieder stehen in gleicher geometrischer Beziehung. Dem zufolge kann die Gliedfeststellung kein Unterscheidungsmerkmal der betreffenden Getriebe geben. Bei dem Schleifschiebermechanismus treten nur die Strecken $\Lambda\Lambda_0$, FF_0, d. h. die endlichen Differenzen ν, n der unendlich langen Gliedlängen b, a und c, d als die beiden einzigen Bestimmungsgrössen auf; und wenn wir in Fig. **388** das Glied $\Lambda\Phi^\infty$ als Steg betrachten, so ist die Art des Getriebes dadurch bedingt, ob $\nu \gtreqless n$ ist. Wenn $\nu > n$ ist, dann kann der Punkt F in geometrischer Hinsicht die unbegrenzte Gerade φ vollständig durchschreiten; ist dagegen $\nu < n$, dann gelangt F, wenn F_0 mit Λ coincidirt, nach einem Umkehrpunkte und kann demnach die Gerade φ nicht vollständig durchlaufen. In dem besonderen Falle $\nu = n$ ist das Getriebe symmetrisch, und es kann Verzweigung der Bewegung eintreten, wenn die gleichen Strecken FF_0, $\Lambda_0\Lambda$ zur Deckung gelangen. Somit ergeben sich aus dem Schleifschiebermechanismus, je nachdem die im Stege $\Lambda\Phi^\infty$ befindliche Strecke $\nu \gtreqless n$, die drei Getriebe:

das fortschreitende Schleifschiebergetriebe,
das symmetrische Schleifschiebergetriebe,
das umkehrende Schleifschiebergetriebe.

Ferner erhalten wir noch die beiden letzten und speciellsten Fälle, je nachdem wir im Stege $\Lambda\Phi^\infty$ die Strecke $\nu = 0$ oder in dem bewegten Gliede FL^∞ die Strecke $n = 0$ nehmen:

das centrisch-winkelige Schleifschiebergetriebe,
das centrisch-geradlinige Schleifschiebergetriebe.

Bei dem centrisch-winkeligen Schleifschiebergetriebe fällt also in Fig. **388** der feste Axenpunkt Λ mit dem Punkte Λ_0 zusammen, und man erkennt leicht, dass dann der Punkt F_0, der Scheitel des rechten Winkels $FF_0\Lambda$, eine specielle Capricornoide im Bezug auf das feste Glied $\Lambda\Phi^\infty$ beschreibt. Bei dem centrisch-geradlinigen Schleifschiebergetriebe fällt der bewegliche Axenpunkt F mit dem Punkte F_0 zusammen, und jeder Punkt der Geraden l erzeugt im festen Gliede $\Lambda\Phi^\infty$ eine Konchoide.

Für das symmetrische Schleifschiebergetriebe sind in Fig. **390** die Rollcurven π, p, welche resp. den Gliedern $\Lambda\Lambda_0$, FF_0 angehören, gezeichnet; und es ist, wenn wir $\Lambda\Lambda_0$ als Steg betrachten, π die Polbahn, p die Polcurve. Der Pol $\mathfrak{P}$ ergiebt sich als Schnitt der in Λ auf l und der in F auf φ errichteten Senkrechten; und diese beiden Senkrechten $\Lambda\mathfrak{P}$, $F\mathfrak{P}$ sind gleich, weil $\Lambda\Lambda_0 = FF_0$ ist. Demnach ist die Polbahn π eine Parabel, deren Brennpunkt Λ und deren Leitlinie φ ist. Wegen der symmetrischen Gestalt des Getriebes ist die Polcurve p eine congruente Parabel, deren Brennpunkt F und deren Leitlinie l ist. Ferner ergiebt sich, da alle vier Glieder dieses Getriebes in gleicher Beziehung zu einander stehen, dass die vier Rollcurven congruente Parabeln sind, von denen zwei derselben den Punkt Λ und die beiden anderen den Punkt F als gemeinsamen Brennpunkt haben.

Das symmetrische Schleifschiebergetriebe ist identisch mit dem Specialfalle des Zwillingskurbelgetriebes, in welchem die Gliedlängen unendlich gross sind; denn es gehen dann die vier Rollcurven des Zwillingskurbelgetriebes, die nach Art. 129 zwei congruente Ellipsen und zwei congruente Hyperbeln sind, in vier congruente Parabeln über. Die Bahncurven, welche die Punkte des Gliedes FF_0 im Bezug auf das Glied $\Lambda\Lambda_0$ beschreiben, sind demnach Fusspunktencurven einer Parabel. Unter diesen sind diejenigen Bahncurven, die von dem auf der Geraden l liegenden Punkte erzeugt werden, nach Art. 39 doppelpunktige Focalcurven, von denen die durch F_0 beschriebene eine Strophoide ist; und ferner wird, wie in Art. 39 erwähnt, von der Mitte der Strecke F_0F, dem Scheitel der Parabel p, die Cissoide des Diokles erzeugt.

In der Durchschlagslage coincidiren der Punkt F mit Λ_0, der Punkt F_0 mit Λ, und es kann, weil dann die Gerade l parallel zur Geraden φ in sich selbst verschiebbar ist, Verzweigung der Bewegung eintreten, so dass jeder Punkt des Gliedes FL^∞ eine zu φ parallele Gerade beschreibt. Die vollständige Bahncurve oder Koppelcurve eines Punktes besteht demnach aus einer Fusspunktencurve, einer Parabel und einer zu φ parallelen Geraden. Da diese Fusspunktencurve bekanntlich von dritter Ordnung ist, so folgt, dass im Allgemeinen bei dem Schleifschiebergetriebe die Bahncurve, welche ein Punkt von einem der Glieder FL^{∞}, $\Lambda\Phi^{\infty}$ in dem anderen beschreibt, von vierter Ordnung ist; und dasselbe gilt von den beiden anderen Gliedern, welche durch die Schieber vertreten sind.

141. **Der Dreirichtmechanismus.** Denken wir uns bei dem in Fig. **389** dargestellten Schleifschiebermechanismus den Axenpunkt Λ in dem Gliede $\Lambda\Lambda_0$ nach beliebiger, aber nicht mit l zusammenfallender Richtung ins Unendliche verlegt, so kann die Stange l in diesem Gliede nur eine Parallelbewegung vollziehen. In diesem besonderen Falle bleibt aber der Winkel φFF_0 während der Bewegung constant, es tritt also um den Axenpunkt F keine Drehung von FF_0 gegen φ ein, und demnach bilden die beiden Glieder FF_0 und φ vereint ein einziges starres Glied. Somit erhalten wir, weil drei Richtpaarungen auftreten, den in Fig. **391** gezeichneten dreigliederigen Mechanismus, den wir Dreirichtmechanismus nennen. In der dargestellten Form besteht jedes der drei Glieder φH_{φ}, lH_l, $\mathfrak{q}H_{\mathfrak{q}}$ aus einer Stange und einer an derselben befestigten Hülse, die auf der Stange des angepaarten Gliedes gleitet. Dieser Mechanismus findet in mannigfaltiger Gestaltung praktische Anwendung.

Graphische Darstellungen der Geschwindigkeit und des Weges bei dem Schubkurbelgetriebe.

142. **Darstellungen der Geschwindigkeit und des Weges bei dem excentrischen Schubkurbelgetriebe.** Nehmen wir an, dass bei dem in Fig. **392**, Taf. XXVII, gezeichneten excentrischen Schubkurbelgetriebe die Kurbel ΦF sich gleichförmig drehe, und dass $F\Phi$ die constante lothrechte Geschwindigkeit des Punktes F sei, so erhalten wir auf der in L zur Schubgeraden λ senkrechten Geraden $L\Lambda^{\infty}$ die lothrechte Geschwindigkeit $LL_{\mathfrak{v}}$ des Punktes L, indem wir zu FL die Parallele $\Phi L_{\mathfrak{v}}$ ziehen. Durch Wiederholung dieser Construction für verschiedene Kurbellagen ergiebt sich somit das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ des Punktes L. Machen wir auf $\Phi L_{\mathfrak{v}}$ die Strecke ΦF_x gleich der Schubstange FL,

dann ist $L_\mathfrak{v}$ der Pol des Gliedes $F_x L$ des entstandenen Schubkurbelgetriebes $\Phi F_x L \Lambda^\infty$, und demnach ist die Polbahn desselben identisch mit dem Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$. Die auf der Schubgeraden λ senkrechten Ordinaten des unterhalb λ liegenden Theiles $+\mathfrak{v}$ repräsentiren die Geschwindigkeiten des Punktes L, während sich F von F^ω nach F^τ bewegt, die Ordinaten des oberen Theiles $-\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeiten von L, während F von F^τ nach F^ω weiterschreitet. Die ersteren betrachten wir als positiv, die letzteren als negativ. Durch Uebertragung der erhaltenen Geschwindigkeiten auf die betreffenden Kurbellagen in steter Richtung von Φ nach F, z. B. $\Phi V = L_\mathfrak{v} L$, ergiebt sich das zeitliche polare Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_z$, und zwar entspricht der mit $+\mathfrak{v}_z$ bezeichnete ovale Theil den positiven, dagegen der mit $-\mathfrak{v}_z$ bezeichnete ovale Theil den negativen Geschwindigkeiten des Punktes L. Die verlängerte Schubstange LF schneidet auf der Geraden $\Lambda^\infty\Phi$ die Strecke ΦZ ab, die gleich der Geschwindigkeit $L_\mathfrak{v} L$ ist, und somit erhalten wir einfacher das Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_z$, indem wir $\Phi V = \Phi Z$ machen. Wenn sich F in den auf der Geraden $\Phi\Lambda^\infty$ liegenden Theilpunkten F^6, F^{18} des in 24 gleiche Theile getheilten Kreises φ befindet, dann sind die entsprechenden Geschwindigkeiten $L^6 L^6_\mathfrak{v}$, $L^{18} L^{18}_\mathfrak{v}$ des Punktes L gleich der constanten Geschwindigkeit des Punktes F. Da der Kreis φ das Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_z$ noch in zwei anderen Punkten schneidet, so tritt dieser Fall auch für diese Lagen ein. Die Bestimmung der Lagen des Punktes L, in denen die Geschwindigkeit desselben am grössten wird, werden wir später mit Hülfe der Beschleunigung ausführen.

Um für das Schubkurbelgetriebe auch das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_\mathfrak{z}$ darzustellen, ziehen wir im Umkehrpunkte L^ω, der F^ω entspricht, die Zeitaxe $T_0 T_{24}$ senkrecht auf λ, theilen die von beliebiger Länge, etwa $2\,\overline{\Phi F}$, genommene Strecke $T_0 T_{24}$, der Theilung des Kreises φ gemäss, in 24 gleiche Theile und tragen in diesen Theilpunkten die auf der Zeitaxe senkrechten Ordinaten gleich den zugehörigen Geschwindigkeiten des Punktes L an, wir machen z. B., weil F sich im zweiten Theilpunkte des Kreises φ befindet, $T_2 V_2 = L L_\mathfrak{v}$, wodurch das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_\mathfrak{z}$ bestimmt wird. Diese Ordinaten nehmen entgegengesetzte Richtung an, wenn L von L^τ nach L^ω gehend seine Bahn im anderen Sinne durchschreitet.

Die auf diese Ordinaten aufgetragenen Weglängen, die von L^ω aus gemessen der Punkt L zurücklegt, liefern das orthogonale

Wegdiagramm $\mathfrak{w}$ dieses Punktes. So bestimmt beispielsweise auf der Ordinate in T_2 die verlängerte Gerade $L_{\mathfrak{v}} L$ den Punkt W_2 dieser Curve. Die Ordinaten repräsentiren somit für die betreffenden Zeiten die Entfernungen des Punktes L von der Anfangslage L^{ω}. Werden diese Entfernungen auch auf die betreffenden Kurbellagen abgetragen, wird z. B. auf ΦF die Strecke $\Phi W^2 = L^{\omega} L$ gemacht, dann repräsentirt die so bestimmte strichpunktirte Curve $\mathfrak{w}_p$ das polare Wegdiagramm des Punktes L.

143. **Darstellungen der Geschwindigkeit und des Weges bei dem centrischen Schubkurbelgetriebe.** Für das centrische Schubkurbelgetriebe ist in Fig. **393** das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ und das zeitliche polare Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_z$ in der vorhin angegebenen Weise construirt; und beide sind im Bezug auf die Schubgerade λ symmetrisch. Die Construction des Diagramms $\mathfrak{v}$ vereinfacht sich ein wenig, weil wir hier, anstatt zu der veränderlichen Geraden FL die Parallele $\Phi L_{\mathfrak{v}}$, leichter zur festen Geraden λ die Parallele $Z L'_{\mathfrak{v}}$ ziehen können, die auf $L \Lambda^{\infty}$ den Punkt $L'_{\mathfrak{v}}$ der Curve $\mathfrak{v}$ bestimmt.

Für das betrachtete centrische Schubkurbelgetriebe ist in Fig. **394** das orthogonale Wegdiagramm $\mathfrak{w}$ construirt, welches von dem Umkehrpunkte L^0 ausgeht, der dem Punkte F^0 entspricht. Befindet sich L in der Wegmitte L^m, welcher einerseits auf dem Bahnkreise φ der Punkt F^m entspricht, dann hat F den Bogen $F^0 F^m$ durchschritten. Betrachten wir nun die in L^m auf λ errichtete Senkrechte als Zeitaxe $L^m T_{21}$, so repräsentiren die auf derselben rechtwinkeligen Ordinaten der Curve $\mathfrak{w}$ für die betreffenden Zeitmomente die Abstände des Punktes L von seiner Wegmitte L^m. Behufs der Construction des zugehörigen polaren Wegdiagramms $\mathfrak{w}_p$ tragen wir die rechtsseitigen Abstände auf die entsprechenden Radien von Φ aus nach F gerichtet ab, so dass z. B. die Strecke $\Phi W = L^m L$ ist. Für die Kurbellage ΦF^m wird die betreffende Strecke gleich Null, und ΦF^m tangirt die Curve $\mathfrak{w}_p$ in Φ. Werden dagegen die linksseitigen Abstände auf die über Φ hinausgehende Verlängerung des Kurbelarmes abgetragen, dann setzt sich diese Curve durch Φ hindurchgehend continuirlich fort und bildet zwei bezüglich der Geraden λ symmetrisch liegende Ovale, welche den Bahnkreis φ in F^0 berühren. Ist es auch der geometrischen Beziehung nicht gemäss, so wird doch eine grössere Uebersichtlichkeit gewonnen, wenn man alle jene Abstände des Punktes L von der Wegmitte L^m auf die Kurbel im gleichen Sinne nach F gerichtet abträgt; dadurch entsteht eine aus dem ausgezogenen Theil $+ \mathfrak{w}_p$ und dem strichpunktirten Theil $- \mathfrak{w}_p$ gebildete schleifenförmige Curve, die in Φ zwei Spitzen besitzt. Aus diesen Darlegungen ersehen wir, dass die erhaltenen Wegdiagramme auch bei dem centrischen Schubkurbelgetriebe keine einfache Gestalt besitzen, daher wollen wir noch eine andere graphische Darstellung der Weglängen mittheilen, die von den vorhin ausgeführten Darstellungen principiell verschieden ist und ein anschauliches Bild der Wegänderungen giebt.

Denken wir uns in Fig. **395** das Glied ΦF festgestellt, dann beschreibt der Punkt L einen Kreis $\mathfrak{w}_L$ um F, und der in dem um Φ rotirenden Schleifengliede befindliche, auf der Geraden λ liegende Punkt L^m einen Kreis k^m um Φ. Dem zufolge repräsentiren die Strecken, welche diese Kreise auf der unter bestimmten Winkeln gegen ΦF gedrehten Geraden λ abschneiden, die Abstände des Punktes L von seiner Wegmitte L^m für diejenigen Kurbellagen, die bei der Schubkurbel mit λ dieselben Winkel bilden.

Für das betrachtete, in Fig. **394** gezeichnete Schubkurbelgetriebe ist diese Construction des Raumes wegen um die Hälfte verkleinert in Fig. **395** ausgeführt und die Gerade $\Phi\lambda$ beispielsweise so gezogen, dass sie mit ΦF denselben Winkel einschliesst, den in Fig. **394** die Kurbel ΦF mit λ bildet. Demnach ist in Fig. **395** die Strecke $L^m L$, die von den Kreisen k^m, $\mathfrak{w}_L$ auf der Geraden λ bei einer Darstellung in gleichem Massstabe abgeschnitten wird, gleich dem Abstande des Punktes L von L^m in Fig. **394**. Ziehen wir noch in Fig. **395** um Φ die Kreise k^0, k^τ, welche die Weggrenzpunkte L^0, L^τ beschreiben, dann bestimmen diese Kreise auf der rotirenden Geraden λ die Strecken LL^0, LL^τ, die bei der Schubkurbel resp. die betreffenden Abstände des Punktes L von den beiden Umkehrpunkten L^0, L^τ darstellen. Das so in einfachster Weise durch den Kreis $\mathfrak{w}_L$ repräsentirte Wegdiagramm wurde zuerst von Chr. Müller angegeben und ist unter dem Namen Müller'sches Wegdiagramm bekannt.[1])

Wenn wir in Fig. **394** um F mit FL als Radius einen Kreis $\mathfrak{w}_L$ beschreiben und uns diesen Kreis mit dem rotirenden Kurbelgliede ΦF verbunden denken, so bewegt sich der Schnittpunkt, den dieser um den excentrischen Punkt Φ rotirende Kreis $\mathfrak{w}_L$ mit der festen Geraden λ bildet, ebenso wie der Pnnkt L auf der Ge-

[1]) Vergl. Müller's Abhandlung in der *Einladungsschrift der Königlichen Polytechnischen Schule in Stuttgart,* 1859, auch *Civilingenieur.* 1861. B. 7. S. 347.

raden λ. Stellen wir uns vor, es sei das Kurbelglied ΦF mit einer kreisförmigen Nuthe versehen, deren Mittellinie der Kreis w_L ist, und es gleite diese Nuthe über einen in dem Schlitten befestigten Zapfen L, dann erhalten wir nach Wegnahme der Schubstange FL einen einfachen dreigliederigen Mechanismus, der dieselbe Bewegung des Schiebers hervorbringt.

144. **Darstellungen der Geschwindigkeit und des Weges bei dem gleichschenkeligen Schubkurbelgetriebe.** Bei einem gleichschenkeligen Schubkurbelgetriebe, welches in Fig. **396** dargestellt ist, haben die Diagramme der Geschwindigkeit und des Weges einfachere Gestalt. Wegen der gleich langen Glieder $\Phi F = FL = b$ ergiebt sich, dass der Punkt $L'_\mathfrak{v}$ des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$, der als Schnittpunkt von der zur Schubgeraden λ Parallelen $ZL'_\mathfrak{v}$ auf $L\Lambda^\infty$ bestimmt wird, zugleich der Pol $\mathfrak{P}$ des Gliedes FL im Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda^\infty$ ist; demnach ist dieses örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ identisch mit der Polbahn. Dieses Diagramm resp. diese Polbahn wird, weil in dem Rechteck $\Phi Z \mathfrak{P} L$ die Diagonalen LZ, $\Phi\mathfrak{P}$ constant sind, durch einen um Φ mit dem Radius $\Phi\mathfrak{P} = 2\overline{\Phi F} = 2b$ beschriebenen Kreis repräsentirt. Die jeweilige Ordinate $LL'_\mathfrak{v}$ stellt die Geschwindigkeit des Punktes L dar, die in dem einen Sinne als positiv, in dem anderen als negativ zu betrachten ist. Der Punkt L erreicht die grösste Geschwindigkeit, wenn er mit Φ coincidirt; dann gelangt der Punkt Z in der auf λ Senkrechten ΦF^m nach $L^m_\mathfrak{v}$ in die Polbahn, und $\Phi L^m_\mathfrak{v}$ repräsentirt die grösste Geschwindigkeit. Wenn wir in dem Punkte $L^m_\mathfrak{v}$, sowie in dem diametralen Punkte $L^\mu_\mathfrak{v}$ je einen festen Zapfen anbringen und die Koppel LF in Z mit einer Gabel versehen, so wird die Bewegung vermittelst Eingriffspaarung continuirlich über die Durchschlagslage hinweggeführt. Denken wir uns über LZ als Durchmesser einen Kreis beschrieben und zu dem Gliede LF gehörend, so vertritt derselbe die Polcurve und rollt während der Bewegung in dem Kreise $\mathfrak{v}$. Die Bewegung des Punktes L auf der Geraden λ ist identisch mit der Bewegung der Projection des Pols $\mathfrak{P}$ auf dieser Geraden. Die Bewegung dieser Projection oder des Punktes L wird, wenn $\mathfrak{P}$ sich auf dem Kreise $\mathfrak{v}$ gleichförmig bewegt, wie es bei der gleichförmigen Rotation der Kurbel der Fall ist, eine geradlinige harmonische Bewegung genannt.

Machen wir, um das zeitliche polare Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_z$ zu erhalten, auf der Kurbelgeraden ΦF die Strecke $\Phi V = \Phi Z$, so ist das Dreieck $\Phi L^m_\mathfrak{v} V$ dem rechtwinkeligen Dreieck $\Phi L'_\mathfrak{v} Z$

congruent und hat demnach bei V einen rechten Winkel; folglich besteht das zeitliche polare Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_z$ einentheils aus dem über $\Phi L_{\mathfrak{v}}^m$ als Durchmesser beschriebenen Kreise $+\mathfrak{v}_z$ und anderentheils aus dem über $\Phi L_{\mathfrak{v}}^{\mu}$ als Durchmesser beschriebenen Kreise $-\mathfrak{v}_z$.

Ferner ist in Fig. **396** diejenige Hälfte des orthogonalen Wegdiagramms $\mathfrak{w}$ gezeichnet, welche der Bewegung des Punktes L von L^0 bis L^τ entspricht. Für den Rückgang von L ergiebt sich die andere nicht gezeichnete symmetrische Hälfte dieses Wegdiagramms. Um die Gleichung desselben in rechtwinkeligen Coordinaten bezogen auf die Zeitaxe ΦF^m abzuleiten, bezeichnen wir auf derselben die Abscisse durch x und die rechtwinkelige Ordinate durch y. Da nun die Abscisse x der Drehung der Kurbel ΦF resp. dem Winkel $L^0 \Phi \mathfrak{P} = \theta$ proportional ist, so ergiebt sich, indem wir $\theta = qx$ setzen, wo q eine Constante bedeutet,

$$y = \Phi \mathfrak{P} \,.\, \cos\theta = 2b \,.\, \cos\theta,$$

$$y = 2b \,.\, \cos qx.$$

Die durch diese Gleichung repräsentirte Curve $\mathfrak{w}$ wird eine Sinoide genannt.

In Fig. **396** ist auf der Zeitaxe die beliebige Strecke, welche einer halben Umdrehung der Kurbel ΦF entspricht, beispielsweise gleich $\Phi L_{\mathfrak{v}}^m$ genommen, und dem zufolge ist in diesem Falle:

$$x = \frac{\pi}{q} = 2b,$$

und

$$q = \frac{\pi}{2} b.$$

Um das polare Wegdiagramm $\mathfrak{w}_p$ zu erhalten, machen wir auf der Kurbelgeraden ΦF die Strecke $\Phi W = \Phi L$, welche die von Φ aus gemessene Weglänge des Punktes L ist. Da aber das Dreieck $\Phi W L^0$ dem rechtwinkeligen Dreieck $\Phi L \mathfrak{P}$ congruent ist, so liegt der Punkt W auf einem über ΦL^0 als Durchmesser beschriebenen Kreise $+\mathfrak{w}_p$. Das polare Wegdiagramm besteht also aus diesem Kreise $+\mathfrak{w}_p$ und aus einem über ΦL^τ als Durchmesser beschriebenen Kreise $-\mathfrak{w}_z$, der zur Unterscheidung strichpunktirt ist.

Graphische Darstellungen der Geschwindigkeit und des Weges bei dem Kreuzkurbelgetriebe.

145. **Darstellungen der Geschwindigkeit und des Weges bei dem rechtwinkeligen Kreuzkurbelgetriebe.** Die Bewegungsvorgänge bei einem Kreuzkurbelgetriebe stehen in engster Analogie mit der vorhin betrachteten Bewegung bei dem gleichschenkeligen Schubkurbelgetriebe. In Fig. **397** ist ein rechtwinkeliges Kreuzkurbelgetriebe gezeichnet. Der Punkt L liegt hier im Unendlichen, und die Gerade FL^∞ ist der Schubrichtung oder Schubstange σ parallel. Das Glied FL^∞ wird durch den Gleitbacken c, das Glied $L^\infty\Lambda^\infty$ durch die Schleife und die Schubstange σ vertreten, die in einer Hülse H des Steges $\Phi\Lambda^\infty$ gleitet. Die Schleifenmitte P ist die senkrechte Projection des rotirenden Punktes F auf die Schubstange σ, und demnach wird bei gleichförmiger Rotation der Kurbel ΦF das Schleifenglied des rechtwinkeligen Kreuzkurbelgetriebes geradlinig harmonisch bewegt. Nehmen wir nun wieder an, dass $F\Phi$ die constante lothrechte Geschwindigkeit des Punktes F sei, so stellt PF die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes P des Schleifengliedes dar; denn es ist PF gleich der Strecke ΦZ, die FL^∞ auf $\Phi\Lambda^\infty$ abschneidet. Demnach ist der Bahnkreis φ das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm für den harmonisch schwingenden Punkt P. Für einen Punkt A auf der Stange σ erhalten wir somit das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$, indem wir auf der Geraden σ die Strecke $\Phi A^m = PA$ machen und um die Schwingungsmitte A^m mit dem Radius gleich ΦF den Kreis $\mathfrak{v}$ beschreiben. Derselbe schneidet die Gerade σ in den beiden Umkehrpunkten A^0, A^τ, die den Lagen F^0, F^τ des Kurbelpunktes F entsprechen, und die Ordinate AA'_0 repräsentirt die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes A. Ferner ist analog wie bei dem gleichschenkeligen Schubkurbelgetriebe das zeitliche polare Geschwindigkeitsdiagramm gezeichnet, welches aus den beiden gleichen Kreisen $+\mathfrak{v}_z$, $-\mathfrak{v}_z$ besteht, die in Φ die Gerade σ berühren, und deren Durchmesser gleich dem Kurbelradius ΦF ist. Die Sehne ΦV auf der Kurbel ΦF repräsentirt die Geschwindigkeit des Schleifengliedes, weil die Dreiecke ΦVF^m, ΦZF congruent sind. Die beiden über ΦF^0 und ΦF^τ als Durchmesser beschriebenen gleichen Kreise $+\mathfrak{w}_p$, $-\mathfrak{w}_p$ stellen das polare Wegdiagramm des Schleifengliedes dar. Die Sehne ΦW liefert die Weglänge eines Punktes von seiner Schwingungsmitte

aus gemessen, weil die Dreiecke $\Phi W F^0$, $\Phi P F$ congruent sind. Ausserdem haben wir der Vollständigkeit wegen noch das orthogonale Wegdiagramm $\mathfrak{w}$ des Punktes A in der bekannten Weise construirt, welches eine Sinoide ist. Ferner erkennt man leicht, dass auch das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm dem orthogonalen Wegdiagramm congruent ist.

146. **Darstellungen der Geschwindigkeit und des Weges bei dem schrägen Kreuzkurbelgetriebe.** Die geradlinige Bewegung bei einem in Fig. **398** gezeichneten schrägen Kreuzkurbelgetriebe kann, wie die folgenden Darlegungen zeigen werden, auch durch ein rechtwinkeliges Kreuzkurbelgetriebe erzeugt werden. Wir ziehen senkrecht auf die schräge Schleife den Durchmesser $F^0 F^\tau$, der die Mittellinie FP der Schleife im Punkte O trifft, ziehen ferner durch seine Endpunkte die Parallelen $F^0 P^0$, $F^\tau P^\tau$ zur Schleifenrichtung FP bis an die Gerade σ. Die Mitte P der Schleife erreicht ihre äussersten Lagen in den beiden Punkten P^0, P^τ der Geraden σ. Wir errichten in P auf σ die Senkrechte PF', deren Länge dadurch bestimmt wird, dass wir $\Phi F' = \Phi P^0$ machen. Die entstandenen beiden rechtwinkeligen Dreiecke $\Phi O F$, $\Phi P F'$ sind dann ähnlich; denn, weil:

$$\Phi P : \Phi O = \Phi P^0 : \Phi F^0$$

ist, besteht auch die Proportion:

$$\Phi P : \Phi O = \Phi F' : \Phi F.$$

Demnach ist das Dreieck $\Phi F F'$ dem rechtwinkeligen Dreieck $\Phi F^0 P^0$ wegen der Gleichheit zweier Paare entsprechender Seiten und wegen der mit ν bezeichneten, eingeschlossenen gleichen Winkel congruent. Rotirt nun das Dreieck $\Phi F F'$ um Φ, so beschreibt der Punkt F' den Kreis φ', dessen Radius gleich ΦP^0 ist, und die Bewegung der senkrechten Projection vom Punkte F' auf σ ist identisch mit der Bewegung der Schleifenmitte P. Demnach wird bei gleichförmiger Rotation der Kurbel ΦF das Schleifenglied des schrägen Kreuzkurbelgetriebes geradlinig harmonisch bewegt; und wir erhalten, da der Radius $\Phi F' = \Phi P^0 = \Phi F \sec \nu$ ist, den Satz:

Die Bewegung des Schleifengliedes bei einem schrägen Kreuzkurbelgetriebe, dessen Schubgerade mit der Normalen der Schleife den Winkel ν bildet, kann durch ein rechtwinkeliges Kreuzkurbelgetriebe erzeugt werden, wenn die Kurbelarme dieser beiden

Getriebe sich wie $1 : \sec \nu$ verhalten und mit einander den Winkel ν einschliessen.

Dem zufolge ist die Construction und auch die Gestalt der Diagramme der Geschwindigkeit und des Weges bei dem schrägen Kreuzkurbelgetriebe dieselbe wie bei dem rechtwinkeligen. Um in Fig. **398** bei dem schrägen Kreuzkurbelgetriebe das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ für einen Punkt A der Schubstange PA zu erhalten, machen wir auf σ die Strecke $\Phi A^m = PA$ und beschreiben um die Schwingungsmitte A^m des Punktes A mit der Radiusgrösse ΦP^0 oder $\Phi F'$ den Kreis $\mathfrak{v}$; derselbe schneidet σ in den beiden Umkehrpunkten A^0, A^τ, die den Kurbellagen ΦF^0, ΦF^τ entsprechen. Die Ordinate $AA'_{\mathfrak{v}}$ des Kreises $\mathfrak{v}$ repräsentirt die Grösse der Geschwindigkeit des Punktes A. Aus den allgemeinen Betrachtungen folgt auch, dass die zu FP senkrechte Gerade FL^∞ auf der zu σ senkrechten Geraden $\Phi\Lambda^\infty$ die Strecke ΦZ abschneidet, die gleich der Geschwindigkeit des Punktes A, also auch gleich FF' und $AA'_{\mathfrak{v}}$ ist.

Um für das betrachtete schräge Kreuzkurbelgetriebe in Fig. **399** das polare zeitliche Geschwindigkeitsdiagramm, welches aus den beiden gleichen Kreisen $+\mathfrak{v}_z$, $-\mathfrak{v}_z$ besteht, zu erhalten, haben wir nun zu beachten, wie die polaren Diagramme für Geschwindigkeit und Weg gegen die Schubgerade σ um den Winkel ν gedreht sind. Der durch Φ gehende Durchmesser jener beiden Kreise ist der Schleifenrichtung parallel und seine Grösse $\Phi F \sec \nu = \Phi P^0$. Diese Grösse ergiebt sich auch, wenn wir im Schnitt F^ω, den der Bahnkreis φ einerseits mit der Geraden σ bildet, auf dieser die Senkrechte $F^\omega W^0$ errichten, die ΦO in W^0 trifft; dann ist $\Phi W^0 = \Phi F \sec \nu$. Die beiden über ΦW^0 und ΦW^τ als Durchmesser beschriebenen gleichen Kreise $+\mathfrak{w}_p$, $-\mathfrak{w}_p$ bilden das polare Wegdiagramm des Schleifengliedes.

147. **Näherungsweise Ersetzung eines excentrischen Schubkurbelgetriebes durch ein schräges oder ein rechtwinkeliges Kreuzkurbelgetriebe.** In Fig. **400** ist ein excentrisches Schubkurbelgetriebe dargestellt, bei welchem der Kurbelradius ΦF gegen die Schubstange FL verhältnissmässig klein ist, sich beispielsweise zu derselben wie $1 : 8$ verhält; und unter der Voraussetzung, dass der Punkt F mit einer constanten Geschwindigkeit von der Grösse $F\Phi$ rotire, ist für den bewegten Punkt L das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ in bekannter Weise construirt. Dasselbe weicht aber sehr wenig von einem Kreise ab, der über die ganze Weglänge L^0L^τ als Durchmesser beschrieben wird. Dem zufolge stimmt

auch bei gleichförmiger Rotation der Kurbel ΦF die Bewegung des Punktes L sehr nahe mit einer geradlinigen harmonischen Bewegung überein. Je länger die Schubstange FL im Vergleich zur Kurbel ΦF ist, je kleiner also das Verhältniss $\Phi F : FL$ ist, desto genauer wird diese Uebereinstimmung; und sie wird vollkommen, wenn die Schubstange unendlich lang ist. Um nun eine Bewegung, die sehr angenähert mit der Bewegung des Punktes L übereinstimmt, durch ein schräges Kreuzkurbelgetriebe hervorzubringen, dessen Kurbelradius derselbe wie bei dem excentrischen Schubkurbelgetriebe ist, betrachten wir zwei beliebige Kurbellagen ΦF, ΦF_1, denen die Punktlagen L, L_1 entsprechen, und wollen das schräge Kreuzkurbelgetriebe in Fig. **401** so einrichten, dass denselben beiden Lagen ΦF, ΦF_1 seiner Kurbel jene Lagen L, L_1 des betreffenden mit der Schubstange σ verbundenen Punktes L angehören. Zu diesem Zwecke machen wir die Strecke $F_1 \Delta \# L_1 L$ und ziehen die Gerade $F\Delta$, welche σ im Punkte P schneidet; dieselbe ist dann die Mittellinie der schrägen Schleife. Wird nun die Kurbel ΦF in die Lage ΦF_1 gedreht, so gelangt die Schleifenmitte P nach P_1 und der Punkt L nach L_1. Bei dem so construirten schrägen Kreuzkurbelgetriebe stimmen also für die beiden betrachteten Kurbellagen die entsprechenden Punktlagen L, L_1 mit denen des Schubkurbelgetriebes genau überein, während bei allen anderen Kurbellagen dies nur angenähert der Fall ist. Die Kreistangenten an den Endpunkten F^0, F^τ des auf $F\Delta$ senkrechten Durchmessers $F^0 F^\tau$ bestimmen auf σ die äussersten Lagen P^0, P^τ der Schleifenmitte P; und den Kurbellagen ΦF^0, ΦF^τ entsprechen die Umkehrpunkte L^0, L^τ. Dieselben stimmen aber mit den gleichbezeichneten Umkehrpunkten bei dem in Fig. **400** dargestellten Schubkurbelgetriebe nicht vollkommen überein. Es ist die Strecke $L^0 L^\tau = P^0 P^\tau$, und der über $L^0 L^\tau$ als Durchmesser beschriebene Kreis repräsentirt, wenn der Punkt F mit der constanten lothrechten Geschwindigkeit $F\Phi$ rotirt, das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ des Punktes L.

Jedem in Fig. **400** angenommenen Punktpaare F, F_1 entspricht also ein bestimmtes schräges Kreuzkurbelgetriebe. Der zugehörige Winkel $F^0 \Phi \sigma$, den in Fig. **401** die Normale ΦF^0 der Schleifenrichtung mit der Schubgeraden σ bildet, variirt bei den gewählten Maassverhältnissen nur sehr wenig. Soll von diesen unendlich vielen schrägen Kreuzkurbelgetrieben, die angenähert die Bewegung des Punktes L der excentrischen Schubkurbel hervorbringen, dasjenige ermittelt werden, welches sich durch die grösste Annäherung auszeichnet, so kann dies nur mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate geschehen.

Wenn die verschiedenen Punktpaare F, F_1 (Fig. **400**) insbesondere auch auf dem Bahnkreise φ diametral gegenüber liegen, so haben in Fig. **401** die Punkte P, P_1 gleiche Abstände von Φ. Von den so gewählten Punktpaaren werden wir später im zehnten Abschnitte bei den Umsteuerungen ausgedehnten Gebrauch machen. Für das specielle Punktpaar F^0, F^τ, welches bei dem excentrischen Schubkurbelgetriebe in Fig. **400** den Umkehrpunkten oder Todtlagen L^0, L^τ des Punktes L entspricht, erhalten wir ein schräges Kreuzkurbelgetriebe, bei dem also die Weggrenzen des Punktes L genau mit den durch das excentrische Schubkurbelgetriebe bedingten Weggrenzen übereinstimmen. Zu dem speciellen Punktpaare, dem die Wegmitte L^m in Fig. **400** entspricht, gehört ein schräges Kreuzkurbelgetriebe, bei welchem aber in Fig. **401** der betreffende Punkt L^m nicht wieder genau die Mitte des zugehörigen Weges ist. In diesem besonderen Falle steht die Schleifenrichtung in Fig. **401** senkrecht auf der Geraden ΦL^m; und wenn wir den Winkel $L^m \Phi \sigma$ mit ν, den Abstand L^m von σ mit c bezeichnen, ferner die Länge ΦL^m angenähert gleich der Länge l der Schubstange FL (Fig. **400**) setzen, so ist $\sin \nu = \frac{c}{l}$.

Nach dem S. 342 abgeleiteten Satze kann aber die Bewegung des Schleifengliedes eines schrägen Kreuzkurbelgetriebes durch ein rechtwinkeliges Kreuzkurbelgetriebe hervorgebracht werden; und aus diesen Darlegungen folgt somit das Resultat:

Die durch ein Schubkurbelgetriebe erzeugte geradlinige Bewegung kann, wenn die Schubstange gegen die Kurbel verhältnissmässig lang ist, sehr angenähert in mannigfacher Weise durch ein rechtwinkeliges Kreuzkurbelgetriebe hervorgebracht werden.

Um in Fig. **402** das rechtwinkelige Kreuzkurbelgetriebe zu zeichnen, welches das schräge Kreuzkurbelgetriebe (Fig. **401**) genau und das Schubkurbelgetriebe (Fig. **400**) angenähert ersetzt, ziehen wir zunächst in Fig. **401** auf $F\Delta$ die Senkrechte ΦF^0, ferner an den Bahnkreis φ die Tangente $F^0 P^0$, und machen das Dreieck $\Phi F F' \cong \Phi F^0 P^0$. Nun ziehen wir in Fig. **402** die Kurbel ΦF gleich und parallel $\Phi F'$ (Fig. **401**), zeichnen über F die Schleife, welche rechtwinkelig an der Schubstange σ befestigt ist, die den Punkt L trägt. Die so erhaltene Kurbellage entspricht dann den in Fig. **400** und **401** gezeichneten Lagen des Punktes L. Der in Fig. **402** um die Schwingungsmitte L^m des Punktes L mit dem Kurbelradius ΦF beschriebene Kreis repräsentirt das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ des Punktes L. Bei dem dargestellten schrägen, sowie bei dem rechtwinkeligen Kreuzkurbelgetriebe haben wir den Gleitbacken in der Schleife weggemindert, und derselbe wird durch den in der Schleife gleitenden Kurbelzapfen vertreten.

Graphische Darstellungen der Geschwindigkeit und des Weges bei dem Schleifkurbelgetriebe.

148. **Allgemeine Bestimmung der Geschwindigkeit bei dem Schleifkurbelgetriebe.** Ist bei einem in Fig. **403**, Taf. XXVIII, dargestellten Schleifkurbelgetriebe für die Kurbelzapfenmitte F die lothrechte Geschwindigkeit $FF_\mathfrak{v}$ gegeben, und soll die lothrechte Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ eines beliebigen Punktes A des um Λ rotirenden Gliedes ΛL^∞ bestimmt werden: so ziehen wir die Gerade $F_\mathfrak{v}E_\mathfrak{v}$ senkrecht auf die mit l bezeichnete Stange dieses Gliedes bis an die Gerade $F\Lambda$; dann ist $EE_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit des momentan mit F coincidirenden Punktes E der Stange l, und folglich bestimmt die zu EA parallele Gerade $E_\mathfrak{v}A_\mathfrak{v}$ auf $A\Lambda$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes A. Wenn dagegen die letztere Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ gegeben ist, so ergiebt sich, indem wir diesen Constructionsweg rückwärts durchschreiten, die entsprechende lothrechte Geschwindigkeit $FF_\mathfrak{v}$ von F. Bei dieser Bestimmung repräsentirt die Strecke $E_\mathfrak{v}F_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit, mit welcher die Hülse H resp. das Glied FL^∞ längs der Stange l in dem rotirenden Gliede ΛL^∞ gleitet. Rotirt das Glied $\Lambda l A$ gleichförmig um Λ, und ist die constante Geschwindigkeit von A gleich $A\Lambda$, dann liefert die zur Stange l senkrechte Gerade $\Lambda\mathfrak{P}$ durch ihren Schnitt $\mathfrak{P}$ auf ΦF die lothrechte Geschwindigkeit $F\mathfrak{P}$ des Punktes F, und die Strecke $\Lambda\mathfrak{P}$ stellt die lothrechte Geschwindigkeit dar, mit welcher die Hülse H auf der rotirenden Stange l gleitet. In diesem Falle vertritt, weil $\mathfrak{P}$ der Pol des Gliedes FL^∞ ist, die Polbahn dieses Gliedes das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm des Punktes F.[1])

---

[1]) Reuleaux giebt in seiner *Kinematik* eine sehr reichhaltige Zusammenstellung der in den mannigfaltigsten Gestaltungen als Motor, Pumpe oder Venti-

149. **Darstellung der Geschwindigkeit und des Weges bei einem schwingenden Schleifkurbelgetriebe.** Um bei einem centrischen schwingenden Schleifkurbelgetriebe, welches in Fig. **404** dargestellt ist, die Geschwindigkeit eines in der Geraden ΛF liegenden Punktes A der Schleife darzustellen, wenn die constante lothrechte Geschwindigkeit des gleichförmig rotirenden Punktes F durch $F\Phi$ gegeben ist, fällen wir auf ΛF das Loth $\Phi E_\mathfrak{v}$; dann ist $EE_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit des momentan mit F coincidirenden Punktes E der Schleife. Somit ergiebt sich, indem wir zu $E\Phi$ die Parallele $A\Xi$ bis an $\Lambda\Phi$ ziehen und auf ΛA das Loth $\Xi A_\mathfrak{v}$ fällen, wegen der ähnlichen Dreiecke $AA_\mathfrak{v}\Xi$, $EE_\mathfrak{v}\Phi$ die Strecke $AA_\mathfrak{v}$ als die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes A. Denn die Geschwindigkeiten $AA_\mathfrak{v}$, $EE_\mathfrak{v}$ verhalten sich wie ΛA zu ΛE oder ΞA zu ΦE. Befindet sich die Kurbel in der Lage $\Phi F'$, für welche die Schleife dieselbe Lage wie vorher einnimmt, dann ziehen wir behufs der Bestimmung der entsprechenden lothrechten Geschwindigkeit $AA'_\mathfrak{v}$ des Punktes A zu $F'\Phi$ die Parallele $A\Xi'$ bis an $\Lambda\Phi$ und $\Xi' A'_\mathfrak{v}$ senkrecht auf ΛA. Die Geschwindigkeit des Punktes A z. B. für die Kurbellage ΦF kann mit gleicher Einfachheit auch in der folgenden Weise bestimmt werden. Wir errichten in F auf ΛF die Senkrechte $F\Sigma$ bis an $\Lambda\Phi$ und ziehen zu ΣA die Parallele $\Phi A_\mathfrak{v}$ bis an ΛA.

Diese Constructionen sind aber nicht anwendbar, wenn der Punkt A sich in der Mittellage A^m befindet, und der Punkt F also auf $\Lambda\Phi$ entweder in F^I, oder in F^{II} liegt. Repräsentiren nun $A^m A^I_\mathfrak{v}$, $A^m A^{II}_\mathfrak{v}$ die entsprechenden Geschwindigkeiten für den in A^m befindlichen Punkt, so bestehen die Proportionen:

$$\frac{A^m A^I_\mathfrak{v}}{\Phi F} = \frac{\Lambda A^m}{\Lambda\Phi - \Phi F}, \qquad \frac{A^m A^{II}_\mathfrak{v}}{\Phi F} = \frac{\Lambda A^m}{\Lambda\Phi + \Phi F},$$

nach denen man diese Geschwindigkeiten leicht construiren kann. Hieraus folgt das Verhältniss dieser beiden Geschwindigkeiten:

$$\frac{A^m A^I_\mathfrak{v}}{A^m A^{II}_\mathfrak{v}} = \frac{\Lambda\Phi + \Phi F}{\Lambda\Phi - \Phi F}.$$

Nach diesen Angaben ist das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ construirt. Dasselbe wird von der Geraden $\Lambda\Phi$ symmetrisch getheilt und geht durch die Umkehrpunkte A^o, A^τ, die auf dem

lator ausgeführten Schleifkurbelgetriebe. Vergl. auch *Deutsches Reichspatent* Nr. 174 vom 25. Juli 1877; Nr. 4351 vom 16. August 1878; Nr. 14963 vom 12. Januar 1881.

Bahnkreise α den von Λ an den Bahnkreis φ gelegten Tangenten entsprechen, deren Berührungspunkte beziehlich mit F^0, F^τ bezeichnet sind. Während der Punkt F den längeren Bogen $F^0 F^{II} F^\tau$ durchläuft, bewegt sich A langsam schwingend von A^0 nach A^τ, und während F den kürzeren Bogen $F^\tau F^I F^0$ durchschreitet, geht A rascher schwingend rückwärts von A^τ nach A^0. Das Verhältniss der Zeiten für den Hin- und Rückgang des Punktes A ist demnach gleich dem Verhältnisse der Bögen $F^0 F^{II} F_0$, $F_0 F^I F_0$. Dieser Mechanismus wird bei dem „Kurbelschub mit raschem Rückgange" vielfach in der Praxis angewendet. Das zeitliche polare Geschwindigkeitsdiagramm, welches wir, um eine Ueberfüllung der Fig. **404** zu vermeiden, nicht gezeichnet haben, wird durch Auftragung der Geschwindigkeiten auf die entsprechenden Kurbellagen erhalten.

In Fig. **404ª** ist in bekannter Weise das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_\mathfrak{z}$ und das orthogonale Wegdiagramm $\mathfrak{w}$ jenes Punktes A gezeichnet. Auf der Zeitaxe ist die Strecke $T_I T_n$ gleich dem Umfange des Kreises φ gemacht; und die Punkte T_I, T_0, T_{II}, T_τ, T_n entsprechen den Punkten F^I, F^0, F^{II}, F^τ, F^n dieses Kreises. Die grösste Geschwindigkeit wird durch die zu T_I gehörende Ordinate $T_I V_I = A^m A^I_\mathfrak{v}$ dargestellt. Dem Abscissenpunkte T_0 entspricht die Geschwindigkeit Null, und in T_{II} tritt im entgegengesetzten Sinne die grösste Geschwindigkeit $T_{II} V_{II} = A^m A^{II}_\mathfrak{v}$ auf. Bezüglich der Ordinate $T_{II} V_{II}$ ist das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_\mathfrak{z}$ symmetrisch. Messen wir die Weglängen jenes Punktes A in Fig. **404** von der Mittellage A^m aus, so beginnt das orthogonale Wegdiagramm $\mathfrak{w}$, Fig. **404ª**, in T_I. Die Weglänge erreicht im Momente T_0, wo die Geschwindigkeit Null ist, das Maximum $T_0 W_0$ gleich dem Kreisbogen $A^m A A^0$. Im Punkte T_{II} schneidet dieses Wegdiagramm, welches bezüglich des Punktes T_{II} centrisch symmetrisch ist, die Zeitaxe und erreicht im Momente T_τ entgegengesetzten Sinnes das zweite gleich grosse Maximum $T_\tau W_\tau$.

An diese Darlegungen wollen wir noch den nahe liegenden Fall anschliessen, wenn bei dem in Fig. **405** dargestellten schwingenden Schleifkurbelgetriebe der in der schwingenden Geraden Λl befindliche Punkt A sich nicht wie vorhin auf einer Kreisbahn bewegt, sondern längs einer Geraden α geführt wird. Dies wird durch eine auf der Stange Λl gleitende Hülse h erreicht, die durch eine Axe A drehbar mit dem in einem geradlinigen Schlitze gleitenden Schieber σ verbunden ist. Der Mechanismus wird hierdurch zwar ein zusammengesetzter, aber die Bewegungsvorgänge sind denjenigen analog, die bei dem vorhin betrachteten Schleifkurbelgetriebe auftreten. Wir nehmen wieder an, dass der Punkt F sich mit der constanten Geschwindigkeit gleich $F\Phi$ drehe. Behufs der Construction des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ für den geradlinig bewegten Punkt A ziehen wir in A eine Normale auf die Bahngerade α, zu $F\Phi$ die Parallele $A\Xi$ bis an die Gerade $\Lambda\Phi$, auf ΛA eine Senkrechte $\Xi A_{\mathfrak{v}}$, und diese bestimmt auf jener Normalen die lothrechte Geschwindigkeit $AA_{\mathfrak{v}}$ des Punktes A. In derselben Weise ergiebt sich die andere zugehörige lothrechte Geschwindigkeit $AA'_{\mathfrak{v}}$ dieses Punktes für die Kurbellage $\Phi F'$. Es wird zu $F'\Phi$ die Parallele $A\Xi'$ bis an $\Lambda\Phi$ und auf ΛA die Senkrechte $\Xi' A'_{\mathfrak{v}}$ bis an jene Normale gezogen. Für die Mittellage A^m werden die beiden entsprechenden Geschwindigkeiten $A^m A^I_{\mathfrak{v}}$, $A^m A^{II}_{\mathfrak{v}}$ nach den obigen Proportionen bestimmt. Da ein Theil des so erhaltenen örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ angenähert parallel zur Geraden α verläuft, so bewegt sich der Punkt A während des langsamen Ganges von A^0 bis A^τ, also während der Drehung von F^0 über F^{II} bis F^τ, grösseren Theils sehr angenähert gleichförmig, aber ungleichförmig und rasch zurück. Hinsichtlich dieser Eigenschaft hat dieser Bewegungsvorgang bei vielen Werkzeugmaschinen nützliche Anwendung gefunden. Ausserdem ist in der bekannten Weise noch im Bezug auf die in $\Lambda\Phi$ liegende Zeitaxe $A^m T_n$ das von A^0 ausgehende orthogonale Wegdiagramm $\mathfrak{w}$ gezeichnet, welches grössten Theils angenähert geradlinig verläuft und damit auf jene angenähert gleichförmige Bewegung des Punktes A hinweist; allein, da auch der obere Theil $W_\tau W_n$ dieses Wegdiagramms von einer Geraden zwar mehr als der untere, jedoch ebenfalls wenig abweicht, so zeigt sich hierdurch, dass das Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ ein viel sichereres Reagenz für die Erkennung der Gleichförmigkeit und der Ungleichförmigkeit der Bewegung ist als das Wegdiagramm.

150. **Darstellung der Geschwindigkeiten bei dem Schmid'schen Motor.** Der in Fig. **406** schematisch gezeichnete Schmid'sche Motor ist ein schwingendes Schleifkurbelgetriebe, bei welchem der in dem schwingenden Cylinder gleitende Kolben K durch wechselweis einströmendes Wasser bewegt wird.[1]) Das durch das Zuflussrohr R eintretende Wasser dringt in den Canal c und drückt treibend auf den Kolben K. Dadurch wird dann die Rotation der

[1]) Der *Practische Maschinen-Constructeur*. 1871. S. 208.

Kurbel ΦF und die Schwingung des Cylinders um die feste Axe Λ bewirkt, und gleichzeitig kann das vor dem Kolben befindliche Wasser durch den anderen Canal c' in das Abflussrohr U fliessen. Infolge der symmetrischen Anordnung stellt sich der Canal c' der Zuflussöffnung theilweise gegenüber, wenn die Kurbel ΦF die Todtlage ΦF^{II} überschritten hat, so dass jetzt das Wasser in den Canal c' einströmt und treibend auf die andere Seite des Kolbens drückt, während das vorhin eingetretene Wasser durch den Canal c in das Abflussrohr U hineinfliesst.

Um eine Uebersicht über die Veränderung der Geschwindigkeit zu gewinnen, mit welcher das Oeffnen der Canäle sich vollzieht, brauchen wir nur das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ eines auf dem Kreise $\varkappa$ liegenden, mit dem Cylinder fest verbunden gedachten Punktes zu construiren, und wählen der Einfachheit wegen auf diesem Kreise $\varkappa$ den Punkt A, in welchem derselbe von der Geraden ΛF geschnitten wird. Nehmen wir nun an, dass der Kurbelzapfen F gleichförmig mit der constanten Geschwindigkeit $F\Phi$ rotirt und ziehen wir zu $F\Phi$ die Parallele $A\Xi$ bis an $\Lambda\Phi$, darauf $\Xi A_{\mathfrak{v}}$ senkrecht ΛF, so repräsentirt $AA_{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit von A in dem betreffenden Momente, und wir erhalten somit das zugehörige örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$.

Bei der allgemeinen Construction in Fig. **403** stellt die auf der Stange l senkrechte Strecke $E_{\mathfrak{v}}F_{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit dar, mit welcher dort die Hülse H auf der Stange l gleitet; folglich repräsentirt bei dem Schmid'schen Motor, wo jener Punkt $F_{\mathfrak{v}}$ durch Φ vertreten wird und die Kolbenstange l durch Λ geht, das von Φ auf ΛF gefällte Loth ΦZ die momentane Geschwindigkeit des Kolbens in dem schwingenden Cylinder. Demnach ist der geometrische Ort des Punktes Z das innerhalb des Bahnkreises φ liegende Bogenstück von dem über $\Lambda\Phi$ als Durchmesser beschriebenen Kreise ζ. Um nun das zugehörige Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}^k$ des im schwingenden Cylinder bewegten Kolbens zu construiren, denken wir uns an den Cylinder eine parallele Gerade o angeheftet, ziehen auf diese von dem mit K bezeichneten Mittelpunkte des Kolbens eine Senkrechte KJ und machen auf derselben $JK_{\mathfrak{v}} = \Phi Z$.

Gelangt der Punkt F in eine andere Lage, z. B. nach F^{τ}, so hat zwar auch die an den Cylinder angeheftete Gerade o mit diesem ihre Lage verändert. Wir betrachten jedoch für die fernere Construction diese Gerade als festliegend, machen auf derselben die Strecke JJ^τ gleich der Strecke, um welche der Kolben sich im Cylinder verschiebt, während der Kurbelzapfen von F nach F^τ schreitet, und nehmen dann die Ordinaten $J^\tau K_\mathfrak{v}^\tau$ gleich dem von Φ auf ΛF^τ gefällten Lothe. Auf diese Weise erhalten wir das Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}^k$ für die Bewegung des Kolbens in dem schwingenden Cylinder.[1]) Dasselbe wird wegen der Symmetrie des Bewegungsvorganges von der Geraden o symmetrisch getheilt. Ist insbesondere wie in unserer Figur der Punkt F^τ der Berührungspunkt für die von Λ an den Bahnkreis φ gelegte Tangente ΛF^τ, dann ist jenes Loth oder die entsprechende Geschwindigkeit gleich dem Kurbelradius ΦF; folglich besitzt der Kolben die grösste Geschwindigkeit, welche gleich dem Kurbelradius ist, wenn F sich in den Berührungspunkten der von Λ an den Bahnkreis φ gelegten Tangenten befindet.

151. **Darstellung der Geschwindigkeit bei dem rotirenden Schleifkurbelgetriebe.** In Fig. **407** ist die angegebene Construction der Geschwindigkeit des Punktes A bei dem rotirenden Schleifkurbelgetriebe ausgeführt. Es wird zu $F\Phi$ die Parallele $A\Xi$ bis an die Gerade $\Lambda\Phi$ gezogen und auf ΛA das Loth $\Xi A_\mathfrak{v}$ gefällt, welches die lothrechte Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ des Punktes A bestimmt. Hierdurch erhalten wir für diesen Punkt A das von $\Lambda\Phi$ symmetrisch getheilte örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$, von dem nur die eine Hälfte in der Zeichnung ausgeführt ist. Ferner ist die erhaltene Geschwindigkeit auf die Kurbel ΦF abgetragen, also $\Phi V = A_\mathfrak{v} A$ gemacht, und die Hälfte des zugehörigen zeitlichen polaren Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}_z$ construirt, welches ebenfalls von $\Lambda\Phi$ symmetrisch getheilt wird. Das schwingende Schleifkurbelgetriebe und das rotirende Schleifkurbelgetriebe unterscheiden sich geometrisch nur dadurch, dass bei jenem der Punkt Λ ausserhalb des Bahnkreises φ liegt, bei diesem sich aber innerhalb desselben befindet.

Wird in Fig. **407** bei dem betrachteten rotirenden Schleifkurbelgetriebe angenommen, dass das Glied ΛL^∞ resp. die Schleife ΛA gleichförmig um Λ rotire, und dass die Endpunkte der lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte dieses Gliedes in Λ zusammenfallen, dann bestimmt die auf ΛA senkrechte Gerade $\Lambda\mathfrak{P}$

[1]) In Weisbach-Herrmann, *Ingenieur- und Maschinen-Mechanik*, 1876, III. Theil, I. Abth., S. 691, wird aus angenäherter Rechnung gefolgert, dass dieses Geschwindigkeitsdiagramm für die Kolbenbewegung mit dem Geschwindigkeitsdiagramm bei dem Schubkurbelgetriebe übereinstimme. Beide Diagramme sind aber in mathematischer Beziehung wesentlich verschieden.

auf $F\Phi$ die lothrechte Geschwindigkeit $F\mathfrak{P}$ des Punktes F. Das zugehörige örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}^f$, von dem nur die eine der symmetrischen Hälften auf diese Weise gezeichnet wurde, ist in diesem Falle zugleich die Polbahn des bewegten Gliedes FL^∞, welches hier durch den in der Schleife gleitenden Schieber vertreten wird. Durch Uebertragung der Geschwindigkeit auf die gleichförmig rotirende Gerade ΛA, so dass $\Lambda X = \mathfrak{P}F$ ist, erhalten wir das zeitliche polare Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}^f_z$ des Punktes F. Von diesem Diagramme, welches sich nur wenig von dem Bahnkreise unterscheidet, ist die eine der symmetrischen Hälften gezeichnet.

152. **Bewegungsvorgang bei dem gleichschenkeligen Schleifkurbelgetriebe, Anwendung desselben als Ventilator und als rotirende Pumpe oder Motor.** Bei einem gleichschenkeligen Schleifkurbelgetriebe, welches in Fig. **408**, versehen mit Eingriffspaarung, gezeichnet ist, gestalten sich die Bewegungsbeziehungen sehr einfach. Der feste Axenpunkt Λ liegt in diesem besonderen Falle auf dem Bahnkreise φ; es ist daher der Winkel $F^m\Lambda F = \frac{1}{2} F^m\Phi F$. Demnach ist, wenn die Kurbel ΦF sich gleichförmig dreht, auch die Rotation der Schleife gleichförmig, und umgekehrt. Dabei vollendet aber die Kurbel zwei Umdrehungen, während die Schleife eine Umdrehung gemacht hat. Denken wir uns den Kreis φ mit der um Φ rotirenden Kurbel ΦF, und den Kreis k, dessen Radius ΛF^m ist, mit der um Λ rotirenden Schleife verbunden, so rollen diese beiden Kreise wie die Rollkreise zweier Räder auf einander. Der zu F diametrale Gabelpunkt F' bewegt sich auf der zur Schleife senkrechten Geraden PP', und die Gabel umgreift, wenn F mit Λ coincidirt, entweder den einen oder den anderen der an der Schleife befestigten Zapfen P, P' und bewirkt den stetigen Fortgang der Bewegung.

Dieser Mechanismus wird mannigfaltig umgestaltet in der Praxis angewendet; so beispielsweise als Oldham'scher Ventilator in Fig. **409**, wo die Schleife, welche in F drehbar mit der Kurbel ΦF verbunden ist, über den festen Zapfen Λ oder über einen drehbar auf Λ gesteckten Gleitbacken gleitet, und die Endpunkte A, B der Schleife an der Ventilatorwandung entlang geführt werden, die nach einer entsprechenden Pascal'schen Curve geformt ist. Die durch das Zuflussrohr R eintretende Luft wird vermittelst der als Flügel wirkenden Schleife nach dem Ausflussrohre U getrieben, um aber die hierdurch hervorgebrachte Ungleichförmigkeit der Luftströmung zu mildern, ist es nothwendig, zwei solche Ventilatoren mit gemeinsamer Kurbelwelle neben einander zu stellen, so dass die beiden Kurbelzapfen sich gegenüber stehen. P. Kirchhoff hat diesen Ventilator mit gebogenen, an der Wandungsstelle δ entlang gleitenden Schaufeln Aa, Bb zweckmässig ausgeführt.[1])

Auch als rotirende Pumpe oder Motor ist dieser Mechanismus in entsprechender Gestaltung von L. Taverdon[2]) construirt, wie Fig. **410** in schematischer Darstellung zeigt. Die Schleife dreht sich in dem cylindrischen Gehäuse um die Axe A, in dieser Schleife gleitet der mit der Kurbel ΦF drehbar verbundene Schieber s, der hier den Pumpkolben vertritt. Durch die Drehung der Kurbel in der Pfeilrichtung wird die Schleife in Bewegung versetzt und der Schieber oder Kolben s in ihr verschoben. Dem Kolben folgt das Wasser vom Einflussrohre R kommend nach, und gleichzeitig treibt dieser das vor ihm befindliche Wasser nach dem Ausflussrohre U. Bei der praktischen Ausführung muss die Kurbel ΦF verhältnissmässig kurz sein und die Kolbenlänge so gross genommen werden, dass seine Endflächen den von F beschriebenen Kreis nicht erreichen; damit der Raum, in welchem die Kurbel rotirt, stets von dem Raume, in welchem das Wasser dem Kolben folgt, abgeschlossen ist. Hinter der ersten Schleife rotirt in gleicher Weise eine zweite Schleife, die in dem cylindrischen Gehäuse durch eine Scheidewand von der ersten getrennt ist. Diese Schleife wird von derselben Welle Φ vermittelst einer Kurbel $\Phi F'$ getrieben und von einem Schieber s' als Pumpkolben hin und her durchschritten. Da die beiden Kurbelzapfen F, F' sich gegenüber stehen, so sind die beiden Schleifen in einem rechten Winkel gegen einander gestellt. Diese Vorrichtung kann auch als Motor verwendet werden, wenn das Wasser resp. der Dampf in eine der beiden Röhren treibend einströmt. Bei der rotirenden Maschine von Donkin[3]) sind umgekehrt die Zapfen F, F' fest, und über die um diese Zapfen drehbaren Schlitten s, s' gleitet das durch eine Kurbel $\Phi\mathsf{A}$ getriebene Schleifenkreuz, an welchem ein im Gehäuse bewegter Flügel befestigt ist. In diesem Falle ist aber der Mechanismus ein Kreuzschleifengetriebe.

---

[1]) *Deutsches Reichspatent* Nr. 10796 vom 19. Febr. 1880 und Nr. 8689 vom 23. Aug. 1879. Die dort gegebene Benennung „Oldham-Ventilator" entstammt dem Oldham'schen Ruderrade und der Oldham'schen Wellenkuppelung, weil bei denselben gleichartige Mechanismen vorkommen.

[2]) *Deutsches Reichspatent* Nr. 10382 vom 6. April 1879.

[3]) *Deutsches Reichspatent* Nr. 27762 vom 29. Juli 1883.

153. **Die Oldham'sche Wellenkuppelung.** Das gleichschenkelige Schleifkurbelgetriebe steht in engster Beziehung zu dem Kreuzschleifengetriebe, welches in Fig. **411** gezeichnet ist. Wenn die Kreuzschleife c über die Gleitbacken b, d gleitet, die sich um die festen Axen Φ, Λ drehen, dann durchläuft der Kreuzpunkt O der Kreuzschleife den über $\Phi\Lambda$ als Durchmesser beschriebenen Kreis ω, und alle mit der Kreuzschleife verbundenen Punkte durchschreiten Pascal'sche Curven (Art. 19). Während eines Umlaufes des Punktes O vollzieht der Gleitbacken b um Φ und der Gleitbacken d um Λ eine halbe Umdrehung. Denken wir uns nun den Punkt O durch eine Kurbel ΩO geführt, die sich um eine im festen Kreismittelpunkte Ω befindliche Axe dreht, so können wir diesen Mechanismus ansehen als aus zwei vereinten gleichschenkeligen Schleifkurbelgetrieben bestehend, die eine gemeinschaftliche Kurbel besitzen und deren beide Schleifen ein einziges Glied bilden.

In Fig. **412** ist das Kreuzschleifengetriebe als Oldham'sche Kuppelung [1]) parallelperspectivisch schematisch dargestellt. Jene beiden Gleitbacken sind hier durch die gleichbezeichneten Scheiben b, d ersetzt, die mit ihren Wellen sich beziehlich um die Axen $\Phi\Phi'$, $\Lambda\Lambda'$ drehen und mit prismatischen Einschnitten versehen sind. Zwischen diesen beiden Scheiben liegt eine dritte Scheibe c, welche jenes Schleifenglied vertritt und an beiden Seiten rechtwinkelig zu einander gestellte, prismatische Vorsprünge besitzt, die in jenen Einschnitten gleiten. Bei dieser Kuppelung entspricht einer gleichförmigen Umdrehung der einen Welle eine gleichförmige Umdrehung der anderen, und während diese Wellen eine Umdrehung vollenden, durchläuft der Punkt O der Scheibe c den Kreis ω zweimal.

Einfache Mechanismen mit Curvenführung.

154. **Dreigliederiger einfacher Mechanismus mit zwei niederen Paarungen und einer höheren Paarung.** In Fig. **413**, Taf. XXIX, ist ein einfacher dreigliederiger Mechanismus dargestellt, dessen Glieder Φf, Λl sich resp. um die Axen Φ, Λ in dem Gliede $\Phi\Lambda$

---

[1]) Willis, *Principles of Mechanism.* 1841. p. 167; sec. ed. 1870. p. 164. In der Maschinenpraxis wird das Wort „kuppeln" mehr gebraucht als das edlere Wort „koppeln". Vergl. Grimm, *Wörterbuch der deutschen Sprache.*

drehen und sich mit den cylindrischen, durch die Curven f, l vertretenen Flächen berühren. Dieser Mechanismus besitzt also in Φ, Λ je eine Drehpaarung, und die beiden Cylinderflächen bilden eine höhere Paarung, welche vermittelst Kraftschlusses die gegenseitige zwangläufige Bewegung der Glieder Φf, Λl bewirkt. Betrachten wir das Glied $\Phi\Lambda$ als Steg, so erhalten wir ein Getriebe, bei welchem durch eine Drehung des einen der Glieder Φf, Λl eine Drehung des anderen vermittelt wird. Wir können die Bewegung dieses Getriebes, wenn die zu dem Berührungspunkte K der Curven f, l gehörenden Krümmungsmittelpunkte derselben resp. F, L sind, während zweier Zeitelemente nach Art. 15 durch die Bewegung des Kurbelgetriebes $\Phi F L \Lambda$ ersetzen. Die Curve $\mathfrak{e}$, welche der Berührungspunkt K in dem ruhenden System $\Phi\Lambda$ erzeugt, nennen wir wie bei den Zahnrädern die Eingriffscurve. Der Berührungspunkt K kann während zweier Zeitelemente als ein Punkt der Koppel FL des gedachten Kurbelgetriebes betrachtet werden; demnach ist die von K nach dem Pol $\mathfrak{P}$ dieses Kurbelgetriebes, d. h. nach dem Schnittpunkte $\mathfrak{P}$ von ΦF, ΛL, gezogene Gerade $K\mathfrak{P}$, die Normale an der Eingriffscurve $\mathfrak{e}$, und es kann der Krümmungsmittelpunkt derselben nach der Bobillier-schen Construction, wie in Art. 48 gelehrt wurde, bestimmt werden. Der Schnittpunkt $\mathfrak{P}'$, den die gemeinschaftliche Normale LF der sich in K berührenden Curven f, l mit der Geraden $\Lambda\Phi$ bildet, ist der betreffende Pol der beiden Systeme Φf, Λl. Die am allermeisten vorkommenden besonderen Fälle dieses Getriebes sind diejenigen, bei denen zwei Zahnräder in einander greifen.

Nehmen wir an, es sei $AA_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit eines Punktes A des Gliedes Φf, und soll die lothrechte Geschwindigkeit $BB_\mathfrak{v}$ eines Punktes B des Gliedes Λl bestimmt werden, so verbinden wir einen beliebigen auf der gemeinsamen Curvennormalen Kn liegenden Punkt, z. B. den Punkt K, mit Φ und Λ, ziehen zu AK die Parallele $A_\mathfrak{v}K_\mathfrak{v}'$ bis an $K\Phi$, ferner zu Kn die Parallele $K_\mathfrak{v}'K_\mathfrak{v}''$ bis an $K\Lambda$, und zu KB die Parallele $K_\mathfrak{v}''B_\mathfrak{v}$ bis an $B\Lambda$. Man kann auch, falls die Krümmungsmittelpunkte F, L in der Zeichnung vorhanden sind, die in Art. 131 (Fig. 368) gegebene Construction anwenden, aus der sich die erste Construction leicht ableiten lässt. Wenn insbesondere der Punkt $A_\mathfrak{v}$ mit Φ coincidirt, vereinfacht sich die Construction durch Wegfall jener Parallelen $A_\mathfrak{v}K_\mathfrak{v}'$. Oft wird die eine der Curven f, l durch einen Punkt vertreten; und in der praktischen Ausführung wird dies dadurch erreicht, dass ein kreiscylindrischer Zapfen an einer Scheibe mit curvenförmigem Rande oder in einer curvenförmigen Nuthe derselben gleitet.

155. **Hervorbringung einer vorgeschriebenen, gleichförmig schwingenden Bewegung durch eine rotirende Scheibe.** Um vermittelst einer rotirenden Scheibe Φf in Fig. **414** eine vorgeschriebene Bewegung des Gliedes ΛK hervorzubringen, indem der Punkt K auf der curvenförmigen Umgrenzung der gleichförmig rotirenden Scheibe gleitet, wollen wir beispielsweise annehmen: der Punkt K vollziehe auf dem Kreisbogen $\mathfrak{e}$ in dem ruhenden Gliede $\Phi\Lambda$ während einer halben Umdrehung der Scheibe Φf eine gleichförmige Drehung von K_0 bis K_8, bleibe dann während einer Achteldrehung der Scheibe an der Stelle K_8 in Ruhe, senke sich hierauf während einer Vierteldrehung gleichförmig von K_8 bis K_0 herab und bleibe wieder während einer Achteldrehung an der Stelle K_0 in Ruhe. Behufs der Construction der Scheibenumgrenzung theilen wir den Bogen $K_0 K_8$ in eine Anzahl etwa 8 gleicher Theile, ebenso auch den Halbkreis 038 in 8 gleiche Theile, gehen um zwei Theile weiter bis $8'$ und theilen ferner auch den Viertelkreis $8'0'$ in 8 gleiche Theile. Um Φ beschreiben wir einen, beispielsweise durch den Theilpunkt K_3 gehenden Kreisbogen, der die radialen Geraden ΦK_0, $\Phi 3$, $\Phi 3'$ in den Punkten J_3, III, III' schneidet, und machen auf demselben den Kreisbogen $III\Gamma_3 = J_3 K_3$; dann ist Γ_3 ein Punkt der Führungscurve $0\Gamma_3\Gamma_8$, welche die gleichförmige Hebung des Punktes K bewirkt, wenn die Scheibe in der eingezeichneten Pfeilrichtung rotirt. Denn durch Drehung des Theilpunktes 3 nach K_0 gelangt Γ_3 nach K_3, und der Punkt K wird bis K_3 gehoben. In gleicher Weise ergeben sich die übrigen betreffenden Punkte der ganzen Führungscurve f. An dieselbe schliesst sich, weil K in K_8 während einer Achtelumdrehung ruhen soll, der um Φ beschriebene Achtelkreisbogen $\Gamma_8\Gamma'_8$. Ferner machen wir auch den Bogen $III'\Gamma'_3 = J_3 K_3$, dadurch erhalten wir einen Punkt Γ'_3 der Führungscurve $\Gamma'_8\Gamma'_3 0'$, welche die gleichförmige Senkung des Punktes K von K_8 bis K_0 bewirkt; und durch den um Φ beschriebenen Achtelkreisbogen $0'0$ wird die Umgrenzung f der Scheibe geschlossen. Diese Umgrenzung besteht demnach aus zwei Stücken von zwei verschiedenen Trochoiden und aus zwei concentrischen Achtelkreisbögen. Die Zwangläufigkeit des Gliedes ΛK wird bei dem betrachteten Getriebe durch Kraftschluss vermittelt. Um denselben zu vermeiden, kann man an das Glied ΛK in K einen kreiscylindrischen Zapfen anbringen, der innerhalb einer in die Scheibe eingeschnit-

tenen Nuthe gleitet, deren Mittellinie jene geschlossene Führungscurve f ist.

156. **Hervorbringung einer vorgeschriebenen, gleichförmig schwingenden Bewegung durch eine rotirende Kurbel.** In Fig. 415 soll derselbe Bewegungsvorgang des Gliedes ΛK wie vorhin, aber durch eine entgegengesetzt gleichförmig rotirende Kurbel ΦF bewirkt werden, indem der Kurbelzapfen F in einer entsprechend gestalteten Nuthe des Gliedes ΛK entlang gleitet. Die Gestaltung dieser Nuthe wird auch durch die beiden Lagen des Gliedes ΛK und der Kurbel ΦF bedingt, welche wir als entsprechende betrachten. Wir wollen annehmen, der tiefsten Lage ΛK_0 entspräche die Kurbellage $\Phi 0$. Behufs der Construction der Mittellinie der Nuthe theilen wir den Schwingbogen $K_0 K_8$ des Punktes K in 8 gleiche Theile, ebenso den Halbkreis 058 in 8 gleiche Theile, und gehen zwei Theile weiter bis $8'$; dann beschreiben wir um Λ den z. B. durch 5 gehenden Kreisbogen, der die radialen Geraden ΛK_5, ΛK_0 in den Punkten H_5, V schneidet, und machen auf diesem Kreisbogen $V\Delta_5 = H_5 5$. Ebenso ergeben sich die anderen betreffenden Punkte der Curve $0\Delta_5\Delta_8$, welche der gleichförmigen Hebung des Punktes K von K_0 bis K_8 entspricht. An diese Curve schliesst sich, weil K während einer Achteldrehung der Kurbel in K_8 ruhen soll, ein Achtelkreisbogen $\Delta_8\Delta_8'$, dessen Mittelpunkt μ sich ergiebt, indem wir das Dreieck $\mu K_0 \Lambda$ congruent dem Dreieck $\Phi K_8 \Lambda$ machen. Durch Eintheilung des Viertelbogens $8'0'$ in 8 gleiche Theile erhalten wir in analoger Weise wie vorhin die Curve $\Delta_8' 0'$, die der gleichförmigen Senkung des Punktes K von K_8 bis K_0 entspricht; und durch den um Φ beschriebenen Achtelkreisbogen $0'0$ wird diese Curve geschlossen, die aus zwei Trochoidenbögen und aus zwei Kreisbögen besteht. Die beiden neben dieser Curve gezogenen Aequidistanten bilden die Nuthe, in welcher der Kurbelzapfen F gleitet. Während des plötzlichen Ueberganges des Gliedes ΛK von Ruhe in Bewegung werden Stösse auftreten, die vermieden werden können, wenn wir jene Führungscurven an den betreffenden Stellen derart abändern, dass dieser Uebergang allmählich vor sich geht. Die in den betrachteten Fällen ausgeführten Constructionen stammen von De Parcieux[1]), und gelten allgemein, wenn zu bestimmten Lagen des einen Gliedes die entsprechenden Lagen des anderen gegeben sind.

---

[1]) De Parcieux, *Mémoires de l'Académie.* 1747. p. 243.

157. **Hervorbringung einer vorgeschriebenen, gleichförmig zu- und abnehmenden schwingenden Bewegung durch eine rotirende Scheibe.** Soll in Fig. **417** die vorgeschriebene Bewegung des Punktes L des um Λ schwingenden Gliedes ΛK derart sein, dass die Geschwindigkeit dieses Punktes L in der Lage L_0 von Null an der Zeit proportional wächst, bis L die Mitte L_4 seines Weges $L_0 L_8$ errreicht, dann in gleicher Weise auf der anderen Weghälfte $L_4 L_8$ bis Null abnimmt, und soll dieselbe Bewegung beim Rückgange erfolgen: so müssen wir uns, um die Umgrenzung der Scheibe Φf construiren zu können, erst in Fig. **416** das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_3$ und das zugehörige orthogonale Wegdiagramm zeichnen. Da die Aenderungen der Geschwindigkeit in vier Perioden gleichartig auftreten, theilen wir in Fig. **416** auf der Zeitaxe eine Strecke $T_0 T_{16}$, welche der Zeit einer vollen Umdrehung der gleichförmig rotirenden Scheibe entspricht, durch die Punkte T_4, T_8, T_{12} in 4 gleiche Theile und ausserdem die Strecke $T_0 T_4$ z. B. in eine Anzahl 4 gleicher Theile. Wir nehmen nun an, dass im Zeitmomente T_4, also nach Verlauf einer Vierteldrehung der Scheibe, die Geschwindigkeit des Punktes L durch die von beliebiger Grösse gewählte Ordinate $T_4 V_4$ repräsentirt werde; und weil diese Geschwindigkeit während dieser Vierteldrehung von Null an der Zeit proportional wächst, ist durch das Geradenstück $T_0 V_4$ das entsprechende zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_3$ gegeben, welches sich für die weitere Drehung der Scheibe in dem Zickzack $V_4 T_8 V_{12} T_{16}$ fortsetzt.

Um zunächst für die Zeitstrecke $T_0 T_4$ das zugehörige Wegdiagramm $\mathfrak{w}$ zu bestimmen, ist zu beachten, dass nach Art. 3 die von der Anfangslage L_0 gemessene Wegstrecke des Punktes L der betreffenden Fläche proportional ist, die durch das Geschwindigkeitsdiagramm bestimmt wird. Machen wir nun die Ordinate $T_4 W_4$ gleich der in Fig. **417** gegebenen Weglänge $L_0 L_4$, die der Punkt während der ersten Vierteldrehung der Scheibe durchläuft, bezeichnen wir durch $T_0 T_4 V_4$ den Inhalt der von dem Geschwindigkeitsdiagramm bestimmten entsprechenden Dreiecksfläche und ferner mit c eine constante Strecke, so können wir die Weglänge oder Ordinate

$$T_4 W_4 = \frac{1}{c} \cdot T_0 T_4 V_4$$

setzen. Um aus dieser Gleichung die constante Strecke c zu ermitteln, verschieben wir der besseren Uebersicht wegen das Dreieck $T_0 T_4 V_4$ nach $O T_0 IV$ und verwandeln das Dreieck $O T_0 IV$ in ein anderes inhaltgleiches Dreieck $\Omega T_0 4$, dessen Seite $T_0 4 = T_4 W_4$ ist, indem wir $IV\Omega$ parallel $4O$ oder $W_4 T_0$ ziehen; dann ist die auf der Zeitaxe befindliche Strecke $\Omega T_0 = 2c$. Nachdem diese constante Strecke bestimmt ist, ergiebt sich, wenn wir $T_0 III = T_3 V_3$ machen, die Weglänge oder Ordinate

$$T_3 W_3 = \frac{1}{c} \cdot T_0 T_3 V_3,$$

indem wir zu ΩIII die Parallele $T_0 W_3$ bis an die Ordinate $T_3 W_3$ ziehen; und in gleicher Weise erhalten wir die anderen Punkte W_1, W_2 des Wegdiagramms $\mathfrak{w}$. Da die Strecke $T_0 T_4$ in 4 gleiche Theile getheilt ist, so wird auch durch das entstandene Strahlenbüschel $T_0(W_1 W_2 W_3 W_4)$ die Strecke $T_4 W_4$ in 4 gleiche Theile getheilt; demnach kann man das Wegdiagramm $\mathfrak{w}$ einfacher vermittelst der Viertheilung der Strecken $T_0 T_4$ und $T_4 W_4$ erhalten. Nach dieser Bestimmungsweise ist das Stück $T_0 W_4$ des Wegdiagramms $\mathfrak{w}$ ein Stück einer Parabel, deren Scheitel in T_0 liegt. Ist umgekehrt diese Parabel als das orthogonale Wegdiagramm eines bewegten Punktes gegeben, und nehmen wir jene constante Strecke $\Omega T_0 = 2c$ beliebig an, so ergiebt sich, indem wir den eben befolgten Constructionsweg rückwärts durchschreiten, als zeitliches orthogonales Geschwindigkeitsdiagramm eine Gerade $T_0 \mathfrak{v}_4$. Hiernach erhalten wir den Satz:

Wenn bei der Bewegung eines Punktes die Geschwindigkeit von Null an der Zeit proportional wächst, ist das orthogonale Wegdiagramm dieses Punktes eine Parabel, die mit ihrem Scheitel die Zeitaxe berührt, und umgekehrt.

In dem betrachteten Falle wird die Fortsetzung des Wegdiagramms bis W_8 durch ein congruentes, centrisch symmetrisches Parabelstück $W_4 W_8$ gebildet, und die zweite Hälfte $W_8 W_{12} T_{16}$ des Wegdiagramms ist der ersten Hälfte $T_0 W_4 W_8$ desselben symmetrisch.

Wir machen nun in Fig. **417** auf dem Kreisbogen $L_0 L_8$ die Weglängen $L_0 L_1$, $L_0 L_2$, $L_0 L_3$, $L_0 L_4$ resp. gleich jenen Ordinaten $T_1 W_1$, $T_2 W_2$, $T_3 W_3$, $T_4 W_4$, bestimmen ferner auf diesem Kreisbogen zu L_0, L_1, L_2, L_3 die bezüglich L_4 symmetrisch gelegenen Punkte L_5, L_6, L_7, L_8. Dadurch ergeben sich auf dem Kreisbogen $K_0 K_8$ die entsprechenden Lagen des Punktes K. Den um Φ beschriebenen, durch K_0 gehenden Kreis theilen wir von K_0 aus in 16 gleiche Theile. Behufs der Construction der Umgrenzung f der Scheibe beschreiben wir um Φ beispielsweise den durch K_3 gehenden Kreisbogen, der die radialen Geraden ΦK_0, $\Phi 3$, $\Phi 13$ resp. in den Punkten J_3, III, $XIII$ schneidet, und machen auf diesem Kreisbogen $III\Gamma_3 = J_3K_3$ und $XIII\Gamma_{13} = J_3K_3$. In gleicher Weise ergeben sich die übrigen Punkte der Scheibenumgrenzung f, durch welche die verlangte Bewegung des Punktes K oder L des Gliedes ΛK bewirkt wird.

158. **Hervorbringung einer schwingenden Bewegung durch eine hin- und hergehende geradlinige Bewegung. Hauptmechanismus des Seller'schen Dampfhammers**[1]. In Fig. **418** bewegt sich der Kolben B eines Dampfhammers nebst der Kolbenstange ss', die den Hammer A trägt, durch Dampfkraft getrieben in dem festen Cylinder C auf und nieder. An der Stange ss' ist ein Zapfen K befestigt, der in einem bogenförmigen, um die feste Axe Φ schwingenden Schlitzrahmen f gleitet. Bei dem Seller'schen Dampfhammer-Mechanismus, den Fig. **418** im Haupttheil schematisch darstellt, ist an einem Arme ΦF der Schwinge Φf die Schubstange FL gelenkig angeschlossen, deren Endpunkt L in der zu ss' parallelen Geraden l geführt wird. In L wird die nicht gezeichnete Schieberstange eingehängt, die sich in dieser Geraden l bewegt. Soll nun der Schieber, oder was dasselbe ist, der Punkt L eine vorgeschriebene Bewegung vollziehen, so dass z. B. den Theilpunkten $K_0, K_1, .. K_8$ der Hubhöhe des Punktes K die gegebenen Lagen $L_0, L_1, .. L_8$ entsprechen; dann sind damit auch die zugehörigen Lagen $F_0, F_1, .. F_8$ des Punktes F bestimmt, und man kann leicht die betreffenden Lagen zeichnen, welche der Punkt K in dem schwingenden Gliede $\Phi F f$ einnimmt. Dadurch ergiebt sich dann die Mittellinie des bogenförmigen Schlitzrahmens f. Ist diese Mittellinie, wie im dargestellten Fall, insbesondere ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt M sein möge, dann repräsentirt, wenn wir von der Schubstange FL absehen, der Mechanismus ein excentrisches Schubkurbelgetriebe, bei welchem ΦM die Kurbel, ferner s die Schubstange vertritt, und bei welchem die Koppel MK weggemindert ist. Durch die Anschliessung der Schubstange FL erhalten wir aber einen zusammengesetzten Mechanismus.

Um eine graphische Darstellung der gegenseitigen Bewegungen des Kolbens und des Punktes L zu gewinnen, können wir die Weglängen der Kolbenmitte B als Abscissen, und die von

[1] J. v. Hauer, *Hüttenwesens-Maschinen*. 1876. S. 432.

einer bestimmten Ausgangslage z. B. L_0 aus gemessenen Weglängen des Punktes L als rechtwinkelige Ordinaten antragen. Die Wegstrecken des Punktes L, die über L_0 liegen, sind nach rechts von ss', und die unter L_0 liegen, sind nach links von ss' angetragen. Für die gezeichnete Lage ist die Ordinate $BU = L_0 L$ gemacht. Wir erhalten somit die Curve u, welche ein Diagramm darstellt; und dieses Diagramm gilt sowohl für die Aufwärts- wie für die Abwärtsbewegung des Kolbens.

159. **Hervorbringung einer schwingenden Bewegung durch ein Excentrik. Mechanismus einer Hebelscheere.** Wenn in Fig. **419** die Gerade l des schwingenden Gliedes ΛK auf der Umgrenzung der rotirenden Scheibe Φf gleiten soll und für bestimmte Drehungswinkel die entsprechenden stetig auf einander folgenden Lagen der Geraden l gegeben sind, dann ist die Umgrenzung f der Scheibe bestimmt. Denn betrachten wir die Scheibe einstweilen als fest, denken wir uns den Punkt Λ um Φ in die betreffenden Lagen bezüglich der Scheibe gedreht und die entsprechenden Lagen der mit bewegten Geraden l gezeichnet, so ergiebt sich die umgrenzende Curve f der Scheibe als die Hüllbahncurve dieser Geraden. Dies gilt auch allgemein, wenn l eine beliebige gegebene Curve ist. Wird insbesondere, wie in Fig. **419**, die rotirende Scheibe von einem bezüglich Φ excentrischen Kreise f umgrenzt, dann ist das Getriebe ein excentrisches schwingendes Schleifkurbelgetriebe, und die Scheibe wird ein Excentrik oder Excenter genannt. In diesem Falle kann der Kraftschluss, der die stete Berührung von l und f bewirkt, dadurch vermieden werden, dass an dem schwingenden Gliede ΛK ein Rahmen angebracht wird, in welchem das Excentrik gleitet. Dieser Mechanismus wird oft bei Hebelscheeren und Luppenzangwerken verwendet. In Fig. **419** sind die beiden Scheerenklingen K, J schematisch gezeichnet. Wenn wir das Excentrik Φf durch eine Kurbel ΦF, deren Zapfenmitte F der Mittelpunkt des Kreises f ist, oder durch eine gekröpfte Welle ersetzen, und in dem Gliede ΛK, wie durch Punktirung angedeutet ist, einen zu l parallelen Schlitz machen, in dem der Zapfen F gleitet, so erhalten wir ein excentrisches schwingendes Schleifkurbelgetriebe in der gewöhnlichen Gestalt.

160. **Hervorbringung einer geradlinigen Bewegung durch eine rotirende Scheibe oder Nuthe.** Bei dem in Fig. **420** dargestellten Getriebe gleitet die Stange η, an der die rechtwinkelige Stange l befestigt ist, in der Hülse H, und die ovale um Φ rotirende Scheibe Φf setzt diese Stange vermittelst Kraftschlusses in zwangläufige

Bewegung. Denken wir uns zu der Curve f, welche die Scheibe umgrenzt, für Φ als Lothpunkt die Fusspunktencurve g gezeichnet, so beschreibt auch der Stangenpunkt G im Bezug auf die Scheibe diese Fusspunktencurve. Der kleinste die Curve f in C_0 berührende Kreis c schneidet die Gerade η einerseits in dem Punkte C; und die hierdurch bestimmte Strecke CG ist der Weg, den der Stangenpunkt G von seiner, dem Punkte Φ zunächst liegenden Lage aus durchschritten hat. Ziehen wir ferner eine beliebige radiale Gerade ΦG_5, welche den Kreis c in C_5 und die Fusspunktencurve g in G_5 schneidet, dann ist die Strecke $C_5 G_5$ gleich dem Wege, den der Punkt G oder die Stange η zurücklegt, wenn die Scheibe, indem ΦC_0 von ΦC ausgeht, sich um den Winkel von der Grösse $C_5 \Phi C_0$ dreht. Demnach können wir die Fusspunktencurve g auch als ein polares Wegdiagramm eines Punktes des geradlinig bewegten Gliedes ηl betrachten. Für den Stangenpunkt A, der innerhalb der Strecke $A_0 A_6$ schwingt, ist die eine Hälfte des orthogonalen Wegdiagramms $\mathfrak{w}$ gezeichnet. Die auf der Zeitaxe $A_0 T_6$ in 6 gleiche Theile getheilte Strecke $A_0 T_6$ entspricht einer halben Umdrehung der Scheibe. Die entsprechenden Wegstrecken ergeben sich durch Zeichnung der betreffenden Scheibenstellungen oder vermittelst der Fusspunktencurve g, indem wir von Φ aus radiale Gerade ziehen, welche den Halbkreis $C_0 C C_6$ in 6 gleiche Theile theilen. Es ist dann z. B. $T_5 W_5 = C_5 G_5$. Die Curve $A_0 W_4 W_6$ repräsentirt die Hälfte des orthogonalen Wegdiagramms, die der Bewegung des Punktes A von A_0 bis A_6 entspricht. Für den Rückgang dieses Punktes ergiebt sich hier eine bezüglich der Geraden $T_6 W_6$ symmetrische Fortsetzung dieses Wegdiagramms. Die Bewegung des Gliedes η kann auch hervorgebracht werden, wenn dasselbe in G mit einem Zapfen versehen wird, der innerhalb einer in die Scheibe eingeschnittenen Nuthe gleitet, deren Mittellinie die Fusspunktencurve g ist; und hierdurch wird zugleich der vorhin nothwendige Kraftschluss vermieden.

Ist die Curve f, wie in Fig. **420**, eine Ellipse, die um einen Brennpunkt Φ rotirt, dann ist die betreffende Fusspunktencurve g ein über die grosse Ellipsenaxe $C_0 G_6$ als Durchmesser beschriebener Kreis. In diesem besonderen Falle würde also die Bewegung der Stange η in praktisch einfacherer Weise durch eine in der Scheibe befindliche kreisförmige, excentrische Nuthe, deren Mittellinie der Kreis g ist, bewirkt. Wenn Φ der Endpunkt der lothrechten Geschwindigkeit eines Punktes der gleichförmig rotirenden Scheibe ist, so bestimmt die im Berührungspunkte K zu l senkrechte Gerade KZ auf der Geraden $\Lambda^x\Phi$ die Geschwindigkeit ΦZ, mit welcher sich die Stange η verschiebt. Der Punkt Z ergiebt sich auch durch die in G an die Fusspunktencurve g gezogene Normale, die in dem betrachteten besonderen Falle, wo g ein Kreis ist, durch seinen Mittelpunkt M geht. Ziehen wir durch den Berührungspunkt K zur Stange η die Parallele KV bis an die in A auf η senkrechte Gerade, so ist V ein Punkt des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms des Punktes A.

161. **Hervorbringung einer geradlinigen, schwingenden Bewegung durch ein rotirendes, gleichseitiges Bogendreieck.** In Fig. 421 rotirt ein gleichseitiges Bogendreieck $\Phi K K'$ um die feste Axe Φ und gleitet in dem rechteckigen Rahmen il, welcher mit der Schubstange η verbunden ist. Nehmen wir an, die Mittellinie $\Phi\Xi$ des Bogendreiecks befinde sich in der Lage ΦW^0, dann liegt der Stangenpunkt A in der Lage A_0 und bleibt in dieser so lange ruhend, bis durch die Drehung des Bogendreiecks in der Pfeilrichtung die Ecke K nach W^0 gelangt. Während aber bei weiterer Drehung die Ecke K an der Rahmenseite l und der Bogen f an der Rahmenseite i gleitet, bewegt sich die Stange η ebenso wie bei einem rechtwinkeligen Kreuzkurbelgetriebe. Wenn die Mittellinie $\Phi\Xi$ von ΦW^0 aus eine Vierteldrehung vollzogen hat, befindet sich A in der Wegmitte A_6, die Ecke K verlässt die Rahmenseite l, und es beginnt die Ecke K' an der Rahmenseite i zu gleiten. Dadurch entsteht ein symmetrischer Bewegungsvorgang, und während $\Phi\Xi$ die folgende Vierteldrehung vollendet, bewegt sich A von A_6 nach A_{12}.

Behufs der Construction des polaren Wegdiagramms für die von der Wegmitte A_6 aus gemessenen Wegstrecken des Punktes A beschreiben wir um Φ mit dem Radius gleich $\frac{1}{2}\Phi\Xi$ den Kreis n, ferner mit dem Radius $\Phi\Xi$ den Kreis W^0W^2, machen den Winkel $W^0\Phi W^2 = 30^0$ und beschreiben über ΦW^2 als Durchmesser den Kreisbogen $W^2W^4W^6$ bis an den Kreis n. Dann ist $W^0W^2W^4W^6$ ein Viertel des durch die Geraden ΦW^0, ΦW^6 in vier symmetrische Theile getheilten polaren Wegdiagramms; und dieses Viertel entspricht der Vierteldrehung des von ΦW^0 aus rotirenden Fahrstrahles $\Phi\Xi$. Auf demselben repräsentirt die Strecke NW^4 den Abstand des Punktes A von A_6, und es ist also $T_4W_4 = NW^4$. Die ausgezogene symmetrische Hälfte des polaren Wegdiagramms liefert die rechtsseitigen Abstände des Punktes A von A_6, die strichpunktirte symmetrische Hälfte dagegen die linksseitigen Abstände. Das orthogonale Wegdiagramm steigt in A_0 rechtwinkelig geradlinig bis W_2 auf, geht dann in ein Sinoidenstück $W_2 W_6$ über, und hieran schliesst sich eine bezüglich W_6 centrisch symmetrische Fortsetzung $W_6 W_{12}$. Die gezeichnete Hälfte des orthogonalen Wegdiagramms entspricht der halben Umdrehung der Geraden $\Phi\Xi$ von ΦW^0 bis ΦW^{12}. Für die folgende halbe Umdrehung ergiebt sich die andere bezüglich der Geraden $T_{12} W_{12}$ symmetrische Hälfte. Um das Gleiten der scharfen Ecken des Bogendreiecks an den Rahmenseiten zu vermeiden, wird das Bogendreieck in der Praxis durch äquidistante Kreisbögen umgrenzt. Dieses Getriebe mit einem Bogendreieck wurde zuerst von Murray bei der Steuerung der Dampfmaschinen angewandt.[1])

162. **Hervorbringung einer geradlinigen, gleichförmig hin- und hergehenden Bewegung durch eine rotirende Kurbel.** Oft wird die Hervorbringung einer geradlinigen, hin- und hergehenden gleichförmigen Bewegung durch eine gleichförmig rotirende Bewegung gefordert. Um in Fig. **422** vermittelst einer gleichförmig rotirenden Kurbel ΦF eine gleichförmige hin- und hergehende Bewegung des in den Hülsen H, H' geführten Gliedes $\eta\eta'$ hervorzubringen, muss dieses Glied mit einer entsprechend geformten Nuthe versehen werden, in welcher der Kurbelzapfen F gleitet. Die Gestalt der Mittellinie dieser Nuthe ist durch die beiden Lagen des Gliedes $\eta\eta'$ und der Kurbel ΦF mit bedingt, welche zunächst als entsprechend angenommen werden. Wir wollen beispielsweise annehmen, dass der Mittellage des Gliedes $\eta\eta'$ die auf der Geraden $\eta\eta'$ senkrechte Lage der Kurbel ΦF entspricht. Behufs der Construction der Mittellinie der Nuthe theilen wir die Hälfte $K_4 K_8$ des Weges, den der Punkt K des Gliedes $\eta\eta'$ durchschreitet, in 4 gleiche Theile, und ebenso den Viertelkreis $F_4 F_8$; ziehen durch die erhaltenen Kreistheilpunkte F_5, F_6, F_7 zur Geraden $\eta\eta'$ Parallele und machen auf diesen $F_5\Delta_5 = K_5 K_4$, $F_6\Delta_6 = K_6 K_4$, $F_7\Delta_7 = K_7 K_4$; dann ergiebt sich durch die Punkte F, Δ_5, Δ_6, Δ_7, K_4 ein Viertel von der geschlossenen viertheilig symmetrischen Mittellinie δ der Nuthe.

Beschreiben wir um Φ den Kreis π, dessen halber Umfang gleich der ganzen Weglänge ist, die ein Punkt des Gliedes $\eta\eta'$ durchschreitet, und ziehen wir an diesem Kreise π die zur Geraden $\eta\eta'$ parallele Tangente p, die ihn im Punkte $\mathfrak{P}$ berührt, und die wir uns mit dem Gliede $\eta\eta'$ fest verbunden denken, so

[1]) *Specification* No. 2531, 4. Aug. 1801. — *Abhandlungen der Königlichen Technischen Deputation für Gewerbe in Berlin.* 1826. Thl. I. S. 51.

rollt der mit der Kurbel ΦF rotirende Kreis π an der in sich selbst bewegten Tangente p. Demnach repräsentiren der Kreis π und die Tangente p die Rollcurven der gegen einander bewegten Glieder ΦF, $\eta\eta'$. Betrachten wir das Glied $\eta\eta'$ resp. die Tangente p einstweilen als ruhend, und lassen wir den Kreis π von der gezeichneten Lage aus nach abwärts auf p rollen, dann wird jene Mittellinie $F_4\Delta_6K_4$ in dem Gliede $\eta\eta'$ auch von dem mit π verbundenen Punkte F beschrieben; und demnach ist das Curvenstück $F_4\Delta_6K_4$ ein Stück einer verschlungenen Cycloide. Machen wir auf der Tangente p die Punktreihe $4, 5, 6, 7, 8$ congruent der Punktreihe K_4, K_5, K_6, K_7, K_8, so sind $F_4 4$, $\Delta_5 5$, $\Delta_6 6$, .. Normalen an dieser Cycloide; und auf diesen Normalen erhalten wir durch beiderseitige Auftragung des Zapfenradius die Punkte für die äquidistanten Ränder der Nuthe. Diese Ränder können wir auch als Hüllcurven der Kreise zeichnen, die wir mit dem Zapfenradius um Punkte des Cycloidenbogens beschreiben.

Bei dieser Anordnung tritt der Uebelstand auf, dass bei den zur Geraden $\eta\eta'$ senkrechten Kurbelstellungen, also in der Mittellage des Gliedes $\eta\eta'$, weder eine sichere Fortbewegung, noch eine sichere Haltung dieses Gliedes durch die Kurbel ΦF bewirkt wird. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, muss die Kurbel ΦF im Punkte 4, wo die Tangente p den Kreis π berührt, mit einem Zahne versehen werden, und an das Glied $\eta\eta'$ müssen die beiden Platten ii' befestigt werden, welche je eine entsprechende Zahnlücke enthalten. Dadurch wird in der Mittellage des Gliedes $\eta\eta'$ vermittelst des Zahnes, der in die betreffende Zahnlücke eingreift, eine sichere Führung dieses Gliedes gewonnen.[1])

Durch den Kurbelzapfen F wird bei diesem Mechanismus besonders in der Nähe der Mittellage ein starker seitlicher Druck auf das Glied $\eta\eta'$ erzeugt und Reibung verursacht, so dass die Bewegung erschwert und die Nuthe ungleichmässig rasch abgenutzt wird. Wir werden daher im Folgenden noch andere Mechanismen dieser Art betrachten, bei denen eine sanftere und genauere Bewegung des Gliedes $\eta\eta'$ erfolgt.

163. **Hervorbringung einer geradlinigen, gleichförmig hin- und hergehenden Bewegung durch eine herzförmige rotirende Scheibe.** In Fig. **423** soll das Glied $\eta\eta'$, welches aus einem Rahmen und zwei Stangen η, η' besteht, die resp. in den festen Hülsen H, H'

[1]) Vergl. Lanz et Bétancourt, *Essai sur la composition des machines*, 1808, p. 34, und deutsch von Kreyher, 1829, S. 50, ferner Redtenbacher, *Bewegungs-Mechanismen*. 1857. S. 15.

gleiten, durch eine um die feste Axe Φ gleichförmig rotirende, herzförmige Scheibe Φf in gleichförmige hin- und hergehende Bewegung versetzt werden. Wir wollen annehmen, dass der Punkt K des Gliedes $\eta\eta'$ während der einen halben Umdrehung der Scheibe Φf gleichförmig die Strecke K_0K_8 durchschreitet und während der anderen halben Umdrehung in gleicher Weise zurückgeht. Behufs der Construction der herzförmigen Umgrenzung der Scheibe theilen wir die Wegstrecke K_0K_8 z. B. in eine Anzahl 8 gleicher Theile, ebenso die Hälfte 048 eines um Φ beschriebenen Kreises π, und machen die durch die Kreistheilpunkte $1, 2, 3, \ldots 8$ gehenden Fahrstrahlen $\Phi\Gamma_1, \Phi\Gamma_2, \Phi\Gamma_3, \ldots \Phi\Gamma_8$ resp. gleich $\Phi K_1, \Phi K_2, \Phi K_3, \ldots \Phi K_8$. Die so erhaltenen Punkte $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots \Gamma_8$ bilden eine von K_0 ausgehende Archimedische Spirale γ, durch die als halbe Umgrenzung der gleichförmig rotirenden Scheibe Φf die gleichförmige Hebung des Punktes K von K_0 bis K_8 bewirkt wird. Während des Aufsteigens des Gliedes $\eta\eta'$ beschreibt der in der gezeichneten Stellung momentan mit Γ_8 coincidirende Punkt K' dieses Gliedes auf der Scheibe eine symmetrische Archimedische Spirale γ', welche die andere halbe Umgrenzung der Scheibe liefert.

Das Gleiten der Stangenpunkte K, K' auf dem erhaltenen Scheibenrande wird eine rasche Abnutzung zur Folge haben. Deshalb ist es zweckmässig, die Stangen bei K, K' kreisförmig cylindrisch abzurunden, oder statt dessen, wie in Fig. **423** ersichtlich ist, kleine gleiche Frictionsrollen anzubringen, deren Axen K, K' sind. Dem gemäss wird dann die Scheibe von den zu den beiden Archimedischen Spiralen γ, γ' gehörenden Aequidistanten f, f' begrenzt, deren Abstand von diesen Spiralen gleich dem Rollenradius ist. Infolge der Anbringung der beiden Rollen wird aber der einfache Mechanismus durch einen zusammengesetzten Mechanismus vertreten; denn dann ist das Glied $\eta\eta'$ mit drei anderen Gliedern durch Paarungen verbunden.

Den Radius des um Φ beschriebenen Kreises π haben wir so gewählt, dass der halbe Kreisumfang gleich der Schubstrecke K_0K_8 ist. Ziehen wir an den Kreis π die zu $\eta\eta'$ parallele Tangente p, welche ihn in dem mit dem Theilpunkte 4 coincidirenden Punkte $\mathfrak{P}$ berührt, und denken wir uns diese Tangente mit der bewegten Stange η verbunden, so rollt dieser mit der Scheibe um Φ rotirende Kreis π an dieser in sich selbst bewegten Tangente. Demnach werden die Rollcurven hier durch den Kreis π und die Tangente p vertreten. Betrachten wir nun den Kreis π

als fest, und lassen wir an demselben die Tangente p rollen, so beschreibt der mit p verbundene Punkt K die Archimedische Spirale γ als eine allgemeine Kreisevolvente. In der Anfangslage ist $\mathfrak{P}$ der Pol, und folglich $\mathfrak{P}K_0$ die betreffende Normale der Archimedischen Spirale. Die Scheibe drückt demnach in der Richtung dieser Normalen gegen die Rolle resp. gegen den Stangenpunkt K und verursacht dadurch eine seitliche Pressung der Stangen η, η'. Je weiter wir aber den Punkt K_0 von Φ entfernt annehmen, umsomehr wird diese seitliche Pressung vermindert. Damit wird aber auch die herzförmige Scheibe, so wie der Abstand der Hülsen H, H' vergrössert und leicht eine seitliche Durchbiegung des Gliedes $\eta\eta'$ bewirkt. Um dies zu verhindern, können anstatt der Stangen η, η' auch die Langseiten des Rahmens, der die Axe Φ zwischen sich fasst, in Hülsen geführt werden. Verbinden wir die Punkte Γ_1, Γ_2, Γ_3 . . resp. mit den Theilpunkten 5, 6, 7 . ., so erhalten wir die betreffenden Normalen der Archimedischen Spirale γ; und durch Auftragen des Rollenradius auf diese Normalen ergiebt sich die Aequidistante f, die auch als Umhüllungscurve der um die Punkte Γ_1, Γ_2, Γ_3 . . mit dem Rollenradius beschriebenen Kreise gezeichnet werden kann. Hierbei ist zu beachten, dass die beiden symmetrischen Aequidistanten f, f' bei K_0 durch einen um K_0 beschriebenen kleinen Kreisbogen verbunden werden. Bei Γ_8 überschneiden sich aber die beiden Aequidistanten. Diese Ueberschneidung tritt jedoch deutlicher hervor, wenn der Abstand der Aequidistanten von der Spiralen grösser genommen wird, wie dies durch die gestrichelt gezeichneten Aequidistantenstücke g, g' merkbar gemacht ist. Da aber die beiden Aequidistanten f, f' in ihrem Schnittpunkte auf der Symmetrallinie enden müssen, so wird die äquidistante Umgrenzung der Scheibe bei K' mit einem kleinen Fehler behaftet, der um so kleiner ist, je kleiner wir den Rollenradius annehmen.

Um in Fig. **424** den seitlichen Druck auf den Rahmen zu vermeiden, dessen Langseiten p, p' in den Hülsen H, H' gleiten, treffen wir die Anordnung derart, dass der Punkt K durch ein Bogenstück γ einer gespitzten Kreisevolvente von K_0 bis K_8 gehoben wird. Betrachten wir den Kreis π, dessen halber Umfang gleich K_0K_8 ist, als fest, und lassen wir die Tangente p auf dem Kreise π rollen, dann beschreibt der Punkt K dieser Tangente die genannte Kreisevolvente γ. Um das Stück K_0K' derselben zu zeichnen, welches der Wegstrecke K_0K_8 des Punktes K entspricht, theilen wir die Strecke K_0K_8, so wie den Halbkreis 048 in je 8 gleiche

Theile und machen auf den Kreistangenten die Strecken $1\Gamma_1$, $2\Gamma_2$, $3\Gamma_3$, . . $8\Gamma_8$ resp. gleich $0K_1$, $0K_2$, $0K_3$, . . $0K_8$. Der mit der Tangente p verbundene Punkt K', welcher momentan mit dem Punkte Γ_8 der Kreisevolvente γ coincidirt, beschreibt, wenn die Tangente p an dem Kreise π rollt, im Bezug auf die Scheibe eine allgemeine Kreisevolvente γ', die in bekannter Weise construirt ist. Während einer gleichförmigen halben Umdrehung der Scheibe wird der Punkt K durch die Kreisevolvente γ von K_0 bis K_8 gleichförmig verschoben, und der Druck gegen K erfolgt beständig in der Richtung der Bewegung; aber gleichzeitig bewegt sich der Punkt K' auf der allgemeinen Kreisevolvente γ'. Mit Beginn der folgenden gleichförmigen halben Umdrehung wird der nach K'_8 gelangte Punkt K' von der Kreisevolvente γ erfasst und gleichförmig zurückgeführt. Während dieser halben Umdrehung bewegt sich der Punkt K auf der allgemeinen Kreisevolvente γ'. Werden die beiden Punkte K, K' durch kleine Rollen ersetzt, dann bilden die zu den Kreisevolventen γ, γ' gehörenden Aequidistanten f, f' die Umgrenzung der Scheibe. Von diesen ist die Aequidistante f wieder ein Stück einer gespitzten Kreisevolvente; denn diese wird, wenn die Tangente p an dem Kreise π rollt, auf der Scheibe von dem Tangentenpunkte J erzeugt, in welchem der Rollenkreis die Tangente p einerseits schneidet. Bei Γ_8 überschneiden sich die beiden Aequidistanten f, f'. Der dadurch entstehende Fehler der Scheibenumgrenzung ist aber um so kleiner, je kleiner wir den Rollenradius annehmen. Diese Führung enthält den Vortheil, dass der treibende Druck gegen den Punkt K oder K' beständig in der Bewegungsrichtung dieser Punkte erfolgt, sie hat dagegen aber den Nachtheil, dass bei einer der Pfeilrichtung entgegengesetzten Drehung eine starke seitliche Pressung verursacht wird; denn für den Punkt K_0 der allgemeinen Kreisevolvente f' bildet die zugehörige nach dem Punkte 8 gehende Normale $K_0 8$ mit der Schubrichtung einen beträchtlichen Winkel.

In Fig. **425** wird die gleichförmige hin- und hergehende Bewegung des Rahmens $KLK'L'$, dessen Langseiten in den Hülsen H, H' gleiten, vermittelst zweier nach Kreisevolventen geformten Scheiben bewirkt. Dieselben sind auf der gemeinsamen Axe Φ befestigt, und zwischen beiden befinden sich die Hülsen H, H', die als unsichtbar durch Strichelung angedeutet sind. Die Kurzseite KL hat in K nach vorn einen schmalen, plattenförmigen Ansatz, in L einen solchen nach hinten. Ebenso hat die andere Kurzseite

$K'L'$ bei K' nach vorn und bei L' nach hinten einen schmalen, plattenförmigen Ansatz. Die vordere Scheibe ist nach einer Kreisevolvente $\varkappa$ geformt, die von dem Punkte K der an dem Kreise π rollenden Tangente p erzeugt wird; und die hintere Scheibe ist nach einer symmetrischen Kreisevolvente λ geformt. Während einer halben Umdrehung im Sinne des Pfeiles wird der Punkt K durch die Kreisevolvente $\varkappa$ von K_0 bis K_8 bewegt, und der bei K befindliche plattenförmige Ansatz gleitet mit seiner ebenen Fläche auf dem Rande $\varkappa$ der vorderen Scheibe entlang. In dem Momente, in welchem die Kreisevolvente $\varkappa$ den Punkt K erfasst, verlässt der Punkt K' diese Kreisevolvente, und gleichzeitig beginnt das Gleiten des Punktes L' resp. des bei L' nach hinten gerichteten Ansatzes auf der Kreisevolvente λ. Mit dem Beginn der nachfolgenden halben Umdrehung wird der Punkt K', der nach K'_8 gelangt ist, von der Kreisevolvente $\varkappa$ zurückgeführt, die der Punkt K an der Stelle K_8 verlässt, und gleichzeitig bewegt sich L auf der hinteren Kreisevolvente λ entlang. Bei dieser Anordnung wirkt der treibende Druck beständig in der Richtung der Bewegung, und die Drehung der Scheibe kann sowohl in dem einen als in dem anderen Sinne stattfinden.

164. **Hervorbringung einer vorgeschriebenen, gleichförmig zu- und abnehmenden, geradlinig schwingenden Bewegung durch eine ovale Scheibe.** In Fig. **426** soll die geradlinige Bewegung des Gliedes KK', welche durch die um Φ gleichförmig rotirende ovale Scheibe hervorgebracht wird, derart sein, dass die Geschwindigkeit dieses Gliedes von Null an der Zeit proportional bis zur Mittellage wächst und in gleicher Weise wieder bis Null abnimmt. Dem gemäss wird nach Art. 157 für die Bewegung des Punktes K von seiner tiefsten Lage bis zu seiner Wegmitte K_4 das orthogonale Wegdiagramm durch ein Stück KW_4 einer Parabel dargestellt, deren Scheitel K die Zeitaxe KT_8 berührt; und für die weitere Bewegung des Punktes K bis zu seiner höchsten Lage K_8 bildet ein centrisch congruentes Parabelstück W_4W_8 die Fortsetzung dieses Wegdiagramms. Die Strecke KT_8, welche einer halben Umdrehung der Scheibe entspricht, ist in 8 gleiche Theile getheilt, und die zu diesen Theilpunkten gehörenden Ordinaten, welche die Wegstrecken darstellen, sind in der Zeichnung markirt. Um nun die Umgrenzung der Scheibe zu erhalten, ziehen wir von Φ aus Fahrstrahlen, welche die Hälfte $K48$ des um Φ mit dem Radius ΦK beschriebenen Kreises in 8 gleiche Theile theilen, und tragen von diesem Kreise aus auf die Fahrstrahlen die

entsprechenden Wegstrecken des Punktes K ab. So ist z. B. $4\Gamma_4 = T_4W_4$ gemacht. Dadurch erhalten wir die symmetrische Umgrenzung γ der Scheibe, und wegen der Symmetrie der Beziehungen wird dieselbe Curve γ auch von dem Punkte K' beschrieben. Wir ersetzen aber die Punkte K, K' durch Frictionsrollen, und dann bildet die zu γ äquidistante Curve f die Umgrenzung der Scheibe, welche die verlangte Bewegung hervorbringt.[1])

Unrunde Räder.

165. **Elliptische Räder.** Zwei in einander greifende Zahnräder, bei denen die beiden entsprechenden Rollcurven keine vollständigen, mit den Axen centrischen Kreise sind, und bei denen also das Verhältniss ihrer Drehgeschwindigkeiten veränderlich ist, heissen unrunde Räder. Wenn insbesondere die beiden Rollcurven Ellipsen sind, erhalten wir elliptische Räder, die in der Praxis oft bei Werkzeugmaschinen angewendet werden. Wir nehmen an, dass in Fig. **427** die beiden Rollcurven p, π der unrunden Räder Fp, $\Phi\pi$ congruente Ellipsen sind, die sich resp. um die in den Brennpunkten F, Φ befindlichen Axen drehen und sich auf der Geraden $F\Phi$ stets in symmetrisch homologen Punkten berühren. Auf diesen Ellipsen werden die in einander greifenden Zähne angebracht, deren Form zwar, wie in Art. 72 im Allgemeinen angegeben wurde, bestimmt werden kann, aber in der Praxis meist nach dem Gefühl angenähert richtig hergestellt ist.[2]) Die hierdurch bewirkte Bewegung kann nach Art. 129 auch durch ein Zwillingskurbelgetriebe $F\Phi\Lambda L$ hervorgebracht werden, bei welchem die Koppel $L\Lambda$ mit den beiden anderen Brennpunkten L, Λ drehbar verbunden ist. Rotirt z. B. das elliptische Rad Fp gleichförmig um die feste Axe F, durchläuft also

---

[1]) M. Schoenflies hat in seinen *Kinematisch-geometrischen Untersuchungen über Hebedaumen und Excentriks*, 1872. S. 25, nachgewiesen, dass bei diesem Bewegungsvorgange die Rollcurven der beiden Glieder Φf und KK' resp. durch Archimedische Spirale und durch Parabel vertreten werden.

[2]) Die Verzahnung elliptischer Räder hat Kirsch behandelt im *Civilingenieur*, 1875. B. XXI. S. 223. Desagulier, *Cours de Physique expérimentale traduit de l'Anglois par Pezenas*, 1751. T. I. p. 496, hat die elliptischen Räder zuerst bei einem Planetarium angewendet, und die Verzahnung dadurch vermieden, dass die sich berührenden elliptischen Ränder von einer in Rillen laufenden gekreuzten Treibschnur umschlungen sind.

der Mittelpunkt m der Ellipse p in gleichen Zeiten gleiche Bogenstücke des um F beschriebenen Kreises k, so bewegt sich das andere elliptische Rad $\Phi\pi$ ungleichförmig. Um ein Bild von der ungleichförmigen Rotation des Mittelpunktes μ der Ellipse π zu erhalten, müssen wir das orthogonale Wegdiagramm dieses Punktes μ construiren, der sich auf dem um Φ beschriebenen Kreise $\varkappa$ bewegt. Zu diesem Zwecke theilen wir jeden der Halbkreise $0k12$ und $0\varkappa XII$ z. B. in eine Anzahl 12 gleicher Theile. Wenn m von 0 aus nach dem zweiten Theilpunkte 2 gelangt ist, hat μ den Bogen $0VII$ durchschritten; denn durch die Construction der Koppellage $L\Lambda$ ergiebt sich die entsprechende Lage von $\Phi\Lambda$, die in unserer Figur zufällig gerade durch den Theilpunkt VII geht. In Fig. **428** nehmen wir auf der Zeitaxe T_0T_{24} die Strecke T_0T_{24} gleich dem Umfange jenes Kreises k, den der Ellipsenmittelpunkt m gleichförmig durchläuft, errichten in T_{24} auf der Zeitaxe eine Senkrechte $T_{24}W_{24}$ von derselben Länge und theilen beide Strecken in 24 gleiche Theile. Da in Fig. **427** der Lage von m in 2 die Lage von μ in VII entspricht, so ist die im Wegdiagramm zu dem Theilpunkte T_2 gehörende Ordinate T_2W_2 gleich der Strecke $T_{24}U_{VII}$, die auf $T_{24}W_{24}$ durch den Theilpunkt U_{VII} bestimmt wird. Es ergiebt sich demnach der Punkt W_2 des durch Punktirung gekennzeichneten Wegdiagramms, indem wir durch den Theilpunkt U_{VII} zur Zeitaxe eine Parallele ziehen. In gleicher Weise bestimmen wir, wenn m sich in einem anderen Theilpunkte des Kreises k befindet, die entsprechende Lage von μ auf dem Kreise $\varkappa$, die im Allgemeinen nicht gerade mit einem Theilpunkte dieses Kreises zusammenfallen wird; dann nehmen wir die Entfernung dieser Punktlage von dem zunächst liegenden Theilpunkte in den Zirkel, tragen dieselbe von dem entsprechenden Theilpunkte auf $T_{24}W_{24}$ ab, und erhalten dadurch die zugehörige Ordinate des Wegdiagramms, welches bezüglich des Punktes W_{12}, der einer halben Umdrehung der Räder entspricht, centrisch symmetrisch ist. Die Abweichung dieses Wegdiagramms von der Geraden T_0W_{24} veranschaulicht die Abweichung von der gleichförmigen Rotation; denn bei einer gleichförmigen Rotation des Rades $\Phi\pi$ wird das Wegdiagramm durch diese Gerade vertreten.

Ist umgekehrt zwischen T_0, W_{12} ein beliebiger Punkt z. B. W_2 des Wegdiagramms gegeben, so sind in Fig. **427** die beiden congruenten Ellipsen bestimmt, welche sich um die Axen F, Φ drehen. Denn construiren wir zu dem betreffenden Abscissenpunkte T_2 den entsprechenden Punkt 2 auf dem Kreise k und zu dem betreffenden Ordinatenpunkte U_{VII} den entsprechenden Punkt VII auf dem Kreise $\varkappa$, so ergeben sich die zugehörigen Lagen Fm, $\Phi\mu$ der Räder. Dem zufolge erhalten wir die anderen Brennpunkte L, Λ, wenn wir auf den Geraden Fm, $\Phi\mu$ diese Punkte L, Λ so bestimmen, dass $FL = \Phi\Lambda$ und $L\Lambda = F\Phi$ ist. Dies geschieht, indem wir die Halbirungsgerade des von Fm und $\mu\Phi$ gebildeten Winkels ziehen, die durch den Pol $\mathfrak{P}$ geht, und dann die symmetrisch congruenten Dreiecke $\mathfrak{P}FL$, $\mathfrak{P}\Lambda\Phi$ construiren. Die beiden congruenten Ellipsen p, π sind demnach, weil ihre grosse Axe gleich $F\Phi$ ist, durch die Brennpunkte bestimmt.

Die Drehgeschwindigkeiten der beiden elliptischen Räder Fp, $\Phi\pi$ verhalten sich umgekehrt wie die jeweiligen Abstände des Pols $\mathfrak{P}$ von den Axen F und Φ. Wenn also die constante Geschwindigkeit des Punktes m gegeben ist, so kann man hiernach leicht für jeden Zeitmoment die Geschwindigkeit des Punktes μ bestimmen. Oder es lässt sich auch, weil die elliptischen Räder durch ein Zwillingskurbelgetriebe ersetzt werden können, diese Geschwindigkeit, wie in Art. 135 gezeigt wurde, einfacher construiren.

166. **Polygonale unrunde Räder.** In Fig. 429 ist als Grundform des Rades Fp ein Quadrat $abcd$ genommen, dessen Mittelpunkt in der Radaxe F liegt. Ueber die halbe Quadratseite $\mathfrak{P}d$ soll ein Curvenbogen gezeichnet werden, der die von F ausgehenden radialen Geraden unter einem constanten Winkel schneidet. Die Curve, welche diese Eigenschaft besitzt, ist eine logarithmische Spirale und der Punkt F heisst der Ursprung derselben. Denken wir uns von F aus eine Reihenfolge von Fahrstrahlen gezogen, so dass jeder mit seinem benachbarten Fahrstrahle denselben unendlich kleinen Winkel einschliesst, und beachten wir, dass die Tangente an der logarithmischen Spirale den nach dem Berührungspunkte gehenden Fahrstrahl unter jenem constanten Winkel schneidet, so sind die elementaren Dreiecke ähnlich, welche je zwei benachbarte Fahrstrahlen und das von ihnen eingeschlossene Curvenelement bilden. Demnach bilden auch je zwei Fahrstrahlen, die gleiche endliche Winkel einschliessen, ähnliche Dreiecke. Halbiren wir also den Winkel $\mathfrak{P}Fd$ durch den Fahrstrahl Fe, so sind die Dreiecke $F\mathfrak{P}e$, Fed ähnlich, und es besteht die Proportion:

$$F\mathfrak{P} : Fe = Fe : Fd,$$

nach welcher die Länge des Fahrstrahles Fe als mittlere Proportionale zwischen $F\mathfrak{P}$ und Fd leicht construirt werden kann. In gleicher Weise ergeben sich auch die Längen der beiden nicht gezeichneten Fahrstrahlen, welche die Winkel $\mathfrak{P}Fe$, eFd halbiren. Drei so zwischen $\mathfrak{P}$ und d bestimmte Punkte sind für die Zeichnung des kurzen Spiralbogens hinreichend. Hierauf zeichnen wir über die andere halbe Quadratseite $\mathfrak{P}a$ den symmetrisch congruenten Spiralbogen, und ferner über die Hälften der anderen Quadratseiten dieselben symmetrisch congruenten Spiralbögen. Zu dem so erhaltenen Rade Fp construiren wir das zweite congruente Rad $\Phi\pi$, dessen eine Quadratecke sich in der Mitte $\mathfrak{P}$ der Quadratseite ad befindet.

Betrachten wir z. B. das Rad Fp als fest und lassen wir den Spiralbogen $\mathfrak{P}\delta$ auf dem Spiralbogen $\mathfrak{P}d$ rollen, so wird, weil beide Bögen resp. ihre von F und Φ ausgehenden Fahrstrahlen unter demselben constanten Winkel schneiden, die jeweilige Gerade, welche den durch die Rollung bewegten Axenpunkt Φ mit dem festen Punkte F verbindet, durch den betreffenden Berührungspunkt dieser Bögen gehen. Demnach ist die Bewegungsrichtung des Punktes Φ stets senkrecht auf dieser Geraden und folglich beschreibt Φ einen Kreis, dessen Mittelpunkt F ist. Es sind also die beiden aus den Spiralbögen gebildeten Curven p, π die mit Zähnen zu versehenden Rollcurven der beiden um die festen Axen F, Φ rotirenden unrunden Räder, welche wegen ihrer eckigen Gestalt auch als polygonale unrunde Räder bezeichnet werden.[1])

Behufs der Construction des zugehörigen orthogonalen Wegdiagramms beschreiben wir um F und Φ die gleichen Kreise k, $\varkappa$, deren Umfänge gleich jener in Fig. **428** auf der Zeitaxe befindlichen Strecke $T_0 T_{24}$ sind; wir ziehen dann von F Fahrstrahlen, welche den Bogen $C_0 C_n$ des Kreises k in eine Anzahl gleicher Theile theilen und übertragen die hierdurch auf dem Spiralbogen $\mathfrak{P}d$ erhaltenen kleinen Bogenstücke, die wir als geradlinig ansehen können, der Reihenfolge nach von $\mathfrak{P}$ auf den congruenten Spiralbogen $\mathfrak{P}\delta$. Die zugehörigen Fahrstrahlen bestimmen auf dem

---

[1]) Polygonale unrunde Räder, deren Gestalt aber von der hier gezeichneten etwas abweicht, sind von Bacon und Donkin bei Buchdruckerpressen angewendet worden. Vergl. Nicholson, *The Operative Mechanic and British Machinist*, 1825. p. 301, oder in der deutschen Uebersetzung, Nicholson, *Praktischer Mechaniker*. 1826. S. 303. Kleemann und Sohn, *Deutsches Reichspatent* Nr. 16323 vom 13. Mai 1881, vereinigen ein polygonales unrundes Rad im Eingriff mit einem ovalen Rade an einer Futterschneidemaschine.

Kreisbogen $\Gamma_0 \Gamma_n$, der ebenso wie $C_0 C_n$ in 6 gleiche Theile getheilt ist, von Γ_0 aus gemessen, die entsprechenden Weglängen, welche ein auf dem Kreise $\varkappa$ rotirender Punkt Γ des Rades durchläuft. Diese Weglängen werden in der oben angegebenen Weise als Ordinaten, die der Theilung auf $C_0 C_n$ entsprechen, in Fig. **428** eingetragen. Demnach erhalten wir das durch Gestrichelung gekennzeichnete Wegdiagramm, welches sich in 8 congruenten Ausbiegungen an der Geraden $T_0 W_{24}$ entlang schlängelt. Sollen aber diese Ausbiegungen stärker, resp. die Abweichungen von der gleichförmigen Bewegung grösser sein, dann muss auch die Grundform der Räder von dem angenommenen Quadrat abweichen. Wir müssen dann in Fig. **429** den Punkt $\mathfrak{P}$ näher an F, den Punkt d auf FC_n ebenso viel weiter von F entfernt annehmen, und zwischen beiden den entsprechenden Spiralbogen zeichnen. Die dadurch entstehenden tieferen Einkerbungen dürfen aber nur so tief gehen, bis der Winkel, unter dem die symmetrischen Spiralbögen zusammenstossen, ein rechter wird, damit die Spitzen des einen Rades sich noch frei in den Kerben des anderen bewegen können. Bei hinreichend tiefen Einkerbungen der Räder können dann die Spiralbögen selbst als Zahncurven wirken, so dass es nicht mehr nöthig ist, diese Spiralbögen noch mit Zähnen zu versehen.[1])

Die Construction eines durch zwei beliebige Fahrstrahlen $F\mathfrak{P}$, Fd bestimmten Bogens einer logarithmischen Spirale kann auch auf eine andere als oben angegebene Weise vermittelst einer in Fig. **429**ª vorher gezeichneten logarithmischen Spirale σ ausgeführt werden. Dieselbe erhalten wir, indem wir ein beliebiges Dreieck OAB annehmen, welches z. B. bei B rechtwinkelig ist, ziehen dann wechselweise BC senkrecht OA, ferner CD senkrecht OB, darauf DE senkrecht OA u. s. w. Auf einem um O mit dem Radius OA beschriebenen Kreise bestimmen wir beispielsweise von A ausgehend gleiche Kreisbögen, ziehen die entsprechenden radialen Geraden und machen auf denselben $OB' = OB$, $OC' = OC$, $OD' = OD$ . .; dann liefern die Punkte A, B', C', D' . . die logarithmische Spirale σ, weil die so erhaltenen Dreiecke OAB', $OB'C'$, $OC'D'$ . . ähnlich sind. Hierauf nehmen wir aus Fig. **429** die Strecken $F\mathfrak{P}$, Fd und machen in Fig. **429**ª die Fahrstrahlen $O0 = F\mathfrak{P}$, $OVI = Fd$, theilen dann den Winkel $0OVI$ durch Fahrstrahlen z. B. in eine Anzahl 6 gleicher

[1]) Die unrunden Räder wurden ausführlich behandelt von H. Holditsch, *Transactions of the Cambridge philosophical Society*, 1842. Vol. VII. p. 62; ferner von Heger, *Civilingenieur*. 1876. B. XXII. S. 515.

Theile, und ebenso den Winkel $\mathfrak{P}Fd$ in Fig. **429** durch Fahrstrahlen, deren Längen $F1$, $F2$, $F3$ .. wir resp. gleich OI, OII, $OIII$.. machen. Nach dieser Construction, die besonders bei längeren Spiralbögen anzuwenden ist, sind auch die erhaltenen Dreiecke $F\mathfrak{P}1$, $F12$, $F23$ .. ähnlich.

167. **Excentrisches Kreisrad und entsprechendes unrundes Rad.** In der Praxis wird zuweilen ein excentrisches Kreisrad genommen und zu diesem ein zweites, entsprechend gestaltetes unrundes Rad construirt. Die Bestimmung der Gestalt dieses zweiten Rades erfordert höhere, umständliche Rechnung und wir sind daher genöthigt, eine auf diesem Wege erhaltene Formel ohne Ableitung derselben zu benutzen.

Ist in Fig. **430** das excentrische Kreisrad Fp, welches sich um die Axe F dreht, gegeben, so muss, indem wir dasselbe als fest betrachten, die zum Rade $\Phi\pi$ gehörende Rollcurve π, welche auf dem Kreise p rollt, derart gestaltet sein, dass der betreffende Axenpunkt Φ einen Kreis φ um den festen Axenpunkt F beschreibt. Die Gestalt der Rollcurve π ist abhängig von der Excentricität PF des Rades Fp und von der Anzahl der Umdrehungen, welche dieses Rad Fp während einer Umdrehung von $\Phi\pi$ vollendet. Bezeichnen wir nun, indem wir den Radius PN des Kreises p als Einheit betrachten, die Excentricität PF mit ε und jene Anzahl der Umdrehungen mit n, so ist nach der hier in Anwendung kommenden Formel angenähert:

$$F\Phi = n + 1 - \frac{(n+1)(n-2)}{4n}\varepsilon^2.$$

In Fig. **430** sollen beide Räder gleichzeitig eine Umdrehung vollenden, demnach ist $n = 1$; ferner ist F in der Mitte des Radius PN, also $PF = \varepsilon = \frac{1}{2}$ genommen. Für diesen Fall ergiebt sich dann:

$$F\Phi = 2 + \frac{1}{8}.$$

Um nun die Rollcurve π zu zeichnen, machen wir

$$F\Phi = \left(2 + \frac{1}{8}\right) PN,$$

beschreiben mit $F\Phi$ als Radius um F den Kreis φ, theilen hierauf den Halbkreis $\mathfrak{P}pN$ in eine Anzahl etwa 12 gleicher Theile, so dass wir die dadurch erhaltenen kleinen gleichen Kreisbögen als geradlinig ansehen können. Diese Theilweite behalten wir im Zirkel, und ziehen dann von F durch die Theilpunkte $1, 2, 3$ .. die Radien FI, FII, $FIII$ .. in dem Kreise φ. Hierauf nehmen wir in der Reihenfolge die auf diesen Radien von φ und p begrenzten Strecken *1 I*, *2 II*, *3 III* . . in den Zirkel, beschreiben mit diesen Strecken als Radien um Φ kurze Kreisbögen und bestimmen mit jener Theilweite im Zirkel von 𝔓 ausgehend auf diesen Kreisbögen successive die Punkte *1'*, *2'*, *3'* . . . der Rollcurve π. Das Hineintreffen des Punktes *12'* in die Gerade $F\Phi$ ist eine Controle für die Richtigkeit der Zeichnung. Nach dieser Construction sind die Fahrstrahlen $\Phi 1'$, $\Phi 2'$, $\Phi 3'$ . . resp. gleich *1 I*, *2 II*, *3 III* . ., und die Länge der Hälfte $\mathfrak{P}\pi 12'$ der von $F\Phi$ symmetrisch getheilten Curve π stimmt sehr angenähert mit dem halben Kreisumfange $\mathfrak{P}p N$ überein.

Behufs der Construction des zugehörigen Wegdiagramms beschreiben wir um F und Φ die gleichen Kreise k, $\varkappa$, deren Umfänge gleich den in Fig. **428** angenommenen gleichlangen Strecken $T_0 T_{24}$, $T_{24} W_{24}$ sind, und theilen jeden der Halbkreise $C_0 k C_{12}$, $\Gamma_0 \varkappa \Gamma_{12}$ in 12 gleiche Theile. Hierauf bestimmen wir zu den Punkten, welche die von F ausgehenden Fahrstrahlen auf k bilden, die entsprechenden Punkte auf der Zeitaxe $T_0 T_{12}$, und zu den Punkten, welche die von Φ ausgehenden Fahrstrahlen auf $\varkappa$ bilden, die entsprechenden Punkte auf $T_{24} W_{24}$. Demnach liefert jedes Paar entsprechender Fahrstrahlen die betreffende Abscisse und Ordinate eines Punktes des in Fig. **428** gezeichneten ausgezogenen Wegdiagramms 𝔴, welches bezüglich des Punktes W_{12} centrisch symmetrisch ist. Die auf der Zeitaxe $T_0 T_{24}$ senkrechten Ordinaten repräsentiren also die Weglängen eines auf dem Kreise $\varkappa$ rotirenden Punktes des Rades $\Phi\pi$.

Da sich die Drehgeschwindigkeiten der Räder umgekehrt wie die entsprechenden Fahrstrahlen verhalten, so kann man hiernach, wenn wir die constante Drehgeschwindigkeit des Rades Fp beispielsweise gleich dem Radius PN setzen, die entsprechende Drehgeschwindigkeit des Rades $\Phi\pi$ leicht construiren. Wir ziehen durch Φ, F zwei Parallele FH, $\Phi\Xi$, machen auf der letzteren Parallelen die Strecke $\Phi\Xi = PN$ gleich der constanten Drehgeschwindigkeit des Rades Fp, und ziehen von Ξ durch den jeweiligen Pol 𝔓 die Gerade $\Xi\mathfrak{P}$, welche jene erste Parallele in einem Punkte H schneidet; dann ist FH die betreffende Drehgeschwindigkeit des Rades $\Phi\pi$. Die so erhaltenen Drehgeschwindigkeiten tragen wir als Ordinaten in die Fig. **428** ein und erhalten dadurch das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_3$. Die Ordinaten desselben repräsentiren also auch die Geschwindigkeit eines Punktes des Rades $\Phi\pi$, dessen Abstand von Φ gleich der Strecke PN ist.

In Fig. **431** ist zu demselben Kreisrade Fp, mit derselben Excentricität $PF = \varepsilon = \frac{1}{2}$ das entsprechende unrunde Rad $\Phi\pi$ gezeichnet, dessen eine Umdrehung zwei Umdrehungen des Kreisrades Fp entspricht; und demnach ist $n = 2$. Aus obiger Formel ergiebt sich somit für diesen Fall:

$$F\Phi = 3,$$

und es ist also der Radius $F\Phi$ des um Φ beschriebenen Kreises φ gleich $3 . PN$. Die Construction der Rollcurve π des Rades $\Phi\pi$ wird ebenso wie vorhin ausgeführt. Das Hineintreffen des Punktes *12'* dieser Rollcurve in die auf $F\Phi$ senkrechte Gerade $\Phi\nu$ ist eine Controle für die Richtigkeit der Zeichnung der Rollcurve π, die von den beiden rechtwinkeligen Geraden ΦF, $\Phi\nu$ symmetrisch getheilt wird, und die daher aus vier congruenten Theilen besteht.[1]) Dieses Rädergetriebe wurde zuerst von Sharp Stewart u. Co.[2]) mit einem Schubkurbelgetriebe vereinigt bei einer Langlochbohrmaschine, die wir später betrachten werden, angewendet, um eine angenäherte Gleichförmigkeit der geradlinigen Schubbewegung während des Hin- und Herganges zu erzeugen. Je kleiner die Excentricität PF, je kleiner also ε ist, desto mehr nähert sich die Curve π einer Ellipse, und diese Constructeure haben für $\varepsilon = 0{,}274$ die Curve π einfach durch eine Ellipse ersetzt.[3])

168. **Unrunde Räder für Erzeugung eines gleichförmigen Kurbelschubes.** In Fig. **432** soll vermittelst eines gleichförmig rotirenden unrunden Rades Fp, welches in ein zweites unrundes Rad $\Phi\pi$ eingreift, die an letzterem befestigte Kurbel ΦL derart in Drehung versetzt werden, dass der Punkt K der Schubstange KL sich gleichförmig auf der geradlinigen Bahn K_0K_8 hin- und herbewegt.

---

[1]) Die annäherungsweise erhaltenen Rollcurven, deren analytische Untersuchung auf elliptische Integrale führt, wurden allgemein behandelt von Lieblein, *Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.* 1870. Folge VI. Band 3. Th. Schönemann giebt in seinen *Geometrischen Constructionen der excentrischen Rad- und Zahncurven*, 1842, S. 29, für die Strecke $F\Phi$ eine Formel, die aber nicht richtig ist.

[2]) *Annales du Conservatoire.* 1862. T. III. p. 749. Dieses Räderpaar wurde ferner auch bei der Langlochbohrmaschine von Collet und Engelhard angewendet. Hart, *Werkzeugmaschinen.* 1864. S. 94. Taf. XXII. Fig. 9. Vergl. auch Hartig, *Mittheilungen der Königl. Sächs. Polytechn. Schule zu Dresden.* 1873. Heft III. S. 91.

[3]) Keller ersetzt in seinen *Triebwerken*, 1881, S. 184, die ellipsenähnliche Curve π auch durch eine Ellipse, ohne darauf aufmerksam zu machen, dass dies nur für eine kleine Excentricität angenähert richtig ist.

Wir setzen voraus, dass einer bestimmten Anzahl n Umdrehungen des Rades Fp ein Hin- und Hergang des Punktes K entspricht. Hierdurch sind die zu den beiden unrunden Rädern gehörenden Rollcurven p, π bestimmt, und wir wollen die Construction derselben ableiten. Zu dem Zwecke theilen wir die Wegstrecke $K_0 K_8$ des Punktes K, deren Länge $K_0 K_8 = 2 \,.\, \Phi L$ ist, in eine Anzahl etwa 8 gleicher Theile, und bestimmen, indem wir mit der Schubstangenlänge als Radius um diese Theilpunkte K_1, K_2, K_3, K_4 .. Kreisbögen beschreiben, durch deren Schnittpunkte auf dem Kurbelkreise einerseits die entsprechenden Lagen L_1, L_2, L_3, L_4 .. des Kurbelzapfens L. Ferner beschreiben wir um F in dem Rade Fp den Kreis k, dessen halber Umfang gleich ein n^{tel} der Weglänge $K_0 K_8$ ist, und ziehen an diesen Kreis die zu $K_0 K_8$ parallele Tangente h, welche wir uns mit dem im geradlinigen Schlitze gleitenden Schieber fest verbunden denken. Demnach rollt diese in sich selbst bewegte Tangente oder Gerade h an dem gleichförmig rotirenden Kreise k, und die gleichförmige Bewegung des Punktes K kann auch hervorgebracht werden, wenn wir den Kreis k durch ein Zahnrad und die Gerade h durch eine in dasselbe eingreifende Zahnstange ersetzen. Die Anzahl n der Umdrehungen des Rades Fp, die einen Hin- und Hergang des Punktes K bewirken, kann in theoretischer Hinsicht eine beliebige ganze Zahl oder ein Bruch sein. Wir wollen beispielsweise $n = 1$ nehmen, und dann ist der halbe Umfang des Kreises k gleich der Weglänge $K_0 K_8$.

Bezeichnen wir der besseren Uebersicht wegen die beiden unrunden Räder Fp, $\Phi\pi$ resp. mit I, II, ferner die Schubstange LK mit III und den Schieber mit IV, dann ist der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_{II\,IV}$, welchen die Stange III mit der in Φ auf ΦK_0 senkrechten Geraden bildet, der Pol der Glieder II, IV; ferner ist der Berührungspunkt $\mathfrak{P}_{I\,IV}$ des Kreises k und der Geraden h der Pol von I und IV. Dem zufolge muss nach Art. 24 der Pol $\mathfrak{P}_{I\,II}$ der beiden Glieder I, II auf der Geraden $\mathfrak{P}_{II\,IV}\mathfrak{P}_{I\,IV}$ und auf der Geraden $F\Phi$ liegen. Dieser Pol $\mathfrak{P}_{I\,II}$ wird also bestimmt durch den Schnittpunkt dieser beiden Geraden, und ist auch mit p_4 bezeichnet, weil in unserer Zeichnung die Stange LK sich in der Lage $L_4 K_4$ befindet. Wir ziehen von F aus radiale Gerade Fp_0, Fp_1, Fp_2, .. Fp_8, welche die rechts von der Geraden $F\mathfrak{P}_{I\,IV}$ liegende Hälfte des Kreises k in 8 gleiche Theile theilen, und denken uns die radiale Gerade Fp_5 in die Gerade $F\Phi$ gedreht; dann gelangt die Stange LK nach $L_5 K_5$ und bestimmt durch ihren Schnitt mit der Geraden $\Phi\mathfrak{P}_{II\,IV}$ den entsprechenden Pol $\mathfrak{p}_{II\,IV}$, der mit $\mathfrak{P}_{I\,IV}$ verbunden auf $F\Phi$ den Pol $\mathfrak{p}_{III}$ bestimmt. Machen wir nun auf jener radialen Geraden $Fp_5 = F\mathfrak{p}_{III}$, so ist ausser p_4 auch der Punkt p_5 ein Punkt der Rollcurve p des Rades Fp. In gleicher Weise erhalten wir die Punkte $p_0, p_1, p_2, \ldots p_8$ dieser Rollcurve p, die von der Geraden $F\mathfrak{P}_{IV}$ symmetrisch getheilt wird und bei p_0, p_8 in Spitzen ausläuft. Zwischen den Curvenpunkten p_0, p_1 und p_7, p_8 sind noch eingeschaltete Punkte auf den von F ausgehenden gestrichelten radialen Geraden bestimmt. Diese Punkte entsprechen den Lagen von K, die um $\frac{1}{16}$ und $\frac{1}{32}$ der ganzen Weglänge $K_0 K_8$ von den beiden Grenzpunkten K_0, K_8 entfernt sind.

Wenn successive die Fahrstrahlen Fp_5, $Fp_6 \ldots$ des Rades Fp in die Gerade $F\Phi$ gedreht werden, muss der Punkt L auf dem Kurbelkreise beziehlich nach L_5, $L_6 \ldots$ gelangen. Wir machen daher auf dem Kurbelkreise von L_8 aus die Bogen $L_8\lambda_5 = L_5 L_4$, $L_8\lambda_6 = L_6 L_4 \ldots$, und auf den radialen Geraden $\Phi\lambda_5$, $\Phi\lambda_6 \ldots$ die Strecken $\Phi\pi_5 = \Phi\mathfrak{p}_{III}$ u. s. w. Auf diese Weise ergeben sich die Punkte $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \ldots$ der Rollcurve π des Rades $\Phi\pi$, die von der Geraden ΦL symmetrisch getheilt wird und zwei in Φ zusammenstossende Spitzen besitzt. Die Fahrstrahlen der Curve π sind auch gleich den Verlängerungen der entsprechenden zur Curve p gehörenden Fahrstrahlen bis an den um F mit dem Radius $F\Phi$ beschriebenen Kreis. Die erhaltenen Rollcurven p, π können aber wegen ihrer in Spitzen auslaufenden Gestalt in der Praxis nicht verwendet werden, und auch dann nicht, wenn annäherungsweise die Spitzen p_0, p_8 abgerundet und die Einkerbungen im Rade $\Phi\pi$ entsprechend flacher gemacht werden, wie dies in der Zeichnung durch die ausgezogenen Curven p, π und die gestrichelten Spitzen veranschaulicht ist. Denn diese mit Zähnen versehenen Rollcurven, welche zuerst von Willis[1]) bestimmt wurden, eignen sich nicht zur praktischen Uebertragung der Bewegung; sie haben nur theoretisches Interesse, und werden in der Praxis, wie später erörtert wird, durch zweckmässiger gestaltete Curven ersetzt, die eine angenähert gleichförmige hin- und hergehende Bewegung des Schiebers IV bewirken. Es ist praktisch überhaupt nicht erreichbar, dass der Punkt K seine gleichförmige Bewegung bis an die Weggrenze fortsetze, und darauf plötzlich von momentaner Ruhe aus wieder mit gleichförmiger Bewegung zurückschreite. Man muss sich hier stets mit Annäherung begnügen, und am besten wird diese durch

---

[1]) Willis, *Principles of Mechanismen.* 1870. p. 231. Die abgeleitete Construction dieser Rollcurven stammt von Rittershaus.

die in Art. 163 betrachteten Mechanismen bewirkt. Wird insbesondere die Schubstange KL unendlich lang genommen, also ein Kreuzkurbelgetriebe angewendet, dann erhält jede der beiden Curven p, π eine viertheilige symmetrische Gestalt, und sind auch in diesem Falle für die Praxis nicht brauchbar. Behufs der Ableitung der Construction dieser unrunden Räder mussten wir hier den gesamten Mechanismus, der ein zusammengesetzter ist, betrachten. Wenn wir aber von der Kurbel ΦL absehen, dann bilden die beiden unrunden Räder Fp, $\Phi\pi$ mit dem Steg $F\Phi$ einen einfachen Mechanismus.

169. **Sectorenräder und Römer'sche Räder.** Sollen in Fig. **433**, Taf. XXX, durch eine gleichförmige Drehung des Rades Fp verschiedene auf einander folgende gleichförmige Drehungen des anderen Rades $\Phi\pi$ hervorgebracht werden, so lässt sich dies durch entsprechende verzahnte Sectoren p_I, p_{II}, p_{III} .. und $\pi_I, \pi_{II}, \pi_{III}$ .., die resp. je einen Radtheil bilden, ermöglichen. Ist der Axenabstand $F\Phi = e$, und nehmen wir an, dass die Radien der Sectoren p_I, p_{II}, p_{III} .., welche dem Rade Fp angehören, resp. gleich

$$\frac{e}{n_I}, \quad \frac{e}{n_{II}}, \quad \frac{e}{n_{III}} \dots$$

seien, so ergeben sich die Radien der entsprechenden Sectoren $\pi_I, \pi_{II}, \pi_{III}$ .. des anderen Rades beziehlich gleich

$$\frac{n_I - 1}{n_I} e, \quad \frac{n_{II} - 1}{n_{II}} e, \quad \frac{n_{III} - 1}{n_{III}} e \dots$$

Bezeichnen wir ferner mit i_I, i_{II}, i_{III} .., $\iota_I, \iota_{II}, \iota_{III}$ .. die Winkel der Sectoren p_I, p_{II}, p_{III} .., $\pi_I, \pi_{II}, \pi_{III}$ ..; dann bestehen die Proportionen:

$$\frac{\iota_I}{i_I} = \frac{1}{n_I - 1}, \quad \frac{\iota_{II}}{i_{II}} = \frac{1}{n_{II} - 1}, \quad \frac{\iota_{III}}{i_{III}} = \frac{1}{n_{III} - 1} \dots$$

Mit der Wahl der Zahlen n_I, n_{II}, n_{III} .. und der Sectorenwinkel i_I, i_{II}, i_{III} .. des einen Rades Fp sind demnach die entsprechenden Sectorenwinkel $\iota_I, \iota_{II}, \iota_{III}$ .. des anderen Rades $\Phi\pi$ bestimmt. Aber diese Wahl wird durch die Bedingung beschränkt, dass sich niemals zwei Paar entsprechende Sectoren gleichzeitig im Eingriff befinden; und die Verzahnung muss derart sein, dass bei dem Uebergange von einem Sectorenpaare zu dem anderen der Eingriff des einen aufhört, während der andere beginnt. Deshalb ist es zweckmässig, die Sectoren mit möglichst kleinen Zähnen zu versehen. Damit die Sectoren, welche sich nicht im Eingriff befinden, ungehindert an einander vorbeigehen, müssen die Sectoren jedes Rades längs der Axe neben einander gestellt werden. Nur in besonderen Fällen ist dies nicht nöthig und die Sectoren können eine zur Axe senkrechte gemeinsame Mittelebene besitzen, wie z. B. in Fig. **433**, wo der Axenabstand $e = 4$ ist, die Zahlen n_I, n_{II}, n_{III} resp. gleich 4, 2, $\frac{4}{3}$ und die Winkel i_I, i_{II}, i_{III} beziehlich gleich 180°, 120°, 60° sind. Dem zufolge ergeben sich für die Winkel ι_I, ι_{II}, ι_{III} die Grössen 60°, 120°, 180°; die beiden Sectorenräder sind also in diesem besonderen Falle congruent und vollenden gleichzeitig je eine Umdrehung. Während der Sector p_I eine halbe Umdrehung vollendet, macht der entsprechende Sector π_I dagegen $\frac{1}{6}$ Umdrehung. Der Sector p_{II} und der entsprechende gleiche Sector π_{II} vollziehen gleichzeitig $\frac{1}{3}$ Umdrehung, und der Sector p_{III} bewirkt während $\frac{1}{6}$ Umdrehung, dass der entsprechende Sector π_{III} eine halbe Umdrehung durchschreitet.

In Fig. **434** sind zwei gerade Kreiskegel C, Γ, die sich um ihre parallelen Axen F_2F_2', $\Phi_2\Phi_2'$ drehen und längs einer Mantellinie $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_2'$ berühren, im Aufriss und Grundriss dargestellt. Denken wir uns im Grundriss zwei Curven p_1, π_1 gegeben, die bei Drehung um die Axenprojectionen F_1, Φ_1 auf einander rollen und sich beständig auf der Centralen $F_1\Phi_1$ im Pol berühren, so können wir diese Curven als die Grundrissprojectionen zweier Raumcurven p, π betrachten, die resp. auf den Kegeln C, Γ liegen, und deren Aufrissprojectionen p_2, π_2 sind. Je zwei auf diesen Raumcurven befindliche Punkte, deren Grundrissprojectionen in den Curven p_1, π_1 auf der Centralen $F_1\Phi_1$ in Berührung treten, coincidiren in der gemeinsamen Mantellinie $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_2'$ der Kegel. Wird durch die im Pol gemeinsame Tangente der Curven p_1, π_1 eine vertikale, also zu den Kegelaxen parallele Ebene gelegt, so ist die Schnittlinie, welche dieselbe mit der in jener Mantellinie beiden Kegeln gemeinsamen Tangentialebene bildet, eine gemeinsame Tangente an den Raumcurven p, π in ihren jeweilig coincidirenden Punkten. Da nun die Grundrissprojectionen p_1, π_1 auf einander rollen, so müssen hiernach auch die Raumcurven p, π auf einander rollen. Werden nun diese beiden Kegel längs den Raumcurven p, π mit entsprechenden Zahnreihen versehen, die richtig in einander eingreifen, dann bewirkt eine gleichförmige Drehung des einen Kegels eine ungleichförmige des anderen; und dieser Bewegungsvorgang ist derselbe, der hervorgebracht wird, wenn wir F_1p_1, $\Phi_1\pi_1$ als unrunde Räder betrachten. Derartig gestaltete Räder wurden von Olaf Römer ausgeführt und beim Planetarium angewendet.[1]) Der eine Kegel wurde mit konischen Zähnen versehen, die sich längs den Mantellinien in ihrer Breite erstrecken, und auf dem anderen Kegel längs der betreffenden Raumcurve eine entsprechende Reihe schmaler Zähne gesetzt. Dies hat zur Folge, dass die Profile dieser letzteren Zähne, je näher sie der kleinen Kegelgrundfläche stehen, um so mehr vergrössert werden müssen. Durch die Ungleichheit der Profile wird die Herstellung dieser Zahnreihe sehr erschwert. Es ist daher zweckmässiger, beide Kegelflächen längs den Zahnortscurven p, π mit gleich dicken, cylindrischen Zähnen zu versehen.

Wir haben in Fig. **434** für die Curven p_1, π_1 beispielsweise zwei gleiche logarithmische Spiralen angenommen, von denen je eine Windung zur Geltung kommt. Dieselben sind vermittelst Absteckung sehr kleiner gleicher Sehnen in 22 angenähert gleiche Theile getheilt. Diese Theilpunkte bestimmen auf den Zahnortscurven p, π die entsprechenden cylindrischen Zähne von gleicher Dicke und die zugehörigen Zahnlücken von gleicher Weite; denn so wie im Grundriss die entsprechenden Theilpunkte 1_1, 2_1, 3_1 . . und I_1, II_1, III_1 . . successive auf der Centralen $F_1\Phi_1$ in Berührung kommen, treten auch die entsprechenden Punkte 1, 2, 3 . . und I, II, III . . der Zahnortscurven p, π nach einander in Berührung. Da sich in der gezeichneten Stellung die Curvenenden bei $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$ gleichzeitig berühren, so muss, damit keine Störung der Bewegung eintritt, der eine Eingriff bei $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ aufhören, wenn derselbe bei $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$ beginnt. Wenn sich der Kegel C im Sinne des eingezeichneten Pfeiles gleichförmig dreht, so nimmt die Drehgeschwindigkeit des Kegels Γ allmählich ab, und der Zahneingriff schreitet auf der unveränderlichen Geraden $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}'_2$ entlang. Demnach vollenden beide Kegel gleichzeitig einen Umlauf, und während jedes Umlaufes wiederholt sich derselbe Bewegungsvorgang. In dem betrachteten besonderen Falle können die Römer'schen Räder durch die viel leichter herstellbaren unrunden Räder $F_1 p_1$, $\Phi_1 \pi_1$ ersetzt werden; wenn aber die spiralförmig gestalteten Rollcurven p_1, π_1 ungleiche Anzahlen Umdrehungen vollenden müssen, bis dieselben beiden Punkte wieder in Berührung gelangen und einander durchschneiden, dann kann die Bewegung nur durch Römer'sche Räder bewirkt werden. Denn bei den betreffenden unrunden Rädern, deren Verzahnung auf den ebenen Rollcurven p_1, π_1 angebracht ist, werden die Zähne, welche

---

[1]) *Machines approuvées par l'Académie.* 1735. T. I. p. 89. No. 24.

ausser Eingriff sind, nicht stets freie Bewegung erhalten, sie werden gegen einander stossen, und dadurch die Drehung der Räder verhindern. Wir können jeden Bewegungsvorgang, der durch unrunde Räder bewirkt wird, auch durch Römer'sche Räder hervorbringen, aber es kann nicht umgekehrt jede durch Römer'sche Räder erzeugte Bewegung durch unrunde Räder vermittelt werden.

Denken wir uns den Kegel C durch eine zum Aufriss senkrechte Ebene $\mathfrak{P}_2 a_2$ und den Kegel Γ durch eine zum Aufriss senkrechte Ebene $\mathfrak{P}_2 \alpha_2$ geschnitten, so dass beide Ebenen gleiche Winkel mit den Kegelaxen bilden, dann sind die Grundrissprojectionen dieser congruenten elliptischen Schnitte congruente Ellipsen; und es ist bekanntlich F_1 ein Brennpunkt der einen, Φ_1 ein Brennpunkt der anderen. Wir können daher diese Grundrissprojectionen als Rollcurven elliptischer Räder ansehen, und dem zufolge sind auch jene elliptischen Schnitte auf den Kegeln Zahnortscurven.

Nehmen wir jene in Fig. **431** gezeichneten Rollcurven, den excentrischen Kreis p und das entsprechende Oval π beispielsweise als Grundrissprojectionen, so entsprechen diesen auf zwei Kegelflächen C, Γ Zahnortscurven, bei denen die Umlaufzahlen der Kegel sich wie 2 : 1 verhalten. Die zwischen parallelen Ebenen eingeschlossenen Kegelzonen, auf denen diese Zahnortscurven liegen, sind dann aber nicht von gleicher Grösse.

170. **Mangelräder oder Wenderäder.** Um vermittelst einer gleichsinnigen rotirenden Bewegung eine abwechselnd in einem oder dem anderen Sinne kreislinige resp. geradlinige Bewegung zu erzeugen, werden in der Praxis vielfach Räderarten angewendet, die auch zu den unrunden Rädern gehören, weil ihre Rollcurven entweder aus einem Kreisstücke, beziehlich Geradenstücke und zwei Grenzpunkten, oder aus Kreis- und Curvenstücken gebildet werden. In Fig. **435** wird die Axe F eines centrischen mit 8 Zähnen versehenen Kreisrades Fp durch eine Schlitzrundung und ferner durch einen cylindrischen Ansatz α, der sich an der Radscheibe $\Phi\pi$ befindet, in unveränderter Lage gehalten. Das Rad $\Phi\pi$ mit der festen Axe Φ ist längs des centrischen Kreises π bis auf eine bestimmte Lücke mit 29 Triebstöcken verzahnt, die in die Radscheibe $\Phi\pi$ eingesetzt sind und aus derselben hervorragen. Wird nun das Rad Fp im Sinne des Pfeiles s gleichförmig gedreht, dann rotirt auch das Rad $\Phi\pi$ gleichförmig im Sinne des Pfeiles σ, bis die Mitte des Triebstockes A in die Centrale ΦF gelangt; von da an bleibt der Triebstock A in der entsprechenden Zahnlücke des Rades Fp, wird aber über die Centrale ein Stück

hinausgeschoben, und gleichzeitig gleitet der hintere Theil der Axe F zwischen zwei zu A centrisch cylindrische Ansätze β, β' im Rade $\Phi\pi$, und der vordere Theil dieser Axe steigt in dem Schlitze nach aufwärts. Wenn sich die Triebstockmitte A von der Schlitzmitte um den Radius des Kreises p entfernt hat, tritt Stillstand des Rades $\Phi\pi$ ein. Von da an kehrt die Triebstockmitte A in gleicher Weise wieder in die Centrale zurück, und während dessen ist die Axe F in die obere Schlitzrundung gelangt. In diesem Momente rotirt das Rad $\Phi\pi$ gleichförmig im entgegengesetzten Sinne, und der innere cylindrische Ansatz γ desselben gleitet unterhalb der Axe F entlang. Während der Verlegung der Axe F in dem Schlitze ist die Bewegung des Rades $\Phi\pi$ ungleichförmig, sie wird allmählich langsamer bis zum Stillstand, und dann allmählich wieder schneller bis zur Gleichförmigkeit. Bei diesem Wechsel der Bewegung vertritt der Mechanismus ein centrisches schwingendes Schubkurbelgetriebe, dessen Kurbelarm gleich dem Radius des Kreises π und dessen Koppel gleich dem Radius des Kreises p ist. In Fig. **435** ist für diese Radien beispielsweise das Verhältnis 4 : 1 gewählt. Dieselben Beziehungen der Bewegungen treten beim Eingriff des Triebstockes Ω auf, und somit wird durch eine gleichsinnige Drehung des Rades Fp eine bald vorwärts bald rückwärts gehende Drehung des Rades $\Phi\pi$ bewirkt. Dieses Rad $\Phi\pi$ wird, weil es von altersher die Bewegung des Kastens einer Mangel vermittelt, M a n g e l r a d genannt; und wird auch als W e n d e r a d bezeichnet, weil es die Umwendung in der Bewegung bewirkt. Die Rollcurve π dieses Mangelrades besteht aus dem Kreisbogen π nebst den beiden Endpunkten A und Ω desselben. Anstatt der Triebstöcke kann man auch die cylindrischen Ansätze α, β, γ mit einem Zahnkranze versehen, in welchen das entsprechende Rad Fp eingreift.[1] Das Mangelrad wird bei Spinnmaschinen oft angewendet[2]; und wenn ein anderer Bewegungsvorgang erzielt werden soll, so kann man anstatt eines nach den Kreisbögen α, β, γ verlaufenden Zahnkranzes eine andere entsprechende Form für denselben annehmen.

Wird der Radius des Mangelrades unendlich gross genommen, dann geht der Kreis π in eine Gerade über, und wir erhalten das in Fig. **436** dargestellte Mangelrad, welches sich in Prismen-

---

[1]) L a n z et B é t a n c o u r t, *Essai sur la composition des machines.* 1808. p. 37.

[2]) *Polytechnisches Centralblatt.* 1835. S. 991.; *The Artizan.* 1853. p. 174. und G r o t h e, *Streichgarn-Spinnerei.* 1876. S. 605.

führungen hin- und herbewegt. Dasselbe ist längs der Strecke $A\Omega$ der Geraden π mit 17 Triebstöcken versehen, in welche das treibende gleichförmig rotirende Rad Fp eingreift. Wenn einer der beiden Triebstöcke A oder Ω in Eingriff gelangt, nimmt die Bewegung bis zum Stillstand ab und wieder im entgegengesetzten Sinne bis zur Gleichförmigkeit zu. Während dieses Wechsels der Bewegung vertritt der Mechanismus ein rechtwinkeliges Kreuzschiebergetriebe; denn die Endpunkte eines Radius des Kreises p bewegen sich resp. längs der Schlitzmitte und auf der Geraden π. Die Rollcurve des Mangelrades wird hier durch die gerade Strecke $A\Omega$ und durch deren Endpunkte A, Ω vertreten. Anstatt der geradlinigen Triebstockverzahnung kann auch eine innere Verzahnung des Langrades längs zweier beiderseits zu $A\Omega$ parallelen geraden Strecken und längs zweier diese Strecken verbindenden Halbkreise verwendet werden.[1])

171. **Einzahnrad und Malteserkreuzrad.** Soll in Fig. **437** während einer Umdrehung des einen Rades Ff ruckweise eine n^{tel} Drehung eines zweiten Rades $\Phi\varphi$ bewirkt werden, so kann dies vermittelst eines einzigen in dem Rade Ff befindlichen Zahnes geschehen, der successive in die entsprechend geformten n Zahnlücken des anderen Rades $\Phi\varphi$ eingreift. Nehmen wir beispielsweise an, dass jeder Umdrehung des Rades Ff eine ruckweise Drehung des Rades $\Phi\varphi$ um 60° entspricht, dass also $n = 6$ ist, dann ziehen wir, um den Zahn und die Zahnlücken zu zeichnen, die Gerade ΦK unter dem Winkel von 30° gegen die Verbindungsgerade ΦF der Radaxenpunkte, wählen auf der so gezogenen Geraden einen zum Rade Ff gehörenden Punkt K, der etwas näher an Φ als an F liegt, und begrenzen den Zahn dieses Rades grösstentheils durch einen um K beschriebenen Kreisbogen k. Die Wahl des Punktes K und die Grösse des Radius dieses Kreisbogens wird durch die Eindringung der Zahnecke Δ in das Einzahnrad bedingt; denn diese Eindringung darf den Zahn k an seiner Wurzel nicht zu sehr schwächen. Um die Zahnlücken in dem Rade $\Phi\varphi$ zu erhalten, ziehen wir zu der Theilgeraden ΦK dieses Rades beiderseits Parallele, deren Abstände von dieser Theilgeraden gleich dem Radius des Kreisbogens k sind. Die Zahnecke Δ wird durch den Berührungspunkt gebildet, in welchem die zu ΦK parallele Gerade $\varkappa$ den

[1]) Derartig verzahnte Mangelräder finden sich schon in Salomon de Caus, *Le Raisons des forces mouvantes*. 1615. Prob. XVI. — Vergl. auch Weisbach, „Abänderung der Bewegung" in Hülsse, *Allgemeine Maschinen-Encyclopädie*. 1841. B. I. S. 55.

Kreisbogen k berührt, und dieser Berührungspunkt ist zugleich einerseits der Grenzpunkt dieses Kreisbogens. Wenn nun durch Drehung des Rades Ff in der Richtung des Pfeiles der Kreisbogen k an der Geraden $\varkappa$ der Zahnlücke gleitet, wird das Rad $\Phi\varphi$ um 60° gedreht, und das Getriebe ist demnach ein centrisches Schleifkurbelgetriebe. Während dieser Bewegung beschreibt die Zahnecke Δ eine Curve d in dem Rade Ff; und es ergeben sich leicht einzelne Punkte dieser Curve, indem wir den Kreisbogen k nebst der entsprechenden Zahnlücke in verschiedenen Lagen zeichnen. Damit aber das Rad $\Phi\varphi$ während der Zeit vom Austritt des Zahnes k aus einer Zahnlücke bis zum Eintritt in die nachfolgende Zahnlücke unverrückt in Ruhe bleibt, werden die Zahnscheitel im Rade $\Phi\varphi$ durch concave Kreisbögen φ gebildet, deren Radius gleich dem Radius des Kreises f ist, der an dem kreisförmigen Zahnscheitel φ entlang gleitet. In dem betrachteten Falle enthält das Rad $\Phi\varphi$ sechs Zähne; soll aber eine Drehung des Rades Ff eine Vierteldrehung des Rades $\Phi\varphi$ bewirken, dann wird dieses Rad mit vier Zähnen versehen und hat eine dem Malteserkreuz ähnliche Gestalt. Dem zufolge wird jedes Rad dieser Art auch ein Malteserkreuzrad genannt.

Bei dem Eintritt des Eingriffs in Fig. **437** entsteht, weil ΦKF kein rechter Winkel ist, ein kleiner Stoss; dann aber nimmt bei einer gleichförmigen Rotation des Einzahnrades die Bewegung des Malteserkreuzrades allmählich zu, bis ΦK in die Gerade ΦF gelangt, und nimmt in gleicher Weise allmählich ab, bis der Zahn k die Zahnlücke verlässt. Das Malteserkreuzrad nebst Einzahnrad wird bei Zählwerken, bei der Stellung in den Uhren[1]) und in manchen anderen Fällen angewendet.

Man kann das Rad $\Phi\varphi$ auch theils mit den gezeichneten Zähnen, theils mit gewöhnlicher Verzahnung versehen und eine derselben entsprechende Verzahnung auf dem betreffenden Bogentheil des anderen Rades Ff anbringen. Demnach wird vermittelst der Drehung des Rades Ff das Rad $\Phi\varphi$ theilweise durch den Zahn k bewegt; es kann darauf eine Zeit lang ruhen, wird dann aber durch den Eingriff der angebrachten gewöhnlichen Verzahnung weiter gedreht. Dadurch erhalten wir eine eigenthümlich geformte Räderart, die Sternräder oder intermittirende

[1]) Vergl. Willis, *Principles of Mechanism*. 1841. p. 266; sec. ed. 1870. p. 167; ferner Saunier, *Lehrbuch der Uhrmacherei*, deutsch von Grossmann. 1879. B. III. S. 105.

Räder[1]). Hierher gehören auch die Brauer'schen Hemmräder, die man bei Flaschenzügen angewendet hat und zur Hemmung des Rücklaufes dienen.[2])

Einfache Mechanismen mit Bandtrieb.

172. **Scheiben, Rollen oder Trommeln mit Bandtrieb.** Die Uebertragung der Bewegung wird in der Praxis in mannigfaltiger Weise durch Riemen, Seile, Schnüre und Ketten bewirkt, die über Scheiben, Rollen oder Trommeln gespannt sind. Eine derartige Vermittelung der Bewegung wollen wir Bandtrieb und die Scheiben, Rollen oder Trommeln gemeinsam Bandtriebräder nennen. Diese sind in der Regel kreisförmig, in einzelnen Fällen aber auch curvenförmig umgrenzt.

Wir betrachten in Fig. **438** zwei Bandtriebräder $\Phi\varkappa$, Fk, die von den Curven $\varkappa$, k umgrenzt sind, und sich resp. um die festen Axen Φ, F drehen. Als Umgrenzungen dieser Bandtriebräder haben wir beispielsweise die Kreise $\varkappa$, k gewählt, von denen der Kreis $\varkappa$ zur Axe Φ excentrisch, der Kreis k aber zur Axe F concentrisch ist. Um diese Bandtriebräder ist ein endloses Band $\mathfrak{b}$ gelegt, welches durch eine Spannrolle σ, also vermittelst Kraftschlusses straff gehalten wird. Derselbe kann durch ein Gewicht, oder besser durch eine Feder hervorgebracht werden. Da wir die Dicke des Bandes nicht unbeachtet lassen dürfen, nehmen wir die Mittellinie des Bandes als Repräsentante desselben und betrachten die Curve, welche von der Mittellinie des an ein Bandtriebrad gelegten Bandes gebildet wird, als den theoretischen Rand des Bandtriebrades. Bei den folgenden Darlegungen wollen wir daher stets unter Band die Mittellinie desselben und unter Rand den theoretischen Rand des Bandtriebrades verstehen.

Nehmen wir an, dass keine Gleitung des Bandes stattfindet, dass also die Bandlänge, welche in einer bestimmten Zeit auf das treibende Bandtriebrad z. B. $\Phi\varkappa$ aufrollt, gleich der Bandlänge ist, welche in derselben Zeit von dem getriebenen Bandtriebrade Fk abrollt, so können wir uns den ziehenden Bandtheil $\mathfrak{b}$ in theore-

[1]) Vergl. die von Aster angegebenen Sternräder, *Polytechnisches Centralblatt.* 1864. S. 498, ferner das intermittirende Räderwerk in Haton de la Goupillière, *Traité des Mécanismes.* 1864. p. 169, und Reuleaux, *Kinematik.* 1875. S. 571.

[2]) *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.* 1879. B. 13. S. 451.

tischer Hinsicht durch einen prismatischen Stab ersetzt denken, der ohne Gleitung an den Rändern der beiden Bandtriebräder rollend sich verschiebt und durch Kraftschluss mit demselben in steter Berührung gehalten wird. Dem gemäss ist der dargestellte Mechanismus mit Bandtrieb als ein viergliederiger einfacher Mechanismus anzusehen und zu behandeln. Bezeichnen wir der besseren Uebersicht wegen die Bandtriebräder $\Phi\varkappa$, Fk beziehlich mit 2, 4, ferner den Steg ΦF und den gedachten prismatischen Stab $\mathfrak{b}$ resp. mit 1, 3, dann sind die Axen Φ, F die Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{14}$ und die Tangentialpunkte an $\varkappa$, k die Pole $\mathfrak{P}_{23}$, $\mathfrak{P}_{34}$. Dem zufolge ist nach S. 46 der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_{24}$ der beiden Verbindungsgeraden dieser Polpaare der Pol der beiden Bandtriebräder. Die Drehgeschwindigkeiten $\omega_\varkappa$, ω_k der Bandtriebräder $\Phi\varkappa$, Fk verhalten sich umgekehrt wie die Abstände des Pols $\mathfrak{P}_{24}$ von den betreffenden Axen; und es ist somit:

$$\frac{\omega_k}{\omega_\varkappa} = \frac{\Phi\mathfrak{P}_{24}}{F\mathfrak{P}_{24}}.$$

Nehmen wir an, dass das excentrische Bandtriebrad $\Phi\varkappa$ mit constanter Drehgeschwindigkeit $\omega_\varkappa$ rotire, so kann hiernach leicht ein Diagramm der veränderlichen Drehgeschwindigkeit des Bandtriebrades Fk construirt werden. Wir erhalten z. B. für die gezeichnete Lage des Rades $\Phi\varkappa$ die betreffende Drehgeschwindigkeit ω_k des Rades Fk, indem wir die gemeinschaftliche Tangente $\mathfrak{b}$ an die Kreise $\varkappa$, k legen, welche auf ΦF den Pol $\mathfrak{P}_{24}$ bestimmt, dann durch Φ, F Parallele $\Phi\Psi$, FJ ziehen, auf der letzteren die Strecke $FJ = \omega_\varkappa$ machen und die Gerade $\mathfrak{P}_{24}J$ ziehen, die auf der ersteren den Punkt Ψ liefert. Hiernach ist gemäss der obigen Gleichung die Strecke $\Phi\Psi$ gleich der Drehgeschwindigkeit ω_k, welche das Rad Fk in dem betreffenden Zeitmomente besitzt.

Wir haben zuerst die allgemeinen Beziehungen betrachtet; aber viel wichtiger ist der in Fig. **439** dargestellte besondere Fall, bei welchem zwei kreisförmige Bandtriebräder $\Phi\varkappa$, Fk sich resp. um die concentrischen Axen Φ, F drehen. Je nachdem das umgelegte Band gekreuzt oder nicht gekreuzt ist, erfolgt die Drehung der Bandtriebräder in entgegengesetztem oder in gleichem Sinne, und der Pol der Bandtriebräder ist dem entsprechend auf der Centralen ΦF der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_I$ der beiden inneren oder der Schnittpunkt $\mathfrak{P}_{II}$ der beiden äusseren gemeinsamen Tangenten der Kreise $\varkappa$, k, die den theoretischen Rand der Bandtriebräder vertreten. Die entgegengesetzte Drehung dieser Bandtriebräder kann hiernach auch durch zwei um dieselben Axen rotirende Zahnräder hervorgebracht werden, deren Rollkreise sich in $\mathfrak{P}_I$ berühren; die gleichsinnige Drehung dagegen kann durch zwei Zahnräder erzeugt werden, deren Rollkreise sich in $\mathfrak{P}_{II}$ berühren, und von denen der eine in dem anderen rollt. Die Drehgeschwindigkeiten ω_ϱ, ω_r, oder die Umlaufszahlen der beiden Bandtriebräder $\Phi\varkappa$, Fk verhalten sich umgekehrt wie die Radien ϱ, r der Kreise $\varkappa$, k; und es ist also:

$$\frac{\omega_r}{\omega_\varrho} = \frac{\varrho}{r}.$$

In der Praxis findet jedoch eine geringe Abweichung von diesem Gesetze statt, weil eine ungleiche Dehnung des Bandes in den Bandtheilen auftritt, welche die Bandtriebräder berühren; und dies hat zur Folge, dass der Umfang des getriebenen Bandtriebrades etwas langsamer sich bewegt als der Umfang des treibenden Bandtriebrades.[1]) Wir wollen hier aber nur die rein theoretischen Beziehungen erörtern.

Um das seitliche Ablaufen des Bandes von den Bandtriebrädern zu verhindern, sind bei Seil- und Schnurtrieb die Radräder mit einer Rille oder beiderseitig mit Ansätzen versehen. Bei Kettentrieb werden die Radränder meist gezähnt, so dass die Zähne in die entsprechenden Kettenglieder eingreifen. Bei Riementrieb wird das seitliche Ablaufen durch eine Leitung oder Führung des Riemens, aber meistens, wie Fig. **439** zeigt, durch eine gewölbte Abrundung des Radrandes, die auch ballige Lauffläche genannt wird, vermieden. Die durch einen Riemen getriebenen Bandtriebräder werden meist Scheiben oder Rollen genannt, und heissen Trommeln, wenn die Dimensionen gross sind. Kleinere, durch Schnüre getriebene, mit Randvertiefung versehene Bandtriebräder werden ausschliesslich als Rollen bezeichnet.

Um zu veranschaulichen, dass ein Riemen über eine kegelförmige Scheibe gespannt beim Aufrollen auf dieselbe stets das Bestreben hat, sich dem dickeren Kegelrande zu nähern, denken wir uns in Fig. **440** den Riemen R berührend rechtwinkelig an die Mantellinie kk' des Kegels gelegt und auf den Kegel gewickelt; dann legen sich die Riemenränder in geodätische Linien g, g' auf die Kegelfläche, und dies wird anfangs angenähert auch noch stattfinden, wenn der Riemen in einer zur Kegelbasis parallelen Richtung in Spannung gehalten ist. Wickeln wir nun den Kegelmantel,

---

[1]) Weisbach-Herrmann, *Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik*. 1876. III. Theil. 1. Abth. S. 305. Grashof, *Theoretische Maschinenlehre*. 1883. B. II. S. 311.

etwa die Hälfte desselben, von der Mantellinie kk' ausgehend ab, so gehen in dem abgewickelten Mantel $kk'k'_0k_0$ die geodätischen Linien in die Geraden g_0, g'_0 über, die auf kk' senkrecht stehen, und diese Geraden nähern sich dem abgewickelten Kreisbogen kk_0 und schneiden denselben. Demnach wenden sich die geodätischen Linien g, g' auf der Kegelfläche dem grösseren Basiskreise k zu. Durch zwei symmetrisch an einander gesetzte Kegelflächen wird hiernach das Ablaufen des Riemens, der mit halber Breite auf der einen und der anderen Kegelfläche liegt, verhindert; und durch Abrundung der mittleren Randkante, wie die seitliche Ansicht in Fig. **439** zeigt, wird die zweckmässige ballige Lauffläche erhalten.[1])

173. **Construction der Konen mit gekreuztem Riementrieb.** Behufs der Hervorbringung einer gesetzmässig veränderlichen Drehung durch eine gleichförmige Drehung werden auch zwei in Fig. **441** dargestellte Konen $\Phi\Phi'$, FF' benutzt, die sich um parallele Axen in festen Lagern drehen und von einem Riemen umspannt sind. Wir wollen zuerst den Fall betrachten, dass dieser Riemen gekreuzt sei, dass also die Konen sich im entgegengesetzten Sinne drehen.

Nehmen wir nun an, der Konus $\Phi\Phi'$ drehe sich gleichförmig mit der constanten Drehgeschwindigkeit ω_c, so wird durch Hin- und Herführung des Riemens eine veränderliche Drehgeschwindigkeit ω des Konus FF' hervorgebracht. Dabei muss aber das Schlaffwerden des Riemens durch eine mitgeführte andrückende Spannrolle vermieden werden. Die Meridiancurve $\varkappa_0\varkappa_n$, durch deren Rotation um die Axe $\Phi\Phi'$ die Fläche des Konus $\Phi\Phi'$ erzeugt wird, sei vermittelst der Gleichung:

$$\varrho = \Psi(x)$$

in rechtwinkeligen Coordinaten ϱ, x gegeben, wo ϱ die Radien, x die Abstände derselben von dem Axenpunkte μ_0 bezeichnen. Ferner sei in analoger Weise für den anderen Konus FF' die Meridiancurve k_0k_n durch die Gleichung:

$$r = f(x)$$

gegeben. Dann ist die Drehgeschwindigkeit ω durch den Abstand x der Riemenmitte von der Randlage μ_0m_0 bestimmt. Es ist:

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{\varrho}{r} = \frac{\Psi(x)}{f(x)},$$

und

$$\omega = \frac{\Psi(x)}{f(x)}\,\omega_c.$$

[1]) Vergl. Hartig's Abhandlung im *Civilingenieur*. 1871. B. 17. S. 331.

Soll zur Vereinfachung des Mechanismus die Spannrolle und der dadurch bewirkte Kraftschluss beseitigt werden, so müssen die Konen derart von einander abhängig gestaltet sein, dass die Straffheit des Riemens während seiner seitlichen Verschiebung erhalten bleibt.

Um bei gekreuztem Riemen, der in Fig. **439** gestrichelt gezeichnet ist, für die halbe Riemenlänge l eine Formel abzuleiten, nehmen wir an, es sei e der Abstand der beiden Axen Φ, F, ferner seien ϱ, r die beiden Scheibenradien, die wir auch als zwei entsprechende Konenradien betrachten können, und weiter bezeichne ϑ den Winkel, welchen die nach den Berührungspunkten Δ_l, D_l gehenden parallelen Radien mit den zur Centralen ΦF senkrechten Geraden bilden.

Dem zufolge ist die halbe Riemenlänge

$$l = \Delta_l D_l + \varrho\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) + r\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right),$$

und da auch die Tangente $\Delta_l D_l$ mit der Centralen ΦF den Winkel ϑ einschliesst, ergiebt sich die Formel:

$$l = e \cos\vartheta + (\varrho + r)\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right),$$

in der ϑ durch

$$\sin\vartheta = \frac{\varrho + r}{e}$$

bestimmt ist. Hieraus folgt: dass bei gekreuztem Riemen die Länge desselben constant bleibt, wenn die Summe der Radien $\varrho + r = c$ constant ist.

Betrachten wir nun in Fig. **441** die eine Meridiancurve z. B. $\varkappa_0 \varkappa_n$ als gegeben, dann erhalten wir leicht die andere Meridiancurve $k'_0 k'_n$, indem wir parallel verschoben in entsprechender Lage die zu $\varkappa_0 \varkappa_n$ congruente Curve $k'_0 k'_n$ zeichnen. Einem convexen Konus entspricht somit ein concaver Konus. Für das Verhältniss der Drehgeschwindigkeiten ergiebt sich:

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{c - r}{r},$$

oder

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{\varrho}{c - \varrho},$$

je nachdem wir r oder ϱ als gegeben betrachten.

In der Praxis ist meistens bei constanter Drehgeschwindigkeit ω_c des einen Konus $\Phi\Phi'$ das Gesetz der Veränderung der Drehgeschwindigkeit ω des anderen Konus FF' vorgeschrieben, und es ist dem gemäss die entsprechende Meridiancurve der Konen zu bestimmen. Der Riemen wird durch eine an dem Mechanismus angebrachte Vorrichtung proportional der gleichförmigen Drehung des Konus $\Phi\Phi'$ seitlich verschoben.

Wir wollen beispielsweise annehmen: die Zunahme der Drehgeschwindigkeit ω soll in Fig. **441** dem Abstande der Riemenmitte von der Randlage $\mu_0 m_0$ proportional sein, und ω_0, ω_n seien resp. die Grössen von ω, die den Randlagen $\mu_0 m_0$, $\mu_n m_n$ entsprechen. Behufs der Construction der Meridiancurve nehmen wir die Radiensumme c und die Konuslänge $m_0 m_n$ zweckmässig an; wir ziehen im Abstande $m_0 T_0 = \omega_c$ zur Konusaxe FF' die Parallele $T_0 T_n$ und zeichnen an diese über m_0, m_n die Strecken $T_0 V_0 = \omega_0$, $T_n V_n = \omega_n$ als rechtwinkelige Ordinaten. Dadurch erhalten wir die Gerade $V_0 V_n$, welche das Diagramm für die Drehgeschwindigkeit des Konus FF' repräsentirt, und die Axe FF' in dem mit O bezeichneten Punkte schneidet. Ferner ist zwischen den Geraden FF', $V_0 V_n$ die Strecke $GJ = c$ senkrecht FF' gestellt. Um nun nach dieser Vorbereitung für einen Punkt m_1 der Abscissenaxe FF' in der auf ihr senkrechten Geraden $m_1 V_1$ die Ordinate oder den Radius $m_1 k_1 = r$ zu bestimmen, ziehen wir von dem Punkte O nach dem Schnittpunkte T_1, den $m_1 V_1$ mit $T_0 T_n$ bildet, die Gerade OT_1, welche GJ im Punkte H_1 trifft; dann liefert die zu FF' parallel gezogene Gerade $H_1 k_1$ den Radius $m_1 k_1$ resp. den Punkt k_1 der Meridiancurve $k_0 k_n$. Denn hiernach ergiebt sich, weil $\omega = T_1 V_1$, $\omega_c = m_1 T_1$ ist:

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{T_1 V_1}{m_1 T_1} = \frac{H_1 J}{G H_1} = \frac{c - r}{r}.$$

Indem wir also verschiedene Gerade durch O ziehen, erhalten wir zwei projective Parallelstrahlenbüschel, die beziehlich zu den rechtwinkeligen Geraden FF', GJ parallel sind. Diese Büschel erzeugen durch die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen die Meridiancurve $k_0 k_n$, welche eine gleichseitige Hyperbel ist. Dieselbe besitzt O als Mittelpunkt, die Konusaxe FF' und die in O auf derselben Senkrechte als Asymptoten, und geht durch den Schnittpunkt q der Geraden GJ, $T_0 T_n$. Für den anderen Konus $\Phi\Phi'$ ergiebt sich der entsprechende Radius $\mu_1 \varkappa_1$ oder $\mu_1 \varkappa_1' = H_1 J$, und wir erhalten die Meridiancurve $\varkappa_0' \varkappa_1' \varkappa_n'$, wenn wir in parallel verschobener Lage zu $k_0 k_1 k_n$ die congruente Hyperbel $\varkappa_0' \varkappa_1' \varkappa_n'$ zeichnen. Die Gleichung für die so bestimmte gleichseitige Hyperbel können wir leicht ableiten. Indem wir $m_0 m_1 = x$ setzen und die Konuslänge $m_0 m_n$ mit a bezeichnen, folgt:

$$T_1 V_1 = \omega = \omega_0 + \frac{\omega_n - \omega_0}{a} x,$$

und durch Einsetzung dieses Werthes für ω in die obige Gleichung

$$r = \frac{a c \omega_c}{a(\omega_c + \omega_0) + (\omega_n - \omega_0) x}.$$

Verlegen wir den Coordinatenanfang nach O und bezeichnen wir durch χ die entsprechenden neuen Abscissen, so erhalten wir die auf die rechtwinkeligen Asymptoten bezogene Gleichung der gleichseitigen Hyperbel:

$$r = \frac{a c \omega_c}{(\omega_n - \omega_0) \chi}.$$

Wir können noch, wie in Fig. **441** geschehen, die Bedingung erfüllen, dass die Endradien der beiden Konen wechselsweise gleich sind, dass also:

$$m_0 k_0 = \mu_n \varkappa_n, \quad m_n k_n = \mu_0 \varkappa_0$$

ist; dann folgt:

$$\frac{\omega_0}{\omega_c} = \frac{\mu_0 \varkappa_0}{m_0 k_0}, \quad \frac{\omega_n}{\omega_c} = \frac{\mu_n \varkappa_n}{m_n k_n},$$

und

$$\omega_0 \omega_n = \omega_c^2.$$

In diesem Falle ist hiernach die constante Drehgeschwindigkeit ω_c resp. die Strecke $m_0 T_0$ durch ω_0, ω_n bestimmt; und wir können diese Strecke construiren, indem wir über $T_n V_n$ als Durchmesser einen Halbkreis beschreiben, durch V_0 zu $T_0 T_n$ eine Parallele ziehen, die denselben im Punkte E trifft, dann ist $T_n E = \omega_c$. Ist dagegen die constante Drehgeschwindigkeit ω_c und eine von den Drehgeschwindigkeiten ω_0, ω_n gegeben, so ist die andere bestimmt.

Wenn wir umgekehrt annehmen: es sei eine beliebige Meridiancurve $k_0 k_n$ gegeben, so können wir auch das zugehörige Diagramm $V_0 V_1 V_n$ der Drehgeschwindigkeit ω construiren, indem wir jenen Constructionsweg rückwärts durchschreiten. Wir erhalten z. B. zu dem Curvenpunkte k_1 den entsprechenden Diagrammpunkt V_1, wenn wir zu FF' die Parallele $k_1 H_1$ legen, die Gerade $T_1 H_1$ ziehen, welche FF' in O trifft, und ferner die Gerade OJ, die auf $m_1 T_1$ den Punkt V_1 bestimmt. Diese Bestimmungsweisen gelten jedoch nur, wenn, wie es in der Praxis stets der Fall ist, die seitliche Bewegung des Riemens im Verhältnisse zur Drehung der Konen klein ist; denn die Berührungspunkte der Riemenmittellinie an den Konen beschreiben auf denselben schraubenförmige Curven, deren Steigung wir vernachlässigen können. Vollzieht sich aber die seitliche Verschiebung des Riemens sehr rasch, so muss man die Steigung mit in Rechnung ziehen, und eine derartige mathematisch genaue Rechnung wird sehr schwierig.

Bezeichnen wir den Abstand ΦF der Konusaxen mit e und den Abstand des Pols $\mathfrak{P}$ resp. des Kreuzungspunktes der Riemenmittellinie von der Konusaxe FF' mit $-\eta$, so ist:

$$\frac{-\eta}{e} = \frac{r}{c},$$

und folglich:

$$\eta = -\frac{a e \omega_c}{(\omega_n - \omega_0)\chi}.$$

Demnach ist auch der geometrische Ort des Pols $\mathfrak{P}$ eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{P}\mathfrak{p}$. Dieselbe besitzt O als Mittelpunkt, die Konusaxe FF' und die in O auf derselben Senkrechte als Asymptoten.

In Fig. **442** wollen wir zwei geradlinige Konen, also zwei abgestumpfte Kegel als gegeben annehmen und das entsprechende Diagramm der Drehgeschwindigkeit zeichnen. In diesem besonderen Falle, wo $k_0 k_n$ eine Gerade ist, wollen wir aber die eben angegebene allgemeine Construction nicht befolgen, weil eine diesem Falle speciell angepasste Construction sich einfacher gestaltet. Wir stellen die beliebig anzunehmende constante Drehgeschwindigkeit $\omega_c = GT$ des Konus $\Phi\Phi'$ zwischen die Geraden FF', $k_0 k_n$ senkrecht auf die erstere, machen auf der Geraden GT die Strecke $GQ = c = m_0 k_0 + \mu_0 \varkappa_0$ und ziehen durch T, Q zur Konusaxe FF' die Parallelen TT_n, QQ_n. Um nach dieser Vorbereitung für einen Radius $m_2 k_2 = r$, dessen Verlängerung diese Parallelen in T_2, Q_2 schneidet, die entsprechende Drehgeschwindigkeit $\omega = T_2 V_2$ zu erhalten, ziehen wir durch die Kegelspitze C und den Punkt Q_2 die Gerade CQ_2, die GQ in U_2 trifft, und legen zu FF' die Parallele $U_2 V_2$, welche auf $m_2 k_2$ den Punkt V_2 des Diagramms $V_0 V_2 V_n$ liefert. Nach dieser Construction ist:

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{TU_2}{GT} = \frac{k_2 Q_2}{m_2 k_2} = \frac{c - r}{r}.$$

Wenn wir durch die Kegelspitze C verschiedene Gerade ziehen, erhalten wir zwei projective Parallelstrahlenbüschel, die beziehlich zu den rechtwinkeligen Geraden FF', GQ parallel sind. Diese Büschel erzeugen durch die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen das Diagramm, welches eine gleichseitige Hyperbel ist. Dieselbe besitzt die Kegelspitze C als Mittelpunkt, die Konusaxe FF' und die in C auf derselben Senkrechte als Asymptoten, und geht durch den Punkt Q.

Die Gleichung dieser gleichseitigen Hyperbel im Bezug auf die Asymptoten, also auf FF' als Abscissenaxe und C als Coordinatenanfang, kann leicht abgeleitet werden.

Für eine Abscisse $Cm_2 = \chi$ ist die Ordinate $m_2 V_2 = \omega + \omega_c$. Die Länge des Konus FF' bezeichnen wir mit a, die beiden Endradien mit r_0, r_n. Dann ist:

$$r = \frac{r_0 - r_n}{a} \chi,$$

und diesen Werth in obige Gleichung gesetzt, ergiebt sich für das Diagramm die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel:

$$m_2 V_2 = \omega + \omega_c = \frac{a c \omega_c}{(r_0 - r_0) \chi}.$$

Aus dieser folgt auch die Gleichung:

$$\omega = \frac{a c \omega_c}{(r_0 - r_n) \chi} - \omega_c,$$

welche diese Hyperbel im Bezug auf $T_0 T_n$ als Abscissenaxe darstellt. Diese neue Abscissenaxe, von der aus die Drehgeschwindigkeit ω als Ordinate gemessen wird, schneidet die Hyperbel in einem Punkte, der senkrecht über der Spitze Γ des anderen Konus $\Phi\Phi'$ liegt. Die Verbindungsgerade ΓC der Kegelspitzen ist der geometrische Ort des Pols $\mathfrak{P}$; denn wir können durch diese Gerade an die beiden Kegelflächen ein Paar gemeinschaftliche Tangentialebenen legen, und in diesen Tangentialebenen bewegen sich bei der Verschiebung des Riemens die sich kreuzenden geradlinigen Theile seiner Mittellinie.

174. **Construction der Konen mit nicht gekreuztem Riemen vermittelst des Scheibendiagramms.** Bei nicht gekreuzten Riemen ist die Unveränderlichkeit der Riemenlänge nicht wie vorher durch die constante Summe entsprechender Radien bedingt. Die Construction der Konen ist daher bei nicht gekreuzten oder offenen Riemen schwieriger und kann nur vermittelst einer Hülfscurve ausgeführt werden. Es tritt aber eine ausserordentliche Vereinfachung dieser Construction dadurch ein, dass wir diese Hülfscurve sehr angenähert durch einen leicht zu bestimmenden Kreisbogen ersetzen können.

In Fig. **439** sind die beiden Scheiben $\Phi\varkappa$, Fk mit einem nicht gekreuzten Riemen gezeichnet. Die Radien dieser Scheiben sind resp. mit ϱ, r und die Axendistanz ΦF ist mit e bezeichnet; ferner ist der Winkel, welchen die nach den Berührungspunkten Δ, D gehenden parallelen Radien mit den zur Centralen ΦF Senkrechten bilden, mit θ und die halbe Riemenlänge mit l bezeichnet. Es ergiebt sich dann:

$$l = \Delta D + \varrho\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + r\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

und da auch die Tangente ΔD mit der Centralen ΦF den Winkel θ einschliesst, erhalten wir die Formel:

$$l = e\cos\theta + (\varrho - r)\,\theta + (\varrho + r)\,\frac{\pi}{2},$$

und ferner ist

$$\sin\theta = \frac{\varrho - r}{e}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$r = \frac{l}{\pi} - \frac{e}{\pi}(\cos\theta + \theta\sin\theta) - \frac{e}{2}\sin\theta,$$

$$\varrho = \frac{l}{\pi} - \frac{e}{\pi}(\cos\theta + \theta\sin\theta) + \frac{e}{2}\sin\theta.$$

Wir setzen nun

$$\left.\begin{aligned} x &= r - \frac{l}{\pi} = -\frac{e}{\pi}(\cos\theta + \theta\sin\theta) - \frac{e}{2}\sin\theta \\ y &= \varrho - \frac{l}{\pi} = -\frac{e}{\pi}(\cos\theta + \theta\sin\theta) + \frac{e}{2}\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \; 1),$$

und betrachten wir x, y als rechtwinkelige Coordinaten, dann repräsentiren die beiden Gleichungen bei veränderlich gedachtem Winkel θ eine Curve, die wir als Hülfsmittel zur Construction der Konen benutzen wollen und das S c h e i b e n d i a g r a m m nennen. Die Begrenzung dieser Curve wird durch die beiden Grenzwerthe des Winkels $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$ oder $\pm 90^\circ$ bestimmt. Wenn die Scheibe Fk kleiner als die Scheibe $\Phi\varkappa$ ist, betrachten wir den Winkel θ als positiv; und wird der Radius von Fk bis auf Null verkleinert, der Radius von $\Phi\varkappa$ bis auf den Axenabstand e vergrössert, so nimmt θ den grössten positiven Werth $+\frac{1}{2}\pi$ resp. 90° an. Ist dagegen die Scheibe $\Phi\varkappa$ kleiner als die Scheibe Fk, dann ist der Winkel θ in obigen Gleichungen negativ zu nehmen. Wird ferner der Radius von $\Phi\varkappa$ bis auf Null verkleinert, der Radius von Fk bis auf den Axenabstand e vergrössert, so erhält θ den grössten negativen Werth $-\frac{1}{2}\pi$ resp. -90°. Die durch jene beiden Gleichungen repräsentirte Curve ist durch die einzige Constante e, den Axenabstand bestimmt; und da diese Constante in den beiden Gleichungen nur als Factor der rechtsstehenden Glieder auftritt, so sind alle diese Curven oder Scheibendiagramme ähnlich.

Aus den Gleichungen 1) der Curve, die in Fig. **443** auf die rechtwinkeligen Coordinatenaxen $\mathfrak{A}(-x)$, $\mathfrak{A}(-y)$ bezogen und mit ζ bezeichnet ist, erhalten wir für $\theta = 0$ den Punkt Z_0, dessen beide Coordinaten $x_0 = y_0 = -\frac{e}{\pi}$ sind. Demnach liegt dieser Punkt Z_0 auf der Halbirungsgeraden $\mathfrak{A}(-\mathfrak{x})$ des rechten Winkels $(-x)\mathfrak{A}(-y)$. Für $\theta = \pm \frac{1}{2}\pi$ resp. $\pm 90^0$ erhalten wir die beiden Punkte Z_{VI}, z_{VI}, deren Coordinaten beziehlich $x_6 = \mathfrak{A}Z_{VI} = -e$, $y_6 = 0$ und $x_{-6} = 0$, $y_{-6} = \mathfrak{A}z_{VI} = -e$ sind.

Um zu einer möglichst einfachen Construction dieser Curve zu gelangen, beziehen wir dieselbe in rechtwinkeligen Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{A}(-\mathfrak{x})$ als Abscissenaxe. Wir fällen von einem Curvenpunkte Z, für welchen $\mathfrak{A}X = x$, $XZ = y$ ist, und von dem entsprechenden Punkte X auf $\mathfrak{A}(-\mathfrak{x})$ die Senkrechten $Z\mathfrak{X}$, $X\mathfrak{U}$; ziehen ferner von Z auf $X\mathfrak{U}$ die Senkrechte ZE; dann ist:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{U} = X\mathfrak{U} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,x, \qquad EZ = XE = \sqrt{\frac{1}{2}}\,y.$$

Somit ergiebt sich, indem wir beachten, dass die Ordinate $\mathfrak{y}$ positive Richtung hat, also entgegengesetztes Vorzeichen annimmt:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{A}\mathfrak{U} + EZ = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(x + y),$$
$$\mathfrak{y} = \mathfrak{X}Z = X\mathfrak{U} - XE = -\sqrt{\frac{1}{2}}\,(x - y).$$

Hiernach erhalten wir durch Einsetzung der Werthe für x, y aus 1) die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= -\sqrt{2}\,\frac{e}{\pi}\,(\cos\theta + \theta\sin\theta) \\ \mathfrak{y} &= \quad\sqrt{2}\,\frac{e}{2}\,\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ 2),$$

welche die Curve ζ im Bezug auf das neue Coordinatensystem repräsentiren. Hier ist $\mathfrak{A}(-\mathfrak{x})$ die Richtung für negative Abscissen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{X}Z$ die Richtung für positive Ordinaten $\mathfrak{y}$. Aus diesen beiden Gleichungen ersieht man, dass entgegengesetzt gleichen Werthen von θ gleiche Werthe von $\mathfrak{x}$, aber entgegengesetzt gleiche Werthe von $\mathfrak{y}$ entsprechen, dass also die Curve ζ bezüglich der Abscissenaxe $\mathfrak{A}(-\mathfrak{x})$ symmetrisch ist. Dies folgt auch direct aus der Symmetrie der Beziehungen, die auftreten, je nachdem die eine Scheibe z. B. $\Phi\varkappa$ grösser oder kleiner als die andere Scheibe Fk ist.

Nach diesen Gleichungen beschreiben wir behufs der Construction der Curve ζ in Fig. **444** um den Coordinatenanfang $\mathfrak{A}$ mit den Radien $\sqrt{2}\,\frac{e}{\pi}$, $\sqrt{2}\,\frac{e}{2}$ die beiden Viertelkreise 06, $0'6'$, theilen dieselben in eine Anzahl etwa 6 gleicher Theile und zeichnen zu den Theilpunkten $0, 1, 2 \ldots 6$ die entsprechenden Punkte $0, I, II \ldots VI$ der Kreisevolvente $0\,III\,VI$ des Viertelkreises 06. Die durch diese Theilpunkte bestimmten, von $\mathfrak{A}0$ aus gemessenen Winkel betrachten wir als die Werthe des Winkels θ und demgemäss ergiebt sich die Werthenreihe:

$$\theta = 0, \quad \frac{1}{12}\pi, \quad \frac{2}{12}\pi, \quad \frac{3}{12}\pi, \quad \frac{4}{12}\pi, \quad \frac{5}{12}\pi, \quad \frac{6}{12}\pi,$$

oder im Winkelmaass gemessen entsprechend

$$\theta = 0, \quad 15^\circ, \quad 30^\circ, \quad 45^\circ, \quad 60^\circ, \quad 75^\circ, \quad 90^\circ.$$

Fällen wir von einem Evolventenpunkte, z. B. von III, auf $\mathfrak{A}6$ die Senkrechte $III\sigma$ und auf diese von dem entsprechenden Kreistheilpunkte 3 die Senkrechte 3ν, dann ergiebt sich, weil der Winkel $III3\nu = 0\mathfrak{A}3 = \theta$, und die Tangente $3\,III = \sqrt{2}\,\frac{e}{\pi}\,\theta$ ist:

$$\sigma\nu = \sqrt{2}\,\frac{e}{\pi}\cos\theta, \qquad \nu\,III = \sqrt{2}\,\frac{e}{\pi}\,\theta\sin\theta,$$

und demnach erhalten wir:

$$\sigma\,III = \sqrt{2}\,\frac{e}{\pi}(\cos\theta + \theta\sin\theta) = -\mathfrak{x}.$$

Ferner fällen wir von dem entsprechenden Theilpunkte $3'$ des Viertelkreises $0'6'$ auf $\mathfrak{A}(-\mathfrak{x})$ die Senkrechte $3'\varepsilon$; dann ist:

$$3'\varepsilon = \sqrt{2}\,\frac{e}{2}\sin\theta = \mathfrak{y}.$$

Um einen Punkt Z_{III} der Curve ζ zu construiren, ziehen wir hiernach durch einen Punkt III der Kreisevolvente eine Senkrechte auf die Abscissenaxe $\mathfrak{A}(-\mathfrak{x})$ und durch den entsprechenden Kreistheilpunkt $3'$ eine Parallele zu derselben, dann ist der hierdurch erhaltene Schnitt Z_{III} ein Punkt der Curve ζ. Der weitere Verlauf dieser zur Abscissenaxe $\mathfrak{A}(-\mathfrak{x})$ symmetrischen Curve, von der als Scheibendiagramm nur der Bogen $Z_{VI}Z_0z_{VI}$ in Betracht kommt, ist nach dieser Construction durch die Fortsetzung der Kreisevolvente leicht zu überschauen. Die Werthe von $\mathfrak{y}$ liegen innerhalb der Grenzen $\pm\sqrt{2}\,\frac{e}{2}$; aber die Werthe von $\mathfrak{x}$ bewegen sich in immer grösser werdenden Schwingungen nach der einen und der anderen Seite vom Coordinatenanfang $\mathfrak{A}$ hin und her. Für $\theta = \frac{\pi}{2}$ resp. 90° erreicht sowohl $\mathfrak{x}$ als $\mathfrak{y}$ das erste Maximum, und demnach sind Z_{VI}, z_{VI} Rückkehrpunkte der Curve ζ.

Die Tangenten der Curve ζ können wir leicht durch Differentiiren der Gleichungen 2) erhalten. Da wir aber die Kenntniss der Differentialrechnung bei unseren Darlegungen principiell nicht voraussetzen, so wollen wir die Tangenten vermittelst Geschwindigkeiten bestimmen. Wir nehmen an, es rotire in Fig. **444** der Radius $\mathfrak{A}3'$ im Sinne des eingezeichneten Pfeiles mit der Drehgeschwindigkeit gleich der Einheit, es sei also die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $3'$ gleich $3'\mathfrak{A}$; dann ist die Geschwindigkeit $v_{\mathfrak{y}}$, mit welcher sich der senkrechte Abstand des Punktes $3'$ von der Abscissenaxe $\mathfrak{A}(-\mathfrak{x})$, d. h. die Ordinate $\mathfrak{y}$ vergrössert, gleich dem senkrechten Abstande $3'\sigma'$ dieses Punktes von $\mathfrak{A}6'$, also:

$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{y}} = \mathfrak{A}\varepsilon = \sqrt{2}\,\frac{e}{2}\cos\theta.$$

Die lothrechte Geschwindigkeit, mit welcher sich der Punkt III auf der Kreisevolvente bewegt, wird, weil die Kreistangente $3\,III$ die Normale an der Kreisevolvente ist, durch die Strecke $III3$ dargestellt, und folglich ist die lothrechte Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{\mathfrak{x}}$, mit welcher sich die Abscisse $\mathfrak{x}$ vergrössert, gleich der Senkrechten $\overline{3\nu}$, die von 3 auf die zur Abscissenaxe Parallele $III\sigma$ gefällt ist, also:

$$\mathfrak{v}_{\mathfrak{x}} = \overline{3\nu} = 3\,III\,.\cos\theta = \sqrt{2}\,\frac{e}{\pi}\,\theta\cos\theta.$$

Durch Zusammensetzung der beiden erhaltenen rechtwinkelig auf einander stehenden Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_{\mathfrak{x}}$, $\mathfrak{v}_{\mathfrak{y}}$ ergiebt sich die Geschwindigkeit des Punktes Z_{III} auf der Curve ζ und die Tangente an derselben. Denn bezeichnet τ den Winkel, welchen die Tangente mit $\mathfrak{A}(-\mathfrak{x})$ bildet, so ergiebt sich:

$$\tan\tau = \frac{\mathfrak{v}_{\mathfrak{y}}}{\mathfrak{v}_{\mathfrak{x}}} = \frac{\pi}{2\theta}.$$

Für $\theta = 0$ ist $\tan\tau = \infty$; demnach schneidet die Curve ζ die Abscissenaxe im Punkte Z_0 rechtwinkelig. Für $\theta = \frac{\pi}{2}$ resp. 90° ist $\tan\tau = 1$, ferner $-\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \frac{e}{\sqrt{2}}$, und folglich wird diese Curve im Punkte Z_{VI} von der Geraden $\mathfrak{A}Z_{VI}$ berührt.

Besonders beachtenswerth ist, dass sich für $\theta = \frac{\pi}{4}$ resp. 45° die Werthe:

$$\tan \tau = 2, \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{X}_{III} Z_{III} = \frac{e}{2}, \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{X}_{III} = -e\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4}\right)$$

ergeben; denn hiernach erhalten wir, wenn wir am Punkte Z_{III} die Normale MZ_{III} der Curve ζ ziehen, die Subnormale:

$$M\mathfrak{X}_{III} = e.$$

Demnach ergiebt sich der Abstand MZ eines Punktes Z der Curve ζ von dem Punkte M, weil

$$\overline{MZ}^2 = \left[e\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}\right) + e - \sqrt{2}\,\frac{e}{\pi}(\cos\theta + \theta\sin\theta)\right]^2 + \left[\sqrt{2}\,\frac{e}{2}\sin\theta\right]^2$$

ist:

$$MZ = e\sqrt{\left[\frac{1}{\pi} + \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{2}}{\pi}(\cos\theta + \theta\sin\theta)\right]^2 + \frac{1}{2}\sin^2\theta}.$$

Die nach dieser Formel ausgeführte Berechnung der Abstände der Curvenpunkte Z_0, Z_I, Z_{II}, Z_{III}, Z_{IV}, Z_V, Z_{VI} von M, denen die Werthe $\theta = 0$, $\frac{1}{12}\pi$, $\frac{2}{12}\pi$, $\frac{3}{12}\pi$, $\frac{4}{12}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{6}{12}\pi$ entsprechen, ergiebt:

$$\begin{aligned}
\theta &= 0, & MZ_0 &= e\,.\,1{,}11815172,\\
\theta &= 15^{\circ}, & MZ_I &= e\,.\,1{,}11806842,\\
\theta &= 30^{\circ}, & MZ_{II} &= e\,.\,1{,}11798671,\\
\theta &= 45^{\circ}, & MZ_{III} &= e\,.\,1{,}11803397,\\
\theta &= 60^{\circ}, & MZ_{IV} &= e\,.\,1{,}11767270,\\
\theta &= 75^{\circ}, & MZ_V &= e\,.\,1{,}11603354,\\
\theta &= 90^{\circ}, & MZ_{VI} &= e\,.\,1{,}11430277.
\end{aligned}$$

Construiren wir nun für $\theta = 45^{\circ}$ den Abstand MZ_{III}, indem wir $M\mathfrak{X}_{III} = e$, $\mathfrak{X}_{III}Z_{III} = \frac{e}{2}$ machen, und beschreiben wir um M mit demselben als Radius einen Kreisbogen, so stimmt dieser Kreisbogen, wie aus obiger Werthberechnung hervorgeht, bewunderungswürdig genau von dem Punkte Z_{III} bis zu dem symmetrischen Punkte z_{III} mit der Curve ζ überein. Wenn wir beispielsweise eine Zeichnung in dem ungewöhnlich grossen Maassstabe $e = 1000^{mm}$ ausführen, dann beträgt die Abweichung, welche in den Punkten Z_0, Z_{II} auftritt, resp. $+\,0{,}117^{mm}$, $-\,0{,}047^{mm}$, also höchstens rund ein Zehntel Millimeter. Selbst bei den Punkten Z_{IV}, z_{IV} beträgt die Abweichung in diesem grossen Maassstabe erst — 0,361^{mm}. In der Praxis ist höchstens der Winkel $\theta = 45^0$; denn für diesen Fall wird die kleinere Scheibe gegen die grössere Scheibe schon verhältnissmässig sehr klein, und für $\theta = 60^0$ wird die kleinere Scheibe so klein, dass sie kaum noch ausführbar ist. Demnach kann das Scheibendiagramm durch jenen sehr leicht zu bestimmenden Kreisbogen mit ausserordentlicher Genauigkeit ersetzt werden.

Um die Radien r, ϱ als rechtwinkelige Coordinaten aus diesem Scheibendiagramm zu erhalten, müssen wir gemäss den Gleichungen 1), in denen

$$r - \frac{l}{\pi} = x, \qquad \varrho - \frac{l}{\pi} = y$$

gesetzt ist, das Scheibendiagramm ζ in Fig. **443** auf die neuen Coordinatenaxen $A(+r)$, $A(+\varrho)$ beziehen, welche in den Abständen $\mathfrak{A}Y_a = \mathfrak{A}X_a = -l:\pi$ resp. den Coordinatenaxen $\mathfrak{A}(-x)$, $\mathfrak{A}(-y)$ parallel, aber entgegen gerichtet sind. Hiernach sind für einen Punkt Z des Scheibendiagramms die neuen Coordinaten, deren Anfangspunkt A auf der Symmetralgeraden MZ_0 desselben liegt, weil x, y negative Werthe haben,

$$AR = r, \qquad AP = \varrho,$$

wenn R, P die Fusspunkte der von Z auf die Coordinatenaxen $A(+r)$, $A(+\varrho)$ gefällten Lothe ZR, ZP bezeichnen. Diese Coordinaten können wir auch, weil die Scheiben zu einander in gegenseitig gleicher Beziehung stehen, vertauschen.

Soll nun für jene gegebene Riemenlänge zu einem gegebenen Radius der einen Scheibe der entsprechende Radius der anderen bestimmt werden, und ist z. B. der Radius $\varrho = AP$ gegeben, so ist die zu $A(+r)$ parallel bis an das Diagramm gezogene Strecke PZ gleich dem gesuchten entsprechenden Radius r. In der Regel ist aber die halbe Riemenlänge l resp. die Grösse $l:\pi$ nicht im Voraus bekannt, sondern es sind andere Bedingungen gegeben, welche die Coordinatenaxen bestimmen, und dann kann diese Grösse aus dem Scheibendiagramm selbst entnommen werden.

Ziehen wir in Fig. **443** durch A die Gerade An senkrecht auf die Symmetralgerade MZ_0, und bezeichnen wir mit N, S die Schnittpunkte, welche diese beiden Geraden mit einer Ordinate RZ bilden, so ist, weil $A(+r)$ den rechten Winkel SAN halbirt:

$$NR = RS = AR = r,$$

und

$$NZ = r + \varrho.$$

Diese Radiensumme, welche stets kleiner als der Axenabstand e sein muss, erreicht ihr Maximum, wenn der zur Verwendung kommende Punkt Z des Diagramms im Scheitel Z_0 desselben liegt, und in diesem Falle ist $r = \varrho$. Wir ersehen aus dem Scheibendiagramm, dass für die Punkte, welche sich beiderseits in der Nähe des Scheitels Z_0 desselben befinden, die Radiensumme angenähert constant ist. Demnach sind für kleine Werthe von θ, etwa bis zu $\pm 15°$, die Beziehungen bei nicht gekreuzten und bei gekreuzten Riemen angenähert dieselben. In der Praxis werden daher unter dieser Bedingung die Konen mit nicht gekreuztem Riemen ebenso wie die Konen mit gekreuztem Riemen construirt.[1]) Infolge der elastischen Dehnung und Zusammenziehung des Riemens kann auch dann noch, wenn θ jene Grenzen überschreitet, ein nicht gekreuzter Riemen bei Konen mit constanter Radiensumme angewendet werden. Bei den in Fig. **441** und **442** für gekreuzten Riemen gezeichneten Konen kann auch unbeschadet der Uebertragung der Bewegung ein nicht gekreuzter oder offener Riemen genommen werden.[2])

In Fig. **445** soll die Construction zweier Konen mit nicht gekreuztem Riemen vermittelst des Scheibendiagramms unter der Bedingung ausgeführt werden, dass die Drehgeschwindigkeit ω des Konus FF' sich der Riemenverschiebung proportional verändert, während der Konus $\Phi\Phi'$ mit der gegebenen constanten Drehgeschwindigkeit ω_c rotirt. Das geradlinige Diagramm $V_0 V_n$ der veränderlichen Drehgeschwindigkeit ω, bezogen auf die Konusaxe FF' als Zeitaxe, sei durch die Drehgeschwindigkeiten $m_0 V_0 = \omega_0$, $m_n V_n = \omega_n$ des Konus FF', die den Riemenlagen in $\mu_0 m_0$, $\mu_n m_n$ entsprechen, gegeben, ferner sei der Axenabstand $\Phi F = e$ der Konen und der eine Endradius $\mu_0 \varkappa_0 = \varrho_0$ des Konus $\Phi\Phi'$ gegeben. Demnach ist der entsprechende Endradius $m_0 k_0 = r_0$ des Konus FF' durch die Proportion:

$$\frac{r_0}{\varrho_0} = \frac{\omega_c}{\omega_0}$$

bestimmt.

Wir machen nun auf der Symmetralgeraden Ms des zu zeichnenden Scheibendiagramms ζ die Strecke $M\mathfrak{X} = e$, auf derselben die Senkrechte $\mathfrak{X}\mathfrak{Z} = \frac{1}{2}e$ und beschreiben um M mit dem Radius $M\mathfrak{Z}$ den Kreisbogen ζ, der das Scheibendiagramm bildet. Da uns die

[1]) Schmidt, *Lehrbuch der Spinnereimechanik.* 1857. S. 303.

[2]) Redtenbacher, *Bewegungsmechanismen.* 1857. S. 8, und dessen *Maschinenbau.* 1862. B. I. S. 349.

beiden Endradien ϱ_0, r_0 bekannt sind, so wird hierdurch die Abscissenaxe $A(+r)$ bestimmt. Wir ziehen durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{m}$ der Geraden Ms gegen diese unter dem Winkel von 45° die Gerade $\mathfrak{m}a$, machen auf derselben die Strecke $\mathfrak{m}a = m_0 k_0 = r_0$ und entgegen gerichtet die Strecke $a\alpha = \mu_0 \varkappa_0 = \varrho_0$; ziehen hierauf zu Ms die Parallelen αZ^0, aR^0, von denen die erste das Scheibendiagramm in einem Punkte Z^0 schneidet und die zweite die durch Z^0 zu αa parallel gelegte Gerade Z^0R^0 in einem Punkte R^0 trifft; dann ist die durch R^0 senkrecht auf $\mathfrak{m}a$ gezogene Gerade $A(+r)$ die Abscissenaxe und ihr Schnitt A mit der Geraden Ms der Coordinatenanfang. Wir stellen senkrecht auf $A(+r)$ die Gerade GQ, welche Ms in Q trifft, so dass die Strecke $GQ = \omega_c$ ist, und nehmen zur Vereinfachung der weiteren Construction die Verlängerung der Abscissenaxe $A(+r)$ als Axe des Konus FF'.

Ziehen wir nun, um die Meridiancurven $k_0 k_4 k_n$ und $\varkappa_0 \varkappa_4 \varkappa_n$ der Konen FF', $\Phi\Phi'$ zu construiren, durch einen Punkt V_4 des Diagramms der Drehgeschwindigkeit ω zu AF eine Parallele, die GQ in Q_4 trifft, ferner die Gerade $Q_4 A$ und durch ihren mit dem Scheibendiagramm gebildeten Schnittpunkt Z_4 auf $A(+r)$ die Senkrechte $Z_4 R_4$, welche Ms in S_4 schneidet, und dann zu AF die Parallele $S_4 k_4$, so ist $R_4 S_4$ gleich dem betreffenden Radius $m_4 k_4$ des Konus FF' und $R_4 Z_4$ gleich dem entsprechenden Radius $\mu_4 \varkappa_4$ des anderen Konus $\Phi\Phi'$; denn infolge dieser Construction ist:

$$\frac{m_4 k_4}{\mu_4 \varkappa_4} = \frac{R_4 S_4}{R_4 Z_4} = \frac{GQ}{GQ_4} = \frac{\omega_c}{\omega}.$$

In gleicher Weise werden allgemein, wenn statt der Geraden $V_0 V_n$ ein beliebiges Diagramm der veränderlichen Drehgeschwindigkeit ω gegeben ist, die zugehörigen Meridiancurven construirt; und umgekehrt erhalten wir, wenn die eine Meridiancurve gegeben ist, vermittelst des Scheibendiagramms die entsprechende Meridiancurve und das zugehörige Diagramm der veränderlichen Drehgeschwindigkeit.

Von dem Kreisbogen ζ kommt bei unserer Construction nur das kleine Stück zur Geltung, welches von der auf der Symmetralgeraden Ms senkrechten Tangente sehr wenig abweicht. Nimmt man nun statt dieses Kreisbogenstückes diese Tangente als Scheibendiagramm, so ist die Summe der entsprechenden Konenradien constant und die Beziehungen sind dieselben wie bei Konen mit gekreuztem Riemen. Es wird also durch das einfache Scheibendiagramm ζ besonders der geringe Unterschied veranschaulicht, welcher in der Gestaltung der Meridiancurven bei Konen mit nicht gekreuztem und mit gekreuztem Riemen auftritt, wenn die Winkelwerthe von θ zwischen engen Grenzen liegen. In solchen Fällen wird den Anforderungen der Praxis meistens genügt, wenn man, wie schon erwähnt, die einfachere, bei Konen mit gekreuztem Riemen ausgeführte Construction auch bei Konen mit nicht gekreuztem Riemen anwendet. Wir haben bei unseren Constructionen nur die Riemenmittellinie in Betracht gezogen; aber in Hinsicht auf die Riemendicke, die oft nicht ausser Acht gelassen werden darf, müssen wir, um dem Resultat der Construction grössere Genauigkeit zu verleihen, anstatt der erhaltenen Meridiancurve, ihre der Konenaxe zugewendete Aequidistante zur Erzeugung des Konus benutzen, die durch den Abstand gleich der halben Riemendicke bestimmt ist.

Vermittelst eines Mechanismus wird bei gleichförmiger Drehung des einen Konus die gleichförmige Verschiebung des Riemens bewirkt; und somit kann auf diese Weise durch eine entsprechende Gestaltung der Konen eine beliebig vorgeschriebene, gesetzmässig veränderliche Drehgeschwindigkeit des anderen Konus hervorgebracht werden, wie es z. B. bei Spinnmaschinen, Centrifugen und anderen Maschinen gefordert wird.[1]) Oft aber werden die Konen mit Treibriemen auch dazu verwendet, um bei Maschinen durch beliebige freie seitliche Verschiebungen und festgestellte Leitung des Riemens verschiedene gleichförmige Bewegungen zu erhalten.[2])

Drehen wir das Scheibendiagramm in Fig. **443** um die Abscissenaxe $A(+r)$, dann sind die beiden Konen, welche durch die Symmetralgerade AZ_0 und den Kreisbogen ζ erzeugt werden, entsprechende Konen. Der durch die Gerade AZ_0 erzeugte Konus ist ein nicht genügend spitzer Kegel, weil dessen Mantellinien mit der Kegelaxe $A(+r)$ den Winkel von 45° bilden; und auch der andere durch den Kreisbogen beschriebene Konus ist sehr stumpf.

---

[1]) Th. R. Williams, *Specification* No. 5412. 19. Sept. 1826, hat die Konen zuerst angewendet. Auch im *London Journal of arts and sciences.* 1827. p. 65 und *Polytechn. Journal.* 1828. B. 27. S. 99. Vergl. ferner Verdam, *Werkzeugswissenschaft.* 1835. 2. Th. 2. Abth. S. 258. Prechtl, *Technologische Encyclopädie. Supplement.* 1857. B. I. S. 188. Grothe, *Technologie der Gespinnstfaser.* 1882. B. II. S. 628.

[2]) Lanz und Bétancourt, *Versuch über die Zusammensetzung der Maschinen*, deutsch von Kreyher. 1829. S. 88. Rühlmann, *Allgemeine Maschinenlehre.* 1865. B. II. S. 380. *Engeneering.* 1867. S. 489.

Diese Konen sind daher für einen umgelegten Riemen wegen des schrägen Anlegens desselben nicht geeignet. Nur für eine Schnur, die in entsprechenden auf diesen Konen befindlichen Rillen läuft, können diese Konen zur Hervorbringung verschiedener gleichförmiger Bewegungen verwendet werden, wenn die Schnur successive in verschiedene entsprechende Rillen verlegt wird. Denken wir uns aber die Abscissen auf der Abscissenaxe $A(+r)$ proportional vergrössert, ohne die zugehörigen Ordinaten der Geraden AZ_0 und des Kreisbogens ζ zu verändern, dann entspricht der Geraden AZ_0 eine Gerade, die mit $A(+r)$ einen Winkel bildet, der gemäss dieser Vergrösserung beliebig kleiner gemacht werden kann; und dem Kreisbogen ζ entspricht ein flacheres Ellipsenstück. Demnach wird jetzt durch die Drehung um die Abscissenaxe $A(+r)$ durch die betreffende Gerade ein Konus in Form eines spitzeren Kegels und durch das Ellipsenstück ein Konus in gestreckterer Gestalt erhalten, so dass beide für Riementrieb verwendet werden können.

Um eine veränderliche Drehgeschwindigkeit durch gleichförmige Rotation zu erzeugen, hat man auch Rollen angewendet, deren Radius durch einen entsprechenden Mechanismus verändert wird. Diese veränderlichen Rollen, welche Expansionsrollen heissen, sind in verschiedener Art ausgeführt worden.[1] So wird z. B. durch zwei aus Zinken gebildete Kegel, die mit ihren nach den Kegelspitzen gerichteten Zinken gabelig in einander greifen, und längs ihrer gemeinsamen Axe verschiebbar sind, der Radius der hierdurch gebildeten Rollenkerbe verändert. Die in diese Rollenkerbe gelegte Treibschnur muss dann entweder durch eine Spannrolle oder durch eine entsprechende Verlegung der gemeinsamen Kegelaxe straff gehalten werden.[2]

175. **Construction der Stufenscheiben vermittelst des Scheibendiagramms.** Obwohl vermittelst der Konen mit Riementrieb durch beliebige Feststellungen des Riemenleiters allmählich und stufenweis veränderte, gleichförmige Bewegungen innerhalb bestimmter Grenzen hervorgebracht werden können, so ist doch ihre Anwend-

---

[1]) Rees, *Cyclopaedia*. Vol. XIV. *Art. „Expanding rigger"*. Karmarsch, *Lehren der Technologie*. B. I. *Mechanik*. 1825. S. 139; ferner Redtenbacher, *Bewegungsmechanismen*. 1853. S. 7.

[2]) Diese Expansionsrolle, welche schon von Farey ausgeführt wurde, wie von Rees a. a. O. erwähnt wird, hat J. Combe mit einem anderen Mechanismus versehen bei einer Vorspinnmaschine angewendet. Vergl. Kick, *Spinnerei-Mechanik*. 1868. S. 32.

barkeit beschränkt, weil die Konen wegen ihrer verhältnissmässig grossen Länge nebst dem nothwendigen Riemenleiter oft in den betreffenden Mechanismus nicht einfügbar sind und weil auch das schräge Anlegen des Riemens an dieselben bei Uebertragung grosser Kräfte nicht genügende Sicherheit des Ganges bietet. In vielen Fällen verlangt man nur bestimmte Abstufungen in der Uebertragung der gleichförmigen Bewegung, und zu diesem Zwecke werden mehrere Scheiben von verschiedenen Radien einstückig hergestellt, welche Stufenscheiben oder auch Stufenkonusse heissen.

Bei der Herstellung der Stufenscheiben sind gewöhnlich die verschiedenen Umlaufszahlen $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n$ der getriebenen Stufenscheibe bekannt, die einer angenommenen Umlaufszahl ω_c der treibenden Stufenscheibe entsprechen; und ferner ist der Axenabstand e, sowie ein Scheibenradius gegeben. Ist z. B. in Fig. **446** der grösste Radius ϱ_1 der treibenden Stufenscheibe $\Phi\varkappa$ gegeben, so wird der entsprechende Radius r_1 der getriebenen Stufenscheibe Fk durch die Proportion:

$$\frac{r_1}{\varrho_1} = \frac{\omega_c}{\omega_1}$$

bestimmt, und wir können dann in gleicher Weise wie bei den Konen vermittelst des Scheibendiagramms leicht die Stufenscheiben für nicht gekreuzten oder offenen Riemen construiren. Zu diesem Zwecke zeichnen wir das Scheibendiagramm, indem wir auf einer gegen die Axenrichtung der Stufenscheiben unter 45^0 geneigten Geraden MA die Strecke $M\mathfrak{X} = e$, ferner auf derselben die Senkrechte $\mathfrak{X}\mathfrak{Z} = \frac{1}{2}e$ machen und um M mit dem Radius $M\mathfrak{Z}$ den Kreisbogen ζ beschreiben, der das betreffende Scheibendiagramm darstellt. Behufs der Bestimmung der Abscissenaxe $A(+r)$ des Scheibendiagramms ziehen wir durch einen Punkt $\mathfrak{m}$ der Geraden MA senkrecht zur Axenrichtung der Stufenscheiben eine Gerade $\mathfrak{m}a$, machen auf derselben die Strecke $\mathfrak{m}a = r_1$ und entgegengesetzt gerichtet die Strecke $a\alpha = \varrho_1$, ziehen durch die Punkte α, a zu MA die Parallelen αZ_1, aR_1, von denen die erste auf ζ den Punkt Z_1, und die zweite auf der zu $\mathfrak{m}\alpha$ Parallelen Z_1S_1 den Punkt R_1 der auf $\mathfrak{m}\alpha$ senkrechten Abscissenaxe $A(+r)$ bestimmt. Auf dieser Abscissenaxe errichten wir in einem beliebigen Punkte G die Senkrechte GQ, die MA im Punkte Q schneidet, und bestimmen auf derselben die Punkte Q_2, Q_3 . . Q_n, so dass

$$\frac{GQ}{GQ_2} = \frac{\omega_c}{\omega_2}, \quad \frac{GQ}{GQ_3} = \frac{\omega_c}{\omega_3}, \quad \ldots \quad \frac{GQ}{GQ_n} = \frac{\omega_c}{\omega_n}$$

ist. Darauf ziehen wir von den Punkten G_2, G_3 . . G_n Gerade nach A, welche den Kreisbogen ζ resp. in den Punkten Z_2, Z_3 . . Z_n treffen, und von diesen auf $A(+r)$ die Senkrechten Z_2R_2, Z_3R_3 . . Z_nR_n, welche mit der Symmetralgeraden MA beziehlich die Schnittpunkte S_2, S_3 . . S_n bilden. Dann sind, wenn wir die gegebenen Werthe r_1, ϱ_1 mit aufschreiben, die Radien der Stufenscheiben:

$$r_1 = R_1S_1, \quad r_2 = R_2S_2, \quad r_3 = R_3S_3 \; . \; . \; . \; r_n = R_nS_n,$$
$$\varrho_1 = R_1Z_1, \quad \varrho_2 = R_2Z_2, \quad \varrho_3 = R_3Z_3 \; . \; . \; . \; \varrho_n = R_nZ_n.$$

Behufs der Zeichnung der Stufenscheiben können wir ihre Axen in die Gerade $A(+r)$ legen, und demnach brauchen wir nur durch die erhaltenen Punkte Parallele zu $A(+r)$ zu ziehen. Bei den in Fig. **446** gezeichneten Stufenscheiben sind für die Verhältnisse der Drehgeschwindigkeiten die folgenden Werthe genommen:

$$\frac{\omega_c}{\omega_1} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\omega_c}{\omega_2} = \frac{2}{4}, \quad \frac{\omega_c}{\omega_3} = \frac{3}{4}, \quad \frac{\omega_c}{\omega_4} = \frac{4}{4}, \quad \frac{\omega_c}{\omega_5} = \frac{4}{3},$$
$$\frac{\omega_c}{\omega_6} = \frac{4}{2}, \quad \frac{\omega_c}{\omega_7} = \frac{4}{1}.$$

In diesem Falle sind die beiden Radien r_4, ϱ_4 der mittleren Scheiben gleich, und die entsprechenden Radien $r_1r_2r_3$, $\varrho_1\varrho_2\varrho_3$, so wie die entsprechenden Radien $\varrho_7\varrho_6\varrho_5$, $r_7r_6r_5$ stehen in derselben Beziehung. Daher sind auch die Strecken R_1Z_1, R_2Z_2, R_3Z_3 resp. gleich den Radien r_7, r_6, r_5. Bei einer derartigen Werthreihe entsprechen sich demnach congruente Stufenscheiben, die also nach demselben Modell gegossen werden können. Denken wir uns etwa in jeder Scheibe die mittlere Stufe oder die drei mittleren Stufen u. s. w. weg und die übrigen an einander gereiht, so bleibt die Congruenz bestehen.

Werden die Radien r_1, r_2, r_3 . . resp. R_1S_1, R_2S_2, R_3S_3 . . so gewählt, dass sie sich um gleiche Strecken vergrössern, dass also die Stufen der Scheibe Fk gleiche Höhe haben; dann nehmen jedoch die entsprechenden Radien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 . . resp. R_1Z_1, R_2Z_2, R_3Z_3 . ., weil die Punkte Z_1, Z_2, Z_3 . . auf einem Kreisbogen ζ liegen, nicht um gleiche Strecken ab; und es sind demnach die entsprechenden Stufen der anderen Scheibe $\Phi\varkappa$ nicht gleich. Nur in dem Falle, wenn das in Betracht kommende Kreisbogenstück klein ist und als geradlinig angesehen werden kann, tritt sehr angenähert Gleichheit der Stufen der Scheibe $\Phi\varkappa$ ein. Durch das gegebene Scheibendiagramm, das sich durch seine elegante einfache Construction und leichte Uebersichtlichkeit auszeichnet, ist das Culmann'sche Scheibendiagramm[1]), welches eine umständliche Construction erfordert, veraltet; und die umständlichen Rechnungen, welche Bartl[2]) auf nur zwischen engen Grenzen erlaubte Vernachlässigungen gestützt und ausgeführt hat, erhalten hierdurch ihre geometrische Interpretation. Auch die weitläufige Annäherungsformel, welche Weisbach[3]) für die Berechnung der Stufenscheiben aufgestellt hat, verliert durch das kreisförmige Diagramm ζ ihren Werth. Wenn man aber doch eine Formel für diese Berechnung als wünschenswerth erachtet, so kann man eine einfachere Formel leicht aus dem Diagramm ζ in Fig. **446** ableiten, in welchem die entsprechenden Radien als Abscissen und Ordinaten des Kreisbogens ζ auftreten.

176. **Schnecken mit Bandtrieb.** Wenn eine Rolle mit einer auf ihr konisch verlaufenden spiralförmigen Rinne versehen wird, in welche die Windungen eines Bandes behufs Uebertragung einer Bewegung gelegt werden, so erhalten wir eine Schnecke. In Fig. **447** windet sich eine Kette auf den treibenden rotirenden Cylinder $\Phi\Phi'$ und wickelt sich von dem mit einer Schnecke versehenen getriebenen Konus FF' ab. Die Schneckenlinie, welche von der Mittellinie der Kette gebildet wird, liegt in dem dargestellten Falle auf einem Rotationskegel und ihre Steigung ist dem Windungswinkel proportional genommen. Dem zufolge ist die senkrechte Projection dieser Schneckenlinie auf eine zur Kegelaxe FF' normale Ebene eine Archimedische Spirale. Die Bewegung dieses Mechanismus, der ehemals bei den Taschenuhren angewendet wurde[4]), jetzt aber nur noch bei Chronometern im Gebrauch ist, wird durch eine in dem Cylinder $\Phi\Phi'$ befindliche Spiralfeder bewirkt. Zu diesem Zwecke verwendet, hat der Cylinder als Federhaus so wie der abgestumpfte Kegel meist nur eine kleine Höhe. Demnach ist auch die gesamte Steighöhe der Schneckenlinie gegen ihre Länge verhältnissmässig klein, so dass sie vernachlässigt werden kann; und ist ferner auch der Winkel, den die Kegel-

[1]) Moll und Reuleaux, *Constructionslehre für den Maschinenbau.* 1854. B. I. S. 610 und 616; auch Reuleaux, *Konstrukteur.* 1885. 4. Aufl. S. 766.

[2]) Bartl, „Berechnung der Riemen-Stufenscheiben". *Civilingenieur.* 1880. B. 26. S. 3.

[3]) Weisbach-Herrmann, *Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.* 1876. 3. Th. 1. Abth. S. 315.

[4]) G. Schott, *Technica curiosa.* 1664. p. 641. De La Hire, *Traité de mécanique. Mémoires de l'Académie.* 1730. T. 9. p. 156. J. H. M. Poppe, *Ausführliche Geschichte der theoretisch-praktischen Uhrmacherkunst.* 1801. S. 269.

mantellinien mit der Kegelaxe bilden, klein, dann besteht jene Archimedische Spirale aus eng an einander laufenden Windungen.

Bezeichnen wir nun mit ω_ϱ, ω_r die Drehgeschwindigkeiten des Cylinders und der Schnecke, mit ϱ den Radius des Cylinders und mit r den Radius des entsprechenden Kreises auf dem Kegel, so gilt gemäss der angenommenen Bedingungen sehr angenähert die Beziehung:

$$\frac{\omega_\varrho}{\omega_r} = \frac{r}{\varrho}.$$

Soll die Drehgeschwindigkeit ω_r der Schnecke constant sein, so muss, wenn die Kette sich von dem dünnen nach dem dicken Schneckentheil abwickelt, die Drehgeschwindigkeit ω_ϱ des Federhauses proportional dem Radius r zunehmen. Ist aber umgekehrt das Gesetz der Veränderung der Drehgeschwindigkeit ω_ϱ gegeben, dann entspricht diesem Gesetze eine bestimmte Meridiancurve des Schneckenkonus.

Die Schnecke wurde bei Spinnmaschinen behufs Hervorbringung einer geforderten veränderlichen Geschwindigkeit des spindelntragenden Wagens zuerst von Gueroult[1]) und verbessert von Weber[2]) angewendet. Eine solche Vorrichtung ist durch Fig. **448** im Grundriss und Aufriss schematisch dargestellt.[3]) Die Schnecke dreht sich um eine feste Axe $F_1 F_1'$. Ein Seil $\sigma_1 \sigma_1'$ ist mit einem Ende in i, mit dem anderen in i' an der Schneckenwelle befestigt und auf die Schnecke in entgegengesetzten Richtungen derart aufgewickelt, dass beide Seiltheile σ_1, σ_1' die Schnecke an derselben Stelle verlassen. Nehmen wir nun an, es sei das Seil im Grundriss nach beiden Richtungen durch Kraftschluss, etwa durch einen elastischen Bogen, gespannt, so wird bei einer Drehung der Schnecke von dem einen Seiltheil sich eben so viel aufwinden, als sich von dem anderen abwickelt. Denken wir uns die geradlinigen Seiltheile durch eine Zahnstange ersetzt und die Schnecke mit Zähnen versehen, in welche die Zahnstange durch Kraftschluss gehalten eingreift, dann entsteht ein aus starren Gliedern gebildeter einfacher Mechanismus, der dieselbe Bewegung hervorbringt.

Das in Fig. **448** geschlossene Seil ist um zwei gleiche Führungsrollen $\Phi\varphi$, $\Phi'\varphi'$ gespannt, die sich resp. um die festen

[1]) *Descriptions des Machines.* 1823. T. V. p. 117. Gueroult, *Brevet* vom 27. October 1809.

[2]) *Daselbst.* p. 230. Weber, *Brevet* vom 18. Juni 1810.

[3]) Vergl. Stamm, *Theoretische und praktische Studien über den Selfactor,* deutsch von E. Hartig, 1862. S. 83.

parallelen Axen Φ, Φ' drehen. Dem zufolge ist dieser Mechanismus, der sich in seiner Wirkungsweise wie ein einfacher Mechanismus verhält, ein zusammengesetzter. Betrachten wir aber nur die eine Rolle $\Phi\varphi$ zu diesem Mechanismus gehörend und die andere $\Phi'\varphi'$ als Ersatz für einen Kraftschluss, dann kann derselbe auch als ein einfacher Mechanismus bezeichnet werden.

Die Schnecke ist in Fig. **448** beispielsweise aus zwei symmetrischen Theilen s, s' gebildet. Der eine Theil s läuft von a aus in einer Windung bis f; hieran schliesst sich eine auf einer coaxialen Cylinderfläche befindliche schraubenförmige Windung u, die bis zu f' führt, und von hier an setzt sich der andere Theil s' in einer Windung bis a fort. Bei gleichförmiger Drehung der treibenden Schnecke im Sinne des Pfeiles wird, so lange der Tangentialpunkt D der beiden Seiltheile σ, σ' sich auf dem Schneckentheile s befindet, die Geschwindigkeit des Seiles resp. eines Punktes A desselben allmählich zunehmen und während einer Umdrehung der Schneckenwelle ihr Maximum erreichen. Hierauf gelangt der Tangentialpunkt in die cylindrisch schraubenförmige Rinne, und jetzt bleibt die Geschwindigkeit während einer Wellenumdrehung constant; dann tritt der Tangentialpunkt auf den anderen Schneckentheil s', und die Geschwindigkeit nimmt allmählich wieder ab bis die Welle die dritte Umdrehung vollendet hat. In dem betrachteten Falle ist demnach mit drei Umdrehungen der Welle eine Bewegungsperiode beendet, und dieselbe wiederholt sich im umgekehrten Sinne bei den darauf folgenden drei entgegengesetzt gerichteten Umdrehungen. An einem Punkte A des Seiles ist der Spindelwagen befestigt, und dieser vollzieht dann dieselbe Bewegung wie das Seil.

Wir haben in Fig. **448** als Aufrissprojection der Mittellinie des auf die Schnecke gewundenen Seiles eine Kreisevolvente s, s' genommen, für welche der kleine um den Punkt F beschriebene Kreis k der Basiskreis ist. Diese Kreisevolvente hat in a eine Spitze oder einen Rückkehrpunkt und besteht aus den beiden symmetrischen Theilen as, as', von denen jeder eine Windung bildet; und diese beiden Theile gehen in den Punkten f, f' in eine verbindende Kreiswindung u über. Der ausgezogene Theil as der Kreisevolvente entspricht dem vorderen Schneckentheil, der punktirte Theil as' dem hinteren Schneckentheil. In der Praxis sind meist die Rollen $\Phi\varphi$, $\Phi'\varphi'$ so weit von der Schnecke entfernt, dass wir die geradlinigen Seiltheile $\sigma\sigma'$ als parallel bleibend ansehen können; und demnach lässt sich die Geschwindigkeit des Seiles oder eines Punktes A desselben leicht bestimmen. Wir nehmen unbeschadet der Allgemeinheit an, dass die constante Drehgeschwindigkeit der Schnecke gleich der Einheit sei, ziehen im Berührungspunkte D, den die Gerade $\sigma\sigma'$ mit der Kreisevolvente s bildet, an dieselbe die Normale Dd, welche den Basiskreis k im Punkte d berührt. Dann ist die Geschwindigkeit des momentan mit D coincidirenden Punktes der rotirenden Kreisevolvente gleich dem Fahrstrahle FD, und die Projection Dd desselben auf die ruhende Kreistangente Dd ist gleich der Geschwindigkeit, welche dieser bewegte Punkt senkrecht gegen Dd gerichtet besitzt, oder mit welcher das Seil sich bewegt. Da die Tangente dD gleich dem Kreisbogen akd ist, so folgt, dass diese Geschwindigkeit sich der Zeit proportional verändert. Die Geschwindigkeit eines Seilpunktes A nimmt während der ersten Wellenumdrehung, also so lange sich der Berührungspunkt D auf der Kreisevolvente s befindet, von Null an der Zeit proportional zu, bleibt während der zweiten Umdrehung constant und nimmt während der dritten proportional der Zeit bis zu Null ab. Das zugehörige Geschwindigkeitsdiagramm des Punktes A können wir hiernach leicht in bekannter Weise construiren. Die Schnecke kann sich auch, wie es oft der Fall ist, über die Punkte i, i' cylindrisch schraubenförmig weiter fortsetzen; und dieser cylindrischen Auf- und Abwicklung des Seils entspricht dann wieder eine gleichförmige Bewegung desselben. Da alle Kreisevolventen ähnlich sind, so können wir auch umgekehrt, wenn ein derartiges Geschwindigkeitsdiagramm vorgeschrieben ist, die entsprechende Kreisevolvente resp. die betreffende Schnecke leicht construiren; und auch das zugehörige Wegdiagramm können wir ebenso, wie auf S. 358 und in Fig. **416** angegeben wurde, zeichnen. In der Praxis wird für die Schnecke meist eine Archimedische Spirale genommen[1]). Dieselbe weicht aber bei den in Betracht kommenden Verhältnissen stets nur sehr wenig von einer Kreisevolvente ab, so dass bei der Archimedischen Spirale angenähert derselbe Bewegungsvorgang auftritt. Die Schnecken können mannigfaltig gestaltet sein, und dem entsprechend können die verschiedenartigsten Bewegungen auf diese Weise erzeugt werden.

---

[1]) Vergl. Grothe, *Streichgarn-Spinnerei*, 1876, wo die Schnecken für die Bewegung des Spindelwagens in verschiedenen Formen gegeben sind.

Sperrmechanismen und Schaltmechanismen.

177. **Sperrwerke.** Ein Mechanismus, durch welchen eine Bewegung nur in einem Sinne bewirkt, im anderen gehemmt wird, heisst ein Sperrwerk. In den meisten Fällen wird dies durch Sperrräder erreicht.

Bei dem in Fig. **449** dargestellten Sperrrade $\Phi\varphi$ greift eine Klinke Fk, die auch Sperrkegel genannt wird, in dasselbe ein. Das Rad $\Phi\varphi$ kann sich in der Richtung des eingezeichneten Pfeiles frei um die feste Axe Φ drehen; denn die um die feste Axe F schwingende Klinke Fk gleitet auf den Zähnen und schlägt durch Kraftschluss successive in die Zahnkerben hinein. Dadurch wird aber die Bewegung des Sperrades $\Phi\varphi$ in entgegengesetzter Richtung verhindert. Damit die Klinkenkante k in der Zahnkerbe eine sichere Stützung bewirkt, muss die Zahnflanke $\varkappa\varepsilon$ mit kF oder $\varkappa F$ einen Winkel εkF bilden, der kleiner als ein rechter Winkel, oder ihm gleich ist. Ist der Winkel εkF kleiner als ein rechter und die Klinke bei k entsprechend scharfkantig, so dass sie vollständig in die Kerbe eingreift, dann wird beim Eingriff noch ein kleiner Rückgang des Sperrrades stattfinden, welcher verschwindet, wenn der Winkel εkF ein rechter ist. Der übrige Zahntheil, der Zahnrücken, ist meist kreisförmig profilirt; und um die Abnutzung der Zahnspitze zu vermindern, ist dieselbe möglichst wenig spitz, fast rechtwinkelig zugespitzt geformt. Das betrachtete Sperrwerk ist ein aus den drei Gliedern, Steg ΦF, Sperrrad $\Phi\varphi$ und Klinke Fk bestehender einfacher Mechanismus. Nehmen wir an, es sei μ der Mittelpunkt des betreffenden kreisförmigen Zahnrückens, so ist der Mechanismus, während die Klinkenkante k auf diesem Zahnrücken gleitet, ein Kurbelgetriebe $\Phi\mu kF$ mit weggeminderter Koppel μk.

Wird der Radius des Sperrrades unendlich gross genommen, dann erhalten wir die in Fig. **450** gezeichnete Sperrzahnstange φ, welche sich nur in einer Richtung in der prismatischen Hülse Ξ verschieben kann; und an diese Hülse ist die Klinke Fk drehbar angeschlossen.

Wenn die Klinke Fk, wie bei dem in Fig. **451** dargestellten Sperrwerke, hakenförmig ist, wird dieselbe auch Sperrhaken genannt. Dieser Anordnung gemäss kann das Sperrrad $\Phi\varphi$ nur in der Richtung des eingezeichneten Pfeiles rotiren, also entgegengesetzt der Drehung in Fig. **449**. Behufs der sicheren Stützung muss die Zahnflanke $\varkappa\varepsilon$ mit der Geraden kF einen Winkel $\varepsilon k F$ bilden, der grösser als ein rechter Winkel, oder ihm gleich ist. In dem dargestellten Falle ist die Gerade Fk eine Tangente an dem mit $\Phi\varkappa$ als Radius beschriebenen gedachten Kreise und der Winkel $\varepsilon k F$ ein rechter; dem zufolge sind die Zahnflanken radial. Anstatt einer äusseren Verzahnung des Sperrrades kann auch eine innere Verzahnung desselben angewendet werden. In vielen Fällen wird auch die Sperrung durch Reibung bewirkt. Der Rand des Sperrrades ist dann nicht verzahnt, sondern einfach cylindrisch und ebenso auch der Klinkenrand, welcher sich gegen das Rad stemmt; und vermittelst der durch Reibung entstehenden Klemmung wird die Bewegung des Rades in der einen Richtung gehemmt.

Wird die Bewegung eines Mechanismus durch eine entsprechende Einrichtung vollständig gehemmt, so dass erst eine besondere Vorrichtung erforderlich ist, welche die Auslösung vollzieht, dann wird derselbe ein ruhendes Gesperre genannt. Wäre z. B. in Fig. **451** das Rad $\Phi\varphi$ mit einzelnen Einschnitten versehen und der eingreifende Haken k so geformt, dass das Rad vollständig festgehalten wird, dann ist die Bewegung desselben erst möglich, wenn der Haken durch eine besondere Vorrichtung aus dem betreffenden Einschnitte gehoben wird. Die mannigfaltig gestalteten einfachen und zusammengesetzten Sperrwerke sind von Reuleaux in ausführlicher Weise behandelt worden.[1])

178. **Einfach wirkendes Schaltwerk.** Ein Mechanismus, durch welchen eine ruckweis sich wiederholende Bewegung hervorgebracht wird, heisst ein Schaltwerk. Nehmen wir z. B. an, es drehe sich in Fig. **452** das Sperrrad $\Phi\varphi$ mit Reibung um die feste Axe Φ, und es werde durch den um diese Axe schwingenden Hebel H, an welchem sich zunächst nur die eine Klinke Fk befinden möge, in ruckweise Bewegung versetzt, so erhalten wir ein Schaltgetriebe, welches aus dem in Fig. **449** dargestellten Mechanismus hervorgeht, wenn wir nur die Axe Φ des Rades $\Phi\varphi$ als fest betrachten. Während der Hebel H in der Pfeilrichtung h' bewegt wird, bleibt das Rad, durch die Axenreibung gehalten, in Ruhe; wird dagegen der Hebel H in der Pfeilrichtung h bewegt, so werden Hebel, Klinke und Rad einstückig vereint in gleichem Sinne um die feste Axe Φ gedreht. Auf diese Weise werden durch un-

[1]) Reuleaux, „Ueber die Sperrwerke und ihre Anwendungen", *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen.* 1877. Jahrg. 56. S. 17. Vergl. auch Kaiser, „Schalträder". *Deutsches Reichspatent* Nr. 30460 vom 16. August 1884.

gleiche Schwingungen des Hebels dem Rade verschiedene ruckweise Bewegungen in einer Richtung ertheilt; aber die kleinste Schwingung des Hebels muss mindestens die Grösse des Centriwinkels haben, der einem Zahne des Rades entspricht. Soll jedoch vermittelst kleinerer Schwingungen des Hebels eine ruckweise Bewegung des Rades erzeugt werden, so kann man dies durch Anbringung mehrerer Klinken Fk, Fk', Fk'' erreichen, die auf eine gemeinsame Axe F gesetzt sind, und deren Längen z. B. um $\frac{1}{4}$ der Zahntheilung differiren. Durch diese Vorrichtung, die dann einen zusammengesetzten Mechanismus repräsentirt, kann schon vermittelst einer kleinen Hebelschwingung, die $\frac{1}{4}$ Zahntheilung entspricht, die ruckweise Bewegung des Rades bewirkt werden.

In der Regel wird der Rücklauf des Sperrrades, wie in Fig. **453**, durch eine Klinke $F_1 k_1$ und nicht durch Reibung verhindert; und ferner wird der Kraftschluss der Klinken meist durch eine andrückende Feder hervorgebracht. Diese Schaltwerke sind einfach wirkend, weil der schwingende Hebel nur in dem einen Sinne der Schwingung das Rad treibt, in dem entgegengesetzten Sinne aber nicht arbeitet.

179. **Doppelt wirkendes Schaltwerk von De La Garouste**[1]. Bei diesem in Fig. **454** dargestellten Schaltwerke wirkt der um die feste Axe Λ drehbare Hebel H, an welchen zwei Klinken Lk, $L'k'$ gelenkig angeschlossen sind, sowohl in dem einen als in dem anderen Sinne seiner Schwingungen ruckweis nach einer Richtung treibend auf das Sperrrad $\Phi\varphi$. Die Anordnung der beiden Klinken muss aber derart sein, dass die Klinkenkanten k, k' bei einer Hebelschwingung sehr angenähert gleiche Wege durchschreiten und die Klinken nicht an einander schlagen. Um diese Bedingungen zu erfüllen, ziehen wir auf die Radien $\Phi\varkappa$, $\Phi\varkappa'$, welche mindestens drei Zähne zwischen sich fassen müssen, die Senkrechten $\varkappa L$, $\varkappa' L'$, und legen die Hebelaxe Λ in die Halbirungsgerade des spitzen Winkels, den diese Senkrechten bilden. Dann repräsentiren die von Λ auf $\varkappa L$ und $\varkappa' L'$ gefällten Lothe ΛL, $\Lambda L'$ die Hebelarme, an welche die Klinken drehbar angeschlossen sind. Den gleichen Wegen der Punkte L, L' entsprechen hiernach angenähert gleiche Wege der Klinkenkanten k, k'. Die Wahl der Lage von Λ auf der

---

[1]) Die unrichtige Schreibweise „Garousse", die zuerst in Bélidor, *Architecture hydraulique.* 1737. T. I. Part. I. Art. 320 vorkommt, wurde von allen späteren Autoren fortgeführt, weil man auf die ursprüngliche Mittheilung von De La Garouste in *Machines approuvées.* 1735. T. II. p. 15. Année 1702; p. 143. Année 1707. nicht zurückgegangen ist.

genannten Halbirungsgeraden wird durch die Grösse der Hebelschwingung bedingt. Wird der Hebel H aus der gezeichneten Mittellage in der Pfeilrichtung h so weit bewegt, dass die Klinke Lk das Rad um einen Zahn dreht, dann gleitet die andere Klinke $L'k'$ auf zwei Zahnrücken und greift in die zweitfolgende Kerbe. In dieser Stellung sind die Klinkenkanten k, k' nur um einen Zahn getrennt. Beim Rückgange des Hebels in seine Mittellage treibt hierauf die Klinke $L'k'$ das Rad um einen Zahn weiter; während dessen gleitet die Klinke Lk auf zwei Zahnrücken entlang und schlägt in die zweitfolgende Kerbe. Dieselben Bewegungsvorgänge treten auf, wenn der Hebel in gleicher Weise von seiner Mittellage aus in der Pfeilrichtung h' bewegt und nach der Mittellage wieder zurückgeführt wird. Demnach wird bei jeder solchen ganzen Hin- und Herschwingung des Hebels das Rad um vier Zähne nach einer Richtung weiter gedreht. Der Mechanismus besteht hier aus zwei abwechselnd treibenden Kurbelgetrieben $\Lambda Lk\Phi$, $\Lambda L'k'\Phi$, bei welchen $\Lambda\Phi$ der gemeinsame Steg ist und die Klinken Lk, $L'k'$ resp. die Koppeln sind.

180. **Graham'sche ruhende Ankerhemmung.** Die in Fig. 455 gezeichnete altbewährte Hemmung für Pendeluhren besteht aus dem Sperrrade $\Phi\varphi$, welches hier S t e i g r a d oder H e m m u n g s r a d genannt wird, und dem bügelförmigen um die Axe F schwingenden Anker kFk', der abwechselnd als Klinke dient und mit dem Pendel schwingt.[1] Das Steigrad, welches treibend auf den Anker wirkt, wird mit einer angenommenen Anzahl Zähne versehen. Behufs der Construction des Ankers, der eine gewählte Anzahl Zähne nebst einem halben Zwischenraum zweier Zahnspitzen, also im Mittel einen Bogen $\varkappa\varkappa'$ umfasst, werden an die Endpunkte $\varkappa$, $\varkappa'$ desselben Tangenten $\varkappa F$, $\varkappa' F$ gelegt, deren Schnittpunkt F der Axenpunkt des Ankers ist. Die Haken oder Paletten k, k', deren Stärke etwas kleiner als der halbe Zwischenraum zweier Zahnspitzen ist, werden nach zwei concentrischen um F beschriebenen Kreisbögen geformt und unter gleichen Winkeln durch die Geraden g, g' abgeschrägt; aber so, dass, wenn die Palettenspitze bei $\varkappa'$ sich in dem Zahnspitzenkreise befindet, der Bogen k um ein kleines Stück in diesen Kreis eingreift, damit die Zahnspitze z sich auf k stützt, und das Gleiche muss bei dem Bogen k' stattfinden. Die Willkür, welche noch in dieser Construction des Ankers liegt, hat zu verschiedenen Ankerformen geführt, die nach

[1]) Thiout, *Traité de l'horlogerie.* 1741. T. I. p. 103.

traditionellen Regeln hergestellt werden.[1]) Das Steigrad $\Phi\varphi$, welches sich in der Richtung des eingezeichneten Pfeiles dreht, ruht, so lange der schwingende Bogen k an der Zahnspitze z gleitet; daher wird dieses Schaltwerk die Graham'sche ruhende Ankerhemmung genannt. Sobald aber die Zahnspitze diesen Bogen verlässt, gleitet dieselbe treibend an der schrägen Triebfläche der Eingangspalette k, und während dieses Bewegungsvorganges ist der Mechanismus ein excentrisches Schleifkurbelgetriebe, bei welchem ein Glied weggemindert ist und Φz den Kurbelarm vertritt. Dadurch wird die Eingangspalette k aus der Zahnlücke getrieben; aber gleichzeitig wird die Ausgangspalette k' in die betreffende Zahnlücke hineingeführt. Die Rückseite der Zähne muss so geformt sein, dass die Bewegung ohne Hinderniss geschehen kann. Es schlägt hierauf die Zahnspitze z' gegen den Bogen k', und das Steigrad ruht so lange, bis der schwingende Bogen k' sich von dieser Zahnspitze trennt. Dieselbe gleitet darauf treibend auf der schrägen Triebfläche der Ausgangspalette. Während dieses Bewegungsvorganges ist der Mechanismus wieder ein excentrisches Schleifkurbelgetriebe mit dem Kurbelarm $\Phi z'$. Je nachdem die Zahnspitzen auf der Eingangs- oder Ausgangspalette wirken, treten hier abwechselnd zwei verschiedene excentrische Schleifkurbelgetriebe auf, die gleiche Kurbelarme und einen gemeinsamen Steg ΦF besitzen.

---

[1]) Vergl. Vulliamy, „On the Theory of the Dead Escapement". *Quarterly Journal of Science.* 1823. Vol. XVI. p. 1 und Martens, *Beschreibung der Hemmungen der höheren Uhrmacherkunst.* 1858. S. 8.

SIEBENTER ABSCHNITT.

Zusammengesetzte ebene Mechanismen.

Allgemeine Betrachtungen.

181. **Benennungen und Gruppirungen zusammengesetzter ebener Mechanismen.** Befinden sich unter den Gliedern eines ebenen Mechanismus solche, die mit mehr als zwei Gliedern durch Paarungen verbunden sind, dann wird derselbe nach Art. 119 ein zusammengesetzter ebener Mechanismus genannt, und er heisst ein zwangläufiger, wenn alle seine Glieder gegen einander zwangläufige Bewegungen vollziehen. Ein Mechanismus wird ein geschlossener genannt, wenn kein Glied in demselben vorkommt, welches nur mit einem einzigen kinematischen Elemente angeschlossen ist, und wird als ein offener bezeichnet, wenn derselbe ein solches Glied oder mehrere solche Glieder enthält.

Kann in einen zwangläufigen Mechanismus ein einzelnes Glied, durch Paarungen mit zweien seiner Glieder verbunden, eingefügt werden, so dass die gegenseitige Zwangläufigkeit aller Glieder bestehen bleibt; und kann dieses Glied aus dem Mechanismus herausgenommen werden, so dass, ohne Herstellung einer für dasselbe Ersatz bildenden Paarung, die Zwangläufigkeit wieder bestehen bleibt: dann wird der Mechanismus mit dem eingefügten Gliede ein übergeschlossener, und wenn mehrere derartige einzelne Glieder eingefügt sind, ein mehrfach übergeschlossener Mechanismus genannt. Hierbei ist zu beachten, dass ein gewöhnlicher zwangläufiger Mechanismus gemäss dieser Definition durch Einfügung eines Gliedes, welches anstatt eines weggeminderten Gliedes eintritt, zwar vervollständigt, aber nicht ein übergeschlossener wird; denn wenn ein derartiges Glied aus dem Mechanismus wieder herausgenommen wird, ohne Herstellung einer entsprechenden Paarung zwischen den beiden Gliedern, welche durch dieses Glied verbunden waren, so bleibt die Zwangläufigkeit nicht mehr bestehen. Es kann aber aus einem gewöhnlichen zwangläufigen Mechanismus ein übergeschlossener gebildet werden, indem wir zwischen zweien seiner Glieder eine entsprechende Paarung herstellen. Wenn z. B. bei einem Kurbelgetriebe die Koppel mit einem cylindrischen Zapfen, der Steg mit einer entsprechenden Nuthe versehen wird, in welcher dieser Zapfen gleitet, dann erhalten wir einen übergeschlossenen Mechanismus. Befindet sich unter den Curven beschreibenden Punkten eines Gliedes in einem zwangläufigen Mechanismus, ausser den etwa vorkommenden Gelenkpunkten, ein Punkt, der im Bezug auf ein anderes Glied einen Kreis beschreibt, dann kann in diesen Mechanismus ein neues Glied eingefügt werden, welches jenes Glied in dem betreffenden Punkte und dieses Glied in dem Kreismittelpunkte durch je eine Drehpaarung verbindet. In jedem derartigen Falle, auch wenn anstatt jenes Kreises eine Gerade auftritt, kann aus einem zwangläufigen Mechanismus ein übergeschlossener gebildet werden.

Erlangt ein Mechanismus erst dadurch Zwangläufigkeit, dass ein Punkt eines Gliedes in bestimmter Bahn, etwa vermittelst der Hand geführt wird, oder dass in dieser Weise mehrere Punkte, von denen je einer zu einem Gliede gehört, gleichzeitig geführt werden, dann wird derselbe ein geführter Mechanismus genannt. Wir werden nur die zwangläufigen Mechanismen betrachten und einem offenen Mechanismus durch eine derartige Führung zwangläufige Bewegung ertheilen.

Die zusammengesetzten ebenen Mechanismen können in verschiedener Weise gruppirt werden. Hinsichtlich der Art der Paarungen kann man die folgenden vier Gruppen bilden:

I. Gelenkmechanismen, welche nur Drehpaarungen besitzen;

II. Richtmechanismen, welche nur Richtpaarungen enthalten;

III. Paarungsmechanismen, bei denen nur höhere Paarungen auftreten;

IV. Gemischtmechanismen, in denen verschiedene Paarungen vorkommen.

Diese Gruppen haben zwar volle theoretische Berechtigung; aber sie können der Praxis, welche den Anforderungen gemäss meist verschiedene Paarungsarten anwendet, nur wenig Nutzen gewähren. Es ist daher zweckmässig, einzelne wichtige Gelenkmechanismen als Typen hervorzuheben und aus diesen, vermittelst

Ersetzung einzelner Drehpaarungen durch Richtpaarungen, specielle Mechanismen zu bilden, in denen die Beziehungen specielle Fälle der allgemeinen Beziehungen des als Typus betrachteten Mechanismus sind. Ein typischer Gelenkmechanismus mit seinen speciellen Arten bildet demnach eine Gruppe zusammengesetzter ebener Mechanismen. In der Praxis kommen die höheren Paarungen mannigfach bei den Zahnrädern vor; es nehmen daher die Mechanismen mit Zahnrädern, die auch Rädermechanismen genannt werden, eine hervorragende Stellung ein. Dieselben können in zwei Gruppen getheilt werden: erstens die Räderwerke resp. Rädergetriebe, bei welchen die Radaxen mit ihren Lagern die auftretenden Drehpaarungen bilden, einschliesslich der Richtpaarungen bei vorkommenden Zahnstangen; zweitens die räderlenkigen Mechanismen, bei denen Zahnräder vorkommen, die ausser in ihren Axen noch durch andere Drehpaarungen resp. Richtpaarungen oder höhere Paarungen mit Gliedern verbunden sind. Bei vielen Mechanismen werden Riemen, Seile, Schnüre, Ketten, die über Scheiben, Rollen, Trommeln u. s. w. laufen, zur Uebertragung der Bewegung angewendet. Alle diese Mechanismen fassen wir in eine Gruppe unter der Benennung Mechanismen mit Bandtrieb zusammen. Nach dieser für die Untersuchung zweckmässig gewählten Gruppirung, welche sich über ein vielumfassendes Gebiet der unendlich vielen, unermesslich mannigfaltig gestalteten Mechanismen erstreckt und uns eine klare Uebersicht der im Folgenden behandelten Mechanismen giebt, erhalten wir zusammengestellt:

1. Die Gruppen typischer Gelenkmechanismen mit ihren speciellen Arten;

2. Die Gruppen der Rädermechanismen: a) Räderwerke oder Rädergetriebe, b) Räderlenkige Mechanismen;

3. Die Gruppe der Mechanismen mit Bandtrieb.

Die in der Praxis vorkommenden zusammengesetzten zwangläufigen Mechanismen werden meist dadurch gebildet, dass an die Glieder eines einfachen Mechanismus durch zweckmässige Paarung andere Glieder zwangläufig angeschlossen werden; und durch derartige Anschliessung immer neuer Glieder an den erhaltenen zusammengesetzten Mechanismus wird derselbe beliebig weiter gestaltet. In sehr vielen Fällen ist das Gelenkviereck, resp. der Kurbelmechanismus, gleichsam der Stammmechanismus, der mit neuen Gliedern gelenkig verbunden, die wichtigsten Typen der zusammengesetzten Gelenkmechanismen bildet, aus denen wieder durch Specialisirung viele angewandte besondere Mechanismen hervorgehen.

Nach der Anzahl zwei, drei, vier . . der kinematischen Elemente, welche in einem Gliede vorkommen, wird dasselbe resp. als ein binäres, ternäres, quaternäres . . bezeichnet. Nach der Anzahl zwei, drei, vier . . der Glieder, die durch eine gemeinsame Axe zu einem Gelenke verbunden sind, wird das Gelenk ein zwei-, drei-, viergliederiges genannt. Die bewegten Glieder eines ebenen Mechanismus denken wir uns durch starre ebene Systeme vertreten, die sich in einer Ebene bewegen, und diese Glieder oder Systeme bezeichnen wir mit den Ziffern *1*, *2*, *3*, *4* u. s. w. Den Pol je eines dieser Systeme gegen ein anderes derselben bezeichnen wir einfach mit der Combination der Ziffern dieser beiden Systeme; wobei wir, ohne dass es Bedingung sein soll, auf die niedrige Ziffer die höhere folgen lassen. Demnach wird z. B. der Pol des Systems *2* gegen das System *4* und umgekehrt die Bezeichnung *24* erhalten. Die in einem ebenen Gelenkmechanismus vorhandenen parallelen Gelenkaxen bilden durch ihre Spuren in jener auf diesen Axen senkrechten Ebene die betreffenden Pole; und die gewählte Bezeichnungsweise dieser Pole gilt somit auch für diese Gelenkaxen. Die Pole, welche durch wirkliche im Mechanismus vorhandene Axen vertreten sind, wollen wir auch Gelenkpunkte nennen.

182. **Bildung zusammengesetzter ebener Mechanismen.** In Fig. **456**, Taf. XXXI, ist ein aus den vier Gliedern *1*, *2*, *3*, *4* bestehendes Gelenkviereck gezeichnet, dessen Axen *12*, *23*, *34*, *14* sind. An zwei benachbarte Glieder desselben, z. B. an *3*, *4*, schliessen wir durch die Axen *35*, *46* die beiden Glieder *5*, *6* eines Gelenkes, welches die Gelenkaxe *56* besitzt. Dadurch erhalten wir einen sechsgliederigen zwangläufigen Mechanismus mit den vier binären Gliedern *1*, *2*, *5*, *6* und den zwei benachbarten ternären Gliedern *3*, *4*. Denn aus der Anschauung folgt, dass durch diese Anschliessung eines zweigliederigen Gelenkes an irgend zwei Glieder eines Mechanismus die Zwangläufigkeit desselben nicht geändert wird, und dass auch die beiden angeschlossenen Glieder sich zwangläufig bewegen. Den so gebildeten sechsgliederigen Mechanismus, in welchem zwei Gelenkvierecke auftreten, wollen wir den Watt'schen Mechanismus nennen, weil ein wichtiger Specialfall desselben den Hauptmechanismus der von James Watt erbauten Dampfmaschine liefert.

In Fig. **457** sind zwei nicht benachbarte, also gegenüber liegende Glieder z. B. *2*, *4* des aus den Gliedern *1*, *2*, *3*, *4* gebildeten Gelenkvierecks durch die Axen *25*, *46* mit den beiden Gliedern *5*, *6* eines Gelenkes verbunden. Dadurch entsteht ein zweiter sechsgliederiger Mechanismus mit vier binären Gliedern *1*, *3*, *5*, *6* und zwei nicht benachbarten ternären Gliedern *2*, *4*. Diesen sechsgliederigen Mechanismus wollen wir den Stephenson'schen Mechanismus nennen, weil derselbe, wenn wir das eine von den beiden Gliedern *5*, *6* als Steg betrachten, den Hauptmechanismus der von Robert Stephenson zuerst angewandten Umsteuerung der Locomotive bildet. Die Nothwendigkeit der sprachlichen Unterscheidung dieser beiden wichtigen, mannigfaltig gestaltet in der Praxis angewendeten Mechanismen erforderte eine Wahl der Benennung derselben, und es ist wohl angemessen, durch die erwählten Benennungen an die Namen der im praktischen Maschinenfache hervorragenden Männer James Watt[1]) und Robert Stephenson[2]) zu erinnern, mit deren segensreichen Erfindungen diese Mechanismen in engster Beziehung stehen.

Ausser diesen beiden Mechanismen lassen sich durch Anschliessung eines einzigen zweigliederigen Gelenkes an ein Gelenkviereck keine anderen Mechanismen bilden. Dagegen können wir aus diesen beiden Mechanismen, wenn wir fortgesetzt an je zwei Glieder je ein zweigliederiges Gelenk anschliessen, beliebig erweiterte zusammengesetzte Mechanismen erhalten.

Lassen wir bei dem Watt'schen Mechanismus, Fig. **456**, in einem der ternären Glieder, z. B. in *3*, die Gelenke *23*, *35* zusammenfallen, so wird dadurch der in Fig. **458** gezeichnete Mechanismus mit einem dreigliederigen Gelenke gebildet, welches folgerichtig die dreifache Bezeichnung *23*, *25*, *35* erhalten muss. Ebenso wird bei dem Stephenson'schen Mechanismus, Fig. **457**, wenn wir in einem der ternären Glieder, z. B. in *2*, die Gelenke *23*, *25* coincidiren lassen, ein dreigliederiges Gelenk entstehen, und wir erhalten dadurch denselben in Fig. **458** dargestellten Mechanismus. Wenn wir nun weiter bei beiden Mechanismen auch in dem ternären Gliede *4* die beiden Gelenke *14*, *46* vereinen, dann ergiebt sich der in Fig. **459** gezeichnete Mechanismus mit sechs binären Gliedern, mit zwei dreigliederigen und drei zweigliederigen Gelenken.

---

[1]) Muirhead, *Mechanical Inventions of James Watt.* 1865.

[2]) Smiles, *Lives of the Engineers.* 1862. Vol. III.

Ein dritter zusammengesetzter Mechanismus ergiebt sich, indem wir wieder von einem in Fig. **460** dargestellten Gelenkviereck *1234* ausgehen, an drei Glieder *2*, *3*, *4* desselben beziehlich die drei Glieder *5*, *6*, *7* drehbar anschliessen, die anderseits alle drei gelenkig mit einem Gliede *8* verbunden sind. Um die Zwangläufigkeit dieses Mechanismus einzusehen, denken wir uns das Glied *1* festgehalten, ferner das Gelenk *47* losgelöst, und bezeichnen mit γ den Kreis, welchen der Punkt *47* des Gliedes *4* im Gliede *1* beschreibt. Hierauf fixiren wir die drei Punkte *25*, *36*, *47* in einer eingenommenen Lage, drehen nun die Glieder *5*, *6* um die fixirten Axen *25*, *36* und führen zugleich den Punkt C des Gliedes 7, der in demselben die losgelöste Axe vertritt, auf jenem Kreise γ, dann beschreibt der Gelenkpunkt *78* der Glieder 7, *8* eine Curve φ im Bezug auf das feste Glied *1*, und der Punkt C kann mit dem Punkte *47* des Gliedes *4* in Coincidenz gebracht werden. Durch Festhaltung dieser Coincidenz befinden sich demnach die Glieder *5*, *6*, *7*, *8* in starrer Verbindung mit der fixirten Lage des Gelenkvierecks *1234*. Indem wir uns diesen Vorgang für verschiedene Lagen des Gelenkvierecks wiederholt denken, ergiebt sich anschaulich die Zwangläufigkeit dieses achtgliederigen Mechanismus, der aus vier binären und vier ternären Gliedern besteht. Wir wollen diesen Mechanismus, weil das Glied *8* gleichsam dreispännig mit dem Gelenkviereck verbunden ist, den Dreispannmechanismus nennen. Diese drei mit Namengebung ausgezeichneten Mechanismen, welche wir später eingehend behandeln, können als drei wichtige Typen zusammengesetzter Mechanismen betrachtet werden.

Bei dem in Fig. **461** dargestellten zehngliederigen Mechanismus sind die beiden Glieder *9*, X vermittelst eines Gelenkes $9X$ drehbar zusammengeschlossen und durch die vier Glieder *5*, *6*, *7*, *8* mit den vier Gliedern des Gelenkvierecks *1234* gelenkig verbunden. Um die Zwangläufigkeit dieses Mechanismus einzusehen, denken wir uns das Gelenk $9X$ losgelöst und das Gelenkviereck *1234* in einer Lage fixirt; dann kann der Punkt, der das losgelöste Gelenk im Gliede *9* vertritt, eine Curve im Bezug auf die fixirte Lage beschreiben. Ebenso kann auch der Punkt, der das losgelöste Gelenk im Gliede X repräsentirt, eine Curve beschreiben. Der Schnittpunkt dieser beiden Curven giebt somit die Lage des wieder durch Zusammenschliessung der Glieder *9*, X erhaltenen Gelenkes $9X$. Demnach wird, sofern diese Curven einen Schnittpunkt bilden, durch denselben zu je einer fixirten Lage des

Gelenkvierecks eine entsprechende Lage des Gelenkpunktes *9X* bestimmt; und damit ist die Zwangläufigkeit dieses Mechanismus durch Anschauung erkannt.

Ist ein Glied eines zwangläufigen Mechanismus um eine Axe in einem festen System drehbar, so kann ein Punkt eines anderen Gliedes, der nicht als Gelenkpunkt zu jenem Gliede gehört, auf einer beliebigen Curve in dem festen System geführt werden, und der Mechanismus vollzieht dann eine zwangläufige Bewegung. Diese zwangläufige Bewegung bleibt bestehen, wenn gleichzeitig auch jene Axe in dem festen System auf einer Curve geführt wird. Nach dieser Erörterung wird allgemein jeder zwangläufige Mechanismus durch gleichzeitige bestimmte Führungen zweier Punkte, die zwei verschiedenen Gliedern angehören, zwangläufig bewegt. Sind also zwei zwangläufige Mechanismen gegeben, und werden zwei Glieder des einen mit zwei Gliedern des anderen durch je ein Gelenk drehbar verbunden, so bilden die beiden verbundenen Mechanismen wieder einen zwangläufigen Mechanismus. In Fig. **462** ist beispielsweise ein achtgliederiger Mechanismus dargestellt, der aus zwei Gelenkvierecken *1234* und *5678* gebildet wird, bei denen gegenüber liegende Gliederpaare durch die beiden Gelenkaxen *26*, *48* drehbar verbunden sind.

Zwei zwangläufige Mechanismen lassen sich auch dadurch zu einem zwangläufigen Mechanismus verbinden, dass wir ein Glied des einen Mechanismus mit einem Gliede des anderen einstückig vereinen und ferner ein Glied des einen mit einem Gliede des anderen durch ein hinzugefügtes Glied gelenkig verknüpfen. Denn betrachten wir z. B. in Fig. **463** zwei Gelenkvierecke, deren Stege wir zu einem Gliede *1* vereinen, dann beschreibt ein Koppelpunkt *38* des Gelenkvierecks *1234*, so wie ein Koppelpunkt *68* des Gelenkvierecks *1567* eine Curve im Bezug auf den Steg *1*. Demnach können diese beiden Punkte so bewegt werden, dass sie in constantem Abstande bleiben, und durch das hinzugefügte Glied *8*, welches an die Glieder *3*, *6* drehbar angeschlossen ist, erhalten wir eine zwangläufige Verbindung der beiden Gelenkvierecke. In dieser Weise können wir somit allgemein zwei zwangläufige Mechanismen zu einem zwangläufigen Mechanismus vereinen.

183. **Beziehungen zwischen den Anzahlen der Glieder und der Gelenke der zwangläufigen Gelenkmechanismen.** Wenn wir auch bei den meisten mannigfach gestalteten Gelenkmechanismen, welche in der Praxis vorkommen, die Zwangläufigkeit derselben leicht

durch reine Anschauung erkennen, so ist es doch erwünscht, durch Beziehungen zwischen den Anzahlen der Glieder und der Gelenke Kriterien für die Zwangläufigkeit der Gelenkmechanismen zu erhalten und eine tiefere theoretische Einsicht zu erlangen. Denn in vielen complicirten Fällen können wir die Zwangläufigkeit der Mechanismen durch Anschauung nicht begründen.

Bezeichnen wir mit n die Gesamtanzahl der Glieder eines zwangläufigen Gelenkmechanismus und mit n_2, n_3, n_4 . . n_i resp. die Anzahl der binären, ternären, quaternären . . i-nären Glieder, die also beziehlich 2, 3, 4 . . i kinematische Elemente enthalten, so ist

$$n = n_2 + n_3 + n_4 \, . \, . + n_i, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

und die Anzahl e aller kinematischen Elemente:

$$e = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 \, . \, . + in_i.$$

Bezeichnen wir ferner mit m die Gesamtanzahl der Gelenke, resp. der Gelenkaxen oder Gelenkpunkte, und mit m_2, m_3, m_4 . . m_k beziehlich die Anzahl der zwei-, drei-, vier- . . k-gliederigen Gelenke, so ergiebt sich:

$$m = m_2 + m_3 + m_4 \, . \, . + m_k, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

und

$$e = 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 \, . \, . + km_k,$$

also

$$2n_2 + 3n_3 + 4n_4 \, . \, . + in_i = 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 \, . \, . + km_k \quad . \quad 3).$$

Um die Anzahl q derjenigen Bedingungen zu erhalten, die nothwendig und hinreichend sind, die gegenseitige Festlegung einer Gruppe von i in einer Ebene befindlichen Punkten zu bestimmen, beachten wir, dass für 2 Punkte nur eine Bedingung, ihre Entfernung erforderlich ist, dass für 3 Punkte diese Entfernung der beiden ersten Punkte und die beiden Entfernungen des dritten Punktes von denselben, oder die beiden anliegenden, diesen dritten Punkt bestimmenden Winkel erforderlich sind, und somit drei Bedingungen genügen. Demnach folgt, dass für jeden neu hinzukommenden vierten, fünften . . Punkt seine beiden Entfernungen von zweien der vorher bestimmten Punkte oder die beiden ihn bestimmenden Winkel nothwendig sind, also je 2 Bedingungen hinzutreten. Hiernach ergiebt sich die Anzahl q der Bedingungen für i Punkte:

$$q = 2i - 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4).$$

Da nun wegen der Starrheit der Glieder die gegenseitige Lage der in jedem Gliede befindlichen Gelenkpunkte unverändert bleiben muss, so ist für alle Glieder zusammen die Anzahl der hierzu nothwendigen und hinreichenden Bedingungen gleich der Summe:

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 \ldots + (2i - 3)\, n_i.$$

Wenn wir die übergeschlossenen Mechanismen nicht mit in unsere Betrachtung ziehen, so wird ein zwangläufiger Mechanismus starr, wenn irgend zwei seiner Glieder durch ein neu eingefügtes binäres Glied gelenkig verbunden werden; wie es beispielsweise in Fig. **464** bei dem zwangläufigen Mechanismus die Gestrichelung zeigt, wo das eingefügte binäre Glied *9* an die beiden Glieder *6*, *7* in *69*, *79* gelenkig angeschlossen ist. Angenommen, es bleiben die beiden Punkte *69*, *79* während der Bewegung des Mechanismus in constanter Entfernung, dann würde durch die Einfügung des binären Gliedes *9* die Zwangläufigkeit nicht beeinträchtigt, und der Mechanismus wäre ein übergeschlossener, auf den unsere Darlegungen sich nicht erstrecken sollen, weil wir die übergeschlossenen Mechanismen aus der Betrachtung setzen. Jeder der beiden hinzugekommenen Gelenkpunkte erfordert zwei Bedingungen und das eingefügte binäre Glied eine; folglich wird durch diese 5 hinzugetretenen Bedingungen der Mechanismus starr, und es ist demnach die Anzahl der Starrheitsbedingungen desselben gleich

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 \ldots + (2i - 3)\, n_i + 5.$$

Beachten wir nun, dass zwei Gelenkpunkte zu jener Anzahl m hinzugekommen sind und dass nach 4) für die gegenseitige Festlegung oder Starrheit der $m + 2$ Gelenkpunkte die Anzahl

$$2\,(m + 2) - 3$$

Bedingungen erforderlich sind: so folgt, weil gemäss dieser beiden Bestimmungsweisen die Starrheit des Mechanismus bestimmt wird, dass die Anzahlen dieser aufgestellten Bedingungen gleich sein müssen, also

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 \ldots + (2i - 3)\, n_i + 5 = 2\,(m + 2) - 3$$

ist. Hieraus ergiebt sich demnach der Satz:

Bei einem zwangläufigen, nicht übergeschlossenen Gelenkmechanismus besteht zwischen den Anzahlen n_2, n_3, n_4 . . n_i der Glieder und der Gesamtanzahl m Gelenke die Beziehung

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 \ldots + (2i - 3)\, n_i = 2m - 4 \quad . \quad . \quad \mathrm{I}).$$

Setzen wir voraus, der Mechanismus sei von vornherein starr, so muss die Bedingung

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 \ldots + (2i-3)\,n_i \geqq 2m - 3$$

bestehen und demnach

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 \ldots + (2i-3)\,n_i > 2m - 4$$

sein. Nehmen wir dagegen an, dass der Mechanismus willkürlich, also nicht zwangläufig beweglich sei, so erfordert die Herstellung der Starrheit des Mechanismus mindestens zwei neu eingefügte binäre Glieder, und in diesem Falle ist

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 \ldots + (2i-3)\,n_i < 2m - 4.$$

Hiernach erhalten wir umgekehrt den wichtigen Satz:

Wenn bei einem Gelenkmechanismus zwischen den Anzahlen n_2, n_3, n_4 . . n_i der Glieder und der Gesamtanzahl m Gelenke die Beziehung

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 \ldots + (2i-3)\,n_i = 2m - 4 \quad . \quad . \quad \mathrm{I)}$$

besteht, so ist derselbe zwangläufig.

Die Gleichung I) bewahrt ihre Gültigkeit, wenn wir in einem Gliede des Mechanismus zwei oder mehrere Gelenkaxen zu einer vereinen; aber so, dass mindestens noch zwei Gelenke in dem Gliede vorkommen, damit dasselbe in zwangläufiger Verbindung bleibt. Um dies zu beweisen, nehmen wir an, es werden in einem h-nären Gliede zwei Gelenkaxen zu einer vereint; dadurch wird die Anzahl n_{h-1} der $(h-1)$-nären Glieder um 1 vergrössert, die Anzahl n_h der h-nären Glieder um 1 verkleinert und ebenso die Anzahl m der Gelenke um 1 verkleinert. Demnach ergiebt sich aus I):

$$n_2 + 3n_3 \ldots + [2(h-1)-3]\,(n_{h-1}+1) + (2h-3)\,(n_h - 1) \ldots$$
$$+ (2i-3)\,n_i = 2\,(m-1) - 4,$$

ferner

$$n_2 + 3n_3 \ldots + [2\,(h-1)-3]\,n_{h-1} + 2\,(h-1) - 3$$
$$+ (2h-3)\,n_h - 2h + 3 \ldots + (2i-3)\,n_i = 2m - 4 - 2;$$

und folglich:

$$n_2 + 3n_3 \ldots + [2(h-1)-3]\,n_{h-1} + (2h-3)\,n_h + \ldots (2i-3)\,n_i$$
$$= 2m - 4.$$

Die Gleichung I) bleibt also bestehen, wenn wir in einem Gliede zwei Gelenke zu einem vereinen; und sie behält somit auch ihre Gültigkeit, wenn wir fortgesetzt in einem Gliede drei, vier oder mehrere Gelenkaxen zusammen fallen lassen. Wir erhalten hiernach den Satz:

Die Zwangläufigkeit eines Gelenkmechanismus bleibt bestehen, wenn in einem Gliede zwei oder mehrere Gelenke vereint werden; dabei dürfen diese Gelenke aber nicht alle in einem einzigen Gelenke zusammen fallen.

Aus der Gleichung I), in welcher die Anzahlen n_2, n_3 . . n_i der binären, ternären . . i-nären Glieder und die Anzahl m der Gelenke vorkommen, können wir leicht eine andere gleich wichtige Beziehung ableiten, die zwischen den Anzahlen m_2, m_3 . . m_k der zwei-, drei- . . k-gliederigen Gelenke und der Anzahl n der Glieder eines zwangläufigen Gelenkmechanismus besteht. Denn setzen wir in die Gleichung I) für m den Werth aus 2), und subtrahiren wir die so erhaltene Gleichung

$$n_2 + 3n_3 + 5n_4 \ldots + (2i-3)n_i = 2(m_2 + m_3 + m_4 \ldots + m_k) - 4 \quad . \; . \; 5)$$

von der mit 2 multiplicirten Gleichung 3), so ergiebt sich

$$3(n_2 + n_3 + n_4 \ldots + n_i) = 2[m_2 + 2m_3 + 3m_4 \ldots + (k-1)m_k] + 4,$$

und wir erhalten hiernach die zweite wichtige Beziehung

$$3n - 2[m_2 + 2m_3 + 3m_4 \ldots (k-1)m_k] = 4 \quad . \; . \; \text{II}),$$

aus welcher der Satz folgt:

Wenn bei einem Gelenkmechanismus zwischen den Anzahlen m_2, m_3, m_4 . . m_k der Gelenke und der Gesamtanzahl n der Glieder die Beziehung

$$3n - 2[m_2 + 2m_3 + 3m_4 \ldots (k-1)m_k] = 4 \quad . \; . \; \text{II})$$

besteht, so ist derselbe zwangläufig.

Aus den Beziehungen I), II) können wir die Zwangläufigkeit eines Gelenkmechanismus leicht erkennen; aber wir müssen stets in Erinnerung behalten, dass bei übergeschlossenen Gelenkmechanismen auch Zwangläufigkeit vorhanden sein kann, wenn diese Beziehungen nicht bestehen, und dass dieselben nur im Allgemeinen ihre Gültigkeit bewahren.

Die Beziehungen I), II) sind von den Längen der Glieder nicht abhängig, und gelten daher auch bei Mechanismen, in denen Drehpaarungen und Richtpaarungen vorkommen, vorausgesetzt, dass wir die Richtpaarungen in Drehpaarungen verwandeln können, ohne dass dadurch die Anzahl der Glieder und Gelenke verändert wird. Aus Art. 141 folgt: wenn zwei durch eine Richtpaarung verbundene Glieder ferner noch mit je einem Gliede durch eine Richtpaarung verbunden sind, dann kann man die beiden letzten Glieder zu einem Gliede vereinen, und dadurch wird die Anzahl der Glieder und Gelenke verändert. Demnach verlieren jene Beziehungen, wenn ein derartiger Fall bei einem Mechanismus mit Drehpaarungen und Richtpaarungen eintritt, ihre Gültigkeit.

Der Werth in der Klammer der Gleichung II) ist stets eine ganze Zahl; demnach ergiebt sich, wenn wir diese Gleichung durch 2 dividiren, dass die Gliederzahl n durch 2 theilbar, also eine gerade Zahl ist, und wir erhalten den Satz:

Ein zwangläufiger Gelenkmechanismus besteht aus einer geraden Anzahl Glieder.

Kommen in einem Gelenkmechanismus nur zweigliederige Gelenke vor, so ist nach Gleichung II) die Anzahl derselben

$$m_2 = \frac{3n}{2} - 2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6),$$

und dies ist die grösste Anzahl Gelenke, welche bei einer bestimmten Anzahl n Glieder auftreten kann.

Ziehen wir ferner die Gleichung 5) von der Gleichung 3) ab, dann folgt:

$$n_2 - [n_4 + 2n_5 \ldots + (i-3)n_i] = m_3 + 2m_4 + 3m_5 \ldots + (k-2)m_k + 4$$

und

$$n_2 = [n_4 + 2n_5 \ldots + (i-3)n_i] + [m_3 + 2m_4 + 3m_5 \ldots + (k-2)m_k] + 4.$$

Aus dieser Gleichung, in welcher die Anzahl n_3 der ternären Glieder so wie die Anzahl m_2 der zweigliederigen Gelenke nicht vorkommt, folgt der Satz:

Die Anzahl der binären Glieder eines zwangläufigen ebenen Gelenkmechanismus ist ohne die Anzahl der ternären Glieder und der zweigliederigen Gelenke bestimmt, und beträgt mindestens 4.

Die beiden abgeleiteten Beziehungen I), II) sind in theoretischer Hinsicht für die Erkenntniss der Zwangläufigkeit der Mechanismen sehr wichtig; denn bei zusammengesetzten Mechanismen, die kein Gelenkviereck enthalten, kann die Zwangläufigkeit nicht leicht durch reine Anschauung erkannt und begründet werden. In Fig. **465** ist beispielsweise ein achtgliederiger Gelenkmechanismus gezeichnet, in welchem nur Gelenkfünfecke vorkommen. Derselbe besteht aus 4 binären und 4 ternären Gliedern, die untereinander durch 10 zweigliederige Gelenke verbunden sind. Es ist demnach

$$n = 8, \quad n_2 = 4, \quad n_3 = 4, \quad m = m_2 = 10.$$

Setzen wir die betreffenden Werthe in die Gleichung I), dann ergiebt sich die Gleichheit

$$4 + 3 . 4 = 2 . 10 - 4,$$

und damit ist die Zwangläufigkeit dieses Mechanismus bewiesen.

Durch Einsetzung der betreffenden Werthe in die Gleichung II) ergiebt sich die Gleichheit

$$3 . 8 - 2 . 10 = 4,$$

durch welche ebenfalls die Zwangläufigkeit bestätigt wird.

Um noch in einem zweiten Beispiele die Zwangläufigkeit zu erkennen, ist in Fig. **466** ein zehngliederiger Mechanismus, in welchem nur Gelenkfünfecke vorkommen, gezeichnet. Derselbe enthält 5 binäre, 4 ternäre Glieder und 1 quaternäres Glied, welche durch 13 zweigliederige Gelenke verbunden sind. In diesem Falle ist

$$n = 10, \quad n_2 = 5, \quad n_3 = 4, \quad n_4 = 1, \quad m = m_2 = 13;$$

folglich erhalten wir durch Einsetzung der betreffenden Werthe aus Gleichung I)

$$5 + 3 . 4 + 5 . 1 = 2 . 13 - 4,$$

und aus der Gleichung II)

$$3 . 10 - 2 . 13 = 4.$$

Es ist hiernach die Zwangläufigkeit dieses zehngliederigen Mechanismus sowohl durch die eine als durch die andere Beziehung bestätigt.

Wenn wir in dem quaternären Gliede X die beiden Gelenke $6X$, $8X$ und die beiden Gelenke $7X$, $9X$ zu je einem Gelenke vereinen, dann entsteht der in Fig. **467** dargestellte Mechanismus, in welchem jenes quaternäre Glied durch das binäre Glied X ersetzt wird; und infolge dieser Vereinigung treten zwei dreigliederige Gelenke auf. In diesem zwangläufigen Mechanismus ist

$$n = 10, \quad n_2 = 6, \quad n_3 = 4,$$
$$m = 11, \quad m_2 = 9, \quad m_3 = 2,$$

und durch Einsetzung der betreffenden Werthe in die Gleichungen I), II) ergeben sich demnach resp. die Gleichheiten

$$6 + 3 . 4 = 2 . 11 - 4,$$
$$3 . 10 - 2 [9 + 2 . 2] = 4.$$

Vereinen wir in dem Gliede X des in Fig. **466** dargestellten Mechanismus die drei Gelenke $7X$, $8X$, $9X$ zu einem viergliederigen Gelenke, dann entsteht ein zwangläufiger Mechanismus mit

Gelenkvierecken, der aus einem Gelenkvierecke durch successives Anschliessen von zweigliederigen Gelenken gebildet werden kann.[1])

184. **Geometrische Beziehungen zwischen den Polen der in einer Ebene bewegten ebenen Systeme.** Nach dem auf S. 46 abgeleiteten Satze liegen die Pole von drei bewegten ebenen Systemen in einer Geraden, und hierauf gründet sich die Bestimmung der Pole bei den zusammengesetzten Mechanismen[2]). Wenn beispielsweise drei Systeme mit *2*, *4*, *7* und ihre Pole dem entsprechend mit den Combinationen *24*, *47*, *27* bezeichnet sind, so folgt, dass die Verbindungsgerade zweier dieser Pole, z. B. *24*, *47*, auch den dritten Pol *27* enthält, dessen Bezeichnung die Combination aus den zwei bei den beiden ersteren Polen vorkommenden ungleichen Ziffern ist.

Bewegen sich n ebene Systeme in einer festen Ebene, dann ist die Anzahl der Pole dieser n Systeme gleich der Anzahl der Combinationen aus n Elementen zur zweiten Classe, also

$$\frac{(n-1)n}{1\,.\,2}.$$

Da je drei Systeme drei Pole liefern, welche auf einer Geraden liegen, so ist die Anzahl der drei Pole enthaltenden Geraden gleich der Anzahl der Combinationen aus n Elementen zur dritten Classe, also gleich

$$\frac{(n-2)(n-1)n}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Sind z. B. sechs Systeme *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* gegeben, so giebt es fünfzehn Pole und zwanzig Gerade, die drei Pole tragen. Stellen wir die Pole in der folgenden Tabelle zusammen:

$$\begin{array}{lllll} 15 \\ 25 & 13 \\ 35 & 23 & 12 \\ 45 & 34 & 24 & 14 \\ 56 & 46 & 36 & 26 & 16, \end{array}$$

so ersehen wir, dass die Geraden *15-16*, *25-26*, *35-36*, *45-46* durch den Pol *56* gehen. Es giebt hiernach bei sechs Systemen $6-2=4$ Gerade, welche durch einen Pol gehen und ausserdem noch zwei

[1]) Eine andere Begründung und weiter gehende Behandlung der betrachteten Beziehungen hat Grübler mitgetheilt. *Civilingenieur*. 1883. B. 29. S. 167. *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen.* 1885. S. 179. Die Beziehung II) wurde ohne Ableitung zuerst von Liguine gegeben. *Nouvelles Annales de Mathématiques.* 1875. 2me sér. T. XIV. p. 530.

[2]) Vergl. Burmester, „Ueber die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten". *Civilingenieur*. 1880. B. 26. S. 248.

andere Pole tragen. Hieraus folgt allgemein, dass die Anzahl der Geraden, die bei n Systemen durch je einen Pol gehen und ausser diesem noch zwei Pole enthalten, gleich $n - 2$ ist.

Wir nehmen an, es seien in der Tabelle von den sechs Polen der vier ersteren Systeme *1*, *2*, *3*, *4* vier Pole *12*, *23*, *34*, *14* gegeben, von denen nicht drei auf einer Geraden liegen; und wir wollen allgemein vier solche Pole, die vier Systemen angehören, eine Polvierung nennen. Dadurch sind die beiden übrigen Pole *13*, *24* dieser vier Systeme bestimmt; denn wenn wir die Bestimmung eines Pols, z. B. *13*, als Schnitt der Geraden *12-23*, *14-34*, bei den folgenden Betrachtungen kurz durch

$$\begin{matrix} 12\text{-}23 \\ 14\text{-}34 \end{matrix} > 13$$

symbolisch bezeichnen, dann erhalten wir den Pol *24* als Schnitt der betreffenden Geraden

$$\begin{matrix} 12\text{-}14 \\ 23\text{-}34 \end{matrix} > 24.$$

Demnach ist bei vier Systemen die kleinste Anzahl der Pole, welche die beiden übrigen Pole bestimmen, gleich 4; und diese vier Pole müssen eine Polvierung bilden.

Ist ferner in jener Tabelle der Pol *56* des fünften Systems gegen das sechste und ein Pol von einem der ersteren vier Systeme gegen das fünfte, z. B. *45*, sowie ein zweiter Pol von einem anderen dieser vier Systeme gegen das sechste, etwa *36*, gegeben; bilden also die drei neu hinzugefügten Pole mit einem von den sechs Polen der vier ersteren Systeme eine Polvierung, welche z. B. in dem betrachteten Falle aus *34*, *45*, *56*, *36* besteht: so sind durch die Anzahl $4 + 3 = 7$ gegebener Pole *12*, *23*, *34*, *14*, *56*, *45*, *36* die übrigen Pole der sechs Systeme bestimmt. Denn die noch fehlenden sechs Pole ergeben sich wie die folgende symbolische Bezeichnung zeigt:

$$\begin{matrix} 56\text{-}45 \\ 36\text{-}34 \end{matrix} > 46, \qquad \begin{matrix} 46\text{-}24 \\ 36\text{-}23 \end{matrix} > 26, \qquad \begin{matrix} 46\text{-}14 \\ 36\text{-}13 \end{matrix} > 16,$$

$$\begin{matrix} 56\text{-}36 \\ 45\text{-}34 \end{matrix} > 35, \qquad \begin{matrix} 35\text{-}23 \\ 45\text{-}24 \end{matrix} > 25, \qquad \begin{matrix} 35\text{-}13 \\ 45\text{-}14 \end{matrix} > 15.$$

Aus der Tabelle ist leicht zu erkennen, dass bei sechs Systemen durch Hinzufügung von weniger als drei Polen die übrigen Pole nicht bestimmbar sind und dass also bei sechs Systemen mindestens $4 + 3 = 7$ gegebene Pole erforderlich sind, welche die übrigen Pole durch Gerade bestimmen, die drei Pole enthalten.

Sind nun acht Systeme vorhanden, und sind ausser jenen sieben Polen, welche die fünfzehn Pole der ersten sechs Systeme liefern, noch drei neue Pole gegeben, die mit einem dieser fünfzehn Pole eine Polvierung bilden; dann folgt in gleicher Weise, dass bei acht Systemen durch das Hinzutreten dieser drei Pole, also durch $4 + 2 \,.\, 3 = 10$ Pole, die übrigen Pole bestimmt sind. Durch Fortsetzung dieser Ableitung ergiebt sich, dass bei zehn Systemen durch $4 + 3 \,.\, 3 = 13$, bei zwölf Systemen durch $4 + 4 \,.\, 3 = 16$ Pole die übrigen bestimmt sind. Hieraus folgt allgemein, wenn eine gerade Anzahl n von Systemen vorhanden, und $n > 2$ ist, die kleinste Anzahl der bestimmenden Pole gleich

$$4 + \left(\frac{n}{2} - 2\right) 3 = \frac{n}{2} \cdot 3 - 2;$$

und die Anzahl der übrigen Pole, welche hierdurch bestimmt werden, gleich

$$\frac{(n-1)n}{2} - \left(\frac{n}{2} \cdot 3 - 2\right) = \frac{n}{2}(n-4) + 2.$$

Die Constellation der bestimmenden Pole wird gebildet: bei vier Systemen durch eine Polvierung; bei sechs durch diese Polvierung und drei Pole, welche mit einem Pol jener vier Systeme eine zweite Polvierung bilden u. s. w. Wenn wir nun eine derartige Constellation von Polen als Vierungsgruppe bezeichnen, erhalten wir den Satz:

Bei einer geraden Anzahl n von Systemen können durch $\frac{n}{2} \cdot 3 - 2$ Pole, welche eine Vierungsgruppe bilden, alle übrigen Pole $\frac{n}{2}(n-4) + 2$ unmittelbar durch Ziehung solcher Geraden, die drei Pole enthalten, bestimmt werden.

Um auch für eine ungerade Anzahl von Systemen die kleinste Anzahl der Pole zu ermitteln, welche die übrigen durch Gerade bestimmen, die drei Pole enthalten, betrachten wir zunächst fünf Systeme, welche zehn Pole besitzen, und nehmen an: es sei zunächst in der Tabelle dieser Pole

$$\begin{array}{llll} 15 & & & \\ 25 & 13 & & \\ 35 & 23 & 12 & \\ 45 & 34 & 24 & 14 \end{array}$$

eine Polvierung *12*, *23*, *34*, *14* der vier ersten Systeme *1*, *2*, *3*, *4* gegeben, so werden hierdurch auch die beiden Pole *13*, *24* bestimmt. Es kommen nur noch die in der ersten Vertikalreihe verzeichneten Pole in Betracht, und wenn von denselben noch mindestens zwei, z. B. *15*, *35*, gegeben sind, so werden die übrigen dadurch bestimmt. Wir erhalten somit die noch fehlenden beiden Pole *25*, *45* wie die folgende symbolische Bezeichnung zeigt:

$$\begin{matrix} 15\text{-}12 \\ 35\text{-}23 \end{matrix} > 25, \qquad \begin{matrix} 15\text{-}14 \\ 35\text{-}34 \end{matrix} > 45.$$

Es werden demnach bei fünf Systemen durch mindestens $4+2$ gegebene Pole, von denen vier eine Polvierung in den vier ersten Systemen bilden und zwei die Pole vom System *5* gegen zwei der vier ersten Systeme sind, bestimmt. Diese beiden letzten Pole liegen auf einer Geraden, die durch einen entsprechenden Pol der vier ersten Systeme geht. Im betrachteten Falle geht jene Gerade *15-35* durch den Pol *13*.

In analoger Weise ergiebt sich bei sieben Systemen, weil bei sechs Systemen durch $4+3$ Pole die übrigen geliefert werden, dass mindestens noch zwei Pole des siebenten Systems gegen zwei der sechs ersten Systeme erforderlich sind, also $4+3+2=9$ Pole genügen. Demnach ist allgemein bei einer ungeraden Anzahl n von Systemen die kleinste Anzahl der bestimmenden Pole gleich

$$\frac{n-1}{2}\cdot 3-2+2=\frac{n-1}{2}\cdot 3,$$

und die Anzahl der übrigen Pole, welche bestimmt werden, gleich

$$\frac{(n-1)n}{2}-\frac{n-1}{2}\cdot 3=\frac{n-1}{2}(n-3).$$

Die Constellation der bestimmenden Pole wird gebildet aus einer Vierungsgruppe von Polen, welche der geraden Anzahl $n-1$ Systeme angehören, und aus den beiden Polen des n^{ten} Systems gegen zwei von den $n-1$ ersteren Systemen. Hiernach ergiebt sich der Satz:

Bei einer ungeraden Anzahl n von Systemen können durch $\frac{n-1}{2}\cdot 3$ Pole, von denen $\frac{n-1}{2}\cdot 3-2$ in $n-1$ Systemen eine Vierungsgruppe bilden und zwei die Pole des n^{ten} Systems gegen zwei der $n-1$ ersteren Systeme sind, alle übrigen $\frac{n-1}{2}(n-3)$ Pole unmittelbar durch Ziehung solcher Geraden, die drei Pole enthalten, bestimmt werden.

Wenn wir von einem Gelenkviereck ausgehen und durch successive Anschliessung von zweigliederigen Gelenken einen Mechanismus bilden, dann repräsentiren die Gelenkaxen eine Vierungsgruppe von Polen. Demnach sind bei derartigen Mechanismen sämtliche Pole leicht durch Gerade bestimmbar, die drei Pole enthalten. Ist keine bekannte Vierungsgruppe in einem Mechanismus vorhanden, so muss man zunächst eine Construction derjenigen Pole ersinnen, die erforderlich sind, um mit gegebenen Polen eine Vierungsgruppe zu bilden, durch deren Vermittelung die übrigen Pole bestimmt werden.

Der Watt'sche Mechanismus und specielle Arten desselben.

185. **Der Watt'sche Mechanismus im Allgemeinen.** Bei dem in Fig. **468** dargestellten Watt'chen Mechanismus, dessen sechs Glieder zwei Gelenkvierecke *1234*, *1456* mit den gemeinsamen Gliedern *1*, *4* bilden, und der fünfzehn Pole besitzt, sind durch die sieben Drehpaarungen oder Gelenke *12*, *23*, *34*, *14*, *56*, *45*, *16* sieben Pole unmittelbar gegeben. Die beiden Polvierungen *12*, *23*, *34*, *14* und *14*, *16*, *56*, *45* repräsentiren eine Vierungsgruppe; und dadurch sind nach dem Satze auf S. 432 die übrigen acht Pole vermittelst Geradenziehung leicht zu bestimmen. Durch Verlängerung der Vierecksseiten ergeben sich die vier Pole *13*, *24*, *15*, *46* und ferner erhalten wir die übrigen vier Pole, wie die folgende Bezeichnungsweise zeigt:

$$\begin{matrix}12\text{-}16\\24\text{-}46\end{matrix} > 26, \quad \begin{matrix}34\text{-}45\\13\text{-}15\end{matrix} > 35, \quad \begin{matrix}12\text{-}15\\45\text{-}24\end{matrix} > 25, \quad \begin{matrix}34\text{-}46\\16\text{-}13\end{matrix} > 36.$$

Hiernach ist ausser den zum Mechanismus gehörenden Geraden jeder der beiden Pole *26*, *35* durch eine neue Constructionsgerade bestimmt, und jeder der beiden Pole *25*, *36* erfordert zwei neue Constructionsgeraden.

Da bei sechs Systemen oder Gliedern durch jeden der fünfzehn Pole vier Gerade gehen, welche drei Pole tragen, so müssen noch je drei der in einer Zeile stehenden folgenden Pole

23 36 26
23 25 35
56 25 26
56 35 36

auf einer Geraden liegen. Diese vier Geraden, welche als Controle für diese Bestimmung der Pole dienen können, sind durch Punktirung gekennzeichnet. Mit den Polen eines Mechanismus sind auch die Normalen oder Tangenten an den Curven gegeben, die während der Bewegung desselben von den Punkten oder Curven eines der Glieder in einem anderen erzeugt werden; und ferner sind durch die Pole die Verhältnisse sämtlicher Geschwindigkeiten der Punkte eines Gliedes im Bezug auf jedes andere Glied bestimmt.

Jeder der beiden Pole *26*, *35* erfordert im betrachteten allgemeinen Falle zu seiner Bestimmung nur eine neue Constructionsgerade; wenn aber, wie in dem besonderen Falle Fig. **469** die Pole *12*, *14*, *16* auf einer Geraden sich befinden, jenes Dreieck *1* also in eine Gerade übergeht, dann fallen die beiden Geraden *12-16*, *24-46* mit der Geraden *1* zusammen, und jene einfache Bestimmung des Pols *26* ist in diesem besonderen Falle nicht anwendbar; dagegen zeigt die Fig. **468**, dass auch die Geraden *23-36* oder *56-25* auf *12-16* den Pol *26* bestimmen. Benutzen wir nun in Fig. **469** zur Bestimmung des Pols *26* die Gerade *23-36*, so müssen wir zunächst den Pol *36* ermitteln; dieser ergiebt sich als Schnitt der Geraden *34-46*, *13-16*, und die Gerade *23-36* schneidet die Gerade *1* in dem Pol *26*. In gleicher Weise erhalten wir auch den Pol *26*, indem wir durch den Pol *25*, den Schnitt der Geraden *12-15*, *24-45*, und durch den Pol *56* die Gerade *25-56* ziehen. Die sechs auf der Geraden *1* liegenden Pole *12*, *24*, *14*, *46*, *16*, *26* sind die Schnittpunkte, welche die Gerade *1* mit den sechs Seiten des vollständigen Vierecks *13*, *23*, *34*, *36* erzeugt. Nach Art. 26 wird bei dem Gelenkviereck *1234* die momentane gegenseitige Bewegung der beiden resp. um die festen Punkte *12*, *14* rotirenden Systeme *2*, *4* nicht geändert, wenn in diesen Systemen die Anschlusspunkte *23*, *34* der Koppel beliebig auf einer durch den Pol *24* gehenden Geraden angenommen werden. Zeichnen wir also ein beliebiges vollständiges Viereck, von dem fünf Seiten durch die fünf Pole *12*, *24*, *14*, *46*, *16* gehen, so wird durch die sechste Seite desselben der Pol *26* auf der Geraden *1* bestimmt. Hiermit ist der folgende bekannte Satz kinematisch bewiesen:

Bei allen vollständigen Vierecken, von denen fünf Seiten durch fünf auf einer Geraden liegende Punkte gehen, geht auch die sechste Seite durch einen bestimmten sechsten Punkt dieser Geraden.

Die Gruppe von sechs Punkten, die sich als Schnittpunkte einer Geraden mit den sechs Seiten eines vollständigen Vierecks ergeben, wird eine Involution genannt; und demnach erhalten wir den Satz:

Liegen die drei Pole von drei bewegten Systemen gegen ein viertes System auf einer Geraden, so bilden die sechs Pole der vier Systeme auf dieser Geraden eine Involution.

186. **Hauptmechanismus der Watt'schen Dampfmaschine und der Horizontaldampfmaschine.** Der Watt'sche Mechanismus tritt in so mannigfaltigen speciellen Formen in der Praxis auf, dass wir als Repräsentanten nur einige der wichtigsten speciellen Arten hervorheben können. In Fig. **470** ist bei dem Watt'schen Mechanismus, dessen vorhin gewählte Gliederbezeichnung wir beibehalten, die Drehpaarung *16* durch eine Richtpaarung ersetzt, der Pol *16* befindet sich also im Unendlichen; und ferner sind die drei Pole *34*, *14*, *45* in dem Gliede *4* auf einer Geraden angenommen. Betrachten wir nun das Glied *1* als fest, so repräsentirt dieser Mechanismus den in Fig. **470** schematisch dargestellten Hauptmechanismus einer Watt'schen Dampfmaschine, wonach wir die Benennung für jenen allgemeineren Mechanismus gewählt haben. Durch die Glieder *1*, *2*, *3*, *4* sind beziehlich das feste Gestell, die Kurbel, die Pleuelstange und der Balancier vertreten. Das Glied *5* verbindet den Balancier mit der Kolbenstange *6*, und die Richtpaarung wird durch die Führung der Kolbenstange und des Kolbens in dem zum festen Gliede *1* gehörenden Dampfcylinder repräsentirt. Die Polbestimmung ist hier also dieselbe wie in jenem allgemeinen Falle, und es ist hier nur zu beachten, dass der Pol 16^∞ in senkrechter Richtung zur Kolbenstange *6* im Unendlichen liegt. Behufs der Construction des Pols *26*, von der Welle oder Kurbel *2* gegen den Kolben oder die Kolbenstange *6*, brauchen wir nur die einzige neue Gerade *24-46* zu ziehen, die auf $12\text{-}16^\infty$ den Pol *26* bestimmt. Denn die zur Kolbenstange *6* senkrechten Geraden $12\text{-}16^\infty$, $14\text{-}16^\infty$ und die Gerade *12-14* sind unveränderlich; und der Unterscheidung wegen sind diese drei Geraden durch Strichpunktirung gekennzeichnet. Dieses Getriebe können wir, weil die hin- und hergehende Bewegung des Gliedes *6* durch ein Schwingkurbelgetriebe *1234* bewirkt wird, ein schwingkurbeliges Schubgetriebe nennen.

Nehmen wir an, die Kurbel *2* rotire gleichförmig, und es sei die Strecke $\overline{23\text{-}12}$ die constante lothrechte Geschwindigkeit des Kurbelpunktes *23* im ruhenden System *1*, so stellt auch die Strecke *26-12* die lothrechte Geschwindigkeit des zum System *2* gehörenden Punktes *26* dar. Dieser Punkt *26* gehört als Pol von *2* und *6* momentan auch zu dem parallel bewegten System *6*, und hat demnach als solcher dieselbe lothrechte Geschwindigkeit $\overline{26\text{-}12}$ im Bezug auf das feste System *1*. Die Strecke $\overline{26\text{-}12}$ repräsentirt also auch die Geschwindigkeit des Kolbens in dem Dampfcylinder. Machen wir nun auf der Kurbel *2* in den verschiedenen Stellungen die Strecke $\overline{12\text{-}V}$ gleich der entsprechenden Geschwindigkeit $\overline{12\text{-}26}$, so liefern uns die Punkte V das zeitliche polare Geschwindigkeitsdiagramm für die Kolbenbewegung. Machen wir ferner am Gelenkpunkte *56*, der auch mit B bezeichnet ist, die auf der Kolbenstange *6* senkrechte Strecke $BB_v = \overline{26\text{-}12}$, dann bilden die so erhaltenen Punkte B_v das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm für die Kolbenbewegung. Die lothrechte Geschwindigkeit BB_v des Punkte B kann auch in anderer Weise construirt werden, indem wir zu der gedachten Geraden *24-45* durch den Punkt *12* eine Parallele ziehen, welche die Gerade *4* im Punkte 45_v trifft, also die lothrechte Geschwindigkeit $45\text{-}45_v$ des Gelenkpunktes *45* bestimmt, und ferner zur Geraden $45\text{-}B$ die Parallele $45_v\text{-}B_v$ ziehen.

Da nach Art. 131 die tangential wirkenden Kräfte im Gleichgewichtszustande im umgekehrten Verhältnisse der Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte stehen, so verhalten sich hier, wenn wir von der Reibung absehen, der tangentiale Druck auf dem Kurbelzapfen *23* und der Kolbendruck wie die Strecken $\overline{26\text{-}12}$, $\overline{23\text{-}12}$. Es kann also dieses Druckverhältniss in der einfachsten Weise vermittelst der Geschwindigkeiten bestimmt werden. Will man dieses Druckverhältniss auf statischem Wege durch Zerlegung und Zusammensetzung der Kräfte ermitteln, so wird die Construction viel umständlicher.

Bei dem in Fig. **471** gezeichneten speciellen Mechanismus, der den Hauptmechanismus der Horizontaldampfmaschine bildet, ist wieder das Glied *1* fest, aber ausser dem Pol *16* liegt noch der Pol *12* im Unendlichen. Hier sind also zwei Drehpaarungen durch Richtpaarungen vertreten. Das Glied *2* repräsentirt den Dampfkolben oder die Kolbenstange, das Glied *6* den Dampfschieber oder die Schieberstange. Das Glied *4* bildet die Welle mit dem Kurbelarme *14-34* und mit dem Excenterarme *14-45*. Dieses Getriebe wollen wir ein z w e i f a c h e s Schubkurbelgetriebe nennen. Der Pol 16^∞ liegt in senkrechter Richtung zur Schieberstange *6* im Unendlichen, und der Pol 12^∞ befindet sich in senkrechter Richtung zur Kolbenstange *2* im Unendlichen. Der Pol *24* ergiebt sich als Schnitt der Schubstange *3* mit der festen Geraden

$14\text{-}12^x$, und der Pol 46 ist der Schnitt der Schubstange 5 mit der festen Geraden $14\text{-}16^x$. Machen wir für die verschiedenen Stellungen auf der Kurbel $14\text{-}34$ die Strecke $\overline{14\text{-}V_2} = \overline{14\text{-}24}$ und $\overline{14\text{-}V_6} = \overline{14\text{-}46}$, so liefern die Punkte V_2 und V_6 nach obiger Darlegung resp. die zeitlichen polaren Geschwindigkeitsdiagramme für die Bewegung des Dampfkolbens und des Dampfschiebers. Bezeichnen wir die Gelenkpunkte 23, 56 resp. mit L, B; und machen wir an L die auf 2 senkrechte Strecke $L L_\mathfrak{v} = \overline{14\text{-}24}$, an B die auf 6 senkrechte Strecke $B B_\mathfrak{v} = \overline{14\text{-}46}$, dann wird durch die Punkte $L_\mathfrak{v}$ das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm für die Bewegung des Kolbengliedes 2 und durch die Punkte $B_\mathfrak{v}$ das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm für die Bewegung des Schiebergliedes 6 dargestellt.

187. **Mechanismen für Erzeugung eines angenähert gleichförmigen Kurbelschubes mit raschem Rückgange.** a) Arndt'sche kleine Metallhobelmaschine mit Doppelkurbelgetriebe. Bei kleinen Metallhobelmaschinen oder Stossmaschinen wird oft gefordert, dass eine gleichförmige rotirende Bewegung eine hin- und hergehende geradlinige Bewegung des Meissels erzeugt, die während des Arbeitsganges sich angenähert gleichförmig und während des Rückganges oder Leerganges sich rascher vollzieht. Jener Hauptmechanismus der Watt'schen Dampfmaschine kann durch entsprechende Umgestaltung zur Erzeugung dieser Bewegung eingerichtet werden.

In Fig. **472** ist ein derartiger Mechanismus dargestellt. An das Doppelkurbelgetriebe $\Phi F L \Lambda$, dessen festes Glied 1 ist, und dessen Kurbel 2 gleichförmig rotirt, ist die Schubstange 5 mit ihrem einen Ende A im Gelenke L drehbar angeschlossen, die mit ihrem anderen Ende B gelenkig an den meisseltragenden Schlitten 6 geknüpft, die geradlinige hin- und hergehende Bewegung desselben bewirkt. Um nun dieses Getriebe, welches als ein doppelkurbeliges Schubgetriebe bezeichnet werden kann, so zu gestalten, dass die Bewegung des Schlittens während des Arbeitsganges sich möglichst gleichförmig bewegt, müssen wir die Stangenlänge AB und die Weglänge $B_0 B_8$ des Schlittens auf der beispielsweise durch Λ gehenden Schubgeraden als gegeben betrachten. Damit ist der Radius $\Lambda L = \frac{1}{2} B_0 B_8$ des vom Gelenkpunkte L oder A beschriebenen Kreises λ bestimmt. Wir theilen dann die Weglänge $B_0 B_8$ z. B. in 8 gleiche Theile und beschreiben von den Theilpunkten B_1, B_2, B_3 . . B_7 aus mit BA als Radius Kreisbögen, welche den Kreis λ einerseits in den

Punkten L_1, L_2, L_3 . . L_7 schneiden. Um diese Punkte beschreiben wir mit der Koppel *3*, deren Länge LF zweckmässig gewählt werden muss, die Kreisbögen f_1, f_2, f_3 . . f_7, und nun ist der Kreis φ, der von dem Gelenkpunkte F der Kurbel *2* gleichförmig durchlaufen wird, so zu bestimmen, dass er jene Kreisbögen in den Punkten F_1, F_2, F_3 . . F_7 schneidet, die sehr angenähert gleiche Bogenstücke auf dem Kreise φ zwischen sich fassen; denn, wenn dies erreicht ist, wird durch eine gleichförmige Bewegung des Punktes F auf φ auch eine sehr angenähert gleichförmige Bewegung des Schlittens *6* resp. des Punktes B während des Arbeitsganges von B_1 bis B_7 bewirkt. Die Kreisbögen f_0, f_8, welche mit der Koppellänge LF um die den Todtlagen entsprechenden Punkte L_0, L_8 beschrieben sind und φ in F_0, F_8 schneiden, können hier nicht in Betracht kommen, weil die Bewegung des Punktes B an den Wegenden stetig in momentane Ruhe übergehen muss. Die Bestimmung des Kreises φ lässt sich leicht durch ein sehr praktisches Hülfsmittel ausführen. Wir zeichnen auf Gelatinpapier oder Pauspapier, wie Fig. **473** zeigt, mehrere concentrische Kreise und radiale Gerade, welche dieselben in 16 gleiche Theile theilen. Diese durchsichtige Zeichnung bringen wir in Fig. **472** versuchsweise in verschiedene Lagen, bis eine Reihe von 7 Theilpunkten eines dieser Kreise sehr angenähert oder wenn möglich genau auf jenen 7 Kreisbögen f_1, f_2, f_3 . . f_7 liegen. Wir haben in unserem Beispiele gefunden, dass, von innen gezählt, der vierte concentrische Kreis, der gerade dem Kreise λ gleich ist, in die Lage φ gebracht, diese Bedingung am besten erfüllt. Durch dieses Hülfsmittel wird demnach der Radius ΦF und der Mittelpunkt Φ des gesuchten Kreises φ leicht gefunden. Hierbei ist aber zu beachten, dass dieses Resultat nur dann brauchbar ist, wenn hierdurch ein Kurbelgetriebe gebildet wird, dessen Kurbeln ΦF, ΛL beide ganze Umdrehungen vollziehen. Es muss, damit dies stattfindet, also ein Doppelkurbelgetriebe $\Phi F L \Lambda$ erhalten wird, nach dem Grashof-schen Satze S. 287 das feste Glied $\Phi\Lambda$ die kleinste Länge haben, und die Summe der kleinsten und der grössten Gliedlänge kleiner als die Summe der beiden anderen Gliedlängen sein. Tritt dieser Fall aber nicht ein, dann müssen wir, da die Koppellänge FL willkürlich gewählt wurde, mit einer grösseren Koppellänge versuchen, um ein zweckmässiges Resultat zu erlangen[1]).

---

[1]) Eine von der erloschenen Firma Bruno Arndt in Chemnitz i. S. ausgeführte kleine Metallhobelmaschine resp. Stossmaschine, bei welcher der an-

Nehmen wir an, dass die constante lothrechte Geschwindigkeit des Punktes F der gleichförmig rotirenden Kurbel ΦF gleich dem Kurbelradius $F\Phi$ ist, so ergiebt sich, ebenso wie bei der Watt'schen Dampfmaschine, durch den Pol *26*, zu dessen Bestimmung nur eine neue Constructionsgerade erforderlich ist, sehr einfach die entsprechende Geschwindigkeit des Punktes B. Da der Pol 16^∞ in der auf B_0B_8 senkrechten Richtung im Unendlichen liegt, ziehen wir durch Λ und Φ auf B_0B_8 die unveränderlichen Senkrechten $14\text{-}16^\infty$, $12\text{-}16^\infty$. Dann bestimmt die Schubstange *5* durch ihren Schnitt mit der Senkrechten $14\text{-}16^\infty$ den Pol *46* und vermittelst der neuen Geraden *24-46* erhalten wir auf der Senkrechten $12\text{-}16^\infty$ den Pol *26*; demnach repräsentirt die Strecke $\overline{26\text{-}12}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes B. Indem wir senkrecht auf B_0B_8 die Strecke $BB_\mathfrak{v} = \overline{26\text{-}12}$ machen, erhalten wir durch den betreffenden Punkt $B_\mathfrak{v}$ das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm des Schlittens *6*. Diese Construction der Geschwindigkeit versagt, wenn die Verbindungsgerade $\Phi\Lambda$ auf der Schubgeraden $B1$ senkrecht steht, wenn also die beiden parallelen Geraden $\Lambda\text{-}16^\infty$, $\Phi\text{-}16^\infty$ zusammenfallen. Wir können aber auch leicht durch eine zweite Construction die Geschwindigkeit des Punktes B erhalten, indem wir zu FL die Parallele $\Phi L_\mathfrak{v}$ bis an ΛL und ferner zu LB die Parallele $L_\mathfrak{v}B_\mathfrak{v}$ ziehen, welche die lothrechte Geschwindigkeit $BB_\mathfrak{v}$ des Punktes B bestimmt.

In Fig. **474** ist bei dem erhaltenen Getriebe der Axenpunkt Φ beispielsweise in die Verlängerung der Geraden $B\Lambda$ gelegt; dem zufolge muss der Gelenkpunkt A im Gliede *4* verlegt werden und ist dadurch bestimmt, dass wir $\Lambda A = \Lambda L$ und den Winkel $L\Lambda A$ gleich dem in Fig. **472** gegebenen Winkel $L_0\Lambda\Phi$ machen. Durch die einzige neue Gerade *24-46* ergiebt sich auf $\Phi 16^\infty$ der Pol *26* und mit demselben die Strecke $\overline{26\text{-}12}$ oder $\overline{26\text{-}\Phi}$, welche die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes B resp. des Schlittens *6* repräsentirt. Anstatt diese Strecke, wie vorhin angegeben wurde, an B gleichgerichtet nach unten abzutragen, wie es dem Sinne der lothrechten Geschwindigkeit $F\Phi$ des Punktes F entspricht, ist es in Fig. **474** constructiv einfacher, die Strecke $\overline{26\text{-}\Phi}$ in entgegengesetztem Sinne zu nehmen; denn wir brauchen dann nur durch den Pol *26* zu ΦB eine Parallele zu ziehen, welche die

genähert gleichförmige Kurbelschub mit raschem Rückgange durch ein Doppelkurbelgetriebe bewirkt wird, befindet sich in der Maschinenfabrik „Germania“ vormals G. Schwalbe in Chemnitz i. S. im Betriebe.

auf ΦB senkrecht stehende lothrechte Geschwindigkeit BB_b des Punktes B bestimmt. Dadurch erhalten wir zwar das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{b}$, welches die Veränderlichkeit der Bewegung des Punktes B oder des meisseltragenden Schlittens *6* darstellt, in umgewendeter Lage; aber dadurch wird die Anschaulichkeit nicht beeinträchtigt. Diese Lage des Geschwindigkeitsdiagramms würde der Annahme entsprechen, dass der Kurbelpunkt F sich mit der gleich $F\Phi$, aber entgegengesetzten lothrechten Geschwindigkeit bewegt, die also von F aus auf die Verlängerung von ΦF abgetragen werden muss. Wenn die Kurbel ΦF im Sinne des eingezeichneten Pfeiles gleichförmig rotirt, bewegt sich der Punkt B während des Arbeitsganges auf der Wegstrecke $B_1 B_7$ sehr angenähert gleichförmig, weil das entsprechende Diagrammstück sehr angenähert der Schubrichtung parallel ist. Erst an den Wegenden tritt die nothwendige Geschwindigkeitsänderung ein; und ferner sehen wir aus der Gestalt des Diagramms, dass der Rückgang oder Leergang sich mit grösserer Geschwindigkeit vollzieht, also rascher als der Arbeitsgang erfolgt.

Um verschiedene Schublängen zu erhalten, ist in der Praxis die Anschlussaxe A in dem Gliede *4* längs des Armes ΛA verstellbar. Aber mit einer Verkürzung oder Verlängerung des Armes ΛA empfängt das Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{b}$ eine für die Gleichförmigkeit der Bewegung des Punktes B weniger günstige Gestalt. Anstatt der beispielsweise centrisch gelegten Schubgeraden kann man dieselbe auch excentrisch annehmen und in der angegebenen Weise die günstigsten Maassverhältnisse des Mechanismus bestimmen; denn bei einer kurzen Schubstange AB würde durch eine excentrische, parallel zu $\Phi\Lambda$ höher gelegte Schubgerade $B1$ der im Arbeitsgange auftretende seitliche Druck des Schlittens vermindert.

b) Witworth'sche Metallhobelmaschine mit rotirendem Schleifkurbelgetriebe[1]). Wird in dem vorhin betrachteten Getriebe die Koppel FL des Doppelkurbelgetriebes unendlich lang genommen, dann erhalten wir den in Fig. 475 dargestellten Mechanismus der Witworth'schen Hobelmaschine, bei welcher ein rotirendes Schleifkurbelgetriebe $\Phi F\Lambda$ die mit dem Schleifengliede *4* gelenkig verbundene Schubstange AB nebst dem Schlitten *6* bewegt; und dieser Mechanismus, dessen Steg das

---

[1]) *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen.* 1858. S. 147.

Glied *1* ist, kann ein **rotirendes schleifkurbeliges Schubgetriebe** genannt werden. Es soll, während sich die Kurbel ΦF gleichförmig um die Axe Φ im festen Gliede *1* dreht, der Schlitten *6* im Arbeitsgange eine möglichst gleichförmige, im Rückgange eine raschere Bewegung vollziehen. Behufs der Erlangung der für diesen Zweck günstigen Maassverhältnisse betrachten wir die Länge AB der Schubstange *5* und den Kreis α, der von dem Gelenkpunkte A des rotirenden Schleifengliedes *4* um den festen Axenpunkt Λ beschrieben wird, als gegeben; ferner legen wir die Schubgerade $B1$, zweckmässig gewählt, excentrisch zum Kreise α; und damit ist dann die Weglänge B_0B_8 des Schlittenpunktes B bestimmt. Die Weglänge B_0B_8 theilen wir in eine Anzahl etwa 8 gleicher Theile, beschreiben um die Theilpunkte B_1, B_2 .. B_7 mit BA als Radius Kreisbögen, die den Kreis α einerseits schneiden, und ziehen durch diese Schnittpunkte die radialen Geraden f_1, f_2 .. f_7. Wir benutzen nun, in gleicher Weise wie oben, jene in Fig. **473** angegebene, auf Gelatinpapier oder Pauspapier ausgeführte Zeichnung. Diese durchsichtige Zeichnung bringen wir versuchsweise in verschiedene Lagen auf die radialen Geraden, bis eine Reihe von 7 Theilpunkten eines der concentrischen Kreise sehr angenähert oder wenn möglich genau auf den 7 radialen Geraden liegen. Hiernach zeigt sich, dass, von innen gezählt, der zweite concentrische Kreis der durchsichtigen Zeichnung in die Lage φ gebracht, diese Bedingung am besten erfüllt. Der Radius ΦF dieses Kreises φ, dessen Mittelpunkt Φ zufällig sich auf der Schubgeraden $B1$ befindet, liefert die Kurbel ΦF des Schleifkurbelgetriebes. Ziehen wir noch von Λ aus die radialen Geraden f_0, f_8, die den Endpunkten B_0, B_8 der Schubstrecke entsprechen und den Kreis φ resp. in den Punkten F_0, F_8 schneiden, so sehen wir, dass der gleichförmig rotirende Kurbelzapfen F während des langsamen Arbeitsganges den längeren Bogen F_0FF_8, während des raschen Rückganges den kürzeren Bogen F_8F_0 des Kreises φ durchläuft.

Um das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm für die Bewegung des Punktes B zu construiren, nehmen wir wieder an, dass der Kurbelpunkt F mit der constanten lothrechten Geschwindigkeit $F\Phi$ rotirt, und verfahren in analoger Weise wie oben angegeben wurde. Wir ziehen zur Schubgeraden ΦB die festen Senkrechten Φ-16^∞, Λ-16^∞, von denen die letzte auf der Stange AB den Pol *46* bestimmt, ziehen ferner, weil der Schlitten *3* die unendlich lange Koppel FL^∞ vertritt, auf ΛA die Senkrechte FL^∞, die $\Lambda\Phi$ im Pole *24* schneidet. Dann bestimmt die Gerade *24-46* auf Φ-16^∞

den Pol *26*; und indem wir durch den Pol *26* zu ΦB eine Parallele ziehen, erhalten wir die Strecke $BB_\mathfrak{v}$, welche gleich der lothrechten Geschwindigkeit des Punktes B ist, und somit auch das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ desselben. Eine zweite Construction der Geschwindigkeit des Punktes B folgt aus Art. 149 (Fig. **404**). Wir ziehen dem gemäss durch den Anschlusspunkt A zur Kurbel $F\Phi$ eine Parallele, die $\Lambda\Phi$ im Punkte Ξ trifft, fällen von Ξ auf ΛF ein Loth und ziehen durch den Fusspunkt $A_\mathfrak{v}$ zur Schubstange AB die Parallele $A_\mathfrak{v}B'_\mathfrak{v}$, welche auf der Geraden $B_\mathfrak{v}B$ die lothrechte Geschwindigkeit $BB'_\mathfrak{v} = B_\mathfrak{v}B$ bestimmt. Durch die Gestalt des gezeichneten örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ wird der angenähert gleichförmige Arbeitsgang und der raschere ungleichförmige Rückgang veranschaulicht. In der Praxis wird durch verschiedene Verstellungen der Gelenkaxe A in dem Schleifengliede *4* die Schubstrecke verändert; dadurch erhält aber das Geschwindigkeitsdiagramm für die Gleichförmigkeit der Bewegung des Punktes B während des Arbeitsganges eine weniger günstige Gestalt.

c) Metallhobelmaschine mit schwingendem Schleifkurbelgetriebe. Der Mechanismus dieser in Fig. **476** dargestellten Metallhobelmaschine unterscheidet sich in theoretischer Hinsicht von dem vorigen nur dadurch, dass der Drehpunkt Λ des Schleifengliedes *4* ausserhalb des Kreises φ liegt, der von dem Kurbelzapfen F beschrieben wird. Durch die rotirende Kurbel ΦF wird die Schleife *4* und der durch die Schubstange *5* mit ihr verbundene Schlitten *6* in schwingende Bewegung versetzt; dem gemäss wollen wir dieses Getriebe ein schwingendes schleifkurbeliges Schubgetriebe nennen. Die Weggrenzen des Schlittens werden durch die äussersten Lagen der Schleife bestimmt, welche eintreten, wenn die Mittellinie ΛA der Schleife mit den von Λ an den Kreis φ gelegten Tangenten ΛF_0, ΛF_τ zusammenfällt. Der senkrecht zur Geraden $\Lambda\Phi$ bewegte Schlitten *6* trägt den Hobelmeissel und wird im Arbeitsgange, während der gleichförmig rotirende Kurbelpunkt F den längeren Bogen $F_0F_IF_\tau$ durchläuft, langsam bewegt, aber rasch zurückgeführt, während der Kurbelzapfen F den kürzeren Bogen $F_\tau F_{II}F_0$ durchschreitet.

Um unter der Voraussetzung, dass der Kurbelpunkt F mit der constanten lothrechten Geschwindigkeit $F\Phi$ rotirt, das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ für die Bewegung des Schlittenpunktes B zu erhalten, müssen wir, weil die Axenpunkte Λ, Φ im festen Gliede *1* auf einer zur Schubrichtung senkrechten Geraden liegen, die vorhin ausgeführte zweite Construction der Geschwindigkeit des Punktes B anwenden. Wir ziehen also durch den Anschlusspunkt A zur Kurbel $F\Phi$ eine Parallele, die $\Lambda\Phi$ im Punkte Ξ schneidet, dann von Ξ auf ΛF eine Senkrechte und durch den Fusspunkt A_v zur Schubstange AB die Parallele $A_v B_v$, welche auf der zur Schubrichtung senkrechten Geraden BB_v die lothrechte Geschwindigkeit BB_v im Arbeitsgange bestimmt. In gleicher Weise ergiebt sich entsprechend der Kurbellage $\Phi F'$ für dieselbe Schleifenlage die lothrechte Geschwindigkeit BB'_v des Punktes B im Rückgange oder Leergange. Wenn die Schleife ΛA sich in der Nähe der Mittellage oder in dieser selbst befindet, ist diese Construction nicht verwendbar. Wir erhalten aber eine allgemein gültige, jedoch nicht so einfache Construction, indem wir den Fusspunkt E_v des von Φ auf ΛA gefällten Lothes bestimmen, dann die Strecke FE_v, welche die lothrechte Geschwindigkeit des mit F coincidirenden Schleifenpunktes repräsentirt, senkrecht zu ΛA nach FE_v drehen, ferner die Gerade ΛE_v ziehen, die auf der zu ΛA senkrechten Geraden AA_v die Geschwindigkeit AA_v des Punktes A abschneidet, hierauf in der Geraden $A\Lambda$ die Strecke $AA_v = AA_v$ machen und $A_v B_v$ parallel AB ziehen.

Aus der Gestalt des gezeichneten Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ ersehen wir, dass der Punkt B sich während des Arbeitsganges langsam angenähert gleichförmig bewegt und während des Leerganges rasch ungleichförmig zurückgeht; aber wir erkennen auch im Vergleich mit dem für das doppelkurbelige Schubgetriebe in Fig. **474** dargestellten Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$, dass durch dieses doppelkurbelige Schubgetriebe, welches auch praktisch leichter ausführbar ist, eine viel grössere Gleichförmigkeit im Arbeitsgange erreicht wird.

188. **Supportmechanismen für Abdrehen der Riemenscheiben mit balliger Lauffläche.** Bevor wir die speciellen Watt'schen Mechanismen erläutern, die zum Abdrehen der Riemenscheiben mit balliger Lauffläche dienen, wollen wir zuerst den einfachsten Mechanismus, durch welchen dies bewirkt wird, betrachten. Derselbe ist ein Kreuzkurbelgetriebe und in theoretisch-schematischer Gestalt in Fig. **477**, Taf. XXXII, dargestellt. In dem geradlinigen Schlitze des festen Gliedes *1* gleitet ein kreuzförmiger Schieber, der das Glied *2* repräsentirt; in demselben verschiebt sich das sticheltragende Glied *3* senkrecht zur Richtung jenes Schlitzes, und ferner ist das Glied *4*, welches bei dem Kreuzkurbelgetriebe die Kurbel ΦF vertritt, in F mit *3*, in Φ mit *1* drehbar verbunden.

Wird nun der Schieber *2* in dem Schlitze verschoben, so vollzieht das Glied *3* im Bezug auf das feste Glied *1* eine kreisförmige Parallelbewegung, und alle Punkte des Gliedes *3* beschreiben congruente Kreise, die gleich dem Kreise φ sind, den der Punkt F beschreibt. Die Spitze s des am Gliede *3* befestigten Stichels erzeugt demnach den Kreisbogen σ, der dem Kreisbogen φ congruent ist. Um dieses Kreuzkurbelgetriebe den Anforderungen der Praxis entsprechend zu gestalten, ist in Fig. **478** das mit der Drehbank verbundene Glied *1* fest, und längs dessen Schlitz wird das Glied *2*, welches die Supportplatte vertritt, vermittelst einer Schraube S geführt. Auf dem Gliede *2* ist der Querschieber *3* zwischen Prismen senkrecht zur Schraubenaxe S verschiebbar, und ein an demselben befestigter Zapfen F gleitet in dem bogenförmigen, zum Punkte Φ centrischen Schlitze der Platte *1*. Dadurch ist die gestrichelt gezeichnete, vorhin erwähnte Kurbel ΦF, die jenes Glied *4* vertritt, weggemindert, und es besteht der Mechanismus ausser der Schraube S aus drei Gliedern *1*, *2*, *3*, die durch zwei Richtpaarungen und eine höhere Paarung in geschlossener Folge verbunden sind. Auf dem Querschieber *3* ist die sticheltragende Platte q durch die im Gliede *3* gelagerte Schraube Σ verstellbar und kann nach jeder Einstellung als einstückig mit dem Querschieber *3* vereint betrachtet werden. Durch die Drehung der Schraube S wird das Glied *2* längs des Schlitzes in dem festen Gliede *1* verschoben; gleichzeitig gleitet dann das sticheltragende Glied *3* quer über das Glied *2*, und die Stichelspitze s erzeugt den Kreisbogen σ, der dem vom Punkte F beschriebenen Kreisbogen φ congruent ist. Wird statt einer kreisförmigen Nuthe eine beliebig gekrümmte Nuthe genommen, dann beschreibt die Stichelspitze s eine Curve, welche der Mittellinie dieser Nuthe congruent ist; und die Vorrichtung kann demnach zum Abdrehen einer beliebigen Rotationsfläche dienen. Da aber bei der Abdrehung verschiedener Scheiben auch der Bogen σ mehr oder weniger gekrümmt sein soll, so muss die Nuthenplatte N von der festen Supportplatte *1* ablösbar sein und ausgewechselt werden. Um diese Auswechselung, welche sich als ein Nachtheil dieses Mechanismus geltend macht, zu vermeiden, hat man zusammengesetzte Mechanismen angewendet, die wir im Folgenden betrachten wollen.

Bei drei in der Praxis angewendeten speciellen Watt'schen Mechanismen wird die Stichelspitze so geführt, dass sie ein Curvenstück beschreibt, welches die Meridiancurve der balligen Lauffläche bildet; und die Einrichtung ist derart, dass durch die Längenveränderung eines Gliedes auch die Krümmung des Curvenstückes verändert wird[1]). Der für Leitspindelbetrieb eingerichtete, von C. L. Lasch ausgeführte Support ist in Fig. **479** schematisch dargestellt. Das feste mit der Drehbank verbundene Glied *3* besitzt einen Hohlcylinder *H*, in dem sich eine Schraubenspindel *S* unverschiebbar dreht. Das Glied *4*, welches die Mutter der Schraube *S* trägt, vertritt die Supportplatte, auf der sich das Glied *5* als Querschieber und Stichelhalter senkrecht zur Schraubenaxe verschiebt. Dieses Glied *5* ist mit einem Zapfen *56* in den Bogenschlitz des Gliedes *1* gehängt, welches einerseits im Punkte *14* drehbar an *4* geschlossen und anderseits durch die Stange *2* in den Punkten *12* und *23* gelenkig mit dem festen Gliede *3* verbunden ist. Durch die Drehung der Schraube *S* beschreibt die Stichelspitze *s* im festen System *3* eine Curve σ, nach welcher die ballige Lauffläche der betreffenden Riemenscheibe abgedreht wird. Um für das zur Geltung kommende Curvenstück verschiedene Krümmungen zu erhalten, ist der Zapfen *12* in dem Gliede *1* verstellbar; und je näher derselbe nach der Axe *14* hin auf der Geraden *1* festgestellt wird, desto stärker ist das betreffende Stück der Curve σ gekrümmt.

Wenn wir nun von der Drehung der Schraube absehen und das Glied *4* längs der Schraubenspindel im Gliede *3* als verschiebbar annehmen, so dass die Glieder *3*, *4* gleichsam durch eine Richtpaarung verbunden sind; wenn wir ferner uns die Führung in dem Bogenschlitze, dessen Mittelpunkt *16* ist, durch die punktirte Stange *6* bewirkt denken, welche einerseits im Punkte *16* an das Glied *1* und anderseits im Punkte *56* an das Glied *5* drehbar angeschlossen ist: so ist dieser sechsgliederige Mechanismus ein specieller Watt'scher Mechanismus mit fünf Drehpaarungen und zwei Richtpaarungen, bei dem der Pol *45* in der Richtung der Schraubenaxe und der Pol *34* senkrecht zu derselben im Unendlichen liegen. Ausser diesen beiden Polen sind durch den Mechanismus noch die Pole *12*, *14*, *16*, *23*, *56* unmittelbar gegeben. Die Bestimmung der übrigen Pole kann man leicht nach der eingeführten Bezeichnungsweise aus der Fig. **479** ablesen. Da wir das Glied *6*, welches durch den Bogenschlitz des Gliedes *1* in dem Apparat ersetzt wird, als weggemindert betrachten können, so haben die Pole *16*, *26*, *36*, *46* nur geometrisch-constructive Bedeutung.

---

[1]) Siehe E. Hartig, „Ueber Supportführungen zum Abdrehen der Riemenscheiben mit balliger Lauffläche". *Civilingenieur.* 1871. B. 17. S. 331.

Von besonderem Interesse ist für uns der Pol *35*, weil durch ihn die Normale sn der Curve σ bestimmt wird, welche die Stichelspitze s des Gliedes *5* in dem festen Gliede *3* beschreibt. Um diesen Pol *35* zu erhalten, ziehen wir durch den Pol *14* zur Schraubenaxe S die Senkrechte $14\text{-}34^{\infty}$, welche die Gerade *12-23* im Pol *13* schneidet, und ferner ziehen wir durch den Pol *14* zur Schraubenaxe die Parallele $14\text{-}45^{\infty}$, die auf der Geraden *16-56* den Pol *15* bestimmt. Denn nach unserer Bezeichnungsweise ergiebt sich:

$$\begin{matrix}14\text{-}34^{\infty}\\12\text{-}23\end{matrix} > 13, \quad \begin{matrix}14\text{-}45^{\infty}\\16\text{-}56\end{matrix} > 15, \quad \begin{matrix}13\ \text{-}15\\34^{\infty}\text{-}45^{\infty}\end{matrix} > 35^{\infty}.$$

Der Pol 35^{∞} liegt also stets im Unendlichen auf der Geraden *13-15*, die sich durch einfache Construction ergiebt, und demnach ist die Normale sn der Curve σ dieser Geraden parallel. Da das sticheltragende Glied *5* im festen Gliede *3* eine Parallelbewegung vollzieht, so folgt auch hieraus, dass der Pol 35^{∞} stets im Unendlichen liegt, und ferner, dass alle Punkte des Gliedes *5* im festen Gliede *3* congruente Curven beschreiben.

Bei dem Watt'schen Mechanismus gehen durch jeden Pol vier Gerade, die drei Pole tragen. Im betrachteten speciellen Falle gehen demnach ausser der unendlich fernen Geraden $34^{\infty}\text{-}45^{\infty}$ und der Geraden *13-15* noch die beiden Geraden *23-25*, *36-56* nach dem Pol 35^{∞}. Diese beiden Geraden müssen also der Geraden *13-15* parallel sein und können dem gemäss als Controle der Construction dienen. Die Bestimmung der Geraden *23-25* folgt nach der Bezeichnungsweise

$$\begin{matrix}12\text{-}14\\23\text{-}34^{\infty}\end{matrix} > 24, \quad \begin{matrix}24\text{-}45^{\infty}\\12\text{-}15\end{matrix} > 25,$$

indem wir den Pol *23* mit dem erhaltenen Pol *25* verbinden. Die Gerade *36-56* ergiebt sich durch

$$\begin{matrix}14\ \text{-}16\\45^{\infty}\text{-}56\end{matrix} > 46, \quad \begin{matrix}34^{\infty}\text{-}46\\13\ \text{-}16\end{matrix} > 36,$$

indem wir *36* mit *56* verbinden. Bei diesen Bestimmungen zeigt sich noch, dass die drei Geraden *23-36*, *12-16*, *25-56* sich in einem Punkte *26* schneiden.

Durch die Drehung der Schraube S wirkt die eingeleitete Kraft zunächst zwischen den Gliedern *3* und *4*. Wenn nun die Geschwindigkeit v der Supportplatte *4* in dem festen Gliede *3* gegeben ist, so ist auch die Geschwindigkeit, mit welcher die Stichelspitze s in dem Gliede *3* bewegt wird, leicht zu construiren; denn diese Geschwindigkeit hat die Richtung der zur Normalen *sn* senkrechten Curventangente, und jene zur Schraubenaxe parallele Geschwindigkeit *v* ist eine ihrer beiden senkrechten Componenten.

Der für Handbetrieb eingerichtete, von C. L. Lasch ausgeführte Support ist in Fig. **480** schematisch gezeichnet. Auf dem festen Gliede *3*, welches hier die Supportplatte vertritt, ist das Glied *4* verschiebbar. Dieses Glied *4* trägt einen zu dieser Schiebrichtung senkrechten Hohlcylinder *H*, in dem sich die Schraubenspindel *S* unverschiebbar dreht. Das Glied *5*, welches den Stichel *s* trägt, enthält die Mutter der Schraube *S* und einen geradlinigen, zur Schraubenaxe senkrechten Schlitz, in dem sich der Schlitten *6* bewegt. Dieser Schlitten ist in der Mitte *16* drehbar mit dem Gliede *1* verbunden, das anderseits drehbar im Punkte *14* an das Glied *4* gehängt ist. Das Glied *1* enthält einen über dem im festen Gliede *3* befindlichen Zapfen *23* gleitenden Bogenschlitz, dessen Mittelpunkt *12* ist. Durch die Drehung der Schraube *S* beschreibt die Spitze *s* des Stichels im festen Gliede *3* eine Curve σ; und die Krümmung des betreffenden Stückes dieser Curve wird dadurch verändert, dass man den verstellbaren Zapfen *16* im Gliede *1* auf der Geraden *1* an verschiedenen Stellen befestigt.

Wenn wir nun von der Drehung der Schraube *S* absehen und das Glied *5* längs der Schraubenspindel im Gliede *4* als verschiebbar annehmen, so dass die Glieder *4*, *5* gleichsam durch eine Richtpaarung verbunden sind; wenn wir ferner uns die Führung in dem Bogenschlitze durch die punktirte Stange *2* bewirkt denken, welche sich einerseits um den festen Zapfen *23* dreht und anderseits im Bogenmittelpunkte *12* mit dem Gliede *1* drehbar verbunden ist: so ist dieser sechsgliederige Mechanismus ein specieller Watt'scher Mechanismus mit vier Drehpaarungen und drei Richtpaarungen, bei denen die drei Pole 34^∞, 56^∞, 45^∞ im Unendlichen liegen, und zwar die beiden ersten in der Richtung der Schraubenaxe und der dritte in der hierauf senkrechten Richtung. Ausser diesen drei Polen sind die vier Pole *12*, *14*, *16*, *23* durch den Mechanismus unmittelbar gegeben, und somit können die fehlenden Pole in der bekannten Weise leicht bestimmt werden. Hierbei ergiebt sich, dass ausser jenen drei gegebenen unendlich fernen Polen auch die Pole 35^∞, 36^∞, 46^∞ im Unendlichen liegen. Der unendlich ferne Pol 35^∞ ergiebt sich, indem wir durch den Pol *14* zur Schraubenaxe *S* die Parallele $14\text{-}34^\infty$ und die Senkrechte $14\text{-}45^\infty$ ziehen, welche resp. auf den Geraden *12-23*, $16\text{-}56^\infty$ die Pole *13*, *15* bestimmen, auf deren Verbindungsgeraden der unendlich ferne

Pol 35^∞ liegt. Das sticheltragende Glied *5* vollzieht eine Parallelbewegung in dem festen Gliede *3*, und demnach beschreiben alle Punkte des Gliedes *5* congruente Curven in dem Gliede *3*. Die Normale sn an der Curve σ ist der Geraden *13-15* parallel; und ferner ist, wie bei dem oben betrachteten Support, noch durch die gezeichnete Gerade *23-25*, welche auch zur Normalen sn parallel ist, eine Controle gegeben. Durch die Drehung der Schraube S wirkt die eingeleitete Kraft zunächst zwischen den Gliedern *5*, *4*, und durch die Geschwindigkeit, mit welcher sich das Glied *5* gegen das Glied *4* bewegt, wird ebenso wie vorhin die Geschwindigkeit der Stichelspitze s oder jedes anderen Punktes des Gliedes *5* im festen Gliede *3* leicht bestimmt.

In Fig. **481** ist der Support von H. Krause schematisch dargestellt. Das feste Glied *3* enthält den Hohlcylinder H, in dem sich die Schraubenspindel S unverschiebbar dreht. Auf dem Gliede *4*, welches die Mutter der Schraube S trägt und die Supportplatte vertritt, ist das sticheltragende Glied *5* senkrecht zur Schraubenaxe verschiebbar und mit einem Langloche, dessen Längsrichtung der Schraubenaxe parallel ist, auf den Zapfen *16* der Stange *1* gehängt. Das stangenförmige Glied *1* ist einerseits im Punkte *14* mit der Supportplatte *4* und anderseits im Punkte *12* mit dem Arme *2* gelenkig verbunden, der sich um die feste Axe *23* des Gliedes *3* dreht. Durch die Drehung der Schraube S beschreibt die Stichelspitze s im festen Gliede *3* eine Curve σ. Die Krümmung des betreffenden Stückes dieser Curve wird dadurch verändert, dass man den verstellbaren Zapfen *12* auf dem Arme *2* in verschiedenen Stellen befestigt.

Wenn wir die Drehung der Schraube unbeachtet lassen und das Glied *4* auf der Schraubenspindel verschiebbar betrachten, so dass die Glieder *3*, *4* gleichsam durch eine Richtpaarung verbunden sind; wenn wir ferner uns in das Langloch oder den Schlitz des Gliedes *5* einen um den Zapfen *16* drehbaren Schlitten *6* gelegt denken, so erhalten wir einen speciellen Watt'schen Mechanismus mit vier Drehpaarungen und drei Richtpaarungen. Bei diesem Mechanismus befinden sich, ebenso wie bei dem vorigen, die drei Pole 45^∞, 34^∞, 56^∞ im Unendlichen, und zwar der erste in der Richtung der Schraubenaxe, die beiden letzteren in der hierauf senkrechten Richtung. Ausser diesen drei unendlich fernen Polen sind durch den Mechanismus noch die Pole *12*, *14*, *16*, *23* unmittelbar gegeben, und die fehlenden Pole, von denen auch die drei 35^∞, 36^∞, 46^∞ im Unendlichen liegen, können leicht in bekannter Weise bestimmt werden. Behufs der Construction des Pols 35^∞ ziehen wir durch den Pol *14* zur Schraubenaxe die Senkrechte $14\text{-}34^\infty$ und die Parallele $14\text{-}45^\infty$, welche resp. auf den Geraden *12-23*, $16\text{-}56^\infty$ die Pole *13*, *15* bestimmen, deren Verbindungsgerade den unendlich fernen Pol 35^∞ enthält. Die Normale sn der von der Stichelspitze s im festen Gliede *3* beschriebenen Curve σ ist der Geraden *13-15* parallel. Eine Controle ist noch durch die zu sn parallele, gezeichnete Gerade *23-25* gegeben. Die Kraft, welche durch die Drehung der Schraube S in den Apparat geleitet wird, wirkt hier zunächst zwischen den Gliedern *3* und *4*. Nach dieser Darlegung sind also die drei betrachteten Supportführungen kinematisch gleichartig, und die zweite unterscheidet sich von der ersten und dritten in mechanischer Hinsicht nur durch den Ort der Einleitung der bewegenden Kraft.

189. **Rogers'scher Steuerrudermechanismus.** Der in Fig. **482** schematisch gezeichnete Mechanismus repräsentirt das von Rogers ausgeführte, im Jahre 1862 zu London ausgestellte Steuerrudergetriebe[1]), wenn das Glied *3* als fest mit dem Schiffe vereint betrachtet wird. Das steuertragende Glied *4*, welches sich um die feste verticale Axe *34* dreht, ist einerseits im Punkte *14* drehbar an den Hohlcylinder H geschlossen, in welchem sich die Schraubenspindel S des Gliedes *1* unverschiebbar dreht; und die Schraubenmutter *6* ist im Punkte *56* mit dem Gliede *5* gelenkig verbunden, welches anderseits an das Glied *4* drehbar angeschlossen ist. Ferner dreht sich die Schraubenspindel S verschiebbar in dem Hohlcylinder *2*, der um die feste Axe *23* im Gliede *3* drehbar ist.

Lassen wir die Drehung des Schraubengliedes *1*, durch welches die Mutter *6* in der Richtung der Schraubenaxe bewegt wird, unbeachtet, und denken wir uns das Glied *6* auf *1* verschiebbar, so dass die beiden Glieder *6*, *1* gleichsam durch eine Richtpaarung verbunden sind, dann erhalten wir einen speciellen Watt'schen Mechanismus mit fünf Drehpaarungen und zwei Richtpaarungen, bei dem die beiden Pole 12^∞, 16^∞ und ausserdem der Pol 26^∞ in der zur Schraubenaxe senkrechten Richtung im Unendlichen liegen. Durch diesen Mechanismus sind also die Pole 12^∞, 16^∞, 26^∞, *14*, *34*, *45*, *23*, *56* unmittelbar gegeben, und es können nach der eingeführten Bezeichnungsweise alle fehlenden Pole leicht construirt werden.

---

[1]) *Amtlicher Bericht über die Ausstellung zu London im Jahre 1862.* Berlin 1863. Heft IV. S. 337.

Um zu erkennen, in welchem Verhältnisse die Drehgeschwindigkeit der Schraube S zur Drehgeschwindigkeit des Steuers R, oder die zwischen den Gliedern *1*, *6* wirkende Kraft zu der Kraft steht, welche auf einen Punkt des Gliedes *4* tangential wirkt, müssen wir den Pol *36* bestimmen. Zu diesem Zwecke ziehen wir zur Schraubenaxe die Senkrechten $23\text{-}12^{\infty}$, $14\text{-}16^{\infty}$, ferner durch den Schnittpunkt *46* der Geraden $14\text{-}16^{\infty}$, *45-56* und den festen Punkt *34* die Gerade *46-34*, welche die Senkrechte $23\text{-}12^{\infty}$ in dem Pol *36* trifft. Beachten wir, dass diese Senkrechte auch den unendlich fernen Pol 16^{∞} enthält und von der Geraden *14-45* im Pol *13* geschnitten wird, so können wir jenes Verhältniss leicht ermitteln. Wir bezeichnen den Axenpunkt *14* mit A und nehmen an, es sei durch die Drehung der Schraube die lothrechte Geschwindigkeit von A gegen die Schraubenmutter *6*, d. h. die lothrechte Geschwindigkeit des Gliedes *1* im Bezug auf das Glied *6* gleich der Strecke $A A_{\mathfrak{v}}^{16}$ gegeben; dann wird, wenn wir durch den Punkt $A_{\mathfrak{v}}^{16}$ zu A-*36* die Parallele $A_{\mathfrak{v}}^{16} A_{\mathfrak{v}}^{13}$ ziehen, welche die Gerade A - *13* in $A_{\mathfrak{v}}^{13}$ schneidet, nach dem Satze in Art. 25 durch die Strecke $A A_{\mathfrak{v}}^{13}$ die lothrechte Geschwindigkeit repräsentirt, die der auch zum steuertragenden Gliede gehörende Gelenkpunkt A im festen Gliede *3*, also im Bezug auf das Schiff, besitzt. Demnach verhält sich die zwischen den Gliedern *6* und *1* wirkende Kraft zu der im Punkte A auf das steuertragende Glied *4* tangential wirkende Kraft, ohne Beachtung der Reibung, umgekehrt wie die lothrechten Geschwindigkeiten $A A_{\mathfrak{v}}^{16}$ und $A A_{\mathfrak{v}}^{13}$. Nehmen wir an, dass die Drehung der Schraube gleichförmig, also die Geschwindigkeit vom Punkte A im Gliede *6* constant sei, und bestimmen wir in der angegebenen einfachen Weise für verschiedene Stellungen die entsprechenden Punkte $A_{\mathfrak{v}}^{13}$ auf der mit *4* bezeichneten Geraden, welche sich um die feste Axe *34* dreht, so bilden diese Punkte eine Curve, und durch dieselbe erhalten wir ein Diagramm für die Drehgeschwindigkeit des durch die Schraube S gedrehten Steuers R. Wir haben hier nur einige specielle Watt'sche Mechanismen betrachtet, um an diesen zu zeigen, dass die oft so mannigfaltig gestalteten Mechanismen sich als besondere Fälle einem allgemeinen Mechanismus unterordnen.

Der Stephenson'sche Mechanismus und specielle Arten desselben.

190. **Der Stephenson'sche Mechanismus im Allgemeinen.** In Fig. **483** ist der Stephenson'sche Mechanismus dargestellt, dessen sechs Glieder mit *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6* bezeichnet sind. Derselbe besteht aus dem Gelenkviereck *1234*, an dessen gegenüber liegenden Gliedern *2*, *4* resp. die Glieder *5*, *6* eines Gelenkes drehbar angeschlossen sind. Durch die sieben Drehpaarungen oder Gelenke *12*, *23*, *34*, *14*, *25*, *56*, *46* sind sieben Pole unmittelbar gegeben, und die Schnittpunkte der gegenüber liegenden Seiten des Gelenkvierecks liefern die Pole *13*, *24*. Wir erhalten dann leicht die übrigen sechs der fünfzehn Pole dieses Mechanismus nach der eingeführten Bezeichnungsweise:

$$\begin{matrix}24\text{-}25\\46\text{-}56\end{matrix} > 45, \quad \begin{matrix}12\text{-}25\\14\text{-}45\end{matrix} > 15, \quad \begin{matrix}23\text{-}25\\34\text{-}45\end{matrix} > 35,$$

$$\begin{matrix}24\text{-}46\\25\text{-}56\end{matrix} > 26, \quad \begin{matrix}14\text{-}46\\12\text{-}26\end{matrix} > 16, \quad \begin{matrix}34\text{-}46\\23\text{-}26\end{matrix} > 36.$$

Da bei sechs Gliedern oder Systemen durch jeden der fünfzehn Pole vier Gerade gehen, welche je drei Pole tragen, so müssen je drei der in einer Zeile stehenden folgenden Pole

13	*15*	*35*
13	*16*	*36*
56	*15*	*16*
56	*35*	*36*

auf einer Geraden liegen. Diese vier Geraden, welche als Controle für diese Bestimmung der Pole dienen können, sind durch Punktirung gekennzeichnet. Jeder der beiden Pole *26*, *45* erfordert ausser den zum Mechanismus gehörenden Geraden zu seiner Bestimmung nur eine neue Constructionsgerade, jeder der anderen vier Pole *15*, *35*, *16*, *36* erfordert aber zwei neue Constructionsgerade[1]).

Betrachten wir das Glied *5* als fest, dann erhalten wir den Haupttheil des Mechanismus der bewährten Schiebersteuerung von

---

[1]) Die ausgeführte Construction des Pols *45* wurde zuerst, aber in umständlicher Weise, von Phillips abgeleitet in den *Annales des mines.* 1853. Sér. V. T. 3. p. 1. Die obige Ableitung der Construction dieses Pols wurde von Nicolaïdès in seiner *Théorie du mouvement d'une figure plane dans son plan.* 1er mémoire. 1863. p. 27 angedeutet.

Robert Stephenson[1]), bei welcher das Glied *5* die Locomotive, das Glied *2* die Triebwelle mit den beiden Excentern und das Glied *4* die Coulisse vertritt. Hiernach haben wir diesen mannigfach angewandten Mechanismus benannt. Um diese Schiebersteuerung im Schema zu vervollständigen, müssen wir, wie Fig. **484** zeigt, das Glied *8*, welches den Schieber vertritt und in dem festen Gliede *5* verschiebbar ist, durch eine Schubstange *7* mit dem Gliede *4* gelenkig verbinden. Nehmen wir bei diesem Getriebe beispielsweise an, dass die Endpunkte der lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte des um die Axe *25* in *5* rotirenden Gliedes *2* mit dem Punkte *25* coincidiren, so ergiebt sich die lothrechte Geschwindigkeit des Schiebergliedes *8* im Bezug auf *5* durch die Bestimmung des Pols *28*. Zu diesem Zwecke ziehen wir die Gerade *24-25*, welche die Gerade *46-56* im Pol *45* schneidet, ferner senkrecht zur Schubrichtung des Gliedes *8* die Gerade $45\text{-}58^{\infty}$, welche die Gerade *47-78* in dem Pol *48* trifft; dann bestimmt die Gerade *24-48* auf der unveränderlichen zu jener Schubrichtung senkrechten Geraden $25\text{-}58^{\infty}$ den Pol *28*, und die Strecke $\overline{28\text{-}25}$ repräsentirt die lothrechte Geschwindigkeit des Gliedes *8* im Gliede *5*. Bei gleichförmiger Rotation des Gliedes *2* erhalten wir demnach einen Punkt A_v des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms für einen Punkt A des Gliedes *8*, wenn wir senkrecht zur Geraden *8* die Strecke $AA_v = \overline{28\text{-}25}$ machen.

191. **Die Quintenz'sche Brückenwaage.** Die in Fig. **485** schematisch gezeichnete Quintenz'sche Brückenwaage[2]) ist ein Stephenson'scher Mechanismus. Bei demselben werden durch die Glieder *1*, *2*, *3*, *4* resp. das feste Gestell, der Waagebalken, die eine Hängeschiene und der Hebel vertreten; ferner bildet das Glied *5* die andere Hängeschiene und das Glied *6* die Brücke. Soll nun bei einer unendlich kleinen Bewegung aus der Gleichgewichtslage die Brücke *6* eine unendlich kleine verticale Parallelbewegung vollziehen, so muss der Pol 16^{∞} der Brücke *6* gegen das feste Gestell *1* in horizontaler Richtung im Unendlichen liegen. Demnach müssen die Geraden *14-46*, *12-26*, welche sich in dem unendlich fernen Pol 16^{∞} schneiden, horizontal sein. Behufs der Bestimmung des Pols *26* auf der letzteren Geraden

[1]) *Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens.* 1846. B. 1. S. 11; und Heusinger von Waldegg, *Locomotiv-Maschine.* 1858. S. XXIX.

[2]) Die erste Mittheilung über diese Waage giebt Francoeur im *Bulletin de la Société d'encouragement.* 1823. Année. XXII. p. 317. Ferner *Polytechnisches Journal.* 1824. B. 14. S. 3.

ziehen wir die feste Gerade *12-14*, die *23-34* im Pol *24* schneidet, und ferner die Gerade *46-24*, welche die Gerade *5* oder *56-25* in dem auf *12-16*$^{\infty}$ liegenden Pol *26* trifft. Damit also die Brücke *6* jene unendlich kleine verticale Parallelbewegung vollzieht, ist erforderlich, dass die Geraden *14-46*, *12-26* horizontal sind, die drei Geraden *14-12*, *34-23*, *46-26* sich in einem Punkte *24* und die drei Geraden *5*, *46-24*, *12-16*$^{\infty}$ sich in einem Punkte *26* schneiden. In der Praxis lässt man daher den Aufhängepunkt *25* mit dem Pol *26* zusammenfallen. Demnach hat der mit *26* coincidirende Punkt *25* des Waagebalkens *2* und der mit *26* coincidirende Punkt der Brücke *6* dieselbe verticale Bewegung; folglich ist die Wirkung einer an beliebige Stelle auf die Brücke gelegte Last Q, welche durch das Gewicht P im Gleichgewicht gehalten wird, dieselbe, als wenn diese Last direct in *25* an den Waagebalken gehängt ist. Ferner wird bei der praktischen Ausführung aus statischen Gründen der Punkt *23* in die Gerade *12-25*, und der Punkt *34* in die Gerade *14-46* gelegt; dem gemäss muss bei dieser besonderen Anordnung die Punktgruppe *12*, *26*, *23* der Punktgruppe *14*, *46*, *34* ähnlich sein, und dies ist die bekannte Grundbedingung der Quintenzschen Brückenwaage. Da der Pol *13*$^{\infty}$ als Schnittpunkt der horizontalen Geraden *12-23*, *34-14* auch in horizontaler Richtung im Unendlichen liegt und ebenso der Pol *15*$^{\infty}$ als Schnittpunkt der horizontalen Geraden *12-25*, *56-16*$^{\infty}$, so vollziehen bei einer unendlich kleinen Bewegung aus der Gleichgewichtslage auch die beiden Hängeschienen *3*, *5* wie die Brücke *6* eine unendlich kleine verticale Bewegung. Durch statische Betrachtungen erkennt man leicht, dass zur Erlangung eines stabilen Gleichgewichts die Hängeschienen *3*, *5* an den Waagebalken schräg nach der Brückenseite hin gezogen aufgehängt werden müssen[1]). Die meisten Brückenwaagen sind verschiedenartige Anordnungen eines Stephensonschen Mechanismus; und eine ausführliche kinematische Untersuchung derselben würde die geometrische Einsicht in die bisherige analytische Behandlung dieser Waagen, welche von Schönemann stammt, wesentlich fördern[2]).

192. **Das Morgan'sche Ruderrad.** Bei den Ruderrädern an Schiffen ist man bestrebt, den Schaufeln eine derartige Bewegung

---

[1]) Vergl. Rittershaus, „Zur Theorie der Quintenz-Waage". *Civilingenieur.* 1875. B. 21. S. 45. E. Brauer, *Konstruktion der Waage.* 1880. S. 60.

[2]) Schönemann, „Von der Empfindlichkeit der Brückenwaagen". *Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe.* 1853. B. V. 2. Abth. S. 157.

in dem Wasser zu ertheilen, dass die Kraftwirkung für die Fortbewegung des Schiffes möglichst ausgenutzt wird; und die Erfahrung hat seit fünfzig Jahren bestätigt, dass durch das von Morgan ausgeführte Ruderrad mit veränderlicher Schaufelstellung dieser Zweck eher als durch andere Ruderräder erreicht wird[1]). Das in Fig. **486** schematisch dargestellte Morgan'sche Ruderrad besteht aus einem Doppelkurbelgetriebe $\Phi F L \Lambda$, an dessen Kurbeln ΦF, ΛL mehrere schaufelführende Gelenke ABC, $A_1 B_1 C_1$ .. drehbar angeschlossen sind. Betrachten wir zunächst nur das Doppelkurbelgetriebe $\Phi F L \Lambda$, dessen Glieder mit *1*, *2*, *3*, *4* bezeichnet sind, und das eine aus den Gliedern *5*, *6* bestehende, an *2*, *4* angeschlossene Gelenk ABC, so ist dieses Getriebe ein Stephenson'scher Mechanismus, bei welchem das Glied *1* mit den Axen Φ, Λ das Schiff vertritt. Der treibende Radarm ΦF ist durch das schaufeltragende Glied *3* an den Arm *4* gekuppelt, der mit dem Ring R ein Stück bildet; und dieser Ring rotirt auf einem mit Λ concentrischen festen Ring, der die Axe Φ excentrisch umfasst. Um zweckmässige Schaufelstellungen zu erhalten, müssen wir das Doppelkurbelgetriebe so construiren, dass die an der Koppel FL befestigte Schaufel im Wasser in der tiefsten Stellung vertical steht und beim Eintritt und Austritt parallel zu der Richtung ist, in welcher die Schaufelaxe F sich im Bezug auf das Wasser bewegt.

Repräsentirt $F' F_v^I$ an der Eintrittsstelle F' der Schaufel ins Wasser die Geschwindigkeit des Schiffes im Bezug auf das Wasser, welches in Ruhe oder in Bewegung sein kann, und ist ferner $F' F_v^{II}$ die Geschwindigkeit, mit welcher die Schaufelaxe F' im Bezug auf das Schiff rotirt, so liefert die Diagonale $F' F_v'$ des hierdurch bestimmten Parallelogramms die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit, mit welcher die Schaufelaxe F' sich im Wasser selbst bewegt. Ebenso liefert, wenn $F'' F_v^1$ an der Austrittsstelle F'' der Schaufel die Geschwindigkeit des Schiffes im Bezug auf das Wasser und $F'' F_v^2$ die Geschwindigkeit der Schaufelaxe F'', die gleich $F' F_v^{II}$ ist, im Bezug auf das Schiff darstellt, auch die Diagonale $F'' F_v''$ des hierdurch bestimmten Parallelogramms die Grösse

[1]) Der Mechanismus dieses Ruderrades stammt von E. Galloway. *Specification* No. 5805 vom 2. Juli 1829. Dieses Patent wurde von W. Morgan übernommen, der den Mechanismus durch zweckmässige Anordnung verbesserte. *Mechanics' magazine*. 1835. Vol. XXII. p. 273. In gleicher Gestalt, welche Galloway diesem Mechanismus gegeben hat, ist derselbe auch später von King William angegeben. Siehe die aus dem *Register of Arts*. P. XXIX. p. 140 entnommene Beschreibung im *Polytechn. Journal*. 1830. B. 35. S. 348.

und Richtung der Geschwindigkeit, mit welcher die Schaufelaxe F'' sich im Wasser selbst bewegt. Wir zeichnen nun in der tiefsten Lage F an dem Arme ΦF die Schaufel in verticaler Stellung nebst der auf ihr senkrechten Koppel $F3$, wir denken uns ferner den Arm ΦF nach $\Phi F'$ sowie nach $\Phi F''$ gedreht und die entsprechenden Lagen der Schaufel beziehlich zu $F'F'_v$, $F''F''_v$ parallel gestellt, oder wir errichten auf $F'F'_v$ die Senkrechte $F'3'$, auf $F''F''_v$ die Senkrechte $F''3''$ und machen auf diesen beiden Senkrechten die Strecken $F'L'$, $F''L''$ gleich der von zweckmässiger Länge gewählten Koppel FL. Hiernach bestimmt der Mittelpunkt des durch L', L, L'' gehenden Kreises die Axe Λ, und der Radius die Länge der zweiten Kurbel ΛL des Doppelkurbelgetriebes $\Phi F L \Lambda$, welches die an der Koppel befestigte Schaufel in die drei gewünschten Stellungen führt. Durch diese Anordnung wird die Schaufel möglichst stossfrei in das Wasser getaucht, wirkt in der tiefsten Lage mit voller Kraft und verlässt das Wasser mit möglichster Ausnutzung der wirksamen Kraft.

Wir betrachten hierauf einen zweiten Arm ΦA, der beispielsweise mit ΦF einen Winkel von 120° bildet, und nehmen an, dass die Gliedlänge AB der zugehörigen Schaufel gleich FL sei. Wir drehen den Arm ΦA in die Lagen $\Phi A'$, $\Phi A''$, so dass AB resp. in die Lagen $A'B'$, $A''B''$ gelangt, die auch mit $F'L'$, $F''L''$ bezeichnet sind, und fixiren die beiden entsprechenden Stellungen $\Phi \mathfrak{F}'\mathfrak{L}'\Lambda$, $\Phi \mathfrak{F}''\mathfrak{L}''\Lambda$ des Doppelkurbelgetriebes $\Phi F L \Lambda$. Demzufolge hat der Arm ΛL sich erst um den Winkel $L\Lambda\mathfrak{L}'$ und weiter um den Winkel $\mathfrak{L}'\Lambda\mathfrak{L}''$ gedreht. Um nun die Stange $B'C'$ zu erhalten, durch welche das Schaufelglied $A'B'$ an den Ring R gekuppelt ist, und den Gelenkpunkt C' auf diesem Ringe R zu bestimmen, so dass die betreffende Schaufel beim Eintritt sowie beim Austritt die gewünschte Stellung einnimmt, construiren wir auf einem Kreise k des Ringes R die Punkte C', C'', indem wir den Winkel $C'\Lambda C'' = \mathfrak{L}'\Lambda\mathfrak{L}''$ symmetrisch zwischen den Winkel $B'\Lambda B''$ legen, oder indem wir auf dem Kreise k den Bogen $i'i''$, den der Winkel $\mathfrak{L}'\Lambda\mathfrak{L}''$ zwischen sich fasst, nach $C'C''$ so legen, dass die Halbirungsgerade des Winkels $B'\Lambda B''$ auch den Bogen $C'C''$ halbirt. Nach dieser Construction sind, weil die Punkte B', B'' gleichen Abstand von Λ haben, die Strecken $B'C'$, $B''C''$ gleich, und demnach ist bei angenommenem Ringkreise k die Länge $B'C'$ der Verbindungsstange und die Anschlussaxe C' auf dem Ringe bestimmt. Wird dagegen die Länge $B'C'$ dieser Verbindungsstange als gegeben betrachtet, dann ist der Kreis k bestimmt. In diesem Falle müssen wir die Schenkel jenes Winkels $C' \Lambda C''$ zeichnen und mit $B'C'$ als Radius um B' einen Kreisbogen ziehen, der den Schenkel $\Lambda C'$ in dem Punkte C' schneidet, und ferner um Λ den durch C' gehenden Kreis k beschreiben, der den anderen Schenkel $\Lambda C''$ in dem Punkte C'' trifft. Die Verbindungsstange befindet sich also beim Eintauchen der Schaufel in der Lage $B'C'$, beim Auftauchen in der Lage $B''C''$. Denken wir uns den Arm $\Phi A'$ in die Lage ΦA zurück gedreht, dann dreht sich der Ring R um den Winkel $\mathfrak{L}' \Lambda L$, und wir erhalten den Punkt C, indem wir den Winkel $C' \Lambda C = \mathfrak{L}' \Lambda L$ machen, wodurch dann auch die Stellung des Gelenkes ABC bestimmt ist. In gleicher Weise ist das Gelenk $A_1 B_1 C_1$ nebst der Schaufel gezeichnet, und können auch die anderen Gelenke in verlangter Anzahl mit den zugehörigen Schaufeln gezeichnet werden. Hierbei ist aber zu beachten, weil die beiden Kurbeln nicht genau gleiche Drehungen machen, dass jener Winkel $\mathfrak{L}' \Lambda \mathfrak{L}''$ oder $C' \Lambda C''$ für verschiedene Gelenke auch verschieden ist; und demnach sind, wenn wir verlangen, dass die Anschlussaxen C, C_1, . . alle auf demselben Kreise k liegen, alle Verbindungsstangen BC, $B_1 C_1$, . . von ungleicher Länge, die zwar wenig differirt. Wenn dagegen, was für die Ausführung zweckmässiger ist, alle Verbindungsstangen gleich sein sollen, so erhalten wir auf dem Ringe R die Anschlussaxen C, C_1, . ., die ungleiche, jedoch wenig verschiedene Abstände von Λ haben. Wir erkennen hiernach, dass durch die empfangenen Gelenke die Schaufeln nur an der Eintrittsstelle und an der Austrittsstelle in die erwünschte Stellung geführt werden, aber es zeigt sich, dass bei dieser Anordnung die Schaufeln in der tiefsten Lage nur wenig von der verticalen Stellung abweichen. Wird es aber für vortheilhafter erachtet, in der tiefsten Lage eine genaue verticale Stellung der Schaufeln zu erlangen, dann muss man auf die erwünschte Stellung der Schaufeln an der Austrittsstelle verzichten und in der angegebenen Weise die Gelenke für die Eintrittsstelle und für die tiefste Stelle construiren.

Diese Darlegungen geben nur ein dunkles, unvollkommenes Bild der theoretischen Behandlung, welches erst durch viele aus der Erfahrung geschöpfte Bedingungen erhellt und vervollständigt wird. Wir haben in Fig. **486** die Geschwindigkeit $F'F''_v$ des Axenpunktes F' im Bezug auf das Schiff wenig grösser als die Geschwindigkeit $F'F'_v$ des Schiffes gegen das Wasser genommen, und dies würde der Bergfahrt eines Schiffes entsprechen; bei der Thalfahrt desselben ist $F'F''_v$ im Verhältnisse zu $F'F'_v$ viel grösser.

Die erhaltenen Schaufelstellungen, welche bei der Bewegung eines Schiffes im Strome hiernach für die Bergfahrt, also für die wichtigste Bewegungsrichtung günstig wirken, sind für die Thalfahrt nicht entsprechend zweckmässig. Für die Austrittsstelle F'' hinter dem Rade wäre die aus der Beobachtung erkannte Wasserfläche anzunehmen, welche sich durch die stehende Wasserwelle am Schiffe bildet und höher als der vordere Wasserspiegel ist. Ferner ist auch die Geschwindigkeit des Schiffes im Bezug auf das Wasser an der Austrittsstelle eine andere als an der Eintrittsstelle, weil das Wasser auch durch die Schaufeln bewegt wird. Aus Mangel an Resultaten der Beobachtung werden aber einfach, wie auch in Fig. **486** geschehen ist, die Eintrittsstelle F' und die Austrittsstelle F'' in gleichem Niveau und die beiden Geschwindigkeiten $F'F_v^I$, $F''F_v^1$ gleich genommen. Bei den in Fig. **486** geforderten Schaufelstellungen liegt der Mittelpunkt Λ des durch L', L, L'' gehenden Kreises so, dass das Gelenkviereck $\Phi FL\Lambda$ ein Doppelkurbelgetriebe liefert, weil bei demselben, wie es gemäss dem Grashof'schen Satze S. 287 sein muss, die Summe des kleinsten festen Gliedes und des grössten Gliedes nicht grösser als die Summe der beiden anderen Glieder ist. Es können aber auch bei anderen Geschwindigkeitsverhältnissen sich Schaufelstellungen ergeben, so dass diese Bedingung nicht erfüllt ist, dass selbst, wenn wir über die Koppellänge FL und den von Koppel und Schaufel gebildeten Winkel noch frei verfügen, ein Gelenkviereck entsteht, welches kein Doppelkurbelgetriebe liefert und daher nicht verwendbar ist. In einem solchen Falle muss auf die Richtigkeit der einen von den drei Stellungen der Koppelschaufel, entweder in der Austrittsstellung oder in der tiefsten verticalen Stellung, verzichtet werden, und es ist dann nur möglich, die Koppelschaufel, wie es bei den anderen Gelenkschaufeln geschieht, in zwei der erwünschten Stellungen zu führen.

193. **Mechanismus für die Nadelbewegung der Wanzer'schen Nähmaschine.** Zuvörderst wollen wir den in Fig. **487** dargestellten speciellen Stephenson'schen Mechanismus betrachten, bei welchem die Glieder *5*, *6* durch eine Richtpaarung verbunden sind und das Glied *5* fest ist. Durch die Drehung des Gliedes *2* um die Axe *25* oder Φ im festen Gliede *5* wird die Hülse *6* auf der Stange *5* in schwingende Bewegung versetzt. Um für eine gegebene Stellung des Gliedes *2* die entsprechende Stellung des Gliedes *4* resp. die Lage des auch mit A bezeichneten Punktes *46* auf der Stange *5* zu bestimmen, müssen wir die drei Punkte *14*,

A, 34 auf durchsichtigem Papier markiren, und die markirten Punkte 14, 34 auf den resp. um 12, 23 mit der Strecke 1 und 2 beschriebenen Kreisbögen führen, bis A auf die Gerade 5 fällt. Leichter erhalten wir jedoch, wenn verschiedene Lagen von A bestimmt werden sollen, dieselben vermittelst einer Hülfscurve a, die zugleich als ein polares Wegdiagramm dient. Wir denken uns zu diesem Zwecke einstweilen das Glied 2 festgestellt und das Glied 4 bewegt, dann bilden die vier Glieder 1, 2, 3, 4 ein Doppelkurbelgetriebe, weil im dargestellten Falle die Längensumme des kleinsten festen und des grössten Gliedes kleiner ist als die Längensumme der beiden anderen Glieder gemäss dem Grashof'schen Satze (S. 287); und der Punkt A beschreibt im Gliede 2 eine ovale Bahncurve a, für welche im Punkte A die Gerade A-24 die Normale ist. Die Länge der kleinsten durch Φ gehenden Normale dieser Curve a ergiebt sich graphisch durch den um Φ gezogenen berührenden kleinsten Kreis k; aber der Berührungspunkt A^0, den dieser Kreis k mit der Curve a bildet, resp. die Normale ΦA^0, muss entweder versuchsweise oder durch eine Fehlercurve ermittelt werden, und ebenso die übrigen durch Φ gehenden Normalen der Curve a. Der Kreis k schneidet die Gerade 5 in der höchsten Lage A_0 des Punktes A. Den Punkt A_0 nehmen wir als Anfangspunkt der Wegmessung des auf 5 bewegten Punktes A; das Glied 2 drehen wir aus der entsprechenden Anfangslage um einen Winkel ν und machen den Winkel $A^0 \Phi A^1$ entgegengesetzt gleich ν; demnach ist die Strecke $K^1 A^1$, welche der Kreis k und die Curve a auf dem Fahrstrahle ΦA^1 abschneiden, gleich der auf 5 durchschrittenen Wegstrecke $A_0 A_1$ des Punktes A, die der Drehung ν entspricht. Die Curve a bildet also ein polares Wegdiagramm für die Bewegung des Punktes A auf 5, und durch dasselbe werden zugleich die Lagen des Punktes A bestimmt, welche verschiedenen Drehungswinkeln des Gliedes 2 entsprechen.

Die Curve a veranschaulicht auch den complicirten Bewegungsvorgang des Punktes A oder des Gliedes 6 auf dem festen Gliede 5. Wenn wir das Glied 2 nebst der in demselben befindlichen Curve a rotiren lassen, so ist die Bewegung des Schnittpunktes A, welchen die rotirende Curve a mit der Geraden 5 bildet, identisch mit der Bewegung des Gliedes 6 auf 5. Stellen wir uns vor, es sei das Glied 2 mit einer ovalen Nuthe versehen, deren Mittellinie die Curve a ist, und es greife A als ein an der Hülse 6 befestigter Zapfen in diese Nuthe, dann würden wir denselben Bewegungsvorgang des Gliedes 6 durch den aus den drei

Gliedern *5*, *2*, *6* bestehenden Mechanismus erhalten, bei welchem die Gliederpaare *5*, *2*; *2*, *6*; *6*, *5*, resp. durch eine Drehpaarung, eine höhere Paarung und eine Richtpaarung verbunden sind.

Um für die Bewegung des Punktes A das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm zu construiren, nehmen wir an, dass das Glied *2* im festen Gliede *5* gleichförmig rotire und dass die Endpunkte der constanten lothrechten Geschwindigkeiten aller Punkte des Gliedes *2* im Drehpunkte *25* oder Φ desselben coincidiren; dann ergiebt sich, indem wir die Gerade *24-46* ziehen, welche die in *25* auf der Geraden *5* errichteten Senkrechten $25\text{-}56^{\infty}$ in dem Pol *26* schneidet, durch die Strecke $\overline{26\text{-}25}$ die lothrechte Geschwindigkeit der Punktes A oder des Gliedes *6* auf *5*. Wenn wir dann die Strecke $AA_{\mathfrak{v}}$ senkrecht zur Geraden *5* gleich $\overline{26\text{-}25}$ machen, ist $A_{\mathfrak{v}}$ ein Punkt des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms.

Betrachten wir wieder A als den Schnittpunkt der mit dem Gliede *2* rotirenden Curve a und der festen Geraden *5*, so folgt auch, weil der mit A coincidirende Punkt dieser Curve a die lothrechte Geschwindigkeit $A\Phi$ besitzt und $A\text{-}24$ die Normale im Punkte A an dieser Curve ist, nach Art. 27, dass die Normale $A\text{-}24$ auf der zu $A\Phi$ Senkrechten $\Phi\text{-}56^{\infty}$ die lothrechte Geschwindigkeit $26\text{-}\Phi$ des Punktes A bestimmt.

Werden die beiden Glieder *1*, *3* des betrachteten Mechanismus unendlich gross genommen, dann erhalten wir den in Fig. **488** schematisch dargestellten Mechanismus der Wanzer'schen Nähmaschine[1]), durch welchen die Nadelbewegung desselben bewirkt wird. Das mit den rechtwinkeligen Nuthen versehene Glied *2* rotirt in dem Hohlcylinder des festen Gliedes *5* um die Axe *25*. In den Nuthen gleiten die Schieber *1*, *3*, welche drehbar an das Glied *4* geschlossen sind; und das Glied *4* ist anderseits im Punkte A gelenkig mit dem nadeltragenden Schieber *6* verbunden, der in dem festen Gliede *5* vertical auf- und niedergleitet. Denken wir uns das Glied *2* einstweilen festgehalten und die Schieber *1*, *3* in den Nuthen desselben bewegt, dann beschreibt der Punkt A des Gliedes *4* im Gliede *2* nach Art. 18 eine Ellipse a. Der über die Verbindungsstrecke $\overline{14\text{-}34}$ der Schieber als Durchmesser beschriebene und mit dem Giede *4* verbunden gedachte Kreis p rollt im Gliede *2* in einem doppelt so grossen Kreise π, dessen Mittel-

[1]) Wanzer, *Specification* No. 2367 vom 8. Juli 1873. Vergl. auch Rittershaus' Untersuchung dieses Mechanismus im *Civilingenieur*. 1880. B. 26. S. 27.

punkt Π im Schnittpunkte der Mittellinien der Nuthen liegt. Die vom Punkte A durch den Mittelpunkt P des Kreises p gezogene Gerade schneidet diesen Kreis in den Punkten b, c, durch welche die Axen der Ellipse a gehen, deren Mittelpunkt Π ist; und die Strecken Ab, Ac sind resp. gleich der kleinen und der grossen Halbaxe der Ellipse a. Behufs der Construction dieser Ellipse legen wir an die Gerade AP einen geradlinigen Papierstreifen und markiren auf demselben die Punkte A, b, c; dann beschreibt, indem wir die markirten Punkte b, c des Papierstreifens beziehlich auf den Ellipsenaxen entlang führen, der Punkt A desselben die Ellipse a. Der Mechanismus, bei dem wir jetzt wieder das Glied 5 als fest betrachten, ist so angeordnet, dass der Axenpunkt 25 oder Φ, um welchen sich das Glied 2 im Gliede 5 dreht, auf dem Kreise $\varkappa$ und auf der kleinen Ellipsenaxe liegt. Indem wir annehmen, die Ellipse a rotire mit dem Gliede 2 um Φ, wird die Bewegung ihres mit der festen Geraden $\Phi 5$ gebildeten Schnittpunktes A veranschaulicht. Von den vier Ellipsennormalen, die durch einen Punkt Φ gehen, fallen hier, weil Φ auf der kleinen Ellipsenaxe liegt, die beiden Normalen $A^0\Phi$, $A^6\Phi$ in derselben zusammen, und die beiden anderen Normalen $A^t\Phi$ $A^\tau\Phi$ liegen zu ihr symmetrisch. Zuvörderst drehen wir den Ellipsenpunkt A^0 in die Gerade $\Phi 5$ nach A_0, dann ist A_0 die höchste Lage des auf der Geraden $\Phi 5$ bewegten Punktes A, die wir als Anfangslage betrachten wollen. Indem wir von hier aus das Glied 2 nebst der Ellipse a in der eingezeichneten Pfeilrichtung weiter drehen, senkt sich der Punkt A, während der Ellipsenpunkt A^t nach der Geraden $\Phi 5$ gelangt, bis in die tiefste Lage A_t; bei fortgesetzter Drehung erhebt sich der Punkt A, während der Ellipsenpunkt A^6 die Gerade $\Phi 5$ erreicht, bis in die Lage A_6. Von da an, während der folgenden halben Umdrehung, vollzieht der Punkt denselben Bewegungsvorgang in umgekehrter Folge. Bei einer Umdrehung senkt sich also der Punkt A zuerst von der höchsten Lage A_0 in die tiefste A_t, macht hierauf eine kurze Schwingung zwischen den Lagen A_t, A_6 hin und her, und steigt dann wieder von der tiefsten Lage A_t bis zur höchsten A_0 hinauf. Die tiefste Lage A_t kann man graphisch durch den um Φ beschriebenen, die Ellipse a berührenden grössten Kreis erhalten; die Bestimmung der entsprechenden Stellungen des Gliedes 2 erfordert aber die Lösung des bekannten, viel behandelten Problems der vier durch einen Punkt gehenden Normalen eines Kegelschnittes, welches jedoch dann, wenn man eine dieser Normalen kennt, vermittelst eines Kreises sehr leicht gelöst werden kann[1]). Da in unserem Falle der Punkt Φ auf einer Ellipsenaxe liegt, also zwei Normalen bekannt sind, so müssen wir behufs der Bestimmung der beiden anderen zu dieser Ellipsenaxe symmetrisch liegenden Normalen ΦA^{ι}, ΦA^{τ} zunächst den Krümmungsmittelpunkt μ für den Ellipsenscheitel A^0 construiren, indem wir nach S. 94 vom Schnittpunkte J der Scheiteltangenten $A^0 J$, $B^0 J$ der Ellipse a auf die Gerade $A^0 B^0$ eine Senkrechte ziehen, welche die Ellipsenaxe $A^0 A^6$ in μ schneidet; ferner beschreiben wir um die Mitte ε der Strecke $\mu\Phi$ mit dem Radius εA^0 einen Kreis, und dieser schneidet die Ellipse a in den Punkten A^{ι}, A^{τ} der gesuchten Normalen ΦA^{ι}, ΦA^{τ}.

Um das orthogonale Wegdiagramm für die Bewegung des nadelführenden Gliedes *6*, resp. für das Nadelöhr N zu construiren, theilen wir den Halbkreis $A^0 k K^6$ in eine Anzahl etwa 6 gleicher Theile und ziehen vom Mittelpunkte Φ aus durch die erhaltenen Theilpunkte K^1, K^2, K^3 .. die Fahrstrahlen der Ellipse; ferner ziehen wir durch die höchste Lage N_0 des Nadelöhres N auf die Gerade $\Phi 5$ die Senkrechte $N_0 T^0$ und nehmen auf derselben von einem Punkte T^0 ausgehend sechs gleiche Strecken von beliebiger Grösse an; hierauf machen wir die zu den erhaltenen Theilpunkten T^1, T^2, T^3 .. gehörenden rechtwinkeligen Ordinaten $T^1 W^1$, $T^2 W^2$, $T^3 W^3$ .. resp. gleich den Wegstrecken $K^1 A^1$, $K^2 A^2$, $K^3 A^3$ .., welche der Kreis k und die Ellipse a auf jenen entsprechenden Fahrstrahlen abschneiden. Die Punkte W^1, W^2, W^3 .. bilden das vom Punkte T^0 ausgehende orthogonale Wegdiagramm $\mathfrak{w}$, welches von der Ordinate $T^6 W^6$ in zwei symmetrische Hälften getheilt wird; und die Stelle der grössten Ordinate $T^t W^t$, welche gleich der Strecke $K^t A^t$ ist, ergiebt sich durch das Verhältniss der Bögen $K^4 K^t$, $K^4 K^5$.

Nehmen wir an, dass das Glied *2* gleichförmig mit der Drehgeschwindigkeit gleich der Einheit rotire, so erhalten wir die Geschwindigkeit des Gliedes *6* in der gezeichneten Stellung, indem wir durch den Punkt *46* und durch den Schnittpunkt *24* der in *14*, *34* auf den Nuthen senkrechten Geraden die Gerade *46*-*24* ziehen, welche die Normale im Punkte A an der Ellipse a ist.

[1]) Vergl. die Behandlung und allgemeine Lösung dieses Problems von Joachimsthal, *Journal für reine und angewandte Mathematik.* 1843. B. 26. S. 172, *daselbst* 1854. B. 48. S. 377; Eckardt, *Zeitschrift für Mathematik u. Physik.* 1866. B. 11. S. 311; Painvin, *Nouvelles Annales de Mathématiques.* 1870. 2e sér. T. 9. p. 348; Lucas, *daselbst* 1876. 2e sér. T. 15. p. 5 und 1880. 2e sér. T. 19. p. 279.

Diese Gerade schneidet dann auf der in Φ zu $A\Phi$ Senkrechten die Strecke $\mathfrak{26}$-Φ ab, welche die lothrechte Geschwindigkeit des Gliedes *6* repräsentirt.

Um das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm für die Bewegung des Gliedes *6* zu zeichnen, ist es jedoch bequemer, für diejenigen Lagen, welche jenen Fahrstrahlen entsprechen, die zugehörigen Geschwindigkeiten zu bestimmen. Wir ziehen z. B. an den Punkt A^2 der Ellipse a die Normale AU, welche die in Φ auf ΦA^2 errichtete Senkrechte in U schneidet; dann ist $U\Phi$ gleich der Geschwindigkeit des Punktes A an der Stelle A_2, für welche $\Phi A_2 = \Phi A^2$ ist. Indem wir also senkrecht auf $\Phi 5$ die Strecke $A_2 A_2''$ $= U\Phi$ machen, erhalten wir durch A_2'' einen Punkt des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ des nadelführenden Gliedes *6*. Von diesem Geschwindigkeitsdiagramm, welches durch die Gerade $\Phi 5$ symmetrisch getheilt wird, ist die eine Hälfte gezeichnet.

194. **Mechanismus für die Messerbewegung der Cottam'schen Häckselmaschine**[1]. Bei dem in Fig. **489** dargestellten dreigliederigen einfachen Mechanismus ist das Glied *6* fest und trägt in Λ oder *56* einen Zapfen, in Φ oder *46* eine Axe. Um diese Axe dreht sich das mit zwei Excentern D, E versehene Glied *4*. Diese Excenter bewegen sich in den an einander liegenden rechtwinkeligen Schlitzen d', e' des Gliedes *2*, in welchem sich ein dritter Schlitz l' befindet, der auf dem Zapfen *56* gleitet. Durch die Drehung des Excentergliedes *4* wird das Glied *2*, an welchem das Messer m befestigt ist, zwangläufig bewegt, so dass das Messer vor der Lade H eine schwingende Bewegung vollzieht und bei jedem Niedergange einen Schnitt bewirkt. Denken wir uns die beiden Excenter durch je einen Zapfen ersetzt und auf dieselben drehbare Schlitten gesteckt, welche in den rechtwinkeligen Schlitzen d', e' gleiten und zwei Glieder *1*, *3* vertreten; denken wir uns ebenso auch auf den Zapfen *56* einen drehbaren Schlitten gesteckt, der in dem Schlitze l' gleitet und ein Glied *5* vertritt, dann erhalten wir einen speciellen Stephenson'schen Mechanismus mit vier Drehpaarungen und drei Richtpaarungen.

Um die verschiedenen Lagen des messertragenden Gliedes *2* zu construiren, welche verschiedenen Stellungen des Excentergliedes *4* entsprechen, zeichnen wir die Mittellinien l, d, e der Schlitze l', d', e' auf durchsichtiges Papier und verschieben dasselbe, bis die Gerade l den Punkt Λ enthält und die Geraden d, e

[1] Cottam, *Specification* No. 12704 vom 12. Juli 1849.

resp. durch die Mittelpunkte D, E der Excenter gehen. Durch die Zeichnung mehrerer Lagen des Gliedes *2* würde man erkennen, dass im Allgemeinen der Bewegungsvorgang dieses Gliedes sehr complicirt ist. Da aber der Erfinder dieses Mechanismus ausdrücklich angiebt, dass die Excenter in einen rechten Winkel auf der Axe Φ gegen einander gestellt sind und die Schlitze d', e' senkrecht stehen, so wird dem zufolge das Glied *2* während jeder Umdrehung des Gliedes *4* eine kardioidische Schwingung ausführen. Wenn allgemeiner als in dem dargestellten Mechanismus die Excenter, bei welchen $\Phi D = \Phi E$ ist, auf der Axe Φ unter einen beliebigen Winkel $D \Phi E$ gegen einander gestellt sind, und ferner die Schlitzmittellinien d, e einen Winkel $d \Pi e$ bilden, dessen Scheitel Π auf dem durch D, Φ, E gehenden Kreise p liegt, dessen Mittelpunkt mit P bezeichnet ist, dann geht die Halbirungsgerade f des Winkels $d \Pi e$ während der Drehung des Gliedes *4* beständig durch den festen Punkt Φ, und der im Gliede *4* befindliche Kreis p rollt in einem doppelt so grossen um Π beschriebenen Kreise π des Gliedes *2*. Indem also die beiden Geraden f, l des Gliedes *2* beständig durch die festen Punkte Φ, Λ gehen, beschreibt der Schnittpunkt C dieser Geraden als Punkt des Gliedes *2* einen Kreis γ im festen Gliede *6*, und die Bewegung des Gliedes *2* ist dem gemäss nach Art. 19. eine kardioidische. Dieser Kreis γ, dessen Mittelpunkt mit Γ bezeichnet ist, geht durch die Punkte Φ, Λ, und der über $\Phi \Lambda$ stehende Peripheriewinkel dieses Kreises ist gleich dem Winkel fCl. Demnach bewegen sich die Punkte des Gliedes *2* auf Pascal'schen Curven. In Fig. **489** sind für die Punkte A', A'', A''' der Messerschneide die Stücke α', α'', α''' der entsprechenden Pascal'schen Curven gezeichnet, welche diese Punkte sowohl beim Abwärtsgange wie beim Aufwärtsgange durchschreiten. Bei der Drehung des Excentergliedes *4* im Sinne des eingezeichneten Pfeiles entspricht dem Abwärtsgange oder Arbeitsgange ein etwas grösserer Drehungswinkel als beim Aufwärtsgange oder Leergange; und dem zufolge ist die Bewegung des Messers im Arbeitsgange etwas langsamer als im Leergange. Es ist bei diesem Mechanismus gewiss nicht beabsichtigt, gerade eine kardioidische Bewegung zu erlangen; und man kann leicht vermittelst eines einfacher gestalteten Mechanismus eine analoge krummlinige Bewegung hervorbringen, durch welche derselbe Zweck erreicht wird.

Wir können nach dieser Erkenntniss, ohne die Bewegung des Mechanismus zu beeinträchtigen, in denselben ein Glied $P\Pi$

einsetzen, welches in P an das Glied *4*, in Π an das Glied *2* gelenkig angeschlossen ist; ferner können wir auch das Glied ΓC einfügen, welches um die feste Axe Γ schwingt und in C mit dem Gliede *2* drehbar verbunden ist. Wenn wir den Mechanismus mit diesen beiden neuen Gliedern versehen, dann können wir auch unbeschadet der Zwangläufigkeit die beiden Excenter nebst den zugehörigen beiden Schlitzen weglassen und erhalten somit den in Fig. **490** dargestellten Mechanismus, bei dem durch Drehung der Kurbel ΦP dieselbe Bewegung des messertragenden Gliedes Cl' anschaulicher erzeugt wird. Auch dieser Mechanismus ist dann, wenn wir uns in den Schlitz l' einen um Λ drehbaren Zapfen gelegt denken, ein specieller Stephenson'scher Mechanismus mit sechs Drehpaarungen und einer Richtpaarung. Gemäss der Ableitung aus dem vorigen Mechanismus sind die Glieder ΦP, $P\Pi$ von gleicher Länge, und es wird dem zufolge, wenn der Punkt Π mit dem Axenpunkte Φ coincidirt, Unstetigkeit der Bewegung eintreten, die durch Eingriffspaarung beseitigt werden kann. Bei jener ersten Anordnung wird aber diese Unstetigkeit durch den Mechanismus selbst vermieden.

Der Dreispannmechanismus und specielle Arten desselben.

195. **Der Dreispannmechanismus im Allgemeinen.** Der aus acht Gliedern bestehende Dreispannmechanismus ist in Fig. **491**, Taf. XXXIII, dargestellt. In demselben bilden die Glieder *1*, *2*, *3*, *4* ein Gelenkviereck, dessen drei Glieder *2*, *3*, *4* resp. durch die Glieder *5*, *6*, *7* mit dem Gliede *8* gelenkig verbunden sind. Bei diesem Mechanismus, der achtundzwanzig Pole besitzt, sind zehn Pole *12*, *23*, *34*, *14*, *25*, *36*, *47*, *58*, *68*, *78* unmittelbar gegeben, und durch die Schnittpunkte der gegenüber liegenden Seiten des Gelenkvierecks erhalten wir noch die beiden Pole *13*, *24*. Diese Pole bilden aber keine Vierungsgruppe, die allein durch Ziehung solcher Geraden, welche drei Pole tragen, zur Bestimmung der übrigen sechszehn Pole führt; aber wir werden erkennen, dass es nur nöthig ist, noch einen Pol, z. B. *38*, auf geometrischem Wege zu ermitteln, um die fehlenden Pole in einfacher Weise zu erhalten.

Nehmen wir an, in Fig. **491** wäre der Pol *38* auf der Geraden *36*-*68* gefunden, so ergeben sich die Pole *28*, *48* durch die Geraden:

$$\frac{23\text{-}38}{25\text{-}58} > 28, \quad \frac{34\text{-}38}{47\text{-}78} > 48;$$

und hierbei liegen die drei Pole *28*, *48*, *24* auf einer Geraden.

Lassen wir die Gerade *28-48* ein Strahlenbüschel beschreiben, dessen Scheitelpunkt *24* ist, dann bewegen sich die Punkte *28*, *48* beziehlich auf den Geraden *5*, *7*; und ferner beschreiben die Geraden *28-23* und *48-34*, die sich im Punkte *38* schneiden, zwei projective Strahlenbüschel, deren Scheitelpunkte *23*, *34* sich mit *24* auf einer Geraden befinden. Demnach erzeugen diese projectiven Strahlenbüschel eine Gerade $\mathfrak{b}_{38}$ als geometrischen Ort des Punktes *38*. Geht der um *24* sich drehende Strahl *28-48* durch den Schnittpunkt $\mathfrak{B}$ der Geraden *5*, *7*, dann fällt der Punkt *38* mit $\mathfrak{B}$ zusammen. Gelangt dieser Strahl in die Gerade *1*, welche *5* und *7* resp. in den Punkten V_1, VII_1 schneidet, dann wandert der Punkt *38* nach dem Schnittpunkte $\mathfrak{B}_1$ der Geraden V_1-*23*, VII_1-*34*; folglich geht die Gerade $\mathfrak{b}_{38}$ durch die beiden Punkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ und schneidet die Gerade *6* in dem Pol *38*. Hieraus ergiebt sich die ausgeführte Construction des Pols *38*, welche nur die drei strichpunktirten Geraden erfordert:

Man ziehe die Geraden V_1-*23*, VII_1-*34* und verbinde ihren Schnittpunkt $\mathfrak{B}_1$ mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{B}$ der Geraden *5*, *7*; dann ist der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ und *6* der Pol *38*.

Wenn die Schnittpunkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ nicht innerhalb der Zeichnungsgrenze liegen, müssen wir durch den Punkt *24* zwei beliebige zweckmässige Strahlen ziehen; jedem derselben entsprechen zwei resp. durch die Punkte *23*, *34* gehende Strahlen, deren Schnittpunkte sich auf der Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ befinden und somit diese Gerade bestimmen. Nehmen wir an, dass der Schnittpunkt $\mathfrak{B}$ der Geraden *5*, *7* zugänglich sei, so erhalten wir bei Verwendung der Geraden *24-47* oder *24-25* die beiden folgenden Constructionen des Pols *38*:

Man ziehe die Gerade *24-47*, welche *5* im Punkte V' schneidet, ferner die Gerade V'-*23*, welche *47-34* im Punkte $\mathfrak{B}'$ trifft, und verbinde den Schnittpunkt $\mathfrak{B}'$ mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{B}$ der Geraden *5*, *7*; dann ist der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ und *6* der Pol *38*.

Man ziehe die Gerade *24-25*, welche *7* im Punkte VII' schneidet, ferner die Gerade VII'-*34*, welche *25-23* im Punkte $\mathfrak{B}''$ trifft, und verbinde den Schnittpunkt $\mathfrak{B}''$ mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{B}$ der Geraden *5*, *7*; dann ist der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{B}\mathfrak{B}''$ und *6* der Pol *38*.

Ist der Pol *38* nach einer dieser Constructionen vermittelst dreier Geraden gefunden, so ergiebt sich der Pol *28* auf der Geraden *5* durch die neue Gerade *38-23*, ebenso der Pol *48* auf der Geraden 7 durch die neue Gerade *38-34*; und es erfordert also diese Construction der Pole *28*, *48* je vier Gerade. Ferner schneiden sich die beiden Geraden *28-12*, *48-14* in dem auf der Geraden *38-13* liegenden Pol *18*; demnach wird wegen der hinzutretenden drei Geraden *38-23*, *38-13*, *28-12* oder *38-34*, *38-13*, *48-14* der Pol *18* hierdurch auf zweierlei Weise vermittelst sechs Geraden bestimmt. Wir wollen aber noch zeigen, dass jeder der Pole *28*, *48* ohne vorherige Bestimmung des Pols *38* durch drei Gerade und der Pol *18* durch fünf Gerade direct construirt werden kann.

Lassen wir in Fig. **492** die Gerade *38-28* ein Strahlenbüschel beschreiben, dessen Scheitelpunkt *23* ist, dann bilden die Geraden *24-28*, *34-38*, welche sich im Punkte *48* schneiden, zwei projective Strahlenbüschel, deren Scheitelpunkte *24*, *34* mit *23* auf einer Geraden liegen; folglich erzeugen diese Strahlenbüschel eine Gerade $\mathfrak{c}_{48}$ als den geometrischen Ort des Punktes *48*. Geht der Strahl *38-28* des Strahlenbüschels *23* durch den Schnittpunkt $\mathfrak{C}$ der beiden Geraden *5*, *6*, dann gelangt auch der Punkt *48* nach $\mathfrak{C}$; fällt dieser Strahl mit der Geraden *23-12* zusammen, welche die Geraden *5*, *6* resp. in den Punkten V_2, VI_2 trifft, dann coincidirt der Punkt *48* mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{C}_2$ der Geraden V_2*-24*, VI_2*-34*. Hiernach ist die Gerade $\mathfrak{c}_{48}$ durch die Punkte $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_2$ bestimmt, und es ergiebt sich die folgende directe Construction des Pols *48*, welche nur die drei punktirten Geraden erfordert:

Man ziehe die Geraden V_2*-24*, VI_2*-34* und verbinde ihren Schnittpunkt $\mathfrak{C}_2$ mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{C}$ der Geraden *5*, *6*; dann ist der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_2$ und 7 der Pol *48*.

Lassen wir den sich um *23* drehenden Strahl *38-28* mit der Geraden *23-25* zusammenfallen, welche die Gerade *6* im Punkte VI^2 schneidet, dann erhalten wir die folgende zweite Construction des Pols *48*, die drei Gerade erfordert und mit der ersten identisch wird, wenn insbesondere der Gelenkpunkt *25* sich auf der Geraden *23-12* befindet:

Man ziehe die Geraden *24-25*, VI^2*-34* und verbinde ihren Schnittpunkt $\mathfrak{C}^2$ mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{C}$ der

Geraden *5*, *6*; dann ist der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{C}\mathfrak{C}^2$ und *7* der Pol *48*.

Wenn der Gelenkpunkt *36* ausserhalb der Geraden *23-34* liegt, erhalten wir die dritte nachstehende Construction des Pols *48*, die nur zwei Gerade erfordert, indem wir jenen Strahl *38-28* mit der Geraden *23-36* zusammenfallen lassen, welche die Gerade *5* im Punkte V^{II} schneidet:

Man ziehe die Gerade V^{II}-*24*, welche die Gerade *34-36* im Punkte $\mathfrak{C}^{II}$ trifft, und verbinde diesen Schnittpunkt $\mathfrak{C}^{II}$ mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{C}$ der Geraden *5*, *6*; dann ist der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{C}\mathfrak{C}^{II}$ und *7* der Pol *48*.

In gleicher Weise erhalten wir auch durch Verwendung der Geraden *34-14*, *34-47* noch zwei andere Constructionen. Wegen der symmetrischen Gestalt des Mechanismus ergeben sich analoge directe Constructionen des auf der Geraden *5* liegenden Pols *28*.

Während die Gerade *38-28* in Fig. **493** wie vorhin ein Strahlenbüschel beschreibt, dessen Scheitelpunkt *23* ist, bilden die Geraden *12-28*, *13-38*, die sich im Punkte *18* schneiden, zwei projective Strahlenbüschel, deren Scheitelpunkte *12*, *13* mit *23* auf einer Geraden liegen; demnach erzeugen diese beiden Strahlenbüschel eine Gerade $\mathfrak{c}_{18}$ als geometrischen Ort des Punktes *18*. Geht der sich um *23* drehende Strahl *38-28* durch den Schnittpunkt $\mathfrak{C}$ der Geraden *5*, *6*, dann fällt auch *18* mit $\mathfrak{C}$ zusammen; gelangt dieser Strahl in die Gerade *3*, welche die Geraden *5*, *6* beziehlich in den Punkten V_3, VI_3 schneidet, dann wandert *18* nach dem Schnittpunkte $\mathfrak{C}_3$ der Geraden V_3-*12*, VI_3-*13*; folglich ist die Gerade $\mathfrak{c}_{18}$, die den Pol *18* enthält, durch die Punkte $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_3$ bestimmt. Wegen der symmetrischen Gestalt des Mechanismus ergiebt sich anderseits, dass der Pol *18* auch auf der Geraden $\mathfrak{a}_{18}$ liegt, welche durch den Schnittpunkt $\mathfrak{A}$ der Geraden *6*, *7* und den Schnittpunkt $\mathfrak{A}_3$ der Geraden VII_3-*14*, VI_3-*13* geht. Hiernach erhalten wir die folgende directe Construction des Pols *18*, welche die fünf in Fig. **493** punktirten Geraden erfordert:

Man verbinde den Pol *13* mit dem Schnittpunkte VI_3 von *3*, *6*, ziehe VII_3-*14* und V_3-*12*, welche die Gerade VI_3-*13* resp. in $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{C}_3$ treffen, und ferner die beiden Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_3$, die sich im Pol *18* schneiden.

Wenn in Fig. **493** die Gerade *28-48* ein Strahlenbüschel beschreibt, dessen Scheitelpunkt *24* ist, so erzeugen auch die beiden Geraden *12-28*, *14-48*, die sich in *18* schneiden, zwei projective

Strahlenbüschel, deren Scheitelpunkte *12*, *14* mit *24* auf einer Geraden liegen. Demnach ist auch der geometrische Ort des Punktes *18* eine Gerade $\mathfrak{b}_{18}$, die durch den Schnittpunkt $\mathfrak{B}$ der Geraden *5*, *7* und den Schnittpunkt B der Geraden V_3-*12*, VII_3-*14* geht; denn, wenn der um *24* rotirende Strahl *28-48* durch den Punkt $\mathfrak{B}$ geht, so fällt *18* mit diesem Punkte zusammen, und gelangt dieser Strahl in die Gerade *3*, so coincidirt *18* mit dem Punkte B. Hiernach muss die Gerade $\mathfrak{B}B$ den Pol *18* enthalten und bildet also eine Controle für jene Construction desselben. Durch Fortsetzung dieser Untersuchung würden sich noch viele projective Beziehungen dieses interessanten Mechanismus ergeben.

Um zu zeigen, wie nun durch jene zehn unmittelbar gegebenen Pole und durch den gefundenen elften Pol *38*, zu dessen Bestimmung drei Gerade nöthig sind, alle übrigen Pole vermittelst Ziehung solcher Geraden, die drei Pole tragen, auf möglichst kürzestem Wege construirt werden können, betrachten wir wegen der symmetrischen Gestaltung des Mechanismus zunächst die beiden nachstehenden Tabellen, welche resp. die Pole der sechs Glieder *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *8* und *1*, *2*, *3*, *4*, *7*, *8* enthalten. In diesen Tabellen bilden die nothwendig erforderlichen gegebenen und durch fette Ziffern gekennzeichneten Pole je eine Vierungsgruppe, und die beiden Pole *13*, *24* sind, wie schon erwähnt, die Schnittpunkte der gegenüber liegenden Seiten des Gelenkvierecks; demnach können die anderen Pole dieser Glieder leicht bestimmt werden. Aus den Tabellen:

15						*17*				
25	*13*					*27*	*13*			
35	***23***	***12***				*37*	***23***	***12***		
45	***34***	*24*	***14***			***47***	***34***	*24*	***14***	
58	*48*	***38***	*28*	*18*		***78***	*48*	***38***	*28*	*18*

erhalten wir in Fig. **494** nach der eingeführten Bezeichnungsweise, bei der wir die zu dem Mechanismus gehörenden Geraden durch einen horizontalen Strich unterscheiden, aus diesen beiden Tabellen resp. die symmetrischen Constructionen:

$$\frac{\overline{23\text{-}25}}{38\text{-}58} > 35, \quad \frac{\overline{25\text{-}58}}{23\text{-}38} > 28, \qquad \frac{\overline{34\text{-}47}}{38\text{-}78} > 37, \quad \frac{\overline{47\text{-}78}}{34\text{-}38} > 48.$$

Hiernach sind also zur Bestimmung der Pole *35*, *28*, *37*, *48* je vier Gerade erforderlich. Ferner finden wir durch

$$\frac{\overline{12\text{-}25}}{13\text{-}35} > 15, \qquad \frac{\overline{14\text{-}47}}{13\text{-}37} > 17,$$

dass für die Ermittelung der Pole *15*, *17* je fünf Gerade nöthig sind. Weiter ergiebt sich durch

$$\begin{matrix} 24\text{-}25 \\ 34\text{-}35 \end{matrix} > 45, \qquad \begin{matrix} 24\text{-}47 \\ 23\text{-}37 \end{matrix} > 27,$$

die Construction der Pole *45*, *27* vermittelst je sechs Geraden. Ebenso erfordert auch jede der zwei symmetrischen Bestimmungsweisen:

$$\begin{matrix} 12\text{-}28 \\ 13\text{-}38 \end{matrix} > 18, \qquad \begin{matrix} 14\text{-}48 \\ 13\text{-}38 \end{matrix} > 18$$

des Pols *18* sechs Gerade.

Nachdem nun zwanzig Pole in Betracht gekommen sind, verwenden wir auch die noch gegebenen zwei Pole *36*, *68*, vervollständigen behufs der Bestimmung der noch fehlenden sechs Pole *16*, *26*, *46*, *56*, *57*, *67* jene Tabellen und erhalten somit die folgende Tabelle, von deren achtundzwanzig Polen jene elf gegebenen und elf nach obigen Constructionen bekannt sind:

17						
27	*15*					
37	**25**	*13*				
47	*35*	**23**	**12**			
57	*45*	**34**	*24*	**14**		
67	*56*	*46*	**36**	*26*	*16*	
78	**68**	**58**	*48*	**38**	*28*	*18*.

Hiernach ergiebt sich durch die folgenden Constructionen:

$$\begin{matrix} \overline{58\text{-}68} \\ 35\text{-}36 \end{matrix} > 56, \qquad \begin{matrix} \overline{78\text{-}68} \\ 37\text{-}36 \end{matrix} > 67,$$

$$\begin{matrix} \overline{23\text{-}36} \\ 28\text{-}68 \end{matrix} > 26, \qquad \begin{matrix} \overline{34\text{-}36} \\ 48\text{-}68 \end{matrix} > 46,$$

dass zur Bestimmung eines jeden der vier Pole *56*, *67*, *26*, *46* fünf Gerade erforderlich sind.

Ferner finden wir auf zwei symmetrische Weisen:

$$\begin{matrix} 13\text{-}36 \\ 12\text{-}26 \end{matrix} > 16, \qquad \begin{matrix} 13\text{-}36 \\ 14\text{-}46 \end{matrix} > 16,$$

$$\begin{matrix} \overline{58\text{-}78} \\ 45\text{-}47 \end{matrix} > 57, \qquad \begin{matrix} \overline{58\text{-}78} \\ 27\text{-}25 \end{matrix} > 57,$$

dass für die Ermittelung der Pole *16*, *57* je sieben Gerade nöthig sind. Nach S. 430 giebt es bei einem achtgliederigen Mechanismus sechsundfünfzig Gerade, die je drei Pole tragen, und von diesen Geraden gehen sechs durch je einen Pol. Hierdurch empfangen wir eine vielfache Controle für die Construction der Pole.

Werden in Fig. **495** die beiden Gelenkpunkte *58*, *68* des Gliedes *8* in einem Punkte vereint, so dass in demselben ein dreigliederiges Gelenk entsteht, dann geht aus dem Dreispannmechanismus ein Watt'scher Mechanismus mit einem aus den Gliedern 7, *8* gebildeten, angeschlossenen Gelenke hervor. Werden in Fig. **496** die beiden Gelenkpunkte *58*, *78* vereint, dann erhalten wir einen Stephenson'schen Mechanismus mit einem aus den Gliedern *6*, *8* bestehenden, angeschlossenen Gelenke. Bei diesen beiden besonderen Anordnungen ist das Charakteristische des Dreispannmechanismus nicht mehr vorhanden. Die Construction der Pole dieser beiden speciellen Mechanismen kann allein vermittelst solcher Geraden ausgeführt werden, die drei Pole tragen; aber man kann hier auch die für den allgemeinen Fall abgeleiteten Constructionen anwenden.

196. **Der Mechanismus der Collmann'schen Ventilsteuerung.** Wenn bei dem Dreispannmechanismus, wie in Fig. **497**, der Gelenkpunkt 25^{∞} nach der auf *12-23* senkrechten Richtung im Unendlichen liegt, die Drehpaarung der beiden Glieder *2*, *5* also durch eine Richtpaarung ersetzt wird, und das durch Schraffur gekennzeichnete Glied *4* fest ist, erhalten wir im Schema den Stammmechanismus der Collmann'schen Ventilsteuerung [1]), bei dem insbesondere die drei Gelenkpunkte *23*, *34*, *36* des Gliedes *3*, sowie die drei Gelenkpunkte *58*, *78*, *68* des Gliedes *8* auf je einer Geraden liegen. Um die Wellenaxe *14* rotirt im festen Gliede *4* ein Excentrik, welches das Glied *1* vertritt und als Kurbel $\overline{14\text{-}12}$ des Kurbelgetriebes *1234* dargestellt ist. Die zweiarmige Schwinge *3* und die Stange *8* sind in den Punkten *36*, *68* durch das Glied *6* gelenkig verbunden; und anderseits ist die Stange *8* im Punkte *58* drehbar an die Hülse *5* geschlossen, die auf der Koppel *2* gleitet. Die Axe *47* des im Punkte *78* mit der Stange *8* gelenkig verbundenen Lenkers 7 wird durch den Regulator der Maschine in verschiedene Lagen gestellt, und in einer von diesen Lagen betrachten wir die Axe *47* als fest im Gliede *4*. An diesen speciellen Dreispanngetriebe ist im Punkte *68* die Schubstange *9* kniеartig angelenkt; und diese Schubstange ist anderseits im Punkte *9X* drehbar mit der Ventilstange *X* verbunden, welche das Dampfventil trägt und in der Hülse *H* des festen Gliedes *4* gleitet.

[1]) Collmann, *Deutsches Reichspatent* Nr. 2714 vom 19. August 1877. *Zusatz-Patent* Nr. 4451 vom 2. Febr. 1878, und *Zusatz-Patent* Nr. 14437 vom 3. October 1880. *Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure.* 1878. B. 22. S. 342.

Um nun, wenn die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{12\text{-}12_{\mathfrak{v}}}$ der Excentermitte *12* im Bezug auf das feste Glied *4* gegeben ist, die Geschwindigkeit der Ventilstange X resp. des Ventils zu construiren, bestimmen wir zunächst den Pol *48* nach der obigen ersten Construction. Wir ziehen senkrecht auf die Koppel *2* die Gerade $58\text{-}25^{\infty}$, welche die Gerade *6* im Punkte $\mathfrak{C}$ und die Gerade *2* in dem mit *58* identischen Punkte V_2 trifft; wir ziehen ferner die zwei punktirten Geraden $V_2\text{-}24$, $VI_2\text{-}34$, die sich im Punkte $\mathfrak{C}_2$ schneiden, und dann die dritte punktirte Gerade $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_2$, die auf *7* den Pol *48* bestimmt. Ebenso einfach ergiebt sich auch dieser Pol *48*, wenn wir hier die obige zweite Construction desselben ausführen[1]). Nachdem wir durch die Gerade *68-48* die Normale der von dem Gelenkpunkte *68* im festen Gliede *4* beschriebenen Bahncurve erhalten haben, ziehen wir durch den Endpunkt $12_{\mathfrak{v}}$ der gegebenen lothrechten Geschwindigkeit $\overline{12\text{-}12_{\mathfrak{v}}}$ des Punktes *12* zu *2* die Parallele, welche $34\text{-}VI_2$ im Punkte $\mathfrak{B}$ trifft, dann durch $\mathfrak{B}$ zu *6* die Parallele, welche *48-68* im Punkte $68_{\mathfrak{v}}$ begegnet, und ferner durch $68_{\mathfrak{v}}$ zu *9* die Parallele, die auf der zur Ventilstange X senkrechten Geraden $4X^{\infty}\text{-}9X$ die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{9X\text{-}9X_{\mathfrak{v}}}$ des Punktes $9X$ oder des Ventils bestimmt. Denn beachten wir, dass die zu *2* Parallele $12_{\mathfrak{v}}\text{-}\mathfrak{B}$ auf der Geraden *3* die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{23\text{-}23_{\mathfrak{v}}}$ des Punktes *23* abschneidet und dass diese sich zur lothrechten Geschwindigkeit $\overline{36\text{-}36_{\mathfrak{v}}}$ verhält wie die Strecken $\overline{34\text{-}23}$, $\overline{34\text{-}36}$, so wird auch durch die zu *6* Parallele $\mathfrak{B}\text{-}68_{\mathfrak{v}}$ auf *3* die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{36\text{-}36_{\mathfrak{v}}}$ des Punktes *36* abgeschnitten, und auf *48-68* die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{68\text{-}68_{\mathfrak{v}}}$ des Punktes *68* bestimmt. Demnach liefert die zu *9* Parallele $68_{\mathfrak{v}}\text{-}9X_{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{9X\text{-}9X_{\mathfrak{v}}}$ des Punktes $9X$, und der Schnittpunkt *49* der Geraden $4X^{\infty}\text{-}9X$, *48-89* ist der Pol der Schubstange *9* im festen Gliede *4*.

Ist nun auch die Ermittelung der Geschwindigkeit des Ventils bei diesem complicirten Mechanismus noch verhältnissmässig einfach, so ist es doch nicht leicht, die verschiedenen Lagen des Mechanismus zu zeichnen. Wir müssen für eine angenommene Excenterstellung zunächst die entsprechende Lage des Kurbelgetriebes construiren, ferner um den Punkt *47* mit dem Lenker *7* als Radius einen Kreis beschreiben und dann auch um den Punkt *36*

[1]) Diese zweite Construction stimmt mit derjenigen überein, welche Rittershaus vermittelst Geschwindigkeiten abgeleitet hat. *Civilingenieur*. 1880. B. 26. S. 246.

mit der Stange *6* als Radius einen Kreis ziehen. Hierauf markiren wir auf einem Papierstreifen die Punkte *58*, *78*, *68* und führen die beiden letzten Punkte resp. auf jenen Kreisen, bis der Punkt *58* in die Gerade *2* gelangt. Dadurch wird die Lage der Stange *8* nebst der entsprechenden Ventilstellung erhalten. Indem wir bei Annahme gleichförmiger Rotation des Excentriks für verschiedene Lagen die Geschwindigkeit des Ventils, so weit es zwangläufig geführt wird, bestimmen, erhalten wir das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm desselben. Wenn der Erfinder bei dieser Ventilsteuerung diese Construction der Geschwindigkeit ausgeführt hätte, würde er auf theoretischem Wege die Uebelstände erkannt haben, welche in der Praxis auftraten und den Erfinder veranlassten, von diesem höchst complicirten und auch deshalb nicht praktischen Mechanismus wieder zu den einfacheren Mechanismen zurückzukehren.[1])

197. **Das Schwengelkurbelgetriebe.** Das in Fig. **498** dargestellte Getriebe, welches aus dem Dreispannmechanismus hervorgeht, wenn das Glied *3* als fest betrachtet und die Glieder *3*, *6* durch eine Richtpaarung verbunden sind, nennen wir ein Schwengelkurbelgetriebe, weil das Kurbelgetriebe *1234* vermittelst der Stangen *5*, *7* dem Gliede *8* eine schwengelartige Bewegung ertheilt. Wir haben beispielsweise ein Schwingkurbelgetriebe *1234* gewählt, bei dem das rotirende Kurbelglied *4* eine schwingende Bewegung des Gliedes *2* bewirkt, und durch die Stangen *5*, *7* dem Schwengel *8* sowie der Hülse *6* auf der Stange σ eine sehr complicirte Bewegung ertheilt wird. Um die Geschwindigkeit des Gliedes *6* auf der Stange σ zu erhalten, nehmen wir an, das Glied *4* rotire um die feste Axe *34* mit einer Drehgeschwindigkeit gleich der Einheit, und construiren den Pol *46*, indem wir zunächst nach der zweiten auf S. 467 gegebenen Construction den Pol *48* bestimmen. Wir ziehen senkrecht zur Stange σ die Gerade $68\text{-}36^x$, welche die Geraden *23-25*, *5* resp. in den Punkten VI^2, $\mathfrak{C}$ schneidet, ferner die Geraden *24-25*, $VI^2\text{-}34$ und verbinden ihren Schnittpunkt $\mathfrak{C}^2$ mit $\mathfrak{C}$, dann bestimmt die Gerade $\mathfrak{C}^2\mathfrak{C}$ auf der Geraden *7* den Pol *48*. Hierauf ziehen wir die Gerade *48-68*, welche die Gerade $34\text{-}36^x$ in dem Pol *46* trifft; und demnach repräsentirt die Strecke $\overline{46\text{-}34}$ die Geschwindigkeit des auf der Stange σ parallel bewegten Gliedes *6*. Machen wir nun senkrecht

[1]) Collmann, *Deutsches Reichspatent* Nr. 14437 vom 3. October 1880. Fig. 19.

zu σ die Strecke $\overline{68\text{-}68_v} = \overline{46\text{-}34}$, so ist 68_v ein Punkt des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms des Punktes *68* resp. des Gliedes *6*. Eine andere Bestimmung dieser Geschwindigkeit ergiebt sich, wenn wir nach der ersten auf S. 466 gegebenen Construction den Pol *38* ermitteln, indem wir die strichpunktirten Geraden V_1-*23*, VII_1-*34*, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ ziehen, von denen $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ die Gerade *68-36'* im Pol *38* schneidet. Ziehen wir nun ferner zu 7 die Parallele $34\text{-}78_v$, welche die Normale *78-38* der vom Punkte *78* im Gliede *3* beschriebenen Curve im Punkte 78_v trifft, und zu *78-68* die Parallele $78_v\text{-}68_v$, so erhalten wir auch hierdurch die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{68\text{-}68_v}$ des Punktes *68* und damit zugleich den Geschwindigkeitszustand des Gliedes *8*.

198. **Specielle Dreispannmechanismen mit drei Richtpaarungen.** Wir haben in Fig. **499** beispielsweise angenommen, dass die Glieder *2*, *3*, *4* resp. mit den Gliedern *5*, *6*, *7* durch Richtpaarungen verbunden sind und dass die Glieder *5*, *6*, *7* durch Hülsen vertreten werden, die in den Punkten *58*, *68*, *78* drehbar an das Glied *8* geschlossen sind und in denen beziehlich die Glieder *2*, *3*, *4* als Stangen sich verschieben. In diesem Falle gleiten also die Seiten *2*, *3*, *4* des Gelenkvierecks *1234* durch die Punkte *58*, *68*, *78* des Gliedes *8*. Wenn wir in den Punkten *58*, *68*, *78* auf den Geraden *2*, *3*, *4* die Senkrechten 5_0, 6_0, 7_0 errichten, welche jene im allgemeinen Falle vorhandenen Stangen *5*, *6*, *7* vertreten, so können wir nach den Darlegungen auf S. 466 den Pol *38* leicht bestimmen. Da jedoch die Geraden *1*, 5_0 sich in einem unzugänglichen Punkte schneiden, so ziehen wir durch den Pol *24* eine beliebige Gerade, welche die Geraden 5_0, 7_0 günstig schneidet; und am einfachsten ist es, indem wir die Gerade *24-58* ziehen, welche die Gerade 5_0 in dem mit *58* identischen Punkte *V* und die Gerade 7_0 in dem Punkte *VII* schneidet. Hiernach erhalten wir durch die Geraden *V-23*, *VII-34* den Schnittpunkt $\mathfrak{B}_1$, der mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{B}$ der Geraden 5_0, 7_0 verbunden, die Gerade $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}$ liefert, die auf 6_0 den Pol *38* bestimmt. Durch den Pol *38* ergeben sich, wie in Fig. **499** ausgeführt ist, die Pole *28*, *48*, *18*, und ferner werden alle übrigen Pole in der bekannten Weise construirt. Wir ersehen hieraus, dass, wenn wir die Seiten *2*, *3*, *4* des Gelenkvierecks durch die Punkte *58*, *68*, *78* des als fest betrachteten Gliedes *8* schieben, die Pole *18*, *28*, *38*, *48* der Seiten dieses Gelenkvierecks im Bezug auf das feste Glied *8* leicht construirt werden können.

Nehmen wir an, es sei bei dem Dreispannmechanismus das

Glied *8* mit jedem der Glieder *5*, *6*, *7* durch eine Richtpaarung verbunden, dann erhalten wir den in Fig. **500** dargestellten speciellen Dreispannmechanismus, bei dem die Glieder *5*, *6*, *7* durch Schlitten vertreten sind, die in geradlinigen Schlitzen des Gliedes *8* gleiten. In diesem Falle bewegen sich also, wenn wir das Glied *8* als fest betrachten, die Punkte *25*, *36*, *47*, die resp. den Gliedern *2*, *3*, *4* angehören, auf festen Geraden; und die Bestimmung der Pole kann hier in analoger Weise wie vorhin ausgeführt werden. Diese beliebig gewählten Beispiele geben genügend zu erkennen, wie verschiedenartig der Dreispannmechanismus durch Einordnung von Richtpaarungen specialisirt werden kann.

Räderwerke oder Rädergetriebe.

199. **Vorgelege.** In Fig. **501** ist ein Räderwerk oder Rädergetriebe mit vier in einander greifenden Zahnrädern *1*, *2*, *3*, *4* gezeichnet, deren Axen *01*, *02*, *03*, *04* in dem festen Gestell *0* gelagert sind und deren Zahnkränze der Einfachheit wegen durch die Rollkreise oder Theilkreise dargestellt werden. Die Vermittelung der Bewegung von dem einen zu dem anderen der beiden einfachen Räder *1*, *4*, welche je einen Zahnkranz besitzen, erfolgt durch die beiden Doppelräder *2*, *3*, von denen jedes zwei Zahnkränze enthält. Ein derartiges Räderwerk mit festen Axen, welches zur Uebersetzung einer Drehbewegung in eine andere und zur Kraftübertragung dient, heisst ein Vorgelege. Bei einem Doppelrade wird meist, besonders in der Uhrmacherei, das grössere Zahnrad schlechtweg das Rad und das kleinere das Trieb genannt. Betrachten wir in Fig. **501** z. B. das einfache Rad *1* als das treibende, so wirkt dasselbe auf das Doppelrad *2*; dieses treibt das Doppelrad *3*, welches auf das letzte getriebene einfache Rad *4* wirkt. Die Rollkreise der einfachen Räder *1*, *4* sind resp. mit r_1, r'_4, die Rollkreise der Doppelräder *2*, *3* beziehlich mit r_2, r'_2 und r_3, r'_3 bezeichnet; und dieselbe Bezeichnung, welche wir für die Rollkreise gewählt haben, soll auch zugleich für die Radien derselben verwendet werden. Die Berührungspunkte *12*, *23*, *34* der Rollkreispaare $r_1 r'_2$, $r_2 r'_3$, $r_3 r'_4$, welche je zwei in einander greifende Zahnkränze vertreten, sind die Pole der betreffenden Räder.

Um bei dem dargestellten vierräderigen Vorgelege das Verhältniss der Geschwindigkeiten v_1, v_4 eines auf einem Kreise r'_1

des Rades *1* liegenden Punktes A_1 und eines auf dem Kreise r_4 des Rades *4* befindlichen Punktes A_4 zu erhalten, bezeichnen wir ebenso wie diese Kreise auch ihre Radien; und ferner bezeichnen wir mit v_I, v_{II}, v_{III} resp. die Geschwindigkeiten der mit den Polen *12*, *23*, *34* coincidirenden beiden Punkte der betreffenden Räder. Es bestehen dann für die auf das Gestell *0* bezogenen Geschwindigkeiten die Verhältnisse

$$\frac{v_1}{v_I} = \frac{r'_1}{r_1}, \quad \frac{v_I}{v_{II}} = \frac{r'_2}{r_2}, \quad \frac{v_{II}}{v_{III}} = \frac{r'_3}{r_3}, \quad \frac{v_{III}}{v_4} = \frac{r'_4}{r_4},$$

und demnach ergiebt sich:

$$\frac{v_1}{v_4} = \frac{r'_1 \cdot r'_2 \cdot r'_3 \cdot r'_4}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4}.$$

Wir erhalten somit auch allgemein, wenn n Räder vorhanden sind, welche alle mit äusserer Verzahnung oder theils mit äusserer, theils mit innerer Verzahnung versehen sein können, für das Verhältniss der Geschwindigkeiten v_1, v_n die Formel:

$$\frac{v_1}{v_n} = \frac{r'_1 \cdot r'_2 \cdot r'_3 \cdot\cdot r'_n}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot\cdot r_n}.$$

Da die in den betreffenden Kreisen des ersten und letzten Rades tangential wirkenden Kräfte, wenn wir von der Reibung absehen, sich gemäss den Erörterungen in Art. 131 umgekehrt wie die Geschwindigkeiten v_1, v_n verhalten, so ist hierdurch auch das Verhältniss der Gleichgewichtskräfte bestimmt.

Wenn wir mit ω_{10}, ω_{40} die Drehgeschwindigkeiten der Räder *1*, *4* im Bezug auf das feste Gestell *0* bezeichnen, so ist:

$$\omega_{10} = \frac{v_1}{r'_1}, \qquad \omega_{40} = \frac{v_4}{r_4};$$

folglich das Verhältniss der Drehgeschwindigkeiten

$$\frac{\omega_{10}}{\omega_{40}} = \frac{r'_2 \cdot r'_3 \cdot r'_4}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3},$$

oder allgemein bei n Rädern

$$\frac{\omega_{10}}{\omega_{n0}} = \frac{r'_2 \cdot r'_3 \cdot r'_4 \cdot\cdot r'_n}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot\cdot r_{n-1}}.$$

Sind statt der Radien der Rollkreise beziehlich die zugehörigen Zähnezahlen $z_1, z_2, z_3, \ldots z_{n-1}$ und $z'_2, z'_3, z'_4, \ldots z'_n$ gegeben, so ist auch, weil die Zähnezahlen sich wie die Radien der betreffenden Rollkreise verhalten, das Verhältniss

$$\frac{\omega_{10}}{\omega_{n0}} = \frac{z'_2 \,.\, z'_3 \,.\, z'_4 \,.\,.\, z'_n}{z_1 \,.\, z_2 \,.\, z_3 \,.\,.\, z_{n-1}}.$$

Wie die Drehgeschwindigkeiten ω_{10}, ω_{n0} des ersten und letzten Rades verhalten sich auch die in einer angenommenen Zeit entsprechenden Umdrehungszahlen u_{10}, u_{n0} dieser Räder, und ebenso auch die gleichzeitigen Drehungswinkel w_{10}, w_{n0} derselben. Wird jenes Verhältniss, welches auch das Uebersetzungsverhältniss und auch Umsetzungsverhältniss des Räderwerkes heisst, mit ν bezeichnet, so ist

$$\frac{\omega_{10}}{\omega_{n0}} = \frac{u_{10}}{u_{n0}} = \frac{w_{10}}{w_{n0}} = \frac{r'_2 \,.\, r'_3 \,.\, r'_4 \,.\,.\, r'_n}{r_1 \,.\, r_2 \,.\, r_3 \,.\,.\, r_{n-1}} = \frac{z'_2 \,.\, z'_3 \,.\, z'_4 \,.\,.\, z'_n}{z_1 \,.\, z_2 \,.\, z_3 \,.\,.\, z_{n-1}} = \pm \nu \,.\,.\, 1).$$

Das Uebersetzungsverhältniss vom ersten treibenden Rade zum letzten getriebenen Rade eines Vorgeleges ist gleich dem Verhältnisse des Productes der Rollkreisradien der getriebenen Zahnkränze zu dem Producte der Rollkreisradien der treibenden Zahnkränze, oder gleich dem Verhältnisse des Productes der Zähnezahlen der getriebenen Zahnkränze zu dem Producte der Zähnezahlen der treibenden Zahnkränze.

Das Uebersetzungsverhältniss ist also nur von den Radien der Rollkreise oder nur von den Zähnezahlen der Räder abhängig, nicht von der gegenseitigen Lage der Räderaxen. Das Vorzeichen des Uebersetzungsverhältnisses ist aber positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem das erste und letzte Rad sich in gleichem oder entgegengesetztem Sinne drehen, und wird dem gemäss nach der Regel bestimmt:

Das Vorzeichen des Uebersetzungsverhältnisses ergiebt sich dadurch, dass man erstens bei ungerader oder gerader Anzahl Räder resp. das positive oder negative Vorzeichen setzt, zweitens bei Vollrädern die Rollkreisradien oder Zähnezahlen als positiv, bei Hohlrädern als negativ betrachtet.

Denken wir uns mit dem letzten Rade eines Vorgeleges, wie in Fig. **501** durch Punktirung angedeutet ist, ein Gelenkparallelogramm oder Parallelkurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$ verbunden, so dass der Arm ΛL an dem letzten Rade *4* befestigt ist und *01-04* den Steg $\Phi\Lambda$ vertritt, dann vollzieht der Arm ΦF dieselbe Drehung wie das Rad *4*. Bezeichnen wir die Drehgeschwindigkeit des letzten Rades oder des Armes ΦF im Bezug auf das erste Rad *1*, wenn allgemein n Räder vorhanden sind, mit ω_{n1}, und betrachten wir den Drehungssinn des ersten Rades als positiv, so ist bei gleichsinniger Drehung des ersten und letzten Rades

$$\omega_{n1} = \omega_{n0} - \omega_{10}.$$

Je nachdem $\omega_{n0} \gtrless \omega_{10}$ ist, rotirt das letzte Rad im Bezug auf das erste in gleichem oder entgegengesetztem Sinne. Ist dagegen die Drehung des letzten Rades der des ersten entgegengesetzt, dann ist ω_{n0} negativ, und in diesem Falle vollzieht das letzte Rad gegen das erste stets eine entgegengesetzte Drehung. Durch Einsetzung der Verhältnisszahl ν, deren Vorzeichen nach obiger Regel bestimmt wird, erhalten wir die Beziehung:

$$\frac{\omega_{n1}}{\omega_{10}} = \frac{1}{\pm \nu} - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Um das Uebersetzungsverhältniss bei dem in Fig. **501** dargestellten Vorgelege graphisch zu ermitteln, construiren wir den Pol *14* der Räder *1* und *4*, indem wir die Geraden *02-04*, *23-34* ziehen, welche sich im Pol *24* schneiden, und ferner die Gerade *12-24*, die auf *01-04* den Pol *14* bestimmt; oder wir ziehen die Geraden *01-03*, *12-23*, welche sich im Pol *13* treffen, und hierauf die Gerade *13-34*, die ebenfalls den Pol *14* liefert. Demnach ist auch, weil nach S. 47 die Drehgeschwindigkeiten sich umgekehrt wie die Abstände $\overline{01\text{-}14}$, $\overline{04\text{-}14}$ des Pols *14* von den Axen *01*, *04* verhalten, das Verhältniss

$$\frac{\omega_{10}}{\omega_{40}} = \frac{\overline{04\text{-}14}}{\overline{01\text{-}14}} = \nu.$$

Dieses Verhältniss ergiebt sich als positiv oder negativ, je nachdem der Pol *14* des ersten und letzten Rades ausserhalb oder innerhalb der Strecke $\overline{01\text{-}04}$ liegt; denn im ersteren Falle drehen sich diese Räder in gleichem Sinne, im zweiten Falle in entgegengesetztem Sinne. Wollen wir die Doppelräder *2*, *3* nicht verwenden und dasselbe Uebersetzungsverhältniss ν durch zwei um die Axen *01*, *04* rotirende Räder hervorbringen, so müssen wir die beiden Räder *1*, *4* durch zwei andere ersetzen, deren Rollkreise sich in dem Pol *14* berühren, und diese beiden Räder sind entweder beide aussen verzahnt, oder das eine aussen, das andere innen verzahnt, je nachdem der Pol *14* innerhalb oder ausserhalb der Strecke $\overline{01\text{-}04}$ liegt. Werden nur solche Räder angewendet, die mit äusserer Verzahnung versehen sind, dann ist das Uebersetzungsverhältniss positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl der zwischen dem ersten und dem letzten Rade vermittelnden

Räder eine ungerade oder gerade ist. Aus der Constellation der zehn Pole des betrachteten, aus vier Rädern und dem Gestell bestehenden Getriebes können wir auch die Verhältnisse der Drehgeschwindigkeiten je zwei anderer Räder entnehmen; und dasselbe gilt, wenn eine beliebige Anzahl Räder vorhanden ist.

Werden die Doppelräder durch einfache Räder ersetzt, die von altersher Wechselräder heissen und in neuerer Zeit unnöthiger Weise auch Zwischenräder genannt werden, so ergiebt sich, weil bei dieser Anordnung

$$r'_2 = r_2, \quad r'_3 = r_3, \quad . \quad . \quad . \quad r'_{n-1} = r_{n-1}$$

ist, das Uebersetzungsverhältniss

$$\frac{\omega_{10}}{\omega_{n0}} = \frac{r'_n}{r_1},$$

dessen absoluter Werth also unabhängig ist von den Wechselrädern. Demnach wird durch ein zwischen zwei Rädern befindliches Wechselrad nur der Sinn derjenigen Drehung gewechselt, die der directe Eingriff dieser beiden Räder erzeugt.

In Fig. **502** ist ein dreiräderiges Vorgelege gezeichnet. Bei diesem kann das Uebersetzungsverhältniss resp. das Verhältniss der Drehgeschwindigkeiten ω_{10}, ω_{30} der beiden Räder *1*, *3*, welches durch die Formel

$$\frac{\omega_{10}}{\omega_{30}} = \frac{r'_2 \, . \, r'_3}{r_1 \, . \, r_2} = \frac{z'_2 \, . \, z'_3}{z_1 \, . \, z_2}$$

gegeben ist, vermittelst einer einzigen Geraden graphisch bestimmt werden, indem wir die Gerade *12-23* ziehen, die auf der Geraden *01-03* den Pol *13* liefert. Demnach ist

$$\frac{\omega_{10}}{\omega_{30}} = \frac{\overline{03\text{-}13}}{\overline{01\text{-}13}} = \nu.$$

In diesem Falle können wir bei Weglassung des vermittelnden Doppelrades *2* die Räder *1*, *3* durch zwei resp. um dieselben Axen rotirende Räder ersetzen, deren Rollkreise sich in dem Pol *13* berühren, und von diesen Rädern muss, weil der Pol *13* ausserhalb der Strecke *01-03* liegt, das grössere mit innerer Verzahnung, das kleinere mit äusserer Verzahnung versehen sein. Wenn insbesondere die beiden Geraden *12-23*, *01-03* parallel sind, der Pol *13* also im Unendlichen liegt, dann ist in diesem speciellen Falle das Uebersetzungsverhältniss $\nu = +1$, und die Räder *1*, *3* drehen sich mit gleicher Drehgeschwindigkeit in gleichem Sinne. Soll diese Bewegung durch zwei in einander greifende

Räder hervorgebracht werden, so kann dies nur durch die S. 196 erwähnten Parallelräder geschehen.

Es seien in Fig. **503** bei einem dreiräderigen Vorgelege die drei Axen *01*, *02*, *03* nebst dem Uebersetzungsverhältnisse ν gegeben, und wir wollen die Grösse der drei Räder so bestimmen, dass das vermittelnde Rad *2* ein einfaches Rad, also ein Wechselrad ist. Wir construiren deshalb auf der Geraden *01-03* den Pol *13* nach dem Verhältnisse

$$\nu = \frac{\overline{03\text{-}13}}{\overline{01\text{-}13}},$$

machen auf der Geraden *02-01* die Strecke $02\text{-}\eta = 02\text{-}03$ und ziehen durch den Pol *13* zu $03\text{-}\eta$ eine Parallele. Diese schneidet dann die Geraden *02-01*, *02-03* in den Polen *12*, *23*, welche sich in gleichen Abständen von der Axe *02* befinden, und demnach sind durch diese Pole die Rollkreise r_1, r_2, r'_3 bestimmt. Jenes gegebene Uebersetzungsverhältniss ist bei dieser besonderen Anordnung gleich dem Verhältnisse der Radien r'_3, r_1 der gleichbezeichneten Rollkreise; und folglich ist der Pol *13* der äussere Aehnlichkeitspunkt dieser beiden Rollkreise.

Umständlicher ist die Construction des Pols *13*, wenn, wie in Fig. **504**, bei dem dreiräderigen Vorgelege die drei Axen *01*, *02*, *03* sich auf einer Geraden *0* befinden, weil dann alle sechs Pole auf dieser Geraden liegen. Nach dem Satze auf S. 436 bilden diese sechs Pole eine Involution und sind also die Punkte, in denen die Gerade *0* von den sechs Seiten eines vollständigen Vierecks geschnitten wird. Behufs der Construction des Pols *13* verbinden wir daher einen beliebigen Punkt c mit den Axenpunkten oder Polen *01*, *02*, *03*, ziehen von einem beliebigen auf der Geraden *c-02* angenommenen Punkte a aus die Geraden *a-12*, *a-23*, welche die beiden anderen Geraden resp. in den Punkten b, d schneiden, dann bestimmt die Gerade bd als sechste Seite des vollständigen Vierecks $abcd$ auf der Geraden *0* den Pol *13*. Demnach ist das Uebersetzungsverhältniss der Räder *1*, *3* gleich dem Verhältnisse der Strecken $\overline{03\text{-}13}$, $\overline{01\text{-}13}$.

Soll bei dem betrachteten dreiräderigen Vorgelege das vermittelnde Doppelrad durch ein einfaches Rad ersetzt werden und bei unveränderten Axen das Uebersetzungsverhältniss der Räder *1*, *3* dasselbe bleiben, dann nehmen wir behufs der Bestimmung der drei Räder in Fig. **505** einen Eckpunkt c jenes vollständigen Vierecks beliebig und einen zweiten Eckpunkt a^∞

auf der Geraden *c-02* im Unendlichen an. Ferner machen wir auf der Geraden *0* die Strecke *02-h* = *02-03*, ziehen zu *02-c* die Parallele *hi* bis an *c-01* und durch den gegebenen Pol *13* zu *03-i* die Parallele *13-b*, welche die Geraden *c-01*, *c-03* in den Punkten *b*, *d* schneidet; hierauf ziehen wir zu *c-02* durch *b* die Parallele *b-12* oder durch *d* die Parallele *d-23*, welche die Gerade *0* resp. in den Polen *12*, *23* treffen und das Wechselrad *2* sowie die beiden anderen Räder *1*, *3* bestimmen. Denn gemäss dieser Construction wird die Strecke *bd* und die Strecke *12-23* von der Geraden *c-02* halbirt.

Bei dem in Fig. **506** gezeichneten vierräderigen Vorgelege befinden sich die gegebenen vier Axen *01*, *02*, *03*, *04* der vier Räder *1*, *2*, *3*, *4* in der Geraden *0*, welche das Gestell vertritt, und die gegebenen Berührungspunkte der betreffenden Rollkreise dieser vier Räder sind resp. mit *12*, *23*, *34* bezeichnet. Es sind also sieben Pole von den zehn auf der Geraden *0* liegenden Polen des Mechanismus gegeben. Um die noch fehlenden drei Pole *13*, *24*, *14* zu erhalten, nehmen wir auf einer durch *02* gezogenen Geraden die Punkte *a*, *c* beliebig an, ziehen die Geraden *a-12*, *a-23* und *c-01*, *c-03*, welche sich bezichlich in den Punkten *b*, *d* schneiden, und ferner die Gerade *bd*, die auf *0* den Pol *13* liefert. In gleicher Weise ergiebt sich der Pol *24*, indem wir noch die Geraden *c-04*, *d-34* ziehen und deren Schnittpunkt *e* mit *a* verbinden, dann bestimmt die Verbindungsgerade *ae* auf *0* den Pol *24*. Nach demselben Verfahren erhalten wir, weil fünf Seiten des vollständigen Vierecks *abce* durch die fünf Pole *01*, *02*, *04*, *12*, *24* gehen, vermittelst der sechsten Seite *be* desselben auf der Geraden *0* den Pol *14*; und es sind also zu der Bestimmung dieses Pols die Geraden *bd*, *ae* nicht erforderlich. Aus dieser Bestimmungsweise ergiebt sich, dass die zehn auf der Geraden *0* liegenden Pole des fünfgliederigen Mechanismus die zehn Schnittpunkte sind, welche die zehn Seiten eines vollständigen Fünfecks *abcde* mit der Geraden *0* bilden. Durch Fortsetzung dieser Bestimmungsweise erkennt man leicht, dass alle auf einer Geraden liegenden Pole eines *n*-gliederigen Mechanismus die Schnittpunkte sind, welche die Seiten eines vollständigen *n*-Ecks mit dieser Geraden bilden.

200. **Doppelaxige Vorgelege.** Liegen die Axen des ersten und letzten Rades eines Vorgeleges in einer Geraden, lassen wir also z. B. in Fig. **501** die Axe *04* mit der Axe *01* zusammenfallen, dann erhalten wir ein doppelaxiges Vorgelege. In diesem

Falle kann jene graphische Bestimmung des Uebersetzungsverhältnisses nur dann ausgeführt werden, wenn wir die beiden coincidirenden Axen wieder auseinander legen. Soll aus einem dreiräderigen Vorgelege, wie z. B. aus dem in Fig. **502** gezeichneten, ein doppelaxiges Vorgelege gebildet werden, so müssen die Axenabstände $\overline{02\text{-}01}$, $\overline{02\text{-}03}$ gleich sein. In Fig. **507** ist ein dreiräderiges doppelaxiges Vorgelege in Vorder- und Seitenansicht dargestellt. Bei demselben liegen die Axen der beiden Räder *1*, *3* in einer Geraden. Wenn das Rad *1* gedreht wird, so wird durch Vermittelung des Doppelrades *2* das Rad *3* in demselben Sinne wie das Rad *1* gedreht. Dem gemäss ist im betrachteten Falle das Uebersetzungsverhältniss ν positiv, und da

$$\nu = \frac{\omega_{10}}{\omega_{30}} = \frac{r'_2 \cdot r'_3}{r_1 \cdot r_2},$$

ist, ergiebt sich, wenn wir die Drehgeschwindigkeit des Rades *3* im Bezug auf das coaxiale Rad *1* mit ω_{31} bezeichnen, nach der auf S. 478 abgeleiteten Gleichung 2) das Verhältniss:

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{10}} = \frac{1}{\nu} - 1$$

oder

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{10}} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r'_2 \cdot r'_3} - 1.$$

Werden statt der Radien die entsprechenden Zähnezahlen genommen, so folgt

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{10}} = \frac{z_1 \cdot z_2}{z'_2 \cdot z'_3} - 1.$$

Wenn die Rollkreisradien und die Zähnezahlen der Räder *1* und *3* wenig differiren, so dass wir das Doppelrad *2*, wie in Fig. **508**, durch ein einfaches Rad ersetzen können; dann ist, weil $z_2 = z'_2$, das Verhältniss:

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{10}} = \frac{z_1}{z'_3} - 1.$$

Beachten wir, dass die Umdrehungszahl u_{31} für das Rad *3* im Bezug auf das Rad *1* und die Umdrehungszahl u_{10} des Rades *1* in dem Gestell *0* sich wie die Drehgeschwindigkeiten ω_{31}, ω_{10} verhalten, so ist das Verhältniss dieser Umdrehungszahlen:

$$\frac{u_{31}}{u_{10}} = \frac{z_1}{z'_3} - 1.$$

Um die Umdrehungszahl u_{20} des mit z_2 Zähnen versehenen Rades *2* zu erhalten, welcher eine Umdrehung des Rades *3* im Bezug auf das Rad *1* entspricht, setzen wir $u_{31} = 1$; und da die Räder *1*, *2* sich im entgegengesetzten Sinne drehen, ist das Verhältniss

$$\frac{u_{10}}{u_{20}} = -\frac{z_2}{z_1}.$$

Demnach ergiebt sich:

$$u_{20} = \frac{z_1 \cdot z_3'}{z_2 (z_3' - z_1)}.$$

Ist in Fig. **508** beispielsweise das Rad *1* mit $z_1 = 98$, das Rad *3* mit $z_3' = 100$ und das Rad *2* mit $z_2 = 49$ Zähnen versehen, dann erhalten wir

$$\frac{u_{31}}{u_{10}} = -\frac{1}{50}, \quad u_{20} = 100.$$

Hiernach bleibt während einer Umdrehung des Rades *1* das Rad *3* gegen dieses um $\frac{1}{50}$ Umdrehung zurück. Da aber einer Umdrehung des Rades *2* eine halbe Umdrehung des Rades *1* entspricht, so wird bei einer Umdrehung des Rades *2* im Sinne des Pfeiles der mit dem Rade *3* verbundene Zeiger auf dem 100-theiligen Zifferblatte des Rades *1* in der Ziffernfolge um einen Theilstrich fortschreiten. Demnach kann auf dem Zifferblatte die Umdrehungszahl des Rades *2* abgelesen werden. Ein derartig eingerichtetes Räderwerk wird als Zählwerk für Umdrehungszahlen verwendet.

Damit eine möglichst grosse Umdrehungszahl u_{20} gezählt werden kann, wird das Rad *2* auch durch ein mit Schraubenwindungen versehenes Schneckenrad ersetzt, dessen Axe zur Axe der coaxialen Räder *1*, *3* rechtwinkelig ist und deren Schraubenwindungen in diese Räder eingreifen, so dass mit jeder Umdrehung dieses Schneckenrades die Räder *1*, *3* um je einen Zahn gedreht werden. In diesem Falle ist dann $z_2 = 1$ zu setzen; und sind z. B. für die Räder *1*, *3* resp. die Zähnezahlen $z_1 = 100$, $z_3' = 101$, so ist

$$\frac{u_{31}}{u_{10}} = -\frac{1}{101}, \quad u_{20} = 10100.$$

Während 100 Umdrehungen des Schneckenrades *2* wird das Rad *1* im Gestell eine Umdrehung und das Rad *3* im Bezug auf das Rad *1* erst $\frac{1}{101}$ Umdrehung im entgegengesetzten Sinne vollenden, so dass 10100 Umdrehungen des Schneckenrades einer Drehung von *3* auf *1* entsprechen. Wird das Rad *1* ausser der 100-Theilung noch mit einer zweiten inneren 101-Theilung versehen, auf welche der mit dem Rade *3* verbundene Zeiger weist, und wird an dem Gestell eine Spitze befestigt, die auf die 100-Theilung zeigt; dann giebt jener Zeiger die Hunderte und diese Spitze die Einer an.

201. **Das Gehwerk einer Wanduhr.** In Fig. 509, Taf. XXXIV, ist die Seitenansicht des Gehwerkes einer Wanduhr in der gewöhnlichen, altherkömmlichen Anordnung dargestellt. Das treibende Rad z_1 greift in das Trieb z_2' des Doppelrades $z_2' z_2$, dessen Rad z_2 auf das Trieb z_3' des Steigrades z_3 wirkt; und dieses Steigrad wird gemäss der Erörterung in Art. 180 durch den schwingenden Anker A vermittelst des Pendels l successive gehemmt. Dieser Theil des Gehwerkes besteht also aus einem dreiräderigen Vorgelege in Verbindung mit einem Schaltwerke. Die Welle des treibenden Rades z_1 trägt lose aufgesetzt die mit Einkerbungen oder Zacken versehene Rolle R, über welche eine Kette mit einem Gewicht hängt. An dieser Rolle befindet sich ein Sperrrad, in welches ein an das Rad z_1 drehbar angeschlossener Sperrkegel greift, so dass beim Ziehen des Gewichtes die Rolle R mit dem Rade z_1 einstückig vereint ist, und beim Aufzug des Gewichtes das Rad z_1 in Ruhe bleibt. Auf der Welle des treibenden Rades z_1 ist ferner das Doppelrad $z_{II}' z_{II}$ befestigt, welches beziehlich in die beiden coaxialen Räder z_I, z_{III}' eingreift. Das Rad z_I mit hohler Axe trägt den Stundenzeiger h, und auf der durchgehenden Axe des Rades z_{III}' befindet sich der Minutenzeiger m. Diese drei Räder bilden ein doppelaxiges Vorgelege, bei welchem die zugleich mit z_I, z_{II}', z_{II}, z_{III}' bezeichneten Zähnezahlen so gewählt werden müssen, dass für die Uebersetzung vom Rade z_I zum Rade z_{III}' das Verhältniss

$$\frac{z_{II}' \cdot z_{III}'}{z_I \cdot z_{II}} = \frac{1}{12}$$

besteht. Bei der Wanduhr ist eine Ablaufszeit von τ Stunden erforderlich, die mehr als 24 Stunden beträgt, und ferner ist die Länge k der entsprechenden ablaufenden Kette bedingt. Bezeichnen wir mit r den theoretischen Radius der Rolle R, so folgt, weil die Umdrehungszahl dieser Rolle während 12 Stunden gleich $z_I : z_{II}'$ ist, zunächst

$$k = \frac{z_I}{z_{II}'} \cdot \frac{\tau}{12} \cdot 2 r \pi$$

und ferner

$$\frac{z_{II}'}{z_I} = \frac{\tau r \pi}{6 k}.$$

Diese letzte Beziehung braucht nur angenähert erfüllt zu werden;

denn, wenn auch der Radius r gegeben ist, so kann man über die Ablaufszeit τ und die Länge k noch innerhalb gewisser Grenzen verfügen. In Fig. **509** ist das Verhältniss $z_I : z'_{II} = 8 : 1$, und es sind die beigeschriebenen Zähnezahlen $z_I = 56$, $z'_{II} = 7$, $z_{II} = 36$, $z'_{III} = 24$ genommen, welche jene Bedingungen erfüllen.

Das Verhältniss der Uebersetzung von dem Rade z_I, welches den Stundenzeiger trägt, zu dem Steigrade z_3 ist, wenn die Bezeichnung für die betreffenden Räder auch zugleich für die Zähnezahlen derselben genommen wird,

$$\frac{z'_{II} \cdot z'_2 \cdot z'_3}{z_I \cdot z_1 \cdot z_2} = \frac{1}{\mu}.$$

Es macht hiernach das Steigrad z_3 während einer Umdrehung des Rades z_I, also während 12 Stunden, μ Umdrehungen; und jeder Umdrehung des mit z_3 Zähnen versehenen Steigrades entsprechen $2 z_3$ Schwingungen des Ankers oder des Pendels. Dem zufolge ist die Anzahl σ der Pendelschwingungen in einer Stunde:

$$\sigma = \frac{2 \cdot z_I \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}{12 \cdot z'_{II} \cdot z'_2 \cdot z'_3}.$$

Bezeichnen wir nun mit t in Secunden die Zeit, in welcher das Pendel eine Schwingung vollendet, so ergiebt sich:

$$\sigma \cdot t = 3600,$$

und die Zeit einer Pendelschwingung in Secunden ist demnach

$$t = \frac{z'_{II} \cdot z'_2 \cdot z'_3}{z_I \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3} 6 \cdot 3600.$$

Ueber die Zeit t, welche durch die Länge des Pendels bestimmt wird, kann man in der Regel noch verfügen, und dem gemäss können ausser den Zähnezahlen z_I, z'_{II} die übrigen Zähnezahlen in verschiedener Weise zweckmässig gewählt werden[1]). In Fig. **509** sind z. B. die beigeschriebenen Zähnezahlen $z_1 = 72$, $z'_2 = 6$, $z_2 = 66$, $z'_3 = 6$, $z_3 = 39$ aus der Praxis entnommen.

202. **Annäherungsweise Berechnung der Zähnezahlen der Zahnräder bei primzahligem und grosszahligem Uebersetzungsverhältnisse.** Ist das Uebersetzungsverhältniss eines Räderwerkes durch einen

[1]) Die Verhältnisse der Zähnezahlen bei den Uhren sind schon in alten Schriften viel behandelt worden. Oughtred, *Opuscula mathematica*. 1677. Derham, *The Artifical Clock-Maker*. Sec. ed. 1700; deutsch als Anhang in Welper's *Gnomonica*. 1708. Allexandre, *Traité général des horloges*. 1734; deutsch von Berger. 1738.

reducirten Bruch $\frac{a}{b}$ gegeben, dessen Zähler und Nenner also keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, dann kann, wenn die Zahlen a, b nicht gross sind, die Uebersetzung durch zwei Zahnräder bewirkt werden, welche die Zähnezahlen a, b besitzen. Man kann auch diese Zahlen a, b mit einer ganzen Zahl λ multipliciren und den beiden Rädern die Zähnezahlen $a\lambda$, $b\lambda$ ertheilen. Diese Vergrösserung der Zähnezahlen ist nothwendig, wenn die Zahlen a, b als zu klein für die Zähnezahlen der Räder nicht geeignet sind.

Die Zähnezahl eines Rades darf im Verhältnisse zu der Grösse desselben auch nicht zu gross sein, weil bei einer verhältnissmässig grossen Zähnezahl die Zähne des Rades zu klein werden. Wenn nun jene Zahlen a, b so gross sind, dass dieselben als Zähnezahlen bei zwei Zahnrädern, welche das Uebersetzungsverhältniss $a:b$ bewirken sollen, nicht verwendbar sind, so muss der Bruch $\frac{a}{b}$ durch einen möglichst angenähert gleichen Bruch $\frac{m}{n}$ ersetzt werden, dessen Zähler und Nenner kleinere Zahlen sind, die als Zähnezahlen verwendet werden können. Soll das Uebersetzungsverhältniss $a:b$ durch mehrere Räder erzeugt werden, und ist die eine oder jede der Zahlen a, b eine Primzahl, oder sind die Zahlen a, b nicht in solche Factoren zerlegbar, die sich zur Bestimmung der Zähnezahlen dieser Räder eignen; dann muss ein angenähert gleicher Bruch ermittelt werden, dessen Zähler und Nenner eine zweckmässige Zerlegung in Factoren ermöglichen. Um zu erkennen, in welche Factoren eine Zahl zerlegbar oder ob dieselbe eine Primzahl ist, dient die Factorentafel und die Primzahlentafel[1]). Behufs der Ermittelung derartiger Brüche, die einem gegebenen grosszahligen Bruche angenähert gleich sind, hat Brocot[2]) eine neue Methode befolgt und behufs derselben eine praktische Brüchentafel berechnet, deren wichtige Eigenschaften wir zum Zwecke der Anwendung erörtern wollen.

Wir nehmen an, dass zwei reducirte Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, von denen der erstere der grösste sein möge, gegeben sind, und dass ihre Differenz

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}$$

ist, so folgt auch

$$ad - bc = 1.$$

---

[1]) Hülsse, *Sammlung mathematischer Tafeln*. 1849. Taf. V.

[2]) Brocot, *Calcul des rouages par approximation*. 1862. Deutsche Ausgabe: *Berechnungen der Räderübersetzungen*, von dem Verein „Hütte". 1871.

Es sei ferner ein dritter Bruch $\frac{m}{n}$ gegeben, dessen Werth zwischen jenen beiden Brüchen liegt, dann ist in Zeichen:

$$\frac{a}{b} > \frac{m}{n} > \frac{c}{d},$$

also

$$an > bm, \quad dm > cn.$$

Hiernach ergiebt sich die Differenz

$$\frac{a}{b} - \frac{m}{n} = \frac{an - bm}{bn} < \frac{1}{bd},$$

und somit

$$(an - bm)d < n.$$

Da aber $an > bm$ ist und hier nur ganze Zahlen auftreten, so muss $an - bm$ mindestens gleich 1 sein; folglich ist $n > d$, und weil $dm > cn$, ist auch $m > c$. Demnach sind Zähler und Nenner in dem Bruche $\frac{m}{n}$ grösser als in dem Bruche $\frac{c}{d}$.

Es ist die Differenz

$$\frac{m}{n} - \frac{c}{d} = \frac{dm - cn}{dn} < \frac{1}{bd},$$

und somit

$$(dm - cn)b < n.$$

Da nun $dm > cn$, so folgt in analoger Weise wie vorhin, dass $n > b$ ist, und es muss mindestens $n = b + 1$ sein. Demnach ist:

$$dm > (b + 1)c, \quad dm > bc + 1;$$

und beachten wir, dass $ad - bc = 1$ ist, so ergiebt sich $m > a$. Hiernach sind Zähler und Nenner in dem Bruche $\frac{m}{n}$ auch grösser als in dem Bruche $\frac{a}{b}$, und wir erhalten den Satz:

Wenn zwischen zwei Brüchen, deren Differenz gleich dem reciproken Werthe des Productes ihrer Nenner ist, ein dritter Bruch liegt, so sind Zähler und Nenner in diesem Bruche grösser als in jenen beiden Brüchen.

Bilden wir aus jenen beiden Brüchen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ den Bruch $\frac{a+c}{b+d}$, so ist

$$\frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{ab + ad - ab - bc}{b(b+d)} = \frac{1}{b(b+d)},$$

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad + cd - bc - cd}{d(b+d)} = \frac{1}{d(b+d)}.$$

Da diese Differenzen beide positiv und gleich dem reciproken Werthe der Producte der Nenner der betreffenden Brüche sind, so folgt der Satz:

Von allen Brüchen zwischen den Brüchen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, deren Differenz gleich dem reciproken Werthe des Productes ihrer Nenner ist, hat der Bruch $\frac{a+c}{b+d}$ den kleinsten Zähler und Nenner.

Auf diese Beziehung gestützt, hat Brocot die Werthe aller echten Brüche, deren Nenner kleiner als 100 ist, bis auf zehn Decimalstellen berechnet und nach der Grössenfolge in der citirten Brüchentafel geordnet. In dieser Tafel ist die Differenz je zweier auf einander folgender Brüche gleich eins dividirt durch das Product der beiden Nenner; und ferner ist jeder Bruch gleich dem Quotienten aus der Summe der Zähler des vorhergehenden und des nachfolgenden Bruches dividirt durch die Summen beider Nenner.

Ist z. B. das grosszahlige Uebersetzungsverhältniss

$$\frac{821}{1087} = 0{,}75528978\,..$$

gegeben, so findet man in der Brocot'schen Tafel den nächst grösseren Bruch

$$\frac{71}{94} = 0{,}75531914\,..,$$

und der Fehler beträgt $+\,0{,}000030$. Hiernach kann jenes grosszahlige Uebersetzungsverhältniss mit grosser Annäherung durch zwei Räder mit den Zähnezahlen 71 und 94 bewirkt werden.

Soll jenes grosszahlige Uebersetzungsverhältniss, in welchem Zähler und Nenner Primzahlen sind, durch ein dreiräderiges Vorgelege annäherungsweise vermittelt werden, dann brauchen wir nur dem erhaltenen angenäherten Bruche die folgende Form zu geben:

$$\frac{1\,.\,71}{2\,.\,47} = \frac{10\,.\,71}{20\,.\,47}.$$

Die Vergrösserung der kleinen Factoren 1, 2 kann anstatt durch Multiplication mit der Zahl 10, welche wir beispielsweise gewählt haben, auch durch Multiplication mit einer anderen passenden Zahl geschehen. Für die beiden Räder des Doppelrades des Vorgeleges kann man als Zähnezahlen resp. einen Zählerfactor und einen Nennerfactor wählen; und die beiden anderen Factoren liefern dann die Zähnezahlen der beiden einfachen Räder des

Vorgeleges. Da vier Combinationen möglich sind, so giebt es vier verschiedene Anordnungen des dreiräderigen Vorgeleges, durch welches jenes primzahlige und grosszahlige Uebersetzungsverhältniss sehr angenähert bewirkt wird.

Man findet ferner in der Brocot'schen Tafel den nächst kleineren Bruch

$$\frac{37}{49} = 0{,}75510204\ldots,$$

und der Fehler, welcher hier grösser als vorhin ist, beträgt $-0{,}000187$. Die Verwendung zur Bestimmung der Zähnezahlen bei einem dreiräderigen Vorgelege liefert:

$$\frac{1.37}{7.7} = \frac{10.37}{70.7} = \frac{10.37}{14.35}.$$

Durch Addition der Zähler sowie der Nenner beider erhaltenen Brüche bekommen wir den nächst einfachen Bruch

$$\frac{71+37}{94+49} = \frac{108}{143} = 0{,}75524475,$$

mit dem Fehler $-0{,}000045$; und durch Zerlegung in Factoren ergiebt sich für ein dreiräderiges Vorgelege:

$$\frac{108}{143} = \frac{9.12}{11.13}.$$

Um eine grössere Auswahl von Brüchen zu erhalten, die zwischen zwei gegebenen Brüchen liegen und einem gegebenen Bruche angenähert gleich sind, müssen wir noch allgemeinere Beziehungen ableiten. Wir betrachten zwei reducirte Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, von denen der erste der grössere sein möge, als gegeben und bilden aus diesen beiden Brüchen den Bruch $\frac{ax+c}{bx+d}$, in welchem x eine positive Zahl bezeichnet; dann ist:

$$\frac{ax+c}{bx+d} = \frac{a}{b} - \frac{ad-bc}{b(bx+d)}.$$

Dieser Bruch ist, weil $ad > bc$, wenn wir uns für x successive alle positiven Werthe von 0 bis ∞ gesetzt denken, kleiner als $\frac{a}{b}$ und repräsentirt alle zwischen jenen beiden gegebenen Brüchen liegenden Werthe; denn derselbe ist, für $x = 0$, gleich $\frac{c}{d}$, und für $x = \infty$, gleich $\frac{a}{b}$.

Wir nehmen an, ein gegebener Bruch q liege zwischen den beiden gegebenen Brüchen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, und setzen

$$\frac{a}{b} - q = \varepsilon_1, \quad q - \frac{c}{d} = \varepsilon_2;$$

dann folgt, indem wir diese beiden Gleichungen resp. mit $b d \varepsilon_2$, $b d \varepsilon_1$ multipliciren,

$$a d \varepsilon_2 - q b d \varepsilon_2 = b d \varepsilon_1 \varepsilon_2, \qquad - b c \varepsilon_1 + q b d \varepsilon_1 = b d \varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

Durch Subtraction dieser Gleichungen ergiebt sich:

$$a d \varepsilon_2 + b c \varepsilon_1 - q b d \varepsilon_2 - q b d \varepsilon_1 = 0$$

und

$$q = \frac{a d \varepsilon_2 + b c \varepsilon_1}{b d \varepsilon_2 + b d \varepsilon_1} = \frac{a \frac{d \varepsilon_2}{b \varepsilon_1} + c}{b \frac{d \varepsilon_2}{b \varepsilon_1} + d}.$$

Wenn wir zur Vereinfachung $\frac{d \varepsilon_2}{b \varepsilon_1} = k$ setzen, dann ist

$$q = \frac{ak + c}{bk + d}.$$

Jeder von k wenig abweichende Werth x, an die Stelle von k gesetzt, liefert demnach einen Bruch, der dem Bruche q sehr angenähert gleich ist. Hierdurch ist es möglich, mehrere sehr angenäherte Brüche zu erhalten, von denen einzelne eine zweckmässige Zerlegung in Factoren gestatten. Um eine Anwendung zu geben, wollen wir die viel behandelte Uebersetzung bei einer Uhr mit Mondzeiger wählen.

Die synodische Umlaufszeit des Mondes beträgt in mittlerer Zeit 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 2,9 Secunden, und demnach ist das Uebersetzungsverhältniss von einem Rade, welches in einem Tage eine Umdrehung macht, zum Rade des Mondzeigers gleich 29,5305891 : 1. Diese Uebersetzung soll durch ein Vorgelege mit möglichst grosser Annäherung bewirkt werden.

Wir schreiben das gegebene Verhältniss in der Form 29 + 0,5305891 und finden dann in der Brocot'schen Tafel den nächst grösseren Bruch

$$\frac{26}{49} = 0{,}5306122\,\ldots$$

Demnach ergiebt sich der Bruch

$$\frac{29 + \frac{26}{49}}{1} = \frac{1447}{49} = 29{,}5306122,$$

in welchem aber 1447 eine Primzahl ist, und bei welchem der Fehler $+\,0{,}0000231$ beträgt. Der nächst kleinere Bruch in der Brocot'schen Tafel ist

$$\frac{35}{66} = 0{,}5303030\,..$$

Dem zufolge erhalten wir den Bruch

$$\frac{29 + \frac{35}{66}}{1} = \frac{1949}{66} = 9{,}5303030,$$

in welchem 1949 auch eine Primzahl ist, und bei welchem der Fehler $-\,0{,}0002861$ beträgt.

Wir benutzen nun jenen Ausdruck für q, in welchem

$$k = \frac{d\,\varepsilon_2}{b\,\varepsilon_1}, \qquad a = 1447, \qquad b = 49, \qquad \varepsilon_1 = 0{,}0000231,$$
$$c = 1949, \qquad d = 66, \qquad \varepsilon_2 = 0{,}0002861$$

ist, und hiernach ergiebt sich $k = 16{,}68\,..$ Wählen wir nun für k beispielsweise den angenäherten Werth $x = 16{,}5 = \frac{33}{2}$, so erhalten wir den Bruch

$$\frac{ax + c}{bx + d} = \frac{1447\,.\,33 + 1949\,.\,2}{49\,.\,33 + 66\,.\,2} = \frac{51649}{1749} = \frac{13\,.\,29\,.\,137}{3\,.\,11\,.\,53}$$
$$= 29{,}5305889 = 29^T,\ 12^h,\ 44'2,\ 88''.$$

Diese Zerlegung in Factoren führt zu günstigen Zähnezahlen für vierräderige Vorgelege mit dem Fehler $-\,0{,}0000002$, dem die ausserordentlich kleine Abweichung von 0,02 Secunden entspricht; und diese Abweichung ist viel kleiner als die astronomisch beobachtete, tägliche Differenz der besten Glashütter Uhren.

Wenn wir auf die Welle des Stundenzeigerrades, welches täglich zwei Umdrehungen macht, ein zwölfzähniges treibendes Rad des vierräderigen Vorgeleges setzen, müssen wir jenen Bruch mit 2, und ferner Zähler und Nenner desselben mit 4 multipliciren. Demnach erhalten wir:

$$\frac{26\,.\,29\,.\,137}{3\,.\,11\,.\,53} = \frac{104\,.\,29\,.\,137}{12\,.\,11\,.\,53} = \frac{z'_2\,.\,z'_3\,.\,z'_4}{z_1\,.\,z_2\,.\,z_3}.$$

Dieses Beispiel giebt genugsam zu erkennen, wie sehr zweckmässig sich die Brocot'sche Methode erweist, die durch obige einfache Darlegungen erst ein würdiges mathematisches Gewand empfangen hat.

Zuerst hat Huygens[1]) vermittelst Kettenbrüchen die Zähnezahlen annäherungsweise berechnet; denn durch einen Kettenbruch erhält man bekanntlich in gesetzmässiger Fortsetzung Paare von Brüchen, zwischen denen der Werth des betreffenden Bruches in immer engeren Grenzen eingeschlossen wird, aber es ist nicht immer zu erwarten, dass sich unter diesen Brüchen ein solcher befindet, dessen Zähler und Nenner in zweckmässige Factoren zerlegbar sind. Allexandre[2]) zeigte in umständlicher Weise, dass verschiedene erwünschte Brüche mit grösserer Annäherung ermittelt werden können, als es durch Kettenbrüche möglich ist; und die spätere Untersuchung der Kettenbrüche führte zu mannigfachen Brüchen, die zwischen je zwei auf einander folgenden Näherungswerthen eines Kettenbruches liegen[3]). Hiernach entstand als natürliche Folge die Brocot'sche Methode, welche die betreffenden Näherungsbrüche direct aus der Brüchentafel entnimmt und durch einfache Rechnung verschiedene Brüche einschaltet, die einem gegebenen Bruche sehr angenähert gleich sind.

203. **Trochoidische Umlaufgetriebe.** Wird bei einem aus n Rädern bestehenden Vorgelege in Fig. **510**, wo beispielsweise $n = 3$ ist, das eine der Räder 1, n, etwa das Rad 1 festgestellt und das Glied 0, in dem die Axen der Räder gelagert sind, um die feste Axe 01 gedreht, dann erhalten wir ein trochoidisches Umlaufgetriebe, weil die mit dem Rade n verbundenen Punkte Trochoiden in dem festen System 1 beschreiben. Denn ziehen wir um die Punkte 01, $0n$ die Rollkreise π, p, welche sich in dem Pol $1n$, dem Schnittpunkte der Geraden 01-$0n$, 12-$2n$, berühren, so rollt der mit dem Rade n verbunden gedachte Kreis p an dem festen Kreise π. Vermittelst dieses Umlaufgetriebes hat Suardi[4]) die Trochoiden mechanisch gezeichnet, und dasselbe wird auch angewendet, um die mannigfaltig gestalteten Trochoiden auf der Drehbank zu erzeugen[5]). Ein in Fig. **510** an

---

[1]) Huygens, *Opuscula posthuma. Descriptio automati planetarii.* 1728. T. II. p. 151.

[2]) Allexandre, *Traité général des horloges.* 1734. Chap. V.

[3]) Lambert, *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik.* 1770. Th. II. S. 65. — Kausler, *Die Lehre von den continuirlichen Brüchen.* 1803. S. 42.

[4]) Suardi, *Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne.* 1752. p. 99. Dieses Umlaufgetriebe wurde von Suardi „Penna Geometrica" genannt, und daher stammt auch die Benennung „Suardi'sche Feder".

[5]) Vergl. Geissler, *Der Drechsler.* 1801. Theil III. Abth. 2. S. 81. Prechtl, *Technologische Encyclopädie.* 1836. B. 7. S. 248.

dem Rade n befestigter Schreibstift A beschreibt eine Trochoide α, deren Normale A-$1n$ ist. Soll diese Trochoide durch eine Reissfeder aufgezeichnet werden, dann muss die Reissfeder eine tangentiale Führung erhalten; ihre Spaltrichtung muss also beständig senkrecht zur Normalen A-$1n$ stehen. Um dies zu bewirken, wird die Reissfeder an einer im Gliede n drehbaren Axe A centrisch befestigt, die mit dem punktirt gezeichneten Schlitzgliede g fest verbunden ist, dessen Schlitz über einem im Gliede 0 befestigten Zapfen $1n$ gleitet. Das betrachtete Umlaufgetriebe kann, falls der Pol $1n$ nicht im Unendlichen liegt, durch ein einfaches zweiräderiges Umlaufgetriebe ersetzt werden, bei welchem die beiden Räder jene Rollkreise π, p besitzen.

Bezeichnen wir wieder für das Vorgelege mit $\pm \nu$ das Verhältniss der Uebersetzung vom Rade 1 zum Rade n, und ferner mit ω_{10}, ω_{n0} die Drehgeschwindigkeiten der Räder 1, n im Bezug auf das Glied 0, so ist

$$\frac{\omega_{10}}{\omega_{n0}} = \pm \nu.$$

Denken wir uns nun das Glied 0 auf dem festen Rade 1 mit der Drehgeschwindigkeit ω_{01} gedreht, und bezeichnet ω_{n1} die Drehgeschwindigkeit, welche das Rad n dadurch im Bezug auf das feste Rad 1 erhält, dann ist

$$\omega_{10} = -\omega_{01}$$

und

$$\omega_{n0} = \omega_{n1} - \omega_{01}.$$

Hiernach ergiebt sich

$$\frac{-\omega_{01}}{\omega_{n1} - \omega_{01}} = \pm \nu,$$

oder das Verhältniss

$$\frac{\omega_{n1}}{\omega_{01}} = 1 - \frac{1}{\pm \nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha),$$

welches auch gleich dem Verhältnisse der entsprechenden Umdrehungszahlen u_{n1}, u_{01} ist. Diese Formel folgt auch aus der Formel 2) S. 478, wenn wir in derselben $\omega_{10} = -\omega_{01}$ setzen.

Bei dieser allgemeinen Beziehung ist das positive oder negative Vorzeichen des Verhältnisses ν zu nehmen, je nachdem das erste Rad 1 und das letzte Rad n sich im Bezug auf das Glied 0 in gleichem oder in entgegesetztem Sinne drehen; oder je nachdem der Pol $1n$ ausserhalb oder innerhalb der Verbindungsstrecke 01-$0n$ der Axenpunkte des ersten und des letzten Rades liegt. Wenn das sich ergebende Verhältniss jener Drehgeschwindigkeiten

ω_{n1}, ω_{01} positiv ist, dreht sich das Rad n und das Glied 0 in gleichem Sinne, wenn es negativ ist, im entgegengesetzten Sinne [1]).

Für das in Fig. **510** gezeichnete trochoidische Umlaufgetriebe, welches aus drei Rädern besteht, erhalten wir, wenn r_1, r'_2, r_2, r'_3 die Radien der gleichbezeichneten Rollkreise, z_1, z'_2, z_2, z'_3 die Zähnezahlen der betreffenden Räder sind,

$$\pm \nu = \frac{r'_2 \cdot r'_3}{r_1 \cdot r_2} = \frac{z'_2 \cdot z'_3}{z_1 \cdot z_2}$$

und demnach

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = 1 - \frac{r_1 \cdot r_2}{r'_2 \cdot r'_3} = 1 - \frac{z_1 \cdot z_2}{z'_2 \cdot z'_3} \quad \ldots\ldots \quad \beta).$$

Hierin sind, um das richtige Vorzeichen zu erhalten, bei vorkommenden Hohlrädern nach der Regel auf S. 477 die entsprechenden Rollkreisradien oder Zähnezahlen negativ zu nehmen. Ist das vermittelnde Rad 2 ein einfaches, also $r_2 = r'_2$ oder $z_2 = z'_2$, dann ergiebt sich die specielle Formel:

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = 1 - \frac{r_1}{r'_3} = 1 - \frac{z_1}{z'_3} \quad \ldots\ldots \quad \gamma).$$

Um besondere Fälle dieses Umlaufgetriebes hervorzuheben, ist in Fig. **511** ein dreiräderiges trochoidisches Umlaufgetriebe gezeichnet, bei welchem die Rollkreisradien r_1, r'_3 oder Zähnezahlen z_1, z'_3 der Räder 1, 3 sich wie $2:1$ verhalten und das vermittelnde Rad 2 ein einfaches Rad ist. Demnach ist $\nu = \frac{1}{2}$ und

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = -1.$$

Während also das Glied 0 im festen System 1 eine Umdrehung macht, vollendet das Rad 3 in diesem System eine Umdrehung im entgegengesetzten Sinne.

Da ferner

$$\frac{\overline{01\text{-}13}}{\overline{03\text{-}13}} = \frac{1}{\nu} = 2$$

ist, so rollt der Kreis p des Systems 3 in dem festen Kreise π von doppelter Grösse, und dem zufolge beschreibt ein Punkt A dieses Systems nach Art. 18 eine Ellipse α, die in einen Durchmesser des Kreises π übergeht, falls der Punkt A auf dem Kreise p

[1]) Bei den Planetarien werden diese Umlaufgetriebe in mannigfacher Art angewendet. Vergl. Rees, *Cyclopaedia. Art. Planetary Machines.* — Janvier, *Des révolutions des corps célestes par le mécanisme des rouages.* 1812.

liegt[1]). Durch dieses Umlaufgetriebe wird also, wenn der Abstand *A-03* des an dem Rade *3* befestigten Punktes *A* gleich der Strecke $\overline{01\text{-}03}$ ist, eine geradlinig schwingende Bewegung dieses Punktes erzeugt. Das einfache, aus zwei Rädern bestehende Umlaufgetriebe, dessen festes Hohlrad *1* den Rollkreis π und dessen bewegtes Rad *3* den Rollkreis p besitzt, ist oft zur mechanischen Erzeugung der Ellipsen verwendet worden[2]).

Sind in Fig. **512** die Rollkreisradien r_1, r'_3 der beiden Räder *1*, *3* von gleicher Grösse, dann ist $\nu = 1$ und das Verhältniss

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = 0;$$

demnach macht das Rad *3* während der Drehung des Gliedes *0* keine Umdrehung in dem festen System *1* und vollzieht also in demselben eine kreisförmige Parallelbewegung, bei welcher der Pol 13^∞ auf der Geraden *01-03* beständig im Unendlichen liegt. Die Axe *02* des Wechselrades *2* kann sich auch innerhalb der Strecke *01-03* befinden; wir haben aber der Allgemeinheit wegen diese Axe seitlich gelegt, so dass, wenn es erforderlich ist, die Axen *01*, *03* der gleich grossen Räder *1*, *3* beliebig nahe gebracht werden können. Dieses specielle Umlaufgetriebe, welches von Ramelli[3]) stammt und von ihm zur Erzeugung einer kreisförmigen Parallelbewegung angewendet wurde, kann als das Urbild aller späteren allgemeineren Umlaufgetriebe betrachtet werden; wir wollen es deshalb das Ramelli'sche Umlaufgetriebe nennen.

Besteht das Umlaufgetriebe, wie in Fig. **513**, nur aus dem festen Rade *1* und dem um dasselbe laufenden Rade *2*, so ist das Getriebe ein einfaches; und wenn der Pol *12* innerhalb der Strecke *01-02* liegt, also keines von den beiden Rädern ein Hohlrad ist, tritt ν negativ auf.

Es ist demnach

$$\nu = -\frac{r'_2}{r_1},$$

und somit für ein einfaches Umlaufgetriebe mit zwei Vollrädern

$$\frac{\omega_{21}}{\omega_{01}} = 1 + \frac{r_1}{r'_2} = 1 + \frac{z_1}{z'_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta).$$

---

[1]) Siehe Suardi, a. a. O. p. 106.

[2]) Rittershaus, „Ueber Ellipsographen", *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen.* 1874. S. 269.

[3]) Ramelli, *Le diverse et artificiose machine.* 1588. Fig. 188. — *Schatzkammer Mechanischer Künste.* 1620. Fig. 188.

Sind die Rollkreise gleich, ist also $r_1 = r'_2$, dann ergiebt sich in diesem besonderen Falle das Verhältniss der Umdrehungszahlen

$$\frac{u_{21}}{u_{01}} = \frac{\omega_{21}}{\omega_{01}} = 2.$$

Während einer Umdrehung des Armes *0* vollendet hiernach das umlaufende Rad *2* zwei Umdrehungen in gleichem Sinne im Bezug auf das feste Rad *1*.

Ist in Fig. **514** bei dem zweiräderigen Umlaufgetriebe z. B. das feste Rad *1* ein Hohlrad, in welches das Vollrad *2* eingreift, also

$$\nu = + \frac{r'_2}{r_1},$$

so ergiebt sich

$$\frac{\omega_{21}}{\omega_{01}} = 1 - \frac{r_1}{r'_2}.$$

Wenn das Verhältniss $r_1 : r'_2 = 3 : 1$ ist, erhalten wir

$$\frac{u_{21}}{u_{01}} = \frac{\omega_{21}}{\omega_{01}} = -2.$$

Während einer Umdrehung des Armes *0* vollendet demnach das umlaufende Rad *2* zwei Umdrehungen in entgegengesetztem Sinne im Bezug auf das feste Hohlrad *1*. Wird die Axe *02* des umlaufenden Rades *2* in einer zu *01* centrischen, im Hohlrade *1* befindlichen Rinne geführt, dann bleibt nach Wegnahme des Armes *0* die Zwangläufigkeit bestehen, und der Mechanismus geht in einen aus den beiden Rädern *1*, *2* gebildeten elementaren Mechanismus über.

204. **Das Ferguson'sche Umlaufgetriebe.** Bei dem in Fig. **515** dargestellten Umlaufgetriebe greift das Wechselrad *2* einerseits in das feste mit z_1 Zähnen versehene Rad *1* und anderseits in die drei coaxialen Räder *3'*, *3''*, *3'''*, deren Zähnezahlen z'_3, z''_3, z'''_3 wenig differiren. Bezeichnen wir die Umdrehungszahlen dieser drei Räder im Bezug auf das feste Rad *1* resp. mit u'_{31}, u''_{31}, u'''_{31}, und nehmen wir an, es sei

$$z'_3 = z_1 + 1, \quad z''_3 = z_1, \quad z'''_3 = z_1 - 1,$$

so ergeben sich gemäss der Formel γ) die Verhältnisse:

$$\frac{u'_{31}}{u_{01}} = 1 - \frac{z_1}{z_1 + 1} = \frac{1}{z_1 + 1}, \quad \frac{u''_{31}}{u_{01}} = 1 - \frac{z_1}{z_1} = 0,$$

$$\frac{u'''_{31}}{u_{01}} = 1 - \frac{z_1}{z_1 - 1} = - \frac{1}{z_1 - 1}.$$

Hiernach vollzieht bei Drehung des Armes *0* das Rad *3''* im Bezug auf das feste Rad *1* eine kreisförmige Parallelbewegung; das Rad *3'* dreht sich im Bezug auf *1* langsam und in gleichem Sinne wie der Arm *0*, das Rad *3'''* dagegen dreht sich auch langsam im entgegengesetzten Sinne. Infolge dieser Bewegungsvorgänge und wegen der scheinbaren Gleichheit der drei Räder *3'*, *3''*, *3'''* wird dieses dreifache Umlaufgetriebe auch das Paradoxon von Ferguson genannt. In sinnreicher Weise hat Ferguson[1]) dieses Umlaufgetriebe, welches er „Mechanical paradox" nannte, zur Veranschaulichung der Erdstellungen gegen die Sonne und der Veränderung der Mondbahnlage gegen die Ekliptik und die parallelbewegte Erdaxe verwendet.

205. **Doppelaxige Umlaufgetriebe.** Wird bei einem doppelaxigen Vorgelege das eine der beiden coaxialen Räder festgestellt, dann entsteht ein doppelaxiges Umlaufgetriebe, welches David[2]) zuerst in geistvoller Weise zur genauen Uebersetzung bei primzahligem und grosszahligem Verhältnisse mannigfach anwandte. Das doppelaxige Umlaufgetriebe geht also auch aus dem trochoidischen Umlaufgetriebe, Fig. **510**, als Specialfall hervor, wenn bei demselben die Axen *01*, *0n* des ersten Rades *1* und des letzten Rades *n* coincidiren und das Rad *1* als fest betrachtet wird. Demnach gilt auch für das doppelaxige Umlaufgetriebe die auf S. 493 abgeleitete Formel:

$$\frac{\omega_{n1}}{\omega_{01}} = 1 - \frac{1}{\pm\nu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \alpha).$$

Hierin ist das positive oder negative Vorzeichen der Verhältnisszahl ν der Uebersetzung vom Rade *1* zum Rade *n* zu nehmen, je nachdem, wenn wir uns das Glied *0* fest denken, die coaxialen Räder *1*, *n* sich in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne drehen.

---

1) J. Ferguson, *Select Mechanical Exercises.* Sec. edit. 1778. p. 44.

2) Fr. David à S. Cajetano, Augustiner Barfüsser in dem kaiserl. königl. Hofkloster, *Neues Rädergebäude.* Wien. 1791. — — *Neues Rädergebäude mit Verbesserungen und Zusätzen.* Wien und Leipzig. 1793. — — *Praktische Anleitung für Künstler, alle astronomischen Perioden durch brauchbare bisher noch nie gesehene ganz neue Räderwerke mit Leichtigkeit vom Himmel unabweichlich genau auszuführen, sammt Erweiterung der Theorie des neuen Rädergebäudes.* Wien und Leipzig. 1793. Diese historisch interessanten, selten gelesenen Bücher sind sehr rar, und deshalb sei hier erwähnt, dass ich das erste aus der königl. Bibliothek in Dresden und die beiden anderen aus der königl. kaiserl. Universitätsbibliothek in Wien erhalten habe.

Für ein dreiräderiges doppelaxiges Umlaufgetriebe, welches in Fig. **516** dargestellt ist, ergiebt sich gemäss der bisher angewandten Bezeichnungen:

$$\pm \nu = \frac{r'_2 \, . \, r'_3}{r_1 \, . \, r_2} = \frac{z'_2 \, . \, z'_3}{z_1 \, . \, z_2},$$

und folglich

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = 1 - \frac{r_1 \, . \, r_2}{r'_2 \, . \, r'_3} = 1 - \frac{z_1 \, . \, z_2}{z'_2 \, . \, z'_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta).$$

Um das richtige Vorzeichen zu erhalten, sind bei Hohlrädern die entsprechenden Rollkreisradien oder Zähnezahlen negativ zu nehmen.

Dieses doppelaxige Umlaufgetriebe wird sehr oft zur Kraftübersetzung verwendet und dann auch Umlaufvorgelege oder epicyclisches Vorgelege genannt. Wirken in einem Abstande von der Axe *01*, der gleich der Einheit ist, an dem Arme *0* und an dem Rade *3* resp. die Kräfte K_0, K_3, so verhalten sich diese umgekehrt wie die entsprechenden Drehgeschwindigkeiten ω_{01}, ω_{31}, wenn wir den Reibungswiderstand unbeachtet lassen.

Sind beispielsweise bei dem in Fig. **516** aus Vollrädern bestehenden Umlaufgetriebe die Zähnezahlen $z_1 = 101$, $z'_2 = 100$, $z_2 = 99$, $z'_3 = 100$, dann ist das Verhältniss

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = 1 - \frac{101 \, . \, 99}{100 \, . \, 100} = \frac{1}{10000}.$$

Während also der Arm *0* zehntausend Umdrehungen macht, vollendet das Rad *3* eine Umdrehung im gleichen Sinne, und jene Kräfte K_0, K_3 stehen hiernach in dem Verhältnisse 1 : 10000.

Wenn die Rollkreisradien und die Zähnezahlen der beiden coaxialen Räder *1*, *3* des Umlaufgetriebes in Fig. **516** wenig differiren, so dass wir das Rad *2* durch ein einfaches Rad ersetzen können, dann ist $z_2 = z'_2$, und

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = 1 - \frac{z_1}{z'_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \gamma).$$

Ist z. B. $z_1 = 49$, $z'_3 = 50$, so ergiebt sich:

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = \frac{1}{50}.$$

Die Uebersetzung von dem Arme *0* zu dem in gleichem Sinne rotirenden Rade *3* steht also in dem Verhältnisse 50 : 1. Rädergetriebe, bei denen das Verhältniss der Uebersetzung durch eine beliebig klein gewählte Differenz der Zähnezahlen oder Rollkreisradien bestimmt wird, werden auch **Differentialgetriebe** genannt.

Derartige Umlaufgetriebe kann man bei Flaschenzügen und Winden anwenden. Um aber eine zweckmässige Anordnung zu erhalten, lässt man das Rad *2* in zwei coaxiale Hohlräder *1*, *3* eingreifen. Wir betrachten deshalb zunächst das in Fig. **517** dargestellte Umlaufgetriebe, bei welchem die beiden Räder *1*, *3* Hohlräder sind. Weil hier die beiden Rollkreisradien r_1, r'_3 resp. die Zähnezahlen z_1, z'_3 dieser Hohlräder negativ genommen werden, bleibt die obige Formel β) unverändert und ebenso die speciellere Formel γ). Nehmen wir an, dass die Zähnezahlen der Hohlräder in Fig. **517** wenig differiren, und sei wieder $z_1 = 49$, $z'_3 = 50$, so erhalten wir dasselbe Verhältniss der Drehgeschwindigkeiten wie vorhin. Pickering[1]) hat dieses Umlaufgetriebe beim Flaschenzuge und bei der Winde angewendet, aber mit der in Fig. **518** am Flaschenzuge schematisch dargestellten Abänderung, dass das Rad *2* die Axe *01* umschliesst und das Glied *0* durch eine excentrische Nabe vertreten wird, die an der Kraftrolle r_0 angedreht ist. Diese Kraftrolle wird durch eine über dieselbe gehängte, in Einkerbungen greifende Handkette um die in den Flaschenrahmen feste Axe *01* gedreht. Auf der excentrischen Nabe *0* befindet sich ein drehbarer Zahnring *2*, der das Rad *2* vertritt. Derselbe greift in das an dem Flaschenrahmen befestigte Hohlrad *1* und in das auf der Axe *01* drehbare Hohlrad *3*, welches mit der Lastrolle r_3 aus einem Stücke besteht; und über diese Lastrolle wird eine in Einkerbungen greifende Kette gehängt, welche die Last trägt. Bezeichnen r_0, r_3 auch die theoretischen Radien der Kraftrolle und der Lastrolle, ferner v_0, v_3 resp. die Geschwindigkeiten der Handkette und der Lastkette, dann ist

$$v_0 = r_0 \omega_{01}, \qquad v_3 = r_3 \omega_{31},$$

und folglich

$$\frac{v_3}{v_0} = \frac{r_3 \omega_{31}}{r_0 \omega_{01}} = \frac{r_3}{r_0}\left(1 - \frac{z_1}{z'_3}\right).$$

Da sich die Last Q und die Kraft K umgekehrt wie die Geschwindigkeiten v_3, v_0 verhalten, so ergiebt sich:

$$\frac{Q}{K} = \frac{r_0}{r_3} \cdot \frac{z'_3}{z'_3 - z_1}.$$

Hiernach ist, wenn sich die Radien r_0, r_3 beispielsweise wie 2 : 1

---

[1]) *Engineering.* 1868. Jan. p. 55. *Polytechn. Journal.* 1868. B. 188. S. 108.

verhalten und die Zähnezahlen der Hohlräder $z_1 = 49$, $z'_3 = 50$ sind,

$$\frac{Q}{K} = 100,$$

und demnach wird durch diesen Flaschenzug eine hundertfache theoretische Uebersetzung bewirkt. Um dieses Umlaufgetriebe bei einer Winde anzuwenden, braucht man den Flaschenrahmen nur durch das Windengestell, in welchem sich das feste Rad *1* befindet, zu ersetzen, das Rad *3* auf einer Welle zu befestigen, um die sich das lasttragende Seil windet, und die excentrische Nabe *2* vermittelst einer Kurbel zu drehen.

Sehr oft wird die in Fig. **519** gezeichnete Anordnung des Umlaufgetriebes, bei welchem nur das feste Rad *1* ein Hohlrad ist, angewendet. Hier ist dem gemäss der Rollkreisradius r_1 und die Zähnezahl z_1 dieses festen Hohlrades negativ zu nehmen, und wir erhalten somit für diesen Fall die Formel:

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = 1 + \frac{r_1 \cdot r_2}{r'_2 \cdot r'_3} = 1 + \frac{z_1 \cdot z_2}{z'_2 \cdot z'_3}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta_1)$$

oder, wenn das Rad *2*, wie in Fig. **520**, ein einfaches Rad ist

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = 1 + \frac{r_1}{r'_3} = 1 + \frac{z_1}{z'_3} \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad \gamma_1)$$

Das in Fig. **520** dargestellte Umlaufgetriebe mit einfachem Rade *2* ist bei dem nach Barrette benannten Cylindergöpel angewendet[1]). Wenn z. B. $r_1 = 2 \cdot r'_3$ ist, wird während einer Umdrehung des Armes *0* oder während eines Umganges des Pferdes das Rad *3* drei Umdrehungen in gleichem Sinne vollenden.

Stellen wir uns vor, es werden in Fig. **519** ohne Aenderung des Axenabstandes *01-02* die Rollkreisradien r_1, r'_2 bis ins Unendliche vergrössert, dann befindet sich der Pol *12* in allen Lagen der rotirenden Geraden *01-02* auf derselben im Unendlichen, und das Rad *2* vollzieht demnach im Bezug auf das feste System *1* eine kreisförmige Parallelbewegung. Da die unendlich grossen Rollkreisradien r_1, r'_2 nun um die endliche Strecke $\overline{01\text{-}02}$ differiren, so sind dieselben als gleich zu betrachten, und folglich ergiebt sich für diesen besonderen Fall aus der Formel β_1)

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = 1 + \frac{r_2}{r'_3} = 1 + \frac{z_2}{z'_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta_2).$$

[1]) Perels, *Handbuch der Landwirthschaftlichen Maschinen.* 1880. 2. Aufl. B. I. S. 66. Vergl. Rühlmann, *Allgemeine Maschinenlehre.* 1875. B. I. S. 307.

Die kreisförmige Parallelbewegung des Rades *2* im festen System *1* kann vermittelst Räder dadurch bewirkt werden, dass wir in Fig. **521** in das feste System *1* ein festes, dem Rade *3* coaxiales Rad *I* setzen, dessen Radkranz r_I ist, ferner das Rad *2* mit einem zweiten Radkranze r_{II} versehen, so dass diese beiden Radkränze gleich sind, und dann ein in dem Gliede *0* gelagertes Wechselrad ϱ einfügen, welches in diese beiden gleichen Radkränze eingreift. Wenn nun das Glied *0* in dem festen System *1* oder auf dem festen Rade *I* gedreht wird, vollzieht das Rad *2* nach S. 495 eine kreisförmige Parallelbewegung im Bezug auf das feste System *1*. Anstatt durch Räder kann man auch, wie in Art. 211 erörtert wird, die kreisförmige Parallelbewegung des Rades *2* durch ein Parallelkurbelgetriebe oder ein Kreuzkurbelgetriebe erzeugen. Sind in Fig. **521** beispielsweise die beiden Radien r_2, r'_3 gleich, dann ist

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = 2.$$

Während einer Umdrehung des Gliedes *0*, resp. während Vollendung eines Kreislaufes des parallel bewegten Rades *2*, macht das Rad *3* zwei Umdrehungen.

Wenn bei dem betrachteten Umlaufgetriebe das Rad *3* ein Hohlrad, also der Rollkreisradius r'_3 desselben negativ ist, erhalten wir

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{01}} = 1 - \frac{r_2}{r'_3} = 1 - \frac{z_2}{z'_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \beta_3).$$

Es ist theoretisch und historisch interessant, zu erkennen, wie David durch ein doppelaxiges Umlaufgetriebe zuerst die genaue Uebersetzung bei primzahligem und grosszahligem Verhältnisse ermöglichte. Bei einem doppelaxigen Umlaufgetriebe mit dem festen Rade *1* wird das coaxiale Rad n von einem Triebrade g aus vermittelst eines Vorgeleges gedreht. Für das doppelaxige Umlaufgetriebe gilt jene Formel α)

$$\frac{\omega_{n1}}{\omega_{01}} = 1 - \frac{1}{\pm\nu}.$$

Bezeichnen wir mit μ das Verhältniss der Uebersetzung vom Rade g zum Rade n und mit ω_{g1} die Drehgeschwindigkeit des Rades g im Bezug auf das feste Rad *1*, so folgt, weil

$$\frac{\omega_{g1}}{\omega_{n1}} = \mu$$

ist, für das Verhältniss der Uebersetzung vom Rade g zum Gliede *0*:

$$\frac{\omega_{g1}}{\omega_{01}} = \mu\left(1 - \frac{1}{\pm\nu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \delta).$$

Ist nun für diese Uebersetzung ein grosszahliges Verhältniss $a:b$ gegeben, in welchem a auch eine grosse Primzahl sein kann oder eine solche als Factor enthält, dann erhalten wir die Beziehung

$$\mu\left(1 - \frac{1}{\pm\nu}\right) = \frac{a}{b};$$

und in dieselbe

$$\mu = \frac{x}{b},$$

gesetzt, ergiebt sich:

$$\pm\nu = -\frac{x}{a - x}.$$

Wir können nun die Zahl x so wählen, dass wir für μ und ν Brüche erhalten, deren Zähler und Nenner in zweckmässige Factoren zerlegbar sind. Hierdurch ermöglicht David, um nur eins der vielen von ihm behandelten Beispiele anzuführen, die genaue Uebersetzung bei einer Uhr mit synodischem Mondzeiger, der am Gliede 0 befestigt ist und vom Minutenrade g aus vermittelst eines Vorgeleges und eines doppelaxigen Umlaufgetriebes bewegt wird[1]). Die synodische Umlaufszeit t_0 des Mondes gleich 29 Tage 12 Stunden $44'\ 3'' = 2551443$ Secunden gesetzt und die Umlaufszeit t_g des Minutenrades, welche gleich 3600 Secunden ist, liefern das Verhältniss

$$\frac{a}{b} = \frac{t_0}{t_g} = \frac{2551443}{3600},$$

in welchem die Zahl $2551443 = 3 \,.\, 850481$ die grosse Primzahl 850481 als Factor enthält.

Wird erstens für ν das negative Vorzeichen genommen und beispielsweise $x = 10443$ gewählt, so ergiebt sich:

$$\nu = \frac{10443}{2541000} = \frac{3 \,.\, 59 \,.\, 59}{33 \,.\, 10 \,.\, 77 \,.\, 100} = \frac{8 \,.\, 8 \,.\, 59 \,.\, 59}{88 \,.\, 80 \,.\, 77 \,.\, 100},$$

$$\mu = \frac{10443}{3600} = \frac{3 \,.\, 59 \,.\, 59}{12 \,.\, 12 \,.\, 25} = \frac{59 \,.\, 59}{30 \,.\, 40}.$$

Das Uebersetzungsverhältniss ν wird hiernach durch fünf Räder bewirkt, die aber einen positiven Werth für ν geben, dem zufolge muss noch ein Wechselrad eingefügt werden, und somit besteht das Umlaufgetriebe aus sechs Rädern. Das Uebersetzungsverhält-

[1]) Siehe Fr. David à S. Cajetano, *Neues Rädergebäude.* 1791. S. 74.

niss μ vom Minutenrade g nach dem Rade n wird durch ein vermittelndes Doppelrad bewirkt, und demnach sind im Ganzen acht Räder erforderlich.

Wird zweitens für ν das positive Vorzeichen genommen und z. B. $x = -5358$ gewählt, so ergiebt sich:

$$\nu = \frac{5358}{2556801} = \frac{6 \,.\, 19 \,.\, 47}{39 \,.\, 39 \,.\, 41 \,.\, 41} = \frac{8 \,.\, 12 \,.\, 19 \,.\, 47}{78 \,.\, 78 \,.\, 82 \,.\, 82},$$

$$\mu = \frac{5358}{3600} = \frac{3 \,.\, 38 \,.\, 47}{3 \,.\, 30 \,.\, 40} = \frac{38 \,.\, 47}{30 \,.\, 40}.$$

Hiernach besteht das Umlaufgetriebe aus fünf Rädern, welche der Annahme gemäss einen positiven Werth für ν geben, und die Bewegung vom Minutenrade g nach dem Rade n wird durch ein vermittelndes Doppelrad übertragen, demnach sind bei dieser Anordnung im Ganzen sieben Räder erforderlich.

Sehr angenähert, und nicht in der mathematisch strengen, zielverfolgenden Weise wie David, hat auch Mudge vermittelst eines doppelaxigen Umlaufgetriebes jene Uebersetzung bewirkt; aber mit dem Unterschiede, dass Mudge bei diesem Umlaufgetriebe, um die Uebersetzung zu ermöglichen, auch Schneckenräder mit in Anwendung bringt[1]). Später hat auch Pecqueur jene Uebersetzung mit angenähertem Verhältnisse vermittelst eines einfacheren doppelaxigen Umlaufgetriebes ausgeführt[2]). Die Brocot'sche Methode der annäherungsweisen Berechnung der Zähnezahlen hat uns S. 491 gelehrt, dass die betrachtete Uebersetzung ausserordentlich angenähert in einfacherer Weise durch ein vierräderiges Vorgelege bewirkt werden kann, welches leichter herstellbar ist und auch sicherer als ein doppelaxiges Umlaufgetriebe geht.

206. **Doppelwirkige Umlaufgetriebe und Differentialräderwerke.** Wir betrachten in Fig. 522 ein aus n Rädern bestehendes Vorgelege, bei welchem beispielsweise $n = 3$ und das Uebersetzungsverhältniss $\pm \nu$ gegeben ist. Das Vorzeichen von ν ist positiv oder negativ, je nachdem das erste Rad *1* und das letzte Rad n sich in gleichem oder ungleichem Sinne im Bezug auf das Glied *0* drehen, oder es wird auch nach der auf S. 477 gegebenen Regel bestimmt. Dieses Vorgelege setzen wir mit der Axe *01* drehbar

[1]) Th. Mudge, *Description of the Time-Keeper.* 1799. p. 173.

[2]) Pecqueur, Brevet 19 août 1824. *Description des machines* (ohne Druckjahr). T. XXXIX. p. 66.

auf ein festes Gestell α und dadurch erhalten wir ein nicht zwangläufiges Räderwerk. Drehen wir aber das Glied *0* im Gestell α mit einer Drehgeschwindigkeit $\omega_{0\alpha}$ und gleichzeitig das Rad *1* mit einer Drehgeschwindigkeit $\omega_{1\alpha}$ im Gestell α, dann wird durch diese zweifache Drehung das Räderwerk zwangläufig bewegt und in diesem Zustande nennen wir dasselbe ein doppelwirkiges Umlaufgetriebe. Bezeichnen wir mit $\omega_{n\alpha}$ die Drehgeschwindigkeit des Rades n im Bezug auf das Gestell α, so erhalten wir für die Drehgeschwindigkeiten ω_{10}, ω_{n0} der Räder *1*, n im Bezug auf das Glied *0* resp. die Beziehungen

$$\omega_{10} = \omega_{1\alpha} - \omega_{0\alpha}, \qquad \omega_{n0} = \omega_{n\alpha} - \omega_{0\alpha};$$

und da

$$\frac{\omega_{10}}{\omega_{n0}} = \pm \nu$$

ist, ergiebt sich für das doppelwirkige Umlaufgetriebe die fundamentale Formel[1]):

$$\frac{\omega_{1\alpha} - \omega_{0\alpha}}{\omega_{n\alpha} - \omega_{0\alpha}} = \pm \nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I}).$$

Aus dieser allgemeinen Formel können die bei dem vorher betrachteten Umlaufgetriebe erkannten Beziehungen als specielle Fälle abgeleitet werden; aber wir haben diese allgemeine Formel deshalb nicht gleich im Anfang gegeben, weil es für das Verständniss der Bewegungsvorgänge zweckmässig ist, die Ableitung der Verhältnisse der Drehgeschwindigkeiten in den einfacheren Fällen voranzustellen. Wird das Glied *0* am Gestell α befestigt, so ist die Drehgeschwindigkeit $\omega_{0\alpha} = 0$, und das Räderwerk bildet dann ein Vorgelege. Ist das Rad *1* im Gestell α fest, also die Drehgeschwindigkeit $\omega_{1\alpha} = 0$, dann erhalten wir ein trochoidisches Umlaufgetriebe.

Nach jener Formel ist die eine von den drei Drehgeschwindigkeiten durch die beiden anderen bestimmt, und es ergiebt sich:

$$\omega_{1\alpha} = \pm \nu (\omega_{n\alpha} - \omega_{0\alpha}) + \omega_{0\alpha} = \pm \nu \omega_{n\alpha} - (\pm \nu - 1)\omega_{0\alpha} \quad . \quad . \quad \mathrm{II}),$$

$$\omega_{0\alpha} = \frac{\pm \nu \omega_{n\alpha} - \omega_{1\alpha}}{\pm \nu - 1} = \frac{\pm \nu \, . \, \omega_{n\alpha}}{\pm \nu - 1} - \frac{\omega_{1\alpha}}{\pm \nu - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{III}),$$

$$\omega_{n\alpha} = \frac{\omega_{1\alpha} - \omega_{0\alpha}}{\pm \nu} + \omega_{0\alpha} = \frac{\omega_{1\alpha}}{\pm \nu} + \left(1 - \frac{1}{\pm \nu}\right)\omega_{0\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{IV}).$$

---

[1]) In dieser Gestalt ist diese Formel in Willis, *Principles of mechanism.* 1841. Art. 408 gegeben; in anderer Gestalt aber schon in Lanz und Bétancourt, *Zusammensetzung der Maschinen,* deutsch von Kreyher. 1829. S. 94 mitgetheilt.

Soll das Rad n im Gestell α eine kreisförmige Parallelbewegung vollziehen, so muss die Drehgeschwindigkeit $\omega_{n\alpha} = 0$ sein, und es stehen demnach in diesem Falle die Drehgeschwindigkeiten $\omega_{1\alpha}$, $\omega_{0\alpha}$ in dem Verhältnisse

$$\frac{\omega_{1\alpha}}{\omega_{0\alpha}} = -(\pm \nu - 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{a).}$$

Aus der Formel IV) ergiebt sich, falls $\nu = +1$ ist,

$$\omega_{n\alpha} = \omega_{1\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{b).}$$

Bei dieser Anordnung ist also die Drehung des Rades n im Bezug auf das Gestell α von der Drehung des Gliedes *0* unabhängig, und dieselbe Drehung, welche das Rad *1* vollzieht, wird auch dem Rade n im Bezug auf das Gestell α ertheilt.

Sehr wichtig für die Praxis ist die von Pecqueur zuerst gegebene specielle Anordnung dieses Umlaufgetriebes, bei welchem die Axe des Rades n mit der im Gestell α gelagerten Axe *01* coincidirt, so dass das Glied *0* und die n Räder ein doppelaxiges Vorgelege bilden[1]). Es drehen sich dann das Rad *1*, sowie das Rad n und das Glied *0* um die gemeinsame Axe *01* in dem festen Gestell α. Demnach ist das Räderwerk ein dreifach-coaxiales doppelwirkiges Umlaufgetriebe, und als solches wird es in der Praxis ein Differentialräderwerk genannt, weil die Drehgeschwindigkeit ω_{1n} des Rades *1* im Bezug auf das coaxiale Rad n der Differenz der Drehgeschwindigkeiten $\omega_{1\alpha}$, $\omega_{0\alpha}$ des Rades *1* und des Gliedes *0* proportional ist. Denn es ist

$$\omega_{1n} = \omega_{1\alpha} - \omega_{n\alpha}$$

und daher folgt aus der Formel IV) die Beziehung:

$$\omega_{1n} = \omega_{1\alpha} - \frac{\omega_{1\alpha}}{\pm \nu} - \left(1 - \frac{1}{\pm \nu}\right)\omega_{0\alpha},$$

$$\omega_{1n} = \left(1 - \frac{1}{\pm \nu}\right)(\omega_{1\alpha} - \omega_{0\alpha}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{V).}$$

In der Praxis wird meistens die Anzahl der Räder $n = 3$ genommen, und deshalb ist in Fig. **523** ein dreifach-coaxiales doppel-

---

[1]) Vergl. Pecqueur, Brevet 19 août 1824. *Description des machines* (ohne Druckjahr). T. XXXIX. p. 66; und übersetzt in Demme, *Der praktische Maschinenbauer*. 1842. Lieferung 9. S. 20. Die Anordnung von Pecqueur ist eine Umformung eines früheren derartigen Umlaufgetriebes mit Bandtrieb, welches schon in Lanz et Bétancourt, *Essais sur la composition des machines*. 1808. p. 63. Fig. R, 8 vorkommt.

wirkiges Umlaufgetriebe gezeichnet, welches im Wesentlichen aus den beiden Rädern *1*, *3* und dem Doppelrade *2-2'* besteht. Das Rad *1* ist auf der im Gestell α gelagerten Welle W_1 befestigt und das Rad *3* ist mit seiner Nabe c lose auf dieselbe gesetzt. Die Axe *02* des umlaufenden Doppelrades *2-2'* ist in das ebenfalls auf der Welle W_1 lose rotirende Rad *0* gelagert, welches jenes Glied *0* vertritt und von dem auf einer Welle W_I sitzenden, im Gestell α drehbaren Rade *I* getrieben wird. Wenn nun die Welle W_1 und die Welle W_I des Rades *I* gleichzeitig in Drehung versetzt werden, dann ist das Umlaufgetriebe zwangläufig. Bezeichnen wir wieder mit r_1, r'_2, r_2, r'_3 die Rollkreisradien und mit z_1, z'_2, z_2, z'_3 die zugehörigen Zähnezahlen der Räder *1*, *2'*, *2*, *3*, so ist das Uebersetzungsverhältniss

$$\pm\, \nu = \frac{r'_2 \,.\, r'_3}{r_1 \,.\, r_2} = \frac{z'_2 \,.\, z'_3}{z_1 \,.\, z_2},$$

und das Vorzeichen wird dadurch bestimmt, dass bei auftretenden Hohlrädern die entsprechenden Rollkreisradien und Zähnezahlen negativ genommen werden. Hiernach erhalten wir für die Drehgeschwindigkeit ω_{13}, mit welcher das Rad *1* im Bezug auf das Rad *3* rotirt,

$$\omega_{13} = \left(1 - \frac{r_1 \,.\, r_2}{r'_2 \,.\, r'_3}\right)(\omega_{1\alpha} - \omega_{0\alpha}) = \left(1 - \frac{z_1 \,.\, z_2}{z'_2 \,.\, z'_3}\right)(\omega_{1\alpha} - \omega_{0\alpha}) \,.\,.\, \text{VI}).$$

Ist beispielsweise in Fig. **523**, wo nur Vollräder auftreten, $z'_2 \,.\, z'_3 = 2 \,.\, z_1 \,.\, z_2$, also $\nu = 2$, dann ergiebt sich:

$$\omega_{13} = \frac{1}{2}(\omega_{1\alpha} - \omega_{0\alpha}).$$

In Fig. **524** ist das Rad *3* ein Hohlrad; der Radius r'_3 resp. die Zähnezahl z'_3 erhält also das negative Vorzeichen, und demnach ist

$$\omega_{13} = \left(1 + \frac{r_1 \,.\, r_2}{r'_2 \,.\, r'_3}\right)(\omega_{1\alpha} - \omega_{0\alpha}) = \left(1 + \frac{z_1 \,.\, z_2}{z'_2 \,.\, z'_3}\right)(\omega_{1\alpha} - \omega_{0\alpha}) \,.\,.\, \text{VII}).$$

Ist z. B. in der betrachteten Anordnung $z_1 \,.\, z_2 = z'_2 \,.\, z'_3$ oder auch

$$\frac{r_1}{r'_2} = \frac{r'_3}{r_2},$$

so dass also die Pole *12*, *23* zu den Axen *01*, *02* harmonisch liegen, dann vollziehen, wenn wir uns das Rad *0* festgehalten denken, die Räder *1*, *3* gleiche entgegengesetzte Drehungen im

Bezug auf das Rad *0*, es ist also $\nu = -1$, und wir erhalten in diesem Falle

$$\omega_{13} = 2(\omega_{1\alpha} - \omega_{0\alpha}).$$

Diese Beziehung tritt auch auf, wenn wir gleiche Kegelräder anwenden. Die Kegelräder werden zwar erst im zweiten Bande dieses Buches behandelt, aber wir wollen diese Anordnung mit Kegelrädern, weil sie leicht verständlich ist, hier der Vollständigkeit wegen mit erwähnen. In Fig. **525** ist das Kegelrad *1* auf der im Gestell α gelagerten Triebwelle W_1 fest, und auf dieser Triebwelle ist das gleich grosse Kegelrad *3* sowie das Stirnrad *0* lose drehbar. In dem Stirnrade *0* ist die Axe des umlaufenden Kegelrades *2* radial gelagert und wegen der Ausgleichung der Massen ist noch ein gleiches zweites Kegelrad *2'* in derselben Weise eingesetzt. Die beiden umlaufenden Kegelräder *2*, *2'* greifen beiderseits in die Kegelräder *1*, *3*; und da diese gleich sind, so sind die Drehungen der Kegelräder *1*, *3* im Bezug auf das Stirnrad *0* entgegengesetzt gleich. Es ist also das Uebersetzungsverhältniss $\nu = -1$, und folglich ergiebt sich nach der Formel V) auch bei dieser Anordnung

$$\omega_{13} = 2(\omega_{1\alpha} - \omega_{0\alpha}).$$

Werden ungleiche Kegelräder *1*, *3* verwendet, dann muss man entweder das einfache Kegelrad *2* durch ein Doppelkegelrad ersetzen, oder es muss die Axe des einfachen Kegelrades *2* im Stirnrade schräg gelagert sein[1]).

Die betrachteten Umlaufgetriebe oder Differentialräderwerke werden mannigfaltig gestaltet in der Praxis angewendet, und Pecqueur hat in klarer Erkenntniss auf alle diese Anwendungen zuerst hingewiesen[2]). Denken wir uns in Fig. **523** oder **525** das Rad *1* durch eine Maschine, das Rad *3* durch ein Uhrwerk bewegt, und ist die Anordnung derart, dass bei normalem, gleichförmigem Gange der Maschine durch diese beiden Bewegungen das Rad *0* in Ruhe bleibt, also $\omega_{0\alpha} = 0$ ist, dann wird, falls die Maschine einen rascheren oder langsameren Gang annimmt, das Rad *0* in dem einen oder anderen Sinne gedreht. Vermittelst dieser Drehung des Rades *0* kann, wenn die Maschine durch Dampf oder Wasser getrieben wird, die Zuströmung des Dampfes resp. des Wassers entsprechend regulirt werden. Auf diesem Princip

---

[1]) Bock, „Ueber Differential-Räderwerke". *Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure.* 1879. B. 23. S. 411. Herrmann's *Bericht über den Selfactor* von Rieter daselbst. 1874. B. 18. S. 215.

[2]) Siehe Pecqueur, Brevet 19 août 1824 a. a. O.

beruhen die Differentialregulatoren oder Pendelregulatoren von Perpigna[1]) und Cohen-David-Sciama[2]).

Das Differentialräderwerk kann als Dynamometer verwendet werden, wenn wir in Fig. **525** das Rad *0* durch einen Hebel ersetzen, in dem einerseits die Axe des Kegelrades *2* gelagert ist und der anderseits ein Laufgewicht trägt. Wird nun der Hebel zunächst festgestellt, wird ferner das Kegelrad *1* durch einen Motor bewegt und das Kegelrad *3* in treibende Verbindung mit einer Arbeitsmaschine gesetzt, so überträgt sich die Wirkung des Motors durch die drei Kegelräder auf die Arbeitsmaschine. Wenn hierauf der Hebel wieder losgelöst und der Angriffspunkt des Laufgewichtes auf demselben so gewählt wird, dass der Hebel während der Uebertragung der Bewegung vom Motor auf die Arbeitsmaschine im Gleichgewicht bleibt, dann wird durch diese Abwägung der Effect bestimmt, den der Betrieb der Arbeitsmaschine erfordert. Anstatt des Laufgewichtes kann auch eine Feder als Messung dienen. Auf diesem Princip beruht das Dynamometer von White[3]) und das mit diesem gleichartige Dynamometer von Batchelder[4]). In der Anordnung, welche Fig. **526** darstellt mit zwei diametralen, einfachen Umlaufrädern, die in das Vollrad *1* und das Hohlrad *3* eingreifen, ist das Differentialräderwerk bei dem Hartig'schen Dynamometer[5]) angewendet.

Um beim Aufziehen eines durch Gewicht getriebenen Uhrwerkes den Gang desselben nicht zu stören, ist das Differentialgetriebe in der Fig. **526** gegebenen Gestalt bei der Aufzugvorrichtung am Uhrwerk des Appel'schen Refractors[6]) angewendet. Auf der Welle *01*, um welche das Hohlrad *3* und das Glied *0* sich lose drehen, ist das Rad *1* und ein Sperrrad befestigt, so dass die Welle *01* und das Rad *1* im Gestell festgehalten werden. Das Glied *0*, in dem die Axen der beiden umlaufenden Räder *2*, *2'* gelagert sind, ist mit einer Schnurrolle verbunden, an deren aufgewundener Schnur ein Gewicht zieht. Dadurch wird das Glied *0* und ver-

---

[1]) *Specification* No. 11270 vom 29. Juni 1846. — *London Journal of Arts. Sciences and Manufactures.* 1847. p. 106. — *Polytechnisches Centralblatt.* 1847. S. 1435.

[2]) Bericht von Collon im *Bulletin de la Société d'encouragement.* 1851. Année 50 p. 376. Auszug im *Polytechnischen Centralblatt.* 1851. S. 1345.

[3]) *Bulletin de la Société d'encouragement.* 1828. Année 27. p. 248.

[4]) *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen.* 1843. S. 216.

[5]) *Polytechnisches Centralblatt.* 1857. S. 1 und 1861. S. 1.

[6]) *Zeitschrift für Instrumentenkunde.* 1886. S. 17.

mittelst der Räder *2*, *2'* das Hohlrad *3* gedreht; und dieses Hohlrad ist noch mit einem äusseren Zahnkranze versehen, der das Räderwerk der Uhr treibt. Wird nun die Welle *01* mit dem Rade *1* in dem durch das Sperrrad bedingten Sinne gedreht, so wird vermittelst der Räder *2*, *2'* die Drehung des Gliedes *0* resp. der Schnurrolle bewirkt, auf welche sich dem gemäss die Schnur aufwindet, ohne die Wirkung des Gewichtes auf das Hohlrad *3* zu beeinflussen.

Eine besonders wichtige und weitverbreitete Anwendung hat das Differentialräderwerk bei den Spinnmaschinen gefunden, um die Aufwindung des Garnes von der Flügelspindel auf die Spule zu regeln. Die Drehung der Flügelspindel wird in Fig. **523** oder **525** durch die Welle W_1 und die Drehung der Spule durch die Welle W_I, deren Rad *I* in das Rad *0* eingreift, bewirkt; demnach wird die Geschwindigkeit der Aufwindung durch die Differenz $\omega_{1\alpha} - \omega_{0\alpha}$ bedingt. Da aber mit der Anfüllung der Spule ihr Durchmesser sich vergrössert, so muss behufs der Erhaltung einer constanten Geschwindigkeit der Aufwindung die Drehgeschwindigkeit der mit der Spule in gleichem Sinne rascher rotirenden Flügelspindel im Bezug auf die Spule verkleinert werden; und dies geschieht dadurch, dass vermittelst Konentrieb (Art. 173 und 174) die Drehgeschwindigkeit $\omega_{0\alpha}$ des Rades *0* entsprechend vergrössert wird. Das Differentialräderwerk wurde in der Gestalt, wie es in Fig. **525** dargestellt ist, von Houldsworth in der erläuterten, sinnreichen Weise bei den Spinnmaschinen angewendet[1]).

207. **Räderwerk mit synodischem Mondzeiger von Perrelet**[2]). Nachdem zuerst David und später Pecqueur, wie S. 503 erwähnt ist, die genaue Erzeugung des synodischen Mondumlaufes durch ein doppelaxiges Umlaufgetriebe ermöglicht hatten, zeigte auch Perrelet, wie dies durch ein doppelwirkiges Umlaufgetriebe geschehen kann. Das Gestell dieses Umlaufgetriebes ist in Fig. **527** mit α bezeichnet. Die beiden Räder z_1, z_I sind auf der Welle *1* befestigt, die den Mondzeiger *M* trägt. Das Rad z_1 greift in den Zahnkranz oder das Trieb z'_2 des Doppelrades $z'_2 z_2$, dessen Zahnkranz z_2 das Doppelrad $z'_3 k_3$ treibt, welches aus dem Triebe z'_3 und dem Kegelrade k_3 besteht. In gleicher Anordnung

[1]) Houldsworth, *Specification* No. 5316 vom 16. Januar 1826. *Polytechnisches Journal*. 1828. B. 30. S. 89.

[2]) Bericht von Francoeur im *Bulletin de la Société d'encouragement*. 1823. Année 22. p. 202. Ferner im *Dictionnaire technologique*. 1828. T. XIV. p. 430.

greift das Rad z_I in den Zahnkranz z'_{II} des Doppelrades $z'_{II} z_{II}$, dessen Zahnkranz z_{II} das Doppelrad $z'_{III} k_{III}$ treibt, welches aus dem Triebe z'_{III} und dem Kegelrade k_{III} gebildet ist. Die beiden Doppelräder $z'_3 k_3$, $z'_{III} k_{III}$ drehen sich lose auf der Welle 0, an welcher der Stundenzeiger S und der Arm H befestigt ist. Auf diesem Arme dreht sich das Kegelrad k_0, welches in die beiden Kegelräder k_3, k_{III} eingreift. Perrelet hat nach alter Herstellungsweise ein Stirnrad k_0 mit zwei Kammrädern k_3, k_{III} in Eingriff gesetzt. Bezeichnen wir mit $\omega_{3\alpha}$, $\omega_{III\alpha}$ resp. die Drehgeschwindigkeiten der Doppelräder $z'_3 k_3$, $z'_{III} k_{III}$ und ferner mit $\omega_{0\alpha}$ die Drehgeschwindigkeit der Welle 0 oder des auf derselben befestigten Stundenzeigers S, so folgt, weil die Kegelräder k_3, k_{III} gleich sind und sich bei fest gedachtem Arme H entgegengesetzt drehen, dass das Uebersetzungsverhältniss ν von k_3 zu k_{III} gleich -1 ist; und nach der Formel I) S. 504 ergiebt sich, indem wir $\nu = -1$ setzen,

$$\frac{\omega_{3\alpha} - \omega_{0\alpha}}{\omega_{III\alpha} - \omega_{0\alpha}} = -1,$$

und folglich

$$\omega_{0\alpha} = \frac{1}{2}(\omega_{3\alpha} + \omega_{III\alpha}).$$

Wählen wir nun für die Zähnezahlen dieselbe Bezeichnung wie für die Zahnkränze oder die Räder, so ist, wenn $\omega_{1\alpha}$ die Drehgeschwindigkeit des Mondzeigers M oder der Welle 1 bezeichnet, auf der die beiden Räder z_1, z_I befestigt sind,

$$\frac{\omega_{1\alpha}}{\omega_{3\alpha}} = \frac{z'_2 \cdot z'_3}{z_1 \cdot z_2}, \qquad \frac{\omega_{1\alpha}}{\omega_{III\alpha}} = \frac{z'_{II} \cdot z_{III}}{z_I \cdot z_{II}}.$$

Die Umlaufszeiten t_0, t_1 der Zeiger S, M verhalten sich umgekehrt wie die Drehgeschwindigkeiten $\omega_{0\alpha}$, $\omega_{1\alpha}$ dieser Zeiger, und demnach ergiebt sich

$$\frac{t_1}{t_0} = \frac{\omega_{0\alpha}}{\omega_{1\alpha}} = \frac{1}{2}\left(\frac{z_1 \cdot z_2}{z'_2 \cdot z'_3} + \frac{z_I \cdot z_{II}}{z'_{II} \cdot z'_{III}}\right).$$

Die mittlere synodische Umlaufszeit t_1 des Mondes resp. des Mondzeigers M beträgt $29^T\ 12^h\ 44'\ 3''$, und die Umlaufszeit des Stundenzeigers S ist gleich 12^h, somit ist, beide Umlaufszeiten in Secunden ausgedrückt, das Verhältniss

$$\frac{t_1}{t_0} = \frac{2551443''}{43200''} = \frac{850481}{14400}.$$

Um eine Gruppe von Zähnezahlen zu erhalten, durch welche dieses Verhältniss geliefert wird, zerlegen wir diesen Bruch, dessen

Zähler 850481 eine Primzahl ist, in zwei Brüche, die reducirt werden können, in folgender Weise:

$$\frac{t_1}{t_0} = \frac{800000}{14400} + \frac{50481}{14400} = \frac{2000}{36} + \frac{5609}{1600} = \frac{40\,.\,50}{6\,.\,6} + \frac{79\,.\,71}{32\,.\,50}.$$

Hiernach ist

$$\frac{t_1}{t_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{80\,.\,50}{6\,.\,6} + \frac{79\,.\,71}{32\,.\,25}\right),$$

und wir erhalten die Zähnezahlen:

$$z_1 = 80, \quad z_2 = 50, \quad z_2' = 6, \quad z_3' = 6,$$
$$z_I = 79, \quad z_{II} = 71, \quad z_{II}' = 32, \quad z_{III}' = 25.$$

Für das Auffinden verschiedener Gruppen von Zähnezahlen, welche das durch einen reducirten grosszahligen Bruch gegebene Uebersetzungsverhältniss hervorbringen, kann eine allgemeine Methode angegeben werden, wenn wir voraussetzen, dass der Nenner des betreffenden Bruches in Factoren zerlegbar ist. Wir setzen demnach, um einen gegebenen Bruch $\frac{h}{g}$ durch die Summe zweier zweckmässiger Brüche darzustellen,

$$g = a\,b\,c, \qquad h = a\,x + b\,y,$$

wo a, b, c ganze Zahlen und x, y noch zu bestimmende, ebenfalls ganze Zahlen bedeuten. Hiernach erhalten wir:

$$\frac{h}{g} = \frac{a\,x + b\,y}{a\,b\,c} = \frac{x}{b\,c} + \frac{y}{a\,c}.$$

Für obigen Bruch

$$\frac{h}{g} = \frac{850481}{14400}$$

ist z. B.

$$g = 14400 = 1600\,.\,9\,.\,1, \quad \text{also} \quad a = 1600, \quad b = 9, \quad c = 1,$$

und somit erhalten wir die Gleichung:

$$h = 1600\,.\,x + 9\,.\,y = 850481$$

oder

$$y = \frac{850482 - 1}{9} - \frac{1602x - 2x}{9} = 94498 - 178x + \frac{2x - 1}{9}.$$

Nach dieser diophantischen Gleichung entspricht jeder ganzen Zahl x, die eine durch 9 theilbare Zahl $2x - 1$ liefert, eine ganze Zahl y. Setzen wir z. B. $x = 500$, so ergiebt sich $y = 5609$, und wir erhalten:

$$\frac{850481}{14400} = \frac{500}{9.1} + \frac{5609}{1600.1} = \frac{2000}{36} + \frac{5609}{1600} = \frac{40.50}{6.6} + \frac{79.71}{32.50},$$

oder die Gleichung

$$\frac{t_1}{t_0} = \frac{h}{g} = \frac{850481}{14400} = \frac{1}{2}\left(\frac{80 \,.\, 50}{6 \,.\, 6} + \frac{79 \,.\, 71}{32 \,.\, 25}\right),$$

aus welcher dieselbe Gruppe der Zähnezahlen hervorgeht, die Perrelet angewendet hat. In gleicher Weise ergiebt sich durch die Wahl einer anderen passenden Zahl für x eine andere Gruppe von Zähnezahlen; und ferner ergeben sich wieder andere Gruppen von Zähnezahlen, wenn wir jenen Nenner g in andere Factoren zerlegen. Ist aber auch der Nenner g ebenso wie der Zähler h eine grosse Primzahl, dann kann die genaue Uebersetzung bei dem grosszahligen und primzahligen Verhältnisse durch Vereinigung zweier derartiger Räderwerke ermöglicht werden. Anstatt der Kegelräder kann man auch, wie in Art. 206 erörtert wurde, Cylinderräder anwenden, welche das Uebersetzungsverhältniss $\nu = -1$ liefern.

208. **Rädergehänge.** Um in Fig. **528** die Bewegung von einem Rade *1* mit einer im Gestell α gelagerten festen Axe *01* auf ein Rad *5* mit beweglicher Axe *0'5* zu übertragen, so dass durch beliebige Lagenänderung dieser beweglichen, zu sich selbst parallel bleibenden Axe die Drehung des Rades um dieselbe im Bezug auf das Gestell α nicht beeinflusst wird, werden die Lagerglieder *0*, *0'* zweier Vorgelege durch die Axe *00'* eines vermittelnden Rades *3* gelenkig verbunden und die Rollkreisradien in bestimmte Beziehung gebracht. Ein derartiges Räderwerk, welches in den Spinnereimaschinen zur Uebertragung der rotirenden Bewegung nach den auf- und niedergehenden Spulen angewendet wird, heisst ein Rädergehänge. Denken wir uns das Rad *1* im Gestell α festgehalten und die Axe *0'5* des Rades *5*, so weit es das Gelenk gestattet, beliebig bewegt, dann muss, wenn diese Bewegung die Uebertragung der Drehung auf das Rad *5* nicht beeinflussen soll, das Rad *5* im Bezug auf das festgehaltene Rad *1* eine Parallelbewegung vollziehen, es muss also der Pol *15* stets im Unendlichen liegen. Dieser Pol *15* ergiebt sich aber als Schnittpunkt, den die Normale *0'5-15* an der vom Punkte *0'5* beschriebenen Curve χ mit der Verbindungsgeraden *13-35* der Pole *13*, *35* bildet. Da nun die Normale *0'5-15* wegen der beliebigen Bewegung der Axe *0'5* jede beliebige Richtung annehmen kann und der Pol *15* sich stets im Unendlichen befinden soll, so muss die Verbindungsgerade *13-35* im Unendlichen liegen, und dem zufolge müssen auch die resp. auf den Geraden *01-03*, *0'3-0'5* befindlichen Pole *13*, *35* im Unendlichen liegen. Dies findet statt, wenn das

Verhältniss der Uebersetzung vom Rade *1* zum Rade *3*, sowie das Verhältniss der Uebersetzung vom Rade *3* zum Rade *5* gleich $+1$ ist. Hieraus folgt der Satz:

Bei dem Rädergehänge müssen die Uebersetzungsverhältnisse vom ersten Rade *1* zum Rade *3*, welches sich um die Gelenkaxe dreht, und vom Rade *3* zum letzten Rade *5* beide gleich $+1$ sein.

Zur Erlangung dieser gleichen Uebersetzungsverhältnisse kann die Bewegung vom ersten Rade *1* zum Rade *3* und von diesem zum letzten Rade *5* durch je eine beliebige ungerade Anzahl Räder vermittelt werden. In Fig. **528** ist z. B. zwischen *1* und *3* ein Doppelrad *2*, ebenso zwischen *3* und *5* ein Doppelrad *4* eingesetzt. Um diese beiden Doppelräder zu ermitteln, wenn die Rollkreise der drei Räder *1*, *3*, *5*, welche die Pole *12*, *23*, *34*, *45* bestimmen, gegeben sind, brauchen wir nur die Axen *02*, *0'4* dieser Doppelräder zu construiren. Behufs der Bestimmung der Axe *02* nehmen wir einen Punkt *a* als einen Eckpunkt eines vollständigen Vierecks *abcd* beliebig an, etwa auf der Geraden *0'*; ziehen zur Geraden *0* eine beliebige Parallele *bd*, die also den unendlich fernen Pol *13* enthält und die Geraden *a-01*, *a-03* in den Punkten *b*, *d* schneidet; ziehen ferner die Geraden *b-12*, *d-23*, die sich in dem Punkte *c* treffen, und die Gerade *ac*, welche auf der Geraden *0* die Axe *02* des Doppelrades *2* liefert. In gleicher Weise ergiebt sich auf der Geraden *0'* durch das vollständige Viereck *a'b'c'd'* die Axe *04* des Doppelrades *4*.

Einfacher gestaltet sich das Rädergehänge, wenn wir, wie in Fig. **529** annehmen, dass die drei Räder *1*, *3*, *5* gleich sind, dann wird durch Einsetzung der Wechselräder *2*, *4* das Uebersetzungsverhältniss $+1$ vom Rade *1* zum Rade *3* und vom Rade *3* zum Rade *5* erhalten, und in dieser leichter ausführbaren Anordnung wird das Rädergehänge meist in der Praxis angewendet. Sind ausserdem, wie in Fig. **530**, die Gelenkglieder *0*, *0'* von gleicher Länge, so sind auch die Wechselräder *2*, *4* von gleicher Grösse. Wird in Fig. **530** noch ein Glied *0''* durch die Axe *0'5* gelenkig mit dem Gliede *0'* verbunden und ist in dem Gliede *0''* ein Rad *6* eingesetzt, welches sich mit dem Rade *5* im Eingriff befindet, dann wird durch eine beliebige Parallelbewegung des Gliedes *0''* die Uebertragung der Drehung vom Rade *1* auf das Rad *6* nicht beeinflusst. In der Praxis wird meistens eine geradlinige Parallelbewegung des Gliedes *0''* erfordert, die, wie in Fig. **530** schematisch dargestellt ist, durch Verschiebung des Gliedes *0''* in der festen Hülse *H* bewirkt wird.

In Fig. **531** sind zwei Vorgelege mit beliebigen Uebersetzungsverhältnissen in gleicher Weise wie vorhin durch die Axe *00'* des Doppelrades *2* verbunden, und es ist beispielsweise das eine aus zwei Rädern *1*, *2*, das andere aus drei Rädern *2*, *3*, *4* gebildet. Der Pol *12* ist der Berührungspunkt der Rollkreise r_1, r'_2, und der Pol *24* ergiebt sich, weil das Rad *3* ein Wechselrad ist, einfach als der äussere Aehnlichkeitspunkt der beiden Rollkreise r_2, r_4 durch eine gemeinsame Tangente dieser Rollkreise. Halten wir das Rad *1* fest und führen wir die bewegliche Axe *0'4* auf einer Curve χ, deren Normale *0'4*-*0'1* zur Geraden *12*-*24* parallel ist, so liegt der Pol *14* als Schnittpunkt dieser beiden parallelen Geraden im Unendlichen, und das Rad *4* vollzieht gegen das festgehaltene Rad *1* eine Parallelbewegung. Beachten wir nun, dass der Schnittpunkt, den die Curvennormale *0'4*-*0'1* mit der Geraden *0* bildet, der Pol *0'1* des Gliedes *0'* gegen *1* ist, und dass infolge der Parallelen *12*-*24*, *0'4*-*0'1* dieser Pol *0'1* vom Punkte *01* constanten Abstand hat, so ist der geometrische Ort des Pols *0'1* im Bezug auf das festgehaltene Rad *1* ein um *01* mit dem Radius *01*-*0'1* beschriebener Kreis π, im Bezug auf das bewegte Glied *0'* ein um *00'* mit dem Radius *00'*-*0'1* beschriebener Kreis p. Bei der angenommenen Bewegung des Gliedes *0'* rollt demnach der mit diesem Gliede verbundene Kreis p an dem festen Kreise π, und jene Curve χ ist also eine Trochoide. Bei diesem Rädergehänge wird dem gemäss die Uebertragung der Drehung vom Rade *1* auf das Rad *4* nur dann nicht beeinflusst, wenn die Axe *0'4* auf der so bestimmten Trochoide χ geführt wird.

Ist das Uebersetzungsverhältniss vom Rade *2* zum Rade *4* derart, dass der Pol *24* von der Axe *00'* denselben Abstand wie der Pol *12* von der Axe *00'* besitzt; dann ist die Strecke $\overline{00'\text{-}0'1} = \overline{00'\text{-}0'4}$, und der rollende Kreis p geht durch den Punkt *0'4*. In diesem Falle ist χ eine Epicycloide oder Hypocycloide, je nachdem der Kreis p auf oder in dem Kreise π rollt. Wenn insbesondere der Punkt *00'* in der Mitte der Strecke $\overline{01\text{-}0'1}$ liegt, so rollt der Kreis p als halb so grosser Kreis in dem festen Kreise π, und die Curve χ ist dann eine Ellipse, die in eine durch *01* gehende gerade Strecke degenerirt, falls die Glieder *0*, *0'* von gleicher Länge sind. Bei der praktischen Anwendung vollzieht die bewegliche Axe *0'4* meist nur eine kurze Schwingung auf einer nicht durch die feste Axe *01* gehenden Geraden, so dass diese kurze gerade Schwingstrecke angenähert durch ein Stück jener Trochoide ersetzt werden kann; dann kann auch das betrachtete vierräderige Rädergehänge zur Uebertragung der Drehung dienen, oder es kann auch ein zweckmässig geordnetes dreiräderiges Rädergehänge in dieser Weise verwendet werden[1]).

Räderlenkige Mechanismen.

209. **Zweiräderiger Zahnkniemechanismus.** Den in Fig. **532** dargestellten fünfgliederigen Mechanismus, bei welchem die beiden in einander greifenden Zahnräder *2*, *5* in dem Gliede *1* gelagert und gelenkig mit den beiden kniebildenden Gliedern *3*, *4* verbunden sind, nennen wir einen zweiräderigen Zahnkniemechanismus. Von den zehn Polen dieses symmetrisch gestalteten Zahnkniemechanismus sind die Pole *12*, *15* durch die Radaxen, die Pole *23*, *34*, *45* durch die Gelenkaxen unmittelbar gegeben, und der Pol *25* ist der Berührungspunkt der Rollkreise r_2, r_5 der Zahnräder *2*, *5*. Um die übrigen vier Pole *24*, *35*, *14*, *13* zu erhalten, ziehen wir die Geraden *25-45*, *25-23*, welche beziehlich die Geraden *3*, *4* in den Polen *24*, *35* treffen, ferner die Geraden *24-12*, *35-15*, die resp. auf den Geraden *15-45*, *12-23* die Pole *14*, *13* bestimmen. Die Pole *13*, *14*, *34* liegen dann in einer Geraden, welche die Normale an der von dem Gelenkpunkte *34* im Bezug auf das Glied *1* beschriebenen Curve α ist. Aus dem Zahnkniemechanismus gehen zunächst drei verschiedene Getriebe hervor, je nachdem wir uns das Glied *1*, *2* oder *3* festgestellt denken; denn wegen der symmetrischen Gestaltung dieses Mechanismus erhalten wir durch Feststellung des Rades *2* oder des Rades *5* gleichartige Getriebe, und ebenso auch durch Feststellung des Gliedes *3* oder *4*.

Betrachten wir das Glied *1* als fest, und nehmen wir an, es sei die Strecke $\overline{45\text{-}15}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Gelenk-

[1]) Eine analytische Behandlung des Rädergehänges hat Fliegner zuerst im *Civilingenieur*. 1871. B. 17. S. 19 mitgetheilt, die aber nicht die Anschaulichkeit unserer synthetischen Darlegung besitzt. In Weisbach-Herrmann, *Ingenieur- und Maschinen-Mechanik*. 1876. Theil III. Abth. 1. S. 249, sind die Beziehungen, welche die Anordnung eines Rädergehänges bestimmen, nicht richtig abgeleitet.

punktes *45* im Bezug auf das feste Glied *1*, dann ergiebt sich durch die zu *25-23* parallele Gerade *15-23*$_\mathfrak{v}$ die Strecke $\overline{23\text{-}23_\mathfrak{v}}$ als die lothrechte Geschwindigkeit des Gelenkpunktes *23*. Demnach bestimmen, wie in Art. 29 gelehrt wurde, die zu *3*, *4* beziehlich parallelen Geraden *23*$_\mathfrak{v}$-*34*$_\mathfrak{v}$, *15-34*$_\mathfrak{v}$ durch ihren Schnittpunkt *34*$_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{34\text{-}34_\mathfrak{v}}$ des Gelenkpunktes *34* auf seiner Bahncurve α und damit auch die Normale an derselben.

Die im Allgemeinen sehr complicirte Bahncurve α geht in eine auf *12-15* senkrechte Gerade über, wenn der kinematisch symmetrische Zahnkniemechanismus auch geometrisch symmetrisch ist, wenn also die beiden Zahnräder *2*, *5* gleich, die beiden Strecken $\overline{12\text{-}23}$, $\overline{15\text{-}45}$ gleich sind und die beiden Knieglieder *3*, *4* gleiche Länge haben. Wir erhalten hierdurch eine geradlinig schwingende Bewegung des Gelenkpunktes *34*, die man auch die Cartwright-sche Geradführung genannt hat, weil dieser Mechanismus als ein Specialfall auch aus dem von Cartwright bei seiner Dampfmaschine angewandten Mechanismus hervorgeht, der auf Seite 545 Beachtung findet.

Wenn wir den in Fig. **532** dargestellten Zahnkniemechanismus dahin specialisiren, dass ein Anschlussgelenk mit der Axe eines Rades vereint wird, also z. B. die Gelenkaxe *45* mit der Radaxe *15* coincidirt; dann bilden die Glieder *1*, *2*, *3*, *4* ein Gelenkviereck, und das Rad *5* spielt, falls es nicht als festgestelltes, treibendes oder getriebenes Rad auftritt, nur eine secundäre Rolle. Durch diese Specialisirung geht die kinematische Symmetrie des Mechanismus verloren, und durch Feststellung je eines der fünf Glieder gehen aus demselben fünf verschiedene Getriebe hervor.

210. **Maudslay'scher Lenker.** Bei der Dampfmaschine von Maudslay[1]) ist der vorhin betrachtete Zahnkniemechanismus angewendet, um die Geradführung des Anschlussgelenkes der Kolbenstange zu bewirken. Bei diesem Maudslay'schen Lenker, der in Fig. **533** schematisch dargestellt ist, werden jene beiden Zahnräder durch die zwei Zahnsectoren *2*, *5* vertreten. Der Zahnsector *2* ist an dem Balancier *12-23*, der um die Axe *12* schwingt, coaxial befestigt und der Zahnsector *5* ist centrisch auf die Axe *15* gesetzt, die sich an der festen Säule *1* befindet. Die beiden Knieglieder *3*, *4* sind durch die Gelenkaxen *23*, *45* beziehlich mit dem Balancier *12-23* oder dem Zahnsector *2* und dem Zahnsector *5* ver-

[1]) Le Blanc, *Recueil des machines.* Part II. Planche 34. Fig. 12.

bunden. Um eine zweckmässige Anordnung zu erhalten, so dass der Gelenkpunkt *34* eine Bahncurve beschreibt, von der dasjenige Stück, welches der Schwingung des Balancier entspricht, sich sehr nahe an eine verticale Gerade anschmiegt, können wir auf zwei verschiedene Weisen erfahren. Wir betrachten den Balancier als gegeben, bezeichnen dessen höchste, mittlere und tiefste Lage mit $12\text{-}23$, $12\text{-}23_m$, $12\text{-}23_t$, ziehen senkrecht auf $12\text{-}23_m$ die verticale Gerade $34\text{-}34_t$, welche die Pfeilhöhe des vom Punkte *23* beschriebenen Schwingbogens halbirt, und wählen für das Glied *3* eine passende Länge. Durch die gleich grossen Strecken $\overline{23\text{-}34}$, $\overline{23_m\text{-}34_m}$, $\overline{23_t\text{-}34_t}$ ergeben sich auf jener verticalen Geraden die drei Lagen 34, 34_m, 34_t des Gelenkpunktes *34* und auf der horizontalen Geraden $34_m\text{-}45_m$ wird die Axe *15* lothrecht unter *12* angenommen. Willkürlich ist noch entweder das Verhältniss der Sectorradien, oder die Länge der Lenkstange *4*. Nehmen wir erstens an, es sei beispielsweise das Verhältniss der Sectorradien $\overline{12\text{-}25}$, $\overline{15\text{-}25}$ gleich 2 : 1, so ist der bezüglich $15\text{-}45_m$ symmetrisch gezeichnete Drehungswinkel des Sectors *5* doppelt so gross als der Schwingungswinkel des Balancier. Auf der Sectorgeraden $15\text{-}45$, die der höchsten Lage des Balancier entspricht, ergiebt sich dann der Gelenkpunkt *45* als Schnittpunkt eines Bogenstückes *h* einer Hyperbel, deren Brennpunkte *15*, *34* sind und deren Hauptaxe der Strecke $\overline{34_m\text{-}15}$ gleich ist; denn es ist demgemäss die Strecke $\overline{34\text{-}45} = \overline{34_m\text{-}15} + \overline{15\text{-}45_m} = \overline{34_m\text{-}45_m}$ und dadurch die Länge $\overline{34\text{-}45}$ der Lenkstange *4* bestimmt, deren höchste, mittlere und tiefste Lage beziehlich mit $34\text{-}45$, $34_m\text{-}45_m$, $34_t\text{-}45_t$ bezeichnet ist. Nehmen wir zweitens an, es sei die Länge $\overline{34\text{-}45}$ der Lenkstange *4* gegeben, so ist dadurch das Verhältniss der Sectorradien bestimmt; denn der Gelenkpunkt *45* ergiebt sich auf jenem Hyperbelbogen *h* als ein Schnittpunkt des um *34* mit der Strecke $\overline{34\text{-}45}$ als Radius beschriebenen Kreisbogens, und mit der Geraden $15\text{-}45$ ist der entsprechende Drehungswinkel des Sectors *5* gefunden. Da sich dieser Drehungswinkel des Sectors *5* und der Schwingungswinkel des Balancier umgekehrt wie die Radien der Sectoren *5*, *2* verhalten, so ist hierdurch auch das Verhältniss der Sectorradien bestimmt.

Behufs der Prüfung der Genauigkeit dieser Geradführung kann man für einige Punkte die Normalen der vom Gelenkpunkte *34* beschriebenen Bahncurve construiren. Um z. B. für die höchste Lage die betreffende Normale zu erhalten, ziehen wir, wie in Art. 209 angegeben wurde, die Gerade $23\text{-}25$, welche *4* in *35* trifft, ferner die Gerade *15-35*, die auf *12-23* den Pol *13* bestimmt; dann ist *34-13* die Normale an der Bahncurve im Punkte *34*, und diese Normale ist fast senkrecht zur verticalen Geraden $34\text{-}34_t$. Je mehr die Normalen der Bahncurve sich der rechtwinkeligen Stellung zur verticalen Geraden $34\text{-}34_t$ nähern, desto inniger schmiegt sich die Bahncurve an dieselbe an.

Es kann aber auch, wenn man nicht wie Maudslay jene kreisförmigen Zahnsectoren anwenden will, eine genaue Geradführung vermittelst zweier leicht zu bestimmenden curvenförmigen Zahnsectoren erhalten werden. Wir denken uns den Gelenkpunkt *34* auf der verticalen Geraden $34\text{-}34_t$ bewegt und construiren für verschiedene Lagen desselben den Pol *25* auf der Geraden *12-15*. Zu diesem Zwecke ziehen wir auf die verticale Gerade die Senkrechte *34-13*, welche die Gerade *12-23* im Punkte *13* schneidet, ziehen ferner die Gerade *13-15*, die *34-45* im Punkte *35* trifft; dann bestimmt die Gerade *23-35* durch ihren Schnitt mit *12-15* den Pol *25*. Dadurch erhalten wir die betreffenden Rollcurven in den beiden Systemen *2*, *5*, und wenn wir entsprechende Stücke dieser Rollcurven mit Zähnen versehen, wird der Gelenkpunkt *34* genau auf jener verticalen Geraden $34\text{-}34_t$ geführt.

211. **Watt'sches Planetenradgetriebe.** Wenn bei dem Zahnkniemechanismus in Fig. **534** die beiden Axen *15*, *45* coincidiren und das Glied *4* festgestellt ist, erhalten wir das bekannte Planetenradgetriebe, welches Watt bei seiner Dampfmaschine wegen Vermeidung eines Patentstreites anstatt der gewöhnlichen Kurbel anwandte[1]). Vermittelst des schwingenden Balancier *3* und der Pleuelstange, an welcher das Rad *2* befestigt ist, wird der lose auf der Welle *45* sitzende Arm *1* gedreht und das Rad *2* in umlaufende Bewegung versetzt, welches die Drehung des eingreifenden, auf der Welle *45* befestigten Rades *5* bewirkt. Infolge dieser Anordnung vollzieht das Rad *2* eine Schwankung, aber keine Umdrehung im Bezug auf das feste Gestell *4*; und je länger die Pleuelstange *12-23* ist, desto mehr nähert sich die Bewegung des Rades *2* einer kreisförmigen Parallelbewegung.

Die Umdrehungszahl u_{54} des Rades *5*, die einer Umdrehung des Armes *1* entspricht, ergiebt sich aus der für die Drehgeschwindigkeiten in Art. 206 gegebenen allgemeinen Formel I) oder aus der daselbst specialisirten Formel a). Wir können aber die Formel

---

[1]) James Watt, *Specification* No. 1306 vom 25. Oct. 1781 und No. 1321 vom 12. März 1782. Muirhead, *Mechanical Inventions of James Watt*. 1865. Vol. III. p. 50, 70.

für die Umdrehungszahl u_{54} auch leicht direct ableiten. Es seien u_{21}, u_{51} für ein beliebig angenommenes Zeitmaass die Umdrehungszahlen der Räder *2*, *5* im Bezug auf das Glied *1*, ferner seien r_2, r_5 die Rollkreisradien, z_2, z_5 die Zähnezahlen der Räder *2*, *5*, und ν bezeichne das Uebersetzungsverhältniss vom Rade *5* zum Rade *2*, dann ist:

$$\frac{u_{51}}{u_{21}} = \frac{r_2}{r_5} = \frac{z_2}{z_5} = \pm \nu.$$

Das Verhältniss ν ist negativ, wenn die Räder *2*, *3* sich im Bezug auf das Glied *1* in entgegengesetztem Sinne drehen, also beide Vollräder sind; dagegen positiv, wenn die beiden Räder *2*, *3* sich im Bezug auf das Glied *1* in gleichem Sinne drehen, also das eine ein Vollrad, das andere ein Hohlrad ist. Während einer Umdrehung des Armes *1* um die Axe *45* macht auch das Rad *2* eine Umdrehung in entgegengesetztem Sinne im Bezug auf den rotirenden Arm *1*, und es folgt demnach, weil $u_{21} = 1$ ist,

$$u_{51} = \pm \nu.$$

Im ersten Falle bei Vollrädern dreht sich das Rad *5* im Bezug auf *1* im gleichen Sinne mit *1*, im zweiten Falle bei einem Vollrade und einem Hohlrade aber im entgegengesetzten Sinne; demgemäss ist die Zahl u_{51} im ersten Falle positiv, im zweiten Falle negativ zu nehmen. Wenn wir uns vorstellen, das Rad *2* sei gegen den Arm *1* in Ruhe, bilde also mit dem Arme *1* ein Stück, so würde durch den Zahneingriff mit einer Umdrehung des Armes *1* auch das Rad *5* eine Umdrehung vollenden. Hiernach ergiebt sich im ersten Falle die Umdrehungszahl u_{54} des Rades *5* im Gestell *4*, die einer Umdrehung des Armes *1* entspricht:

$$u_{54} = 1 + u_{51} = 1 + \nu = 1 + \frac{r_2}{r_5} = 1 + \frac{z_2}{z_5} \quad \dots\dots \; 1),$$

im zweiten Falle

$$u_{54} = 1 - u_{51} = 1 - \nu = 1 - \frac{r_2}{r_5} = 1 - \frac{z_2}{z_5} \quad \dots\dots \; 2).$$

Sind, wie in Fig. **534**, beispielsweise die beiden Vollräder *2*, *5* von gleicher Grösse, so ist $u_{54} = 2$, und demnach vollzieht das Rad *5* oder die Welle *45* während einer Umdrehung des Armes *1* zwei Umdrehungen in gleichem Sinne.

Bei dem in Fig. **535** gezeichneten Planetenradgetriebe, welches Caird und Robertson zur Kraftübersetzung beim Gangspill angewendet haben[1]), ist das Rad *5* ein Hohlrad und das Rad *2*

---

[1]) Caird und Robertson, *Specification* No. 3066 vom 31. October 1867.

auf ein Excentrik gesetzt, welches das Glied *1* vertritt. Die an das Rad *2* befestigte Stange ist durch das Glied *3* an das Gestell *4* gekoppelt. Infolge der Drehung des Excentriks *1* macht das Rad *2* eine geringe Schwankung in dem Gestell und bewirkt durch seinen Eingriff die Drehung des Hohlrades, dessen Umdrehungszahl sich nach der Formel 2) ergiebt. Es ist demnach

$$u_{54} = \frac{z_5 - z_2}{z_5}.$$

Da die Differenz der Zähnezahlen des grösseren Hohlrades *5* und des kleineren Vollrades *2* stets positiv ist, so dreht sich das Rad *5* in gleichem Sinne mit dem Excentrik *1*; und je kleiner diese Differenz ist, desto kleiner ist die als echter Bruch auftretende Umdrehungszahl u_{54}. Ist z. B. das Hohlrad *5* mit $z_5 = 20$, das Vollrad *2* mit $z_2 = 18$ Zähnen versehen, dann erhalten wir

$$u_{54} = \frac{1}{10}.$$

Abgesehen von der Reibung und der geringen Schwankung des Rades *2* wird durch die Umdrehungszahl u_{54} das theoretische Verhältniss der Kraftübersetzung bestimmt.

Werden in Fig. **536** die Längen der Glieder *1*, *2*, *3*, *4* so genommen, dass diese vier Glieder ein Parallelkurbelgetriebe bilden, so vollzieht das Rad *2* im Bezug auf das Gestell *4* eine kreisförmige Parallelbewegung und ist von jener Schwankung befreit. Demnach wird dann die Uebertragung der Bewegung gleichförmig. Bei dieser Parallelbewegung tritt in der Durchschlagslage Unstetigkeit der Bewegung ein, und dies müsste, wie in Art. 128 angegeben ist, durch eine Koppelung zweier anderer Parallelkurbel vermieden werden. Dadurch wird aber die praktische Herstellung erschwert.

Die Parallelbewegung des Rades *2* kann auch, wie in Fig. **537** schematisch veranschaulicht ist, durch ein Kreuzkurbelgetriebe bewirkt werden, bei welchem keine Unstetigkeit der Bewegung eintritt. Die an dem Vollrade *2* befestigte Stange *g* gleitet in der Hülse *G* des Gliedes *3*; und dieses Glied trägt eine zweite zu *G* rechtwinkelige Hülse *J*, die auf der festen Stange *i* sich verschiebt, welche das Gestell *4* vertritt. Durch die Drehung der Kurbel *1* wird die Stange *g* und das Rad *2*, welches in das Hohlrad *5* eingreift, kreisförmig parallel bewegt und bewirkt die Drehung des Hohlrades *5*. Dieses Getriebe hat E a d e s[1]) bei seinem Flaschen-

[1]) Siehe die Citate in der Anmerkung S. 224.

zuge, der in Fig. **538** schematisch dargestellt ist, angewendet und in folgender Weise praktisch ausgeführt. Der Haken *l*, der Knaggen *i* und die Axe *45* befinden sich im Gliede *4*, welches den Rahmen des Flaschenzuges vertritt. Das Glied *1* ist eine excentrische Nabe der lose auf der Axe *45* drehbaren, nicht gezeichneten Kraftrolle, welche in Einkerbungen die Handkette trägt. Auf diese excentrische Nabe ist das Rad *2* gesetzt, welches mit den Knaggen *a*, *b*, *c*, *d* versehen ist und in das Hohlrad *5* eingreift. Das kreuzförmige Glied *3* enthält einen verticalen Schlitz, in dem sich der Knaggen *i* befindet, ferner ein horizontales Querstück, an dem die Knaggen *a*, *b* und *c*, *d* gleiten. Durch die Kraftrolle mit der excentrischen Nabe wird das Rad *2* demnach kreisförmig parallel bewegt und bewirkt durch seinen Eingriff die Drehung des Hohlrades *5*, welches lose auf die Axe *45* gesetzt ist. Dieses Hohlrad bildet ein Stück mit der nicht gezeichneten Lastrolle, die in Einkerbungen die Lastkette trägt. Bezeichnen wieder z_2, z_5 die Zähnezahlen des Vollrades *2* und des Hohlrades *5*, so ist die einer Umdrehung der Kraftrolle oder der excentrischen Nabe *1* entsprechende Umdrehungszahl u_{54} des Hohlrades *5*:

$$u_{54} = \frac{z_5 - z_2}{z_5}.$$

Hiermit ist auch das Verhältniss der theoretischen Kraftübersetzung gegeben, wenn die Radien der Kraftrolle und der Lastrolle gleich sind. Es wird aber, um diese Kraftübersetzung noch zu vergrössern, der Raduis r_{II} der Kraftrolle stets grösser als der Radius r_V der Lastrolle genommen. Demnach ergiebt sich das theoretische Verhältniss der Kraft K zu Last Q:

$$\frac{K}{Q} = \frac{r_V}{r_{II}} \cdot \frac{z_5 - z_2}{z_5}.$$

Zur Vermeidung der auftretenden Reibung hat Eades zwischen der excentrischen Nabe und dem Rade *2* Frictionsrollen angebracht; aber dennoch wird durch die Reibung der praktische Nutzeffect beträchtlich geringer als der theoretische Nutzeffect[1]).

212. **Umlaufräderige Kurbelgetriebe.** Wird bei dem in Fig. **539**, Taf. XXXV, dargestellten Zahnkniemechanismus das eine der beiden Glieder *2*, *5*, z. B. das Glied *2*, festgestellt, so erhalten wir ein

[1]) Werner's Mittheilung in der *Zeitschr. d. Vereines deutscher Ingenieure.* 1868. B. XII. S. 27. — Weisbach-Herrmann, *Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.* 1880. 3. Thl. 2. Abth. S. 68.

umlaufräderiges Kurbelgetriebe. Der Gelenkpunkt *45* des Rades *5*, welches um das feststehende Rad *2* läuft, beschreibt eine Trochoide γ, und das Glied *3* wird gemäss den gewählten Längenverhältnissen entweder in schwingende oder rotirende Bewegung versetzt. Für die im Allgemeinen sehr complicirte Bewegung des Gliedes *3*, welches bei der Anordnung in Fig. **539** Schwingungen vollzieht, kann aber die Geschwindigkeit leicht construirt werden. Nehmen wir an, das Glied *1*, welches die Kurbel vertritt, rotire gleichförmig, und es sei die constante lothrechte Geschwindigkeit des Punktes *15* gleich $\overline{15\text{-}12}$, so ergiebt sich auf der Normalen *45-25* der Trochoide γ durch die zu *45-15* parallele Gerade $12\text{-}45_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{45\text{-}45_\mathfrak{v}}$ des auf dieser Trochoide bewegten Gelenkpunktes *45*; und ferner bestimmt die zu *45-34* parallele Gerade $45_\mathfrak{v}\text{-}34_\mathfrak{v}$ auf dem Gliede *3* die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{34\text{-}34_\mathfrak{v}}$ des auf dem Kreise λ schwingenden Gelenkpunktes *34*.

Bei dem in Fig. **540** dargestellten besonderen Falle sind die beiden festen Axen *12, 23* in Φ zusammengelegt, das umlaufende Rad *5* greift in das feste, viermal grössere Hohlrad *2*, der Gelenkpunkt *45* befindet sich auf dem Rollkreise r_5 des umlaufenden Rades *5*, und die Längen der Glieder *1, 3* sind gleich. Demnach beschreibt der Gelenkpunkt *45* eine vierspitzige Hypocycloide γ, und während einer gleichförmigen Umdrehung des Gliedes *1* macht das Glied *3*, wie man leicht anschaulich erkennt, einen aus vier periodischen Bewegungen bestehenden Umlauf. Um diesen Bewegungsvorgang zu überschauen, denken wir uns das Glied *1* in der eingezeichneten Pfeilrichtung gedreht. Der Punkt *34* ruht momentan, wenn der Punkt *45* einen Rückkehrpunkt der Hypocycloide durchschreitet, macht hierauf eine kleine Rückschwingung, ruht wieder momentan an der Stelle, an welcher die Normale *25-45* der Hypocycloide γ mit dem Gliede *4* zusammenfällt, und schreitet dann aber in dem Sinne des Pfeiles weiter, bis der Punkt *45* in den nächsten Rückkehrpunkt der Hypocycloide gelangt. Die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{34\text{-}34_\mathfrak{v}}$ des Punktes *34* ergiebt sich wie vorhin, indem wir zu *15-45* die Parallele $\Phi\text{-}45_\mathfrak{v}$ bis an die Normale der Hypocycloide und zum Gliede *4* die Parallele $45_\mathfrak{v}\text{-}34_\mathfrak{v}$ bis an das Glied *3* ziehen. Dieses specielle umlaufräderige Kurbelgetriebe hat Oehlmann[1]) bei einem Kapselwerke angewendet, welches als Pumpe, Messapparat oder Motor

[1]) *Deutsches Reichspatent* No. 29681 vom 27. April 1884.

dienen soll, aber wegen seiner schwierigen praktischen Ausführbarkeit wohl keinen Eingang in die Praxis finden wird.

213. **Umlaufräderige Schubkurbelgetriebe.** Wenn bei dem umlaufräderigen Kurbelgetriebe der Gelenkpunkt *23* ins Unendliche verlegt wird, erhalten wir ein umlaufräderiges Schubkurbelgetriebe. In Fig. **541** ist demnach das Glied *3* durch einen Schlitten vertreten, der sich in dem geradlinigen Schlitze des festen Gliedes *2* verschiebt; das umlaufende Rad *5* greift in das feste Hohlrad *2* von doppelter Grösse, und der Gelenkpunkt *45* befindet sich auf dem Rollkreise r_5 des umlaufenden Rades *5*. Demnach beschreibt dieser Gelenkpunkt hin- und hergehend den Durchmesser γ des Rollkreises r_2 des Hohlrades *2*, und die Bewegung des Gelenkpunktes *45* kann auch durch ein gleichschenkeliges Schubkurbelgetriebe hervorgebracht werden, dessen Kurbel das Glied *1* und dessen Koppel *15-45* ist. Gemäss der obigen Construction erhalten wir die lothrechte Geschwindigkeit $45\text{-}45_v$ des Punktes *45* durch die zu *15-45* parallele Gerade $12\text{-}45_v$, welche die auf γ senkrechte Gerade *25-45* im Punkte 45_v auf dem Kreise r_2 trifft. Da nun $\overline{25\text{-}45} = \overline{45\text{-}45_v}$ ist, so wird die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes *45* auch durch die Strecke $\overline{45\text{-}25}$ dargestellt; und wir erhalten einfacher durch die zum Gliede *4* parallelen Geraden $25\text{-}34_v$ in der zur Schubgeraden λ senkrechten Geraden $34\text{-}23^\infty$ die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{34\text{-}34_v}$ des Gelenkpunktes *34* oder des geradlinig parallel bewegten Gliedes *3*.

Werden in Fig. **542** die Schubgerade λ und der Durchmesser γ in einer Geraden liegend angenommen, dann vereinen sich die Glieder *3*, *4* zu einem einzigen mit *3* bezeichneten Gliede, und wir erhalten die bekannte hypocycloidische Geradführung[1]), welche z. B. bei der Dampfmaschine von Murray[2]), bei der Buchdrucker-Schnellpresse von König und Bauer[3]) und bei manchen anderen Maschinen Anwendung gefunden hat. Der Bewegungsvorgang des parallel bewegten Gliedes *3* kann auch hervorgebracht werden durch ein mit Eingriffspaarung versehenes, gleichschenkeliges Schubkurbelgetriebe, bei welchem *12-15* die

[1]) Siehe Cardanus, *Opus novum de proportionibus numerorum.* 1570. prop. 173. p. 186. De La Hire, „Traité des épicycloïdes". *Mémoires de l'Académie.* 1730. T. 9. p. 389. White in den *Annales des arts et manufactures,* par O'Reilly. (ohne Druckjahr) T. 19. p. 294.

[2]) *Specification* No. 2632 vom 28. Juni 1802.

[3]) Hülsse, *Allgemeine Maschinen-Encyclopädie.* 1844. B. II. S. 772.

Kurbel und *15-45* die Koppel vertritt, oder einfacher durch ein Kreuzkurbelgetriebe, bei welchem *12-25* die Kurbel und *25-45* die Mittellinie eines am Gliede *3* befindlich gedachten Schlitzes ist. Das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm des Punktes *45* oder des Gliedes *3* wird hier durch den Rollkreis r_2 des Hohlrades *2* repräsentirt.

214. **Zahnexcentrikgetriebe.** Bei dem Zahnkniemechanismus in Fig. **543** ist das Glied *3* festgestellt und mit dem Gliede *4* durch eine Richtpaarung verbunden. Diesem Getriebe hat Reuleaux[1]) den Namen Zahnexcentrik gegeben, weil, falls die feste Axe *23* innerhalb des um dieselbe rotirenden Rades *2* liegt, das Rad *2* als ein verzahntes Excentrik betrachtet werden kann. Um den im Allgemeinen sehr complicirten Bewegungsvorgang des Gliedes *4* zu veranschaulichen, denken wir uns einstweilen das Rad *2* festgehalten und das Glied *1* um die jetzt feste Axe *12* gedreht; dann beschreibt der an dem umlaufenden Rade *5* befestigte Punkt *45*, der auch mit *A* bezeichnet ist, eine Trochoide *a* in dem System *2*, die auf dem mitgedrehten Fahrstrahle *23-A* die Wegänderungen bestimmt und somit ein Wegdiagramm für die Bewegung des Punktes *A* auf der Stange *3* bildet. Betrachten wir wieder das Glied *3* als fest, und drehen wir das Glied *2* mit der angehefteten Trochoide *a* um die feste Axe *23*, so ist die Bewegung des von der Trochoide *a* mit der Geraden *3* gebildeten Schnittpunktes auf dieser Geraden identisch mit der Bewegung des Punktes *A* oder des Gliedes *4*. So viele Normalen als von dem festen Axenpunkte *23* an die Trochoide *a* gehen, so viele momentane Ruhelagen treten während einer Periode in dem aus verschiedenen Schwingungen bestehenden Bewegungsvorgange des Punktes *A* auf. Hat aber der feste Axenpunkt *23* eine solche Lage, dass von ihm Tangenten an die Trochoide *a* gelegt werden können, dann ist eine beständige Umdrehung des Gliedes *2* nicht möglich. In Fig. **543** ist beispielsweise das Verhältniss der Radien der Rollkreise r_2, r_5 oder der Zähnezahlen der beiden Vollräder *2*, *5* gleich 2 : 1. Die Trochoide *a* ist eine verschlungene Epitrochoide; und da schon in diesem einfachen Falle das Glied *4* eine sehr complicirte Bewegung vollzieht, so kann man ermessen, wie ausserordentlich verwickelt dieselbe wird, wenn jenes Verhältniss weniger einfach ist. Es wird daher durch die analytische Behandlung keine Uebersichtlichkeit gewonnen, und wenn man

[1]) *Civilingenieur.* 1858. B. 4. S. 4.

die Rechnungen durch Annäherungen vereinfacht, sind die Resultate nicht mehr zuverlässig[1]). Eine wesentliche Vereinfachung tritt aber in dem besonderen Falle ein, wenn die Axen *23*, *12* coincidiren, das Rad *2* sich also centrisch dreht.

Soll für eine beliebige Stellung des Rades *2* in Fig. **543** eine entsprechende Lage des Punktes A auf der Stange bestimmt werden, so kann dies nur mit Hülfe der im Voraus gezeichneten Trochoide a geschehen. Um z. B., wenn *23-12* in die Stellung *23-12'* gedreht wird, eine entsprechende Lage A' des Punktes A zu erhalten, ziehen wir die Gerade *23*-$\mathfrak{A}'$, auf der $\mathfrak{A}'$ ein Schnittpunkt mit der Trochoide a ist, so dass der Winkel, den dieselbe mit der Geraden *3* bildet, entgegengesetzt gleich ist dem Winkel, welchen die Gerade *23-12'* mit der Geraden *23-12* einschliesst, und machen auf *3* die Strecke *23*-A' = *23*-$\mathfrak{A}'$. Da aber der von *23* ausgehende Fahrstrahl *23*-$\mathfrak{A}'$ die Trochoide a noch in anderen Punkten schneidet, so ergeben sich damit alle Lagen von A, die jener Stellung des Rades *2* entsprechen. Umgekehrt erhalten wir gemäss dieser Bestimmung durch die Schnittpunkte, welche der um *23* beschriebene Kreis $A'\mathfrak{A}'$ mit der Trochoide a bildet, die verschiedenen Stellungen des Rades *2*, die der Lage A' entsprechen.

Nachdem zu einer Stellung des Rades *2*, wie in Fig. **543**, eine entsprechende Lage A construirt ist, ergiebt sich leicht bei der Annahme, dass der Punkt *12* mit der lothrechten Geschwindigkeit $\overline{12\text{-}23}$ rotire, die lothrechte Geschwindigkeit von A durch den Pol *24*. Wir ziehen also die Gerade *45-25*, welche die auf der Stange *3* senkrechte Gerade *23-34'* in dem Pol *24* trifft, und folglich repräsentirt die Strecke $\overline{24\text{-}23}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes A. Machen wir ferner senkrecht auf *3* die Strecke $AA_v = \overline{24\text{-}23}$, so erhalten wir einen Punkt A_v des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms des Punktes A oder Gliedes *4*.

In Fig. **544** ist das specielle Zahnexcentrikgetriebe dargestellt, bei welchem das Rad *5* in ein Hohlrad *2* von doppelter Grösse eingreift. In diesem besonderen Falle ist jene Trochoide a eine Ellipse. Der Bewegungsvorgang des Gliedes *4* ist demnach verhältnissmässig einfach und derselbe, welcher bei dem in Art. 193 behandelten Mechanismus untersucht wurde.

---

[1]) Vergl. die analytische Behandlung des Zahnexcentriks von Grashof in der *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*. 1858. S. 236, und in dessen *Theoretische Maschinenlehre*. 1883. B. 2. S. 212.

Aus theoretischem Interesse ist in Fig. **545** noch das symmetrische Zahnexcentrikgetriebe gezeichnet, bei welchem die Räder *2*, *5* gleich sind und die Gelenke *23*, *45* auf denselben stets symmetrisch liegen im Bezug auf die in der Mitte zu *12-15* senkrechten, nicht gezeichneten Geraden. Bei dieser besonderen Anordnung ist jene Trochoide *a* eine Pascal'sche Curve, also eine Fusspunktencurve eines Kreises, dessen Lothpunkt der feste Axenpunkt *23* ist. Die bewegte Stange *1*, welche beständig zur festen Stange *3* parallel bleibt, vollzieht gegen dieselbe eine kreislinige Parallelbewegung, und der Punkt *15* bewegt sich auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt *J* der vierte Eckpunkt des durch *23*, *12*, *15* bestimmten Parallelogramms ist. Demnach kann die Bewegung der Glieder *4*, *5* auch durch ein gleichschenkeliges Schubkurbelgetriebe hervorgebracht werden, dessen Kurbel *J-15* und dessen Koppel *15-24* ist. Ferner kann auch die Bewegung des Gliedes *4* einfach durch ein Kreuzkurbelgetriebe erzeugt werden, und deshalb ist das symmetrische Zahnexcentrik für die Praxis werthlos.

215. **Hauptmechanismus der Whitworth'schen Langloch-Bohrmaschine.** Durch den in Fig. **546** schematisch dargestellten Mechanismus soll vermittelst einer gleichförmigen Drehung eine möglichst gleichförmige hin- und hergehende geradlinige Bewegung erzeugt werden. Bei demselben bilden die Glieder *1*, *2*, *3*, *4* ein Schubkurbelgetriebe mit dem festen Gestell *3*. Das excentrische Rad *2* vertritt die Kurbel und greift in das doppelt so grosse Rad *5*, welches um die mit dem Schlitten *4* schwingende Axe *45* rotirt, und soweit ist dieses Getriebe ein specielles Zahnexcentrikgetriebe. Das Rad *5* befindet sich in unserer schematischen Darstellung hinter dem Schlitze des Gestells *3* und trägt an der hinteren Seite einen Zapfen *56*, auf den der drehbare Schlitten *6* gesetzt ist. Dieser Schlitten *6* gleitet in dem Schlitze des Gliedes *7*, welches in der zum Gestell *3* gehörenden Hülse *H* geführt wird. Der Schlitz des Gliedes *7* ist parallel zur Schubgeraden *45-23* des Schlittens *4* und die Hülse *H* senkrecht zu derselben.

Eine zweckmässige Anordnung dieses Mechanismus, durch welchen bei gleichförmiger Drehung des excentrischen Rades *2* eine möglichst gleichförmige Schwingung des Gliedes *7* erzeugt wird, kann nur durch günstige Wahl des Verhältnisses der Excentricität zum Rollkreisradius r_2 des Rades *2* erreicht werden. Durch Annahme des Rollkreisradius r_2 und der Excentricität $\overline{23\text{-}12}$, welche wir gleich $\frac{1}{4}r_2$ gewählt haben, ist der Mechanismus bestimmt; denn es ist der Rollkreisradius r_5 des Rades *5* gleich $2r_2$, die Länge der Schubstange *1* gleich $3 r_2$. Der Axenabstand *45-56* der beiden Schlitten *4*, *6* wird gleich der verlangten halben Schwingungsweite des Gliedes *7* genommen. Befindet sich *23-12* in der Lage *23-12*^{0} in der Verlängerung von der Geraden *3*, dann entspricht der Schlittenaxe *56* die Lage *56*^{0} auf dieser Geraden. Denken wir uns nun das excentrische Rad *2* von dieser symmetralen Stellung aus im Sinne des Pfeiles gedreht, und theilen wir von *12*^{0} aus die Hälfte des vom Punkte *12* beschriebenen Kreises in eine Anzahl etwa 6 gleicher Theile, so entsprechen den erhaltenen Theilpunkten oder Stellungen des Rades *2* die markirten Punkte in der von dem Punkte *56* erzeugten Curve ζ. Um z. B. die Lage *56*$'$, welche dem Theilpunkte *12* entspricht, zu erhalten, machen wir den Winkel $1\,\widehat{45}\,56$ gleich der Hälfte des Winkels $1\,\widehat{12}\,23$, weil dem Drehungswinkel von *2* gegen *1* ein halb so grosser entgegengesetzter Drehungswinkel von *5* gegen *1* entspricht. Ziehen wir nun durch die so in der Curve ζ enthaltenen markirten Punkte Parallele zur Geraden *3*, und zeigt sich, wie es in Fig. **546** der Fall ist, dass die Abstände dieser Parallelen, abgesehen von der letzten an der Ausschlaggrenze befindlichen, sehr angenähert gleich sind, so erweist sich die Wahl der Excentricität $\overline{23\text{-}12} = \frac{1}{4} r_2$ als eine günstige. Nach einer halben Umdrehung des excentrischen Rades *2* gelangt die Gerade *45-56* in die auf *3* senkrechte Lage *45*^{6}-*56*^{6}, und das Glied *7* erreicht nach rechts seine Ausschlaggrenze. Während der folgenden halben Umdrehung vollzieht das Glied *7* rückwärtsgehend dieselbe Bewegung bis zur Mittellage; und einer zweiten vollen Umdrehung entspricht die anderseitige symmetrische Bewegung. Wird die Strecke *45-56* verlängert oder verkleinert, um resp. eine grössere oder kleinere Schwingungsweite zu erhalten, so bleibt der Bewegungsvorgang des Gliedes *7* gleichartig; denn man erkennt leicht, dass die betreffenden Punktreihen, welche jene Parallelen auf der Schubgeraden α des Gliedes *7* bilden, ähnlich sind.

Um durch Construction des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ des Gliedes *7* oder des zu demselben gehörenden Punktes *A* eine Bestätigung der angenähert gleichförmigen Bewegung zu empfangen, müssen wir die Geschwindigkeit des Punktes *A* bestimmen, indem wir annehmen, der Punkt *12* rotire gleichförmig mit der lothrechten Geschwindigkeit $\overline{12\text{-}23}$. Die Gerade *23-25* schneidet die auf *3* senkrechte Gerade *45-34*^{v} in dem Pol *35* des Rades *5* im Bezug auf das Gestell *3*, und die Strecke *25-23* repräsentirt die lothrechte Geschwindigkeit des

Punktes *25* des Rades *5*. Ziehen wir also zu *25-56* die Parallele *23-56*$_{\mathfrak{v}}$ bis an *35-56* und auf die Schlitzmittellinie *A-56* die Senkrechte *56*$_{\mathfrak{v}}$-*56*$'_{\mathfrak{v}}$; dann ist $\overline{56\text{-}56'_{\mathfrak{v}}}$ die lothrechte Geschwindigkeit, welche der Punkt *56* in der Schubrichtung des Gliedes 7 besitzt. Machen wir ferner senkrecht auf dieser Schubrichtung die Strecken $AA_{\mathfrak{v}} = \overline{56\text{-}56'_{\mathfrak{v}}}$, so ist $A_{\mathfrak{v}}$ ein Punkt des Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$. Eine andere Construction dieser lothrechten Geschwindigkeit ergiebt sich durch den auf *3* liegenden Pol *27*, wenn wir die Geraden *35-57*, *56-57* resp. parallel und senkrecht zu *3* ziehen; dann bestimmt die Gerade *57-25* auf *3* den Pol *27*. Demnach repräsentirt $\overline{27\text{-}23}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Gliedes 7, und $AA_{\mathfrak{v}}$ ist gleich derselben. Diese Constructionen der Geschwindigkeiten versagen in der Symmetrallage, wo *12* sich in *12*^{0} befindet, weil dann *35-56* mit der Geraden *3* zusammenfällt; dann kann man aber die Geschwindigkeit des Gliedes 7 leicht in besonderer Weise bestimmen. Denn es ergiebt sich, weil die Excentricität $\frac{1}{4}r_2$ und die betreffende Geschwindigkeit des Punktes *25* des Rades *5* gleich $\frac{3}{4}r_2$ ist, die Grösse der Geschwindigkeit des Gliedes *7* gleich $\frac{3}{8}\overline{45\text{-}56}$. Das construirte, von der Schubgeraden α symmetrisch getheilte Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ verläuft bis nahe an die Ausschlaggrenzen sehr angenähert parallel zu dieser Schubgeraden, und dadurch wird die angenähert gleichförmige Schwingung des Gliedes 7 bestätigt. Bei der praktischen Ausführung dieses Mechanismus der Whitworth'schen Langloch-Bohrmaschine[1]) trägt das Glied *7* den rotirenden Bohrer, der also behufs der Bohrung eines Langloches angenähert gleichförmig hin und her bewegt wird.

216. **Schubkurbelgetriebe mit Vorgelege.** In Fig. **547** ist ein Schubkurbelgetriebe mit einem zweiräderigen Vorgelege gezeichnet. Das gleichförmig rotirende Rad *5* treibt das auf die Kurbelaxe *12* befestigte Rad *2*, welches vermittelst der Schubstange *3* den Schlitten *4* in dem Gestell *1* in ungleichförmige schwingende Bewegung versetzt. Nehmen wir an, dass das Rad *5* mit der Drehgeschwindigkeit gleich der Einheit rotire, so ergiebt sich die Geschwindigkeit des Schlittens *4* durch die Bestimmung des Pols *45*. Wir ziehen zunächst auf die Schubgerade σ des Schlittens die Senkrechten *15-14*$^\infty$, *12-14*$^\infty$, ferner durch den Schnittpunkt *24*, den die Gerade *3* mit *12-14*$^\infty$ bildet, und durch den Berührungspunkt *25* der Rollkreise r, π der Räder *5*, *2* die Gerade

---

[1]) Hart, *Die Werkzeugmaschinen*. 1864. S. 97. Taf. XXIII.

24-25, welche auf *15-14** den Pol *45* bestimmt. Demnach erhalten wir durch die zu *15-34* parallele Gerade 45-34_v die lothrechte Geschwindigkeit 34-34_v des Punktes *34* oder Schlittens *4*. Besteht das Vorgelege aus mehreren Rädern, so ist die Construction dieselbe, wir müssen dann nur anstatt des Pols *25* den Pol des ersten und letzten Rades benutzen; und die bei verschiedenen Vorgelegen auftretenden örtlichen Geschwindigkeitsdiagramme des Schlittens unterscheiden sich nur durch proportionale Veränderungen der zur Schubgeraden senkrechten Ordinaten. Das ovale Geschwindigkeitsdiagramm, welches in Art. 143 (Fig. **393**) gezeichnet ist, veranschaulicht die ungleichförmige schwingende Bewegung des Gliedes *4*. Beim Kreuzkurbelgetriebe ist die Schubstange *3* unendlich lang, die Gerade *23-24* ist zur Schubrichtung parallel, und das zugehörige Geschwindigkeitsdiagramm wird eine Ellipse, die in einen Kreis übergeht, wenn insbesondere die constante lothrechte Geschwindigkeit des Punktes *23* gleich $\overline{23\text{-}12}$ ist.

217. **Kreuzkurbelgetriebe und Schubkurbelgetriebe mit centrischen elliptischen Rädern.** In der Praxis werden bei dem Kreuzkurbelgetriebe und Schubkurbelgetriebe auch unrunde Räder angewendet, um durch eine gleichförmige Rotation angenähert gleichförmige geradlinige Schwingungen zu erzeugen. In Art. 168 ist die Bestimmung der theoretischen Gestalt der unrunden Räder abgeleitet, welche genaue gleichförmige geradlinige Schwingungen bewirken, aber diese theoretisch unrunden Räder sind für die praktische Ausführung nicht geeignet; ferner ist in Art. 163 auch die Construction rotirender Scheiben angegeben, die zu gleichem Zwecke dienen. Die Praxis erfordert aber oft nur angenähert gleichförmige Schwingungen, die durch praktisch ausführbare unrunde Räder erzeugt werden. Bei dem in Fig. **548** dargestellten Getriebe sind zwei mit *5*, *2* bezeichnete, gleiche elliptische Räder Fp, $\Phi\pi$ angewendet, welche sich um die durch ihre Mitten F, Φ gehenden Axen *15*, *12* im Gestell *1* drehen[1]). Das gleichförmig rotirende elliptische Rad Fp bewirkt durch seinen Eingriff eine ungleichförmige Drehung des elliptischen Rades $\Phi\pi$, welches den Zapfen *23* mit dem drehbaren Schlitten *3* trägt, und dadurch wird

[1]) Diese elliptischen Räder hat Corout zur gleichförmigen Fadenleitung bei dem Aufwickeln auf Spulen verwendet. Demme, *Der praktische Maschinenbauer*. 1841. Lieferung 5. S. 157 und 1847. Lieferung 25. S. 413. Später hat Shanks diese Räder auch bei einer Langloch-Bohrmaschine angewendet. *Annales du Conservatoire des arts et métiers*. 1862. T. III. p. 748; auch *Civilingenieur*. 1863. B. 9. S. 276.

das in der festen Hülse H gleitende Schlitzglied 4 angenähert gleichförmig schwingend im Gestell 1 bewegt. Für die Mittelstellung des Schlitzgliedes 4 steht die grosse Ellipsenaxe des Rades Fp, und die kleine Ellipsenaxe des Rades $\Phi\pi$, die den Zapfen 23 enthält, auf der Schubgeraden σ senkrecht. Infolge dieser symmetrischen Anordnung vollzieht das Schleifenglied 4 beim Hingange und Rückgange dieselbe Bewegung.

Um eine möglichst angenähert gleichförmige Schwingung des Gliedes 4 zu erhalten, sind die Längen der Ellipsenaxen so zu bestimmen, dass das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ des Gliedes 4 grösstentheils sehr angenähert parallel zur Schubgeraden σ verläuft. Dies wird erreicht, wenn ein Punkt A des Gliedes 4 in seiner Mittellage und in einer von seiner Weggrenze wenig entfernten Lage A^1 gleiche Geschwindigkeiten besitzt; denn dann hat auch der symmetrisch gelegene Punkt A^7 dieselbe Geschwindigkeit, und die entsprechenden Punkte $A_{\mathfrak{v}}^1$, $A_{\mathfrak{v}}$, $A_{\mathfrak{v}}^7$ des Geschwindigkeitsdiagramms haben gleichen Abstand von der Schubgeraden σ.

Wir betrachten den Axenabstand $F\Phi$ als gegeben, nehmen die Schwingungsweite A^0A^8 des Punktes A, die gleich dem Durchmesser des von dem Punkte 23 beschriebenen Kreises λ ist, beliebig an, und setzen voraus, dass das Rad Fp gleichförmig mit der Drehgeschwindigkeit gleich der Einheit rotire. Wir wählen die Lage A_1 des Punktes A beispielsweise so, dass $A^0A^1 = \frac{1}{8}A^0A^8$ ist, bestimmen die entsprechende Lage 23^1 des Punktes 23, indem die auf Φ-23 senkrechte Strecke $\overline{24^1\text{-}23^1} = AA^1$ gemacht wird. Stellen wir uns vor, es sei die Ellipse π gezeichnet, so würde der Lage A^1 die Drehung dieser Ellipse um den Winkel $23\widehat{\Phi}23^1$ $= y\widehat{\Phi}25^1 = 25^1\widehat{\Phi}x$ entsprechen, wo Φx senkrecht Φ-23^1 ist; und der nach 25^1 auf die Centrale $F\Phi$ gelangende Ellipsenpunkt y würde der entsprechende Berührungspunkt der beiden Ellipsen sein. Ziehen wir hierauf die Gerade 24^1-25^1, so schneidet diese die auf der Schubgeraden σ senkrechte Gerade 15-14^∞ in dem zu der betrachteten Stellung gehörenden Pol 45^1 des Gliedes 4 und des Rades 5, und die Strecke $\overline{15\text{-}45^1}$ ist gleich der lothrechten Geschwindigkeit $A^1A_{\mathfrak{v}}^1$ des Punktes A in der Lage A^1. Für die Mittellage 4 fällt der Pol 24 mit 23 zusammen, die Ellipsen π, p berühren sich auf der Centralen mit ihren Scheiteln im Pol 25, und die Gerade 24-25 bestimmt auf 15-14^∞ durch den zugehörigen Pol 45 die Strecke $\overline{15\text{-}45}$, welche gleich der lothrechten Geschwindigkeit $AA_{\mathfrak{v}}$ des in seiner Mittellage befindlichen Punktes A ist. Wenn nun diese beiden Pole 45^1, 45 wie im betrachteten Falle coincidiren, dann sind die beiden construirten Geschwindigkeiten gleich; und dies tritt für bestimmte Ellipsenaxen ein, die sich vermittelst einer Hülfscurve h ergeben.

Es werde auf der Centralen $F\Phi$ ein beliebiger, aber zweckmässig gewählter Punkt 25, den wir zur Vereinfachung der Zeichnung beispielsweise in den bestimmten richtigen Pol 25 gelegt haben, als ein provisorischer Berührungspunkt der Scheitel zweier gedachter Ellipsen π, p betrachtet, dann würden die Strecken F-25, Φ-25 gleich den Halbaxen der Ellipsen sein. Diese Halbaxen tragen wir auf einen Papierstreifen ab, der als elliptischer Cirkel dient, und zeichnen vermittelst desselben ein kleines Stück der Ellipse π, welche die Gerade Φx im Punkte x schneidet; hierauf machen wir in der Centralen Φ-$25^1 = \Phi x$ und ziehen die beiden Geraden 24-25, 24^1-25^1, deren Schnittpunkt ein Punkt jener genannten, durch Punktirung gekennzeichneten Hülfscurve h ist. Durch Wiederholung dieses Verfahrens, etwa durch Ermittelung von drei solchen Schnittpunkten, erhalten wir ein fast geradliniges Stück der Hülfscurve h, die durch ihren Schnitt mit der Geraden 15-14^∞ den Punkt 45 liefert. Dem zufolge bestimmt die Gerade 45-24 auf der Centralen den Berührungspunkt 25 der Scheitel und damit auch die gesuchten Axen der Ellipsen π, p, durch welche jene gleichen Geschwindigkeiten für A und A_1 hervorgebracht werden. In mathematischer Strenge sind die congruenten Rollcurven p, π keine Ellipsen; aber bei den erhaltenen günstigsten Ellipsen mit verhältnissmässig kleiner Axendifferenz ist auch die Abweichung von den mathematisch richtigen Rollcurven sehr klein, so dass dieselben in der Praxis mit grosser Genauigkeit durch Ellipsen ersetzt werden können.

Das gezeichnete örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$, welches von der Schubgeraden σ und der auf ihr senkrechten Geraden $AA_{\mathfrak{v}}$ in vier symmetrische Theile getheilt wird, verläuft bezüglich der Wegstrecke A^1A^7 beiderseits sehr angenähert parallel zur Schubgeraden σ, wodurch die Gleichförmigkeit der Schwingung auf dieser Wegstrecke bestätigt wird; und das Gesetz dieses Bewegungsvorganges bleibt bestehen, wenn wir die Kurbel Φ-23 verlängern oder verkürzen. Wählen wir diese Wegstrecke noch ein wenig grösser, wird also A^0A^1 kleiner als $\frac{1}{8}A^0A^8$ genommen, dann würde das Geschwindigkeitsdiagramm bei dieser wenig vergrösserten Wegstreke A^1A^7 merklich grössere Abweichungen von dem Parallelismus zeigen.

Wenn wir in Fig. **548** die Kurbel Φ-23^1 in 23^1 mit der Schubstange 3^1 verbinden, deren anderer Endpunkt 34^1 in der Schubgeraden σ schwingt, also ein Schubkurbelgetriebe mit elliptischen Rädern Fp, $\Phi\pi$ betrachten, so ergiebt sich die Geschwindigkeit des Punktes 34^1, wie in Art. 216 gezeigt wurde, vermittelst der Geraden, welche durch den Schnittpunkt i der Geraden 3^1 und Φ-23 und durch den Punkt 25^1 geht. Das gezeichnete örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}'$, welches von der Schubrichtung σ symmetrisch getheilt wird, entfernt sich schräg verlaufend von derselben und weicht in seiner Gestalt um so weniger von jenem Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ ab, je länger die Schubstange 3^1 ist.

218. **Kreuzkurbelgetriebe und Schubkurbelgetriebe mit einem excentrischen Kreisrade und einem centrischen ovalen Rade.** In Fig. **549** wird das Kreuzkurbelgetriebe durch das um die excentrische Axe F gleichförmig rotirende Kreisrad 5 bewegt, welches in das um die centrische Axe Φ rotirende ovale Rad 2 eingreift und während zweier Umdrehungen demselben eine ungleichförmige Umdrehung ertheilt. Dem zufolge bewirkt das mit dem drehbaren Schlitten 3 versehene ovale Rad angenähert gleichförmige Schwingungen des Schlitzgliedes 4. Der in Fig. **549** gezeichneten Stellung der Räder, in welcher der Berührungspunkt 25 des Kreises p und des Ovals π der Axe F am nächsten liegt, entspricht die Mittellage des Schlitzgliedes 4. Die günstigste Anordnung dieses Getriebes, welches durch das Verhältniss der Excentricität Fm zu dem Rollkreisradius r des Rades 5 bestimmt ist, lässt sich nicht direct erlangen und muss durch probeweises Construiren ermittelt werden. Wir haben bei dem betrachteten Getriebe den Rollkreisradius r als gegeben angenommen und die Excentricität $Fm = \frac{2}{7}r$ gewählt. Damit ist auch das ovale Rad 2 bestimmt und kann nach der Angabe in Art. 167 construirt werden. Obwohl das Oval π von einer Ellipse ziemlich abweicht, so pflegt man dasselbe in der Praxis doch durch eine Ellipse zu ersetzen.

Um für eine Lage A^1 des zu dem Schlitzgliede 4 gehörenden Punktes A, der die Lage 23^1 des Punktes 23 entspricht, die Geschwindigkeit unter der Annahme, dass das Rad 5 mit der Drehgeschwindigkeit gleich der Einheit rotire, zu erhalten, verfahren wir in der vorhin angegebenen Weise. Wir fällen von 23^1 auf Φ-23 die Senkrechte 23^1-24^1, ziehen den Fahrstrahl Φx senkrecht auf Φ-23^1, machen in der Centralen ΦF die Strecke $\overline{\Phi\text{-}25^1} = \Phi x$, und ziehen ferner die Gerade 24^1-25^1, die in der zur Schubgeraden σ senkrechten Geraden F-14^0 den Pol 45^1 und damit die Strecke $\overline{F\text{-}45^1}$ bestimmt, welche gleich der lothrechten Geschwindigkeit $A'A'_v$ des in der Lage A' befindlichen Punktes A ist. In gleicher Weise ist für die Mittellage des Schlitzgliedes *4* der Pol *45* construirt, durch den sich die entsprechende lothrechte Geschwindigkeit AA_v ergiebt. Durch die günstige Gestalt des auf diese Weise gezeichneten, örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ wird die zweckmässige Wahl jener Excentricität bestätigt. Die Bewegungsart des Gliedes *4* bleibt unverändert, wenn die Kurbel Φ-*23* verlängert oder verkürzt wird.

Wenn wir in Fig. **549** die Schubstange *3'* einfügen, welche mit dem einen Endpunkte in *23'* drehbar an das Rad *2* geschlossen ist und deren anderer Endpunkt *34'* in der Schubgeraden σ schwingt, so erhalten wir ein Schubkurbelgetriebe. Für dasselbe ist in bekannter Weise das entsprechende Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}'$ construirt, dessen günstige Gestalt auf eine verhältnissmässig gleichförmige Schwingung des Punktes *34'* hinweist[1].

219. **Kreuzkurbelgetriebe und Schubkurbelgetriebe mit focalaxigen elliptischen Rädern.** Um eine angenähert gleichförmige Kurbelschubbewegung mit raschem Rückgange zu erzeugen, werden, wie in Fig. **550** dargestellt ist, bei dem Kreuzkurbelgetriebe oder Schubkurbelgetriebe auch oft gleiche elliptische Räder Fp, $\Phi\pi$ angewendet, die sich resp. um die durch je einen Brennpunkt F, Φ gehende Axe drehen und auch mit *5*, *2* bezeichnet sind. Das gleichförmig rotirende elliptische Rad Fp versetzt das gleiche elliptische Rad $\Phi\pi$, auf dessen grosser Ellipsenaxe die Kurbel Φ-*23'* senkrecht steht, in ungleichförmige Drehung und bewirkt dadurch die erwünschte Bewegung des Schlitzgliedes *4*. Der Bewegungsvorgang der elliptischen Räder kann nach Art. 129 auch durch ein Zwillingskurbelgetriebe hervorgebracht werden, dessen Koppel $L\Lambda$ die beiden anderen Brennpunkte L, Λ verbindet und gleich $F\Phi$ ist. Um für den Hingang oder Arbeitsgang des Gliedes *4* eine möglichst angenähert gleichförmige Bewegung zu gewinnen, betrachten wir den Axenabstand $F\Phi$, dem die grosse Ellipsenaxe gleich ist, als gegeben und bestimmen die kleine Ellipsenaxe so, dass der entsprechende Theil des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ angenähert parallel zur Schubgeraden σ verläuft. Wir benutzen behufs dieser Bestimmung in analoger Weise wie in Art. 217 eine Hülfscurve h. Nachdem die Schwin-

[1] Die betrachteten Räder wurden von Sharps Stewart & Co. zur Erzeugung angenähert gleichförmiger Schwingungen bei einer Langloch-Bohrmaschine angewendet. *Annales du Conservatoire des arts et métiers.* 1862. T. III. p. 749.

gungsweite des Schlitzgliedes *4* oder die Länge der Kurbel Φ-*23'* beliebig angenommen ist, zeichnen wir nahe an einer der Weggrenzen die Stellung des Schlitzgliedes und die entsprechende Kurbellage Φ-*23'*, auf welcher die grosse Axe der Ellipse π senkrecht steht. Auf dieser grossen Ellipsenaxe nehmen wir den zweiten Brennpunkt Λ provisorisch an, den wir zur Vereinfachung der Zeichnung beispielsweise in den bestimmten richtigen Brennpunkt gelegt haben; beschreiben um F den Kreis l, dessen Radius gleich $\Phi\Lambda$ ist, und bestimmen auf diesem Kreise den Punkt L so, dass $\Lambda L = \Phi F$ ist. Durch die Gerade ΛL ergiebt sich auf $F\Phi$ der entsprechende Pol *25'* resp. der Berührungspunkt der betreffenden Ellipsen. Denken wir uns die Kurbel Φ-*23'* in die auf ΦF senkrechte Lage Φ-*23* gedreht, dann gelangen die betreffenden Scheitel dieser beiden Ellipsen auf $F\Phi$ in den Pol *25*, der direct erhalten wird, indem wir seinen Abstand von der Mitte der Strecke $F\Phi$ gleich $\frac{1}{2}\Phi\Lambda$ machen. Für die erste Stellung ergiebt sich durch den Fusspunkt der von *23'* auf Φ-*23* gefällten Senkrechten der Pol *24'*, und bei der letzten Stellung coincidirt der Pol *24* mit dem Punkte *23*. Ziehen wir nun die Geraden *24'-25'* und *24-25*, so ist der Schnittpunkt derselben ein Punkt der punktirt gezeichneten Hülfscurve h. Durch Wiederholung dieser Construction, etwa durch Ermittelung von drei solchen Schnittpunkten, erhalten wir ein fast geradliniges Stück dieser Hülfscurve h, in deren Schnitt mit der auf $F\Phi$ Senkrechten F-14^{∞} die coincidirenden Pole *45*, *45'* liegen. Die Gerade *45-24* bestimmt dann auf $F\Phi$ den Pol *25* oder den Punkt, in welchem sich die Scheitel der gesuchten Ellipsen p, π berühren, und damit ist auch, weil die grosse Axe dieser Ellipsen gleich $F\Phi$ ist, die kleine Axe derselben gefunden. Durch die so erhaltenen elliptischen Räder wird das Schlitzglied *4* in der Mittellage und in jener nahe an der Weggrenze gewählten Lage mit derselben Geschwindigkeit bewegt, welche gleich der Strecke F-*45* ist. Das in bekannter Weise gezeichnete örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ des Punktes A' ist symmetrisch bezüglich der Geraden, welche in der Mitte auf der Wegstrecke senkrecht steht; und der untere Theil desselben verläuft angenähert parallel zur Schubgeraden σ. Der hoch aufsteigende obere Theil dieses Geschwindigkeitsdiagramms veranschaulicht den raschen ungleichförmigen Rückgang des Schlitzgliedes *4*. Diese Bewegungsart bleibt bestehen, wenn die Schwingungsweite durch Verlängerung oder Verkürzung der Kurbel Φ-*23'* verändert wird.

In Fig. **550** ist ferner noch für das Schubkurbelgetriebe, welches durch Einsetzung der Schubstange *3'* entsteht, in bekannter Weise das Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}'$ gezeichnet; und da dasselbe günstig gestaltet ist, so werden die elliptischen Räder auch oft bei dem Schubkurbelgetriebe zur Erzeugung eines angenähert gleichförmigen Kurbelschubes mit raschem Rückgange angewendet[1]). Wir haben aber in Art. 187 a) erkannt, dass dieser Bewegungsvorgang einfacher vermittelst eines zweckmässig angeordneten Doppelkurbelgetriebes erreicht wird.

220. **Dreiräderiger Zahnkniemechanismus.** In Fig. **551** sind die Räder *2*, *5* eines dreiräderigen Vorgeleges resp. mit den Gliedern *3*, *4* eines Gelenkes drehbar verbunden, und dadurch wird ein dreiräderiger Zahnkniemechanismus gebildet. Bei dem aus den drei Rädern *2*, *6*, *5* und dem Gliede *1* bestehenden Vorgelege ergiebt sich der Pol *25* als der Schnittpunkt der Geraden *15-12*, *56-26*. Vermittelst dieses Pols werden alle übrigen Pole, welche durch den Mechanismus nicht unmittelbar gegeben sind, in analoger Weise wie in Art. 209 bestimmt. Betrachten wir das Glied *1* als fest, und nehmen wir an, dass *45-15* die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes *45* im Bezug auf das Glied *1* sei, dann erlangen wir die lothrechte Geschwindigkeit 34-$34_{\mathfrak{v}}$ des Gelenkpunktes *34* ebenso wie bei dem zweiräderigen Zahnkniemechanismus. Wir ziehen zu *23-25* die Parallele 15-$23_{\mathfrak{v}}$ bis an die Gerade *23-12*, ferner zu den Geraden *3*, *4* resp. die Parallelen $23_{\mathfrak{v}}$-$34_{\mathfrak{v}}$, 15-$34_{\mathfrak{v}}$, welche sich in dem Endpunkte $34_{\mathfrak{v}}$ jener lothrechten Geschwindigkeit 34-$34_{\mathfrak{v}}$ treffen, die zugleich die Normale an der Bahncurve α des Punktes *34* ist.

Durch Zusammenlegen der Axen *12*, *15* der Räder *2*, *5* erhalten wir ein doppelaxiges Vorgelege und damit den in Fig. **552** dargestellten speciellen dreiräderigen Zahnkniemechanismus, bei welchem die Räder *2*, *5* coaxial sind, also die gemeinsame Axe Φ besitzen. Werden ferner die Längen der Glieder *3*, *4* insbesondere so gewählt, dass die Punkte Φ, *23*, *34*, *45* ein Parallelogramm bilden, dann beschreibt ein mit dem Gelenkgliede *3* oder *4* verbundener Punkt nach Art. 57 eine cyclische Curve oder Trochoide in dem Gliede oder System *1*. Wir bezeichnen mit ω_{21}, ω_{51} die Drehgeschwindigkeiten der Räder *2*, *5* im Bezug auf das als fest betrachtete System *1*, und mit ν das Uebersetzungsverhältniss vom Rade *2* zum Rade *5*. Demnach besteht das Verhältniss

---

[1]) Auf diese Anwendung der elliptischen Räder hat Brunton hingewiesen. Brevet, 27 juin 1832. *Description des machines.* 1834. T. 47. p. 282.

$\omega_{21} : \omega_{51} = \nu$, und der Pol *14* ergiebt sich auf der Geraden Φ-*45* durch das Verhältniss

$$\overline{45\text{-}14} : \overline{45\text{-}\Phi} = 1 : \nu.$$

In analoger Weise wird auf der Geraden Φ-*23* der Pol *13* durch das Verhältniss

$$\overline{23\text{-}13} : \overline{23\text{-}\Phi} = \nu : 1$$

bestimmt. Die beiden Pole *14*, *13* liegen in der Normalen der Bahncurve α, welche der Punkt *34* in dem System *1* erzeugt. Bei der Bewegung des Gliedes *4* rollt der um *45* mit dem Radius $\overline{45\text{-}14}$ beschriebene zu diesem Gliede *4* gehörende Kreis p auf dem um Φ gezogenen durch *14* gehenden festen Kreise π. Bei der Bewegung des Gliedes *3* rollt der um *23* mit dem Radius $\overline{23\text{-}13}$ beschriebene zu diesem Gliede *3* gehörende Kreis p' auf dem um Φ gezogenen durch *13* gehenden festen Kreise π'.

221. **Das Oldham'sche Ruderrad.** Aus dem vorhin betrachteten besonderen Zahnkniemechanismus geht durch Anschliessung mehrerer gleichartigen Gelenke das Oldham'sche Ruderrad[1]) hervor, bei welchem durch diese Gelenke die beweglichen Schaufeln in bestimmte Stellungen geführt werden. In Fig. **553** ist ein mit 8 Schaufeln versehenes Oldham'sches Ruderrad schematisch dargestellt. Auf der in dem Schiffe, dem nicht gezeichneten Gliede *1*, gelagerten Welle Φ ist das in der Zeichnung verdeckte Zahnrad *5* und die Nabe mit den 8 Speichen 5^1, 5^2, 5^3, . . befestigt. Der Zahnkranz r_5 des Rades *5* greift in den Zahnkranz r_6' des Doppelrades *6*, dessen Axe *16* in dem Schiffe gelagert ist. Der andere Zahnkranz r_6 dieses Doppelrades greift in den Zahnkranz r_2' des lose auf die Welle Φ gesetzten Rades *2*, an welchem sich ein Excentrik ε befindet, dessen Mittelpunkt mit *23* bezeichnet ist. Auf dieses rotirende Excentrik ist das Rad *3* mit den 8 Speichen 3^1, 3^2, 3^3, . . drehbar aufgesetzt. Das Speichenpaar 5^1, 3^1 ist durch das Glied 4^1 gelenkig verbunden, so dass die Punkte Φ, 45^1, 34^1, *23* ein Parallelogramm bilden; und in gleicher Weise sind die anderen Speichenpaare $5^2 3^2$, $5^3 3^3$, . . beziehlich durch die Glieder 4^2, 4^3 . . verbunden. An den Gliedern 4^1, 4^2, 4^3, . . sind die Schaufeln s^1, s^2, s^3, . . derart befestigt, dass die Richtungsgeraden dieser Schaufeln durch den festen Punkt J gehen, mit welchem der Gelenkpunkt der verticalen Speiche 5^8 coincidirt.

[1]) Oldham, *Specification* No. 5455 vom 1. Febr. 1827. *Polytechnisches Journal.* 1828. B. 27. S. 341.

Die Zähnezahlen z_5, z'_6, z_6, z'_2 jener Zahnkränze r_5, r'_6, r_6, r'_2 müssen so gewählt werden, dass das Uebersetzungsverhältniss vom Rade *5* zum Rade *2* gleich der Zahl 2, also

$$\frac{z'_6 \,.\, z'_2}{z_5 \,.\, z_6} = 2$$

ist; und Oldham hat z. B. $z_5 = 70$, $z'_6 = 60$, $z_6 = 39$, $z'_2 = 91$ genommen. Dem gemäss ist die Drehgeschwindigkeit der Speichen 5^1, 5^2 . . doppelt so gross als die Drehgeschwindigkeit des Rades *2* oder des Excentriks ε. Da aber die Glieder 4^1, 4^2 . ., welche die Schaufeln s^1, s^2 . . tragen, der rotirenden Strecke Φ-*23* beständig parallel sind, so entspricht einem bestimmten Drehungswinkel der Speichen 5^1, 5^2 . . ein halb so grosser gleichsinniger Drehungswinkel der Schaufeln s^1, s^2 . .; und demnach gehen die Richtungsgeraden der Schaufel während der Drehung beständig durch den festen Punkt *J*. Das Oldham'sche Ruderrad hat wegen der erforderlichen Zahnräder nicht die in der Praxis gewünschte Einfachheit, durch welche sich das in Art. 192 behandelte Morgan'sche Ruderrad vortheilhaft auszeichnet.

222. **Mechanismus der Passig-Drehbank von Koch und Müller.** Durch diesen Mechanismus wird der Planscheibe oder einem an derselben befestigten Werkstücke auf der Drehbank eine solche Bewegung ertheilt, dass ein in verschiedenen Stellungen am Gestell der Drehbank festgestellter Stichel Trochoiden auf der Planscheibe oder dem Werkstücke beschreibt. Wir betrachten zunächst in Fig. **554** das aus den Gliedern *2*, *3*, *4*, *5* gebildete Gelenkparallelogramm, bei dem sich die Glieder *2*, *5* um die gemeinsame feste Axe Φ in einem gedachten ruhenden System *1* drehen, so dass die Drehgeschwindigkeiten in constantem Verhältnisse stehen. Bei der Bewegung des Gliedes *3* rollt dann ein zu demselben gehörender Kreis, dessen Mittelpunkt *23* ist, auf einem zum ruhenden System *1* gehörenden Kreise, dessen Mittelpunkt in Φ liegt; und dem zufolge muss auch eine in dem System *1* befindliche feste Stichelspitze eine Trochoide in dem bewegten System oder Gliede *3* erzeugen. Es kann aber die vermittelst des Gelenkparallelogramms bewirkte kreislinige Parallelbewegung, welche das Glied *3* gegen das Glied *5* vollzieht, in einer für die praktische Ausführung zweckmässigen Weise durch eine Kreuzschubkurbel erzeugt werden, indem wir uns die Glieder *2*, *5* als Schieber gestaltet denken, die in einem Kreuzschlitzgliede *0* gleiten, und das Glied *4* weglassen. Werden nun durch ein doppelaxiges Vorgelege den coaxialen Glie-

dern *2*, *5* proportionale Drehungen in gleichem oder ungleichem Sinne ertheilt, so vollzieht das Glied *3* im Bezug auf das ruhende System *1* dieselbe Bewegung wie vorhin. Durch diesen Mechanismus wird der Bewegungsvorgang bei der Passig-Drehbank von Koch und Müller hervorgebracht[1]).

Die Glieder dieses Mechanismus müssen aber noch den praktischen Anforderungen entsprechend geformt werden, wie Fig. 555 in hinterer Ansicht und im verticalen Mittelschnitte darstellt. Das Glied *2* ist ein auf der Welle Φ festgestelltes Excentrik, bei welchem durch Verstellbarkeit die Excentricität verändert werden kann. Auf diesem Excentrik sitzt drehbar die Planscheibe, die das Glied *3* vertritt. Diese Planscheibe ist mit Nuthen n, n' versehen, die über die Zapfen i, i' des scheibenförmig gestalteten Gliedes *0* gleiten. Dieses Glied *0* enthält einen zu diesen Nuthen senkrechten Schlitz und gleitet mit demselben auf dem prismatischen Gliede *5*, welches sich lose auf der Welle Φ dreht. Ein an der Drehbank befindliches Vorgelege, bei welchem durch Auswechseln der betreffenden Räder verschiedene Uebersetzungsverhältnisse hervorgebracht werden können, bewirkt die proportionalen Drehungen der Welle Φ mit dem Excenter *2* und des Gliedes *5* in gleichem oder ungleichem Sinne. Demnach erzeugt die Spitze eines am Gestell der Drehbank befestigten Stichels auf der Planscheibe *3* eine Trochoide, die durch Verstellung des Stichels, durch Veränderung des Uebersetzungsverhältnisses und der Excentricität mannigfaltig gestaltet wird, und die insbesondere in eine Ellipse, eine gerade Strecke oder einen Kreis übergeht. Um Werkstücke zwischen zwei Spitzen passig zu drehen, muss dieselbe Kreisbewegung, welche die Körnerspitze k des Excentriks ausführt, vermittelst Räderübersetzung und einer in der Längsrichtung im Gestelle gelagerten Welle auf die Körnerspitze des Reitstockes übertragen werden. Demnach wird einem zwischen die beiden Körnerspitzen eingesetzten mitgeführten Arbeitsstücke dieselbe Bewegung ertheilt, welche die Planscheibe vollzieht.

---

[1]) Siehe E. Brauer, „Kinematische Untersuchung der Passig-Drehbank, Patent Koch und Müller“, in den *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen.* 1876. S. 310. In den älteren Werken über Drehkunst bezeichnet das Wort „passig“ oder „passicht“, welches jetzt seltener vorkommt, figurirt, gemustert, gerippt, kraus. Vergl. J. M. Teuber, *Vollständiger Unterricht von der gemeinen und höheren Drehkunst.* 1756. Thl. II, und Plumier, *L'Art de tourner. Die Kunst zu drechseln.* Französisch und deutsch. Ausgabe. 1776. Thl. III.

223. **Ovalwerk nach Delnest**[1]). In Fig. **556** bilden die drei Räder *2*, *6*, *5* und das feste Glied *1* ein dreiräderiges Vorgelege, dessen Rad *2* mit dem einen Gliede *3* eines Gelenkes *3*, *4* und dessen festes Glied *1* mit dem anderen Gliede *4* dieses Gelenkes drehbar verbunden ist, so dass durch die Glieder *1*, *2*, *3*, *4* ein Parallelkurbelgetriebe entsteht. Das Glied *3* vollzieht demnach eine kreislinige Parallelbewegung im Bezug auf das feste Glied *1*. Machen wir im Gliede *3* das Dreieck *23-C-34* dem Dreieck *12-15-14* congruent, so sind die Strecken $\overline{12\text{-}23}$, $\overline{14\text{-}34}$, $\overline{15\text{-}C}$ gleich und parallel; und der Punkt *C* des Gliedes *3* bewegt sich auf einem Kreise γ, dessen Mittelpunkt in *15* liegt. Ist das Uebersetzungsverhältniss vom Rade *2* zum Rade *5* gegeben und danach der Pol *25* auf der Geraden *12-15* bestimmt, dann schneidet die Gerade *25-23* die Gerade *15-C*, welche nach dem unendlich fernen Pol 13^∞ geht, in dem Pol *35*, und die Strecke $\overline{C\text{-}35}$ ist constant. Betrachten wir das Rad *5* einstweilen als fest, so drehen sich die Seiten *15-12*, *15-C* des Parallelogramms *15-12-23-C* proportional um die gemeinsame feste Axe *15*. Demnach rollt der um *C* mit dem Radius *C-35* beschriebene Kreis *p* des Gliedes *3* an dem um *15* mit dem Radius *15-35* beschriebenen festen Kreise π, und ein Punkt des Gliedes *3* erzeugt im Bezug auf Rad *5* eine Trochoide.

In Fig. **556** ist der specielle Fall dargestellt, bei welchem das Uebersetzungsverhältniss vom Rade *2* zum Rade *5* gleich 2 : 1 und wegen des Wechselrades *6* positiv ist; dem zufolge stehen auch die Strecken $\overline{15\text{-}25}$, $\overline{12\text{-}25}$, sowie die Strecken $\overline{15\text{-}35}$, $\overline{C\text{-}35}$ in dem Verhältnisse 2 : 1, und der Kreis *p*, welcher gleich den Kurbelkreisen ist, rollt in dem doppelt so grossen Kreise π. In diesem speciellen Falle beschreibt also ein Punkt des Gliedes *3* eine Ellipse im Bezug auf das Rad *5*, die in eine gerade Strecke oder in einen Kreis übergeht, je nachdem der beschreibende Punkt auf dem Kreise *p* oder in dem Mittelpunkte *C* desselben liegt. Wird an dem Gliede *3* ein verstellbarer Stichel befestigt, so erzeugt die Spitze *s* desselben auf einer durch die Axe *15* mit dem Rade *5* verbundenen Planscheibe eine Ellipse $\mathfrak{s}$, an der die Gerade *s-35* eine Normale ist. Um die Ellipse $\mathfrak{s}$ zu construiren, ziehen wir nach S. 38 die Gerade *sC*, welche den Kreis *p* in den Punkten *a*, *b* schneidet, dann erhalten wir durch *15-a*, *15-b* die Richtungen der Ellipsenaxen und durch die Strecken *sa*, *sb* die halben Längen

[1]) *Skizzenbuch der angewandten Kinematik*, herausgegeben vom Verein „Hütte". 1880. S. 23.

derselben. Durch Verstellung der Stichelspitze *s* im Gliede *3* wird das Verhältniss der Ellipsenaxen verändert. Um aber Ellipsen von bestimmter Grösse zu erhalten, sind die Kurbelzapfen *23*, *34* des Parallelkurbelgetriebes in den Gliedern *2*, *4* verstellbar; denn dadurch wird die Grösse jener Rollkreise π, p verändert. Durch Anbringung eines zweiten in der Zeichnung nicht angegebenen Parallelkurbelgetriebes wird in bekannter Weise die Unstetigkeit der Bewegung des Gliedes *3* in seiner Durchschlagslage vermieden. Wenn das Uebersetzungsverhältniss der Räder *2*, *5* durch Zwischensetzung entsprechender Doppelräder verändert wird, können durch diese Vorrichtung ebenso wie durch die Passig-Drehbank mannigfach gestaltete Trochoiden erzeugt werden; aber jene Passig-Drehbank hat den praktischen Vorzug, dass der Stichel im Bezug auf das Gestell fest ist.

224. **Hauptmechanismus eines Guillochirwerkes.** Um bestimmte, meist rosettenartige Curven vermittelst eines Mechanismus zu zeichnen oder auf einem Werkstücke zu guillochiren, werden entsprechend profilirte Scheiben, die in der Praxis Patronen heissen, zur Erzeugung der erforderlichen Bewegung angewendet. In Fig. **557**, Taf. XXXVI, ist der Hauptmechanismus eines Guillochirwerkes oder Passigwerkes, welches in der praktischen Ausführung sehr verschieden gestaltet ist[1]), schematisch dargestellt. Mit dem festen Gestell *1* ist das Glied *2* durch die Axe *g* gelenkig verbunden, in welchem eine Spindel *i* gelagert ist. Auf der Spindel *i* ist die profilirte Scheibe *A* festgesetzt, und vor derselben ist an dieser Spindel das scheibenförmige Werkstück *S* befestigt. Das Gestell *1* trägt einen festen Stift *a*, den sogenannten Anlauf, und eine Feder *f*, welche das Glied *2* nach diesem Stifte zieht, damit der profilirte Scheibenrand $\mathfrak{a}$ beständig an den Stift *a* gedrückt wird; demnach ist der Mechanismus durch diesen Kraftschluss zwangläufig. Wenn nun die Spindel *i* mit der profilirten Scheibe *A* und dem Arbeitsstücke *S* gedreht wird, dann beschreibt die Spitze *s* eines am Gestell befestigten Stichels eine dem profilirten Scheibenrande $\mathfrak{a}$ entsprechende Curve $\mathfrak{s}$ auf dem Werkstücke *S*. Diese Drehung wird in Fig. **557** nach Reuleaux[2]) beispielsweise durch die Kurbel *hk* und durch das mit seiner Axe *h* im Gliede *2* ge-

[1]) Plumier, *L'Art de tourner*. 1706. 3ème part, planche 23. Geissler, *Der Drechsler*. 1801. Thl. III. S. 98. Prechtl, *Technologische Encyclopädie*. 1836. B. 7. S. 220.

[2]) *Skizzenbuch der angewandten Kinematik*, herausgegeben vom Verein „Hütte". 1880. S. 22.

lagerte Rad *3* bewirkt, welches in das auf der Spindel *i* befestigte Rad *4* eingreift. In der Praxis wird diese Drehung vermittelst einer im Gestell *1* gelagerten Kurbel und einer über Scheiben laufenden geschlossenen Schnur bewirkt.

Die kreisförmigen Schwingungen, welche die Spindelaxe *i* im Bezug auf das Gestell *1* vollzieht, sind in der Regel sehr klein im Verhältnisse zu der Länge *gi* des Gliedes *2*, so dass wir annehmen können, die Axe *i* bewege sich in einer Ebene. Werden nun bei Feststellung des Stiftes und des Stichels die Punkte *a*, *s* in diese Ebene gebracht, und beachten wir, dass in der Zeichnung die Strecke *as* den Abstand der beiden durch die Punkte *a*, *s* gehenden, zur Axe *i* parallelen Geraden darstellt, so entspricht der Profilcurve 𝔞 der Scheibe *A* eine von *s* beschriebene Curve 𝔰, die sich constructiv ergiebt, wenn wir alle von *i* ausgehenden Fahrstrahlen der Profilcurve 𝔞 um die constante Strecke *as* verkürzen. Wird insbesondere die Stichelspitze *s* so eingestellt, dass sie, wenn *a* sich am nächsten an *i* befindet, mit *i* coincidirt, dann entsteht die innere zweite rosettenförmige Curve, die in derselben Weise construirt ist. Soll nun eine bestimmt vorgeschriebene Curve erzeugt werden, dann muss umgekehrt zu derselben die entsprechende Profilcurve 𝔞 der Patrone construirt werden. Durch beliebige Einstellungen des Stichels, etwa höher oder tiefer, kann man ferner die Gestalt der Curven, welche derselben Profilcurve 𝔞 entsprechen, mannigfaltig verändern. Wenn noch eine zweite oder dritte profilirte Patrone auf die Spindel *i* festgesetzt wird, so dass die entsprechenden, von der Stichelspitze *s* erzeugten Curven einander durchschneiden, dann können auf diese Weise die verschiedenartigsten Muster entstehen.

225. **Interferenzmechanismen.** In Fig. **558** sind zwei Kreuzkurbelgetriebe gezeichnet, deren Kurbeln ΦF, ΛL an den Rädern *2*, *4* eines dreiräderigen Vorgeleges befestigt sind, und deren Schlitzglieder *5*, *7* resp. in den parallelen Hülsen *f*, *l* des festen Gestells *3* gleiten. Die Zapfen *A*, *B* der Schlitzglieder *5*, *7* befinden sich in den Schlitzen eines Gliedes *8*, welches in dem auf der Geraden *AB* liegenden Punkte *C* mit einem Gliede *6* drehbar verbunden ist; und dieses Glied *6* verschiebt sich in der festen Hülse *m* parallel zu *5* und *7*. Durch die beiden einfachen gleichen Räder *2*, *4*, deren Uebersetzungsverhältniss von dem vermittelnden Doppelrade *1* abhängt, werden die Punkte *A*, *B* in interferirende Schwingungen versetzt, aus denen die schwingende Bewegung des Gliedes *6* oder des Punktes *C* derselben resultirt;

und danach ist die Benennung **Interferenzmechanismus** gewählt.

Um die Bewegung des Punktes C zu bestimmen, bezeichnen wir mit a, b die Abstände der Punkte A, B von C und mit α, β die Wegstrecken, um welche sich die Punkte A, B in bestimmten Stellungen von ihren Schwingungsmitten entfernt haben. Nehmen wir erstens an, es wäre B in Ruhe, so würde durch die Bewegung von A der Punkt C um die Strecke

$$\frac{b\alpha}{a+b}$$

bewegt; und nehmen wir zweitens an, es wäre A in Ruhe, so würde durch die Bewegung von B der Punkt C um die Strecke

$$\frac{a\beta}{a+b}$$

fortgeführt. Messen wir nun die mit γ bezeichnete Wegstrecke, welche der Punkt C infolge der gleichzeitigen Bewegung der Punkte A, B durchschreitet, von derjenigen Lage des Punktes C aus, die den Mittellagen der Punkte A, B entspricht, so ist:

$$\gamma = \frac{b\alpha}{a+b} + \frac{a\beta}{a+b} = \frac{b\alpha + a\beta}{a+b}.$$

In dieser Formel ist die Wegstrecke α oder β negativ zu nehmen, wenn sie der ursprünglich als positiv betrachteten Richtung entgegengesetzt ist. Nach Art. 145 sind die orthogonalen Wegdiagramme der Punkte A, B Sinoiden; und wenn wir im Bezug auf dieselbe Zeitaxe die Ordinaten α, β dieser Sinoiden resp. in dem Verhältnisse

$$\frac{b}{a+b}, \quad \frac{a}{a+b}$$

verkleinern, so ergeben sich zwei Sinoiden $\mathfrak{w}_a$, $\mathfrak{w}_b$, welche beziehlich die Wegdiagramme des Punktes C sein würden, wenn derselbe allein durch A und allein durch B bewegt wird. Die Sinoiden $\mathfrak{w}_a$, $\mathfrak{w}_b$, deren Amplituden oder grösste Ausweichungen resp. gleich

$$\frac{b}{a+b} \cdot \overline{\Phi F}, \quad \frac{a}{a+b} \cdot \overline{\Lambda L}$$

sind, können leicht in bekannter Weise construirt werden, wenn das Verhältniss der Uebersetzung vom Rade 2 zum Rade 4 gegeben ist. Und aus diesen beiden Sinoiden geht dann durch Interferenz das orthogonale Wegdiagramm $\mathfrak{w}_c$ des Punktes C als Schwingungscurve hervor.

Bei dem in Fig. 558 gezeichneten Interferenzmechanismus sind beispielsweise die Abstände a, b gleich und auch die beiden Kurbeln ΦF, ΛL von gleicher Grösse genommen. Das Verhältniss der Uebersetzung vom Rade *2* zum Rade *4* ist durch das Verhältniss 5 : 6 gegeben, und die beiden Punkte A, B sollen sich im Beginn der Bewegung gleichzeitig von ihrer Mittellage aus in gleichem Sinne bewegen. Um nun in Fig. 559 für diesen besonderen Fall das orthogonale Wegdiagramm $\mathfrak{w}_c$ jenes Punktes C zu construiren, nehmen wir auf der Zeitaxe eine beliebige Strecke $T_0 T$ an und zeichnen die beiden von T_0 aus gehenden Sinoiden $\mathfrak{w}_a$, $\mathfrak{w}_b$, welche in diesem Falle gleiche Amplituden haben, so dass gemäss dem Verhältnisse 5 : 6 die Strecke $T_0' T$ der Zeitaxe 5 congruente Wellenzüge von $\mathfrak{w}_a$ und 6 congruente Wellenzüge von $\mathfrak{w}_b$ enthält. Diese Wellenzüge sind in bekannter Weise vermittelst Theilung der gleichen Wellenlängen und entsprechender Theilung des mit der Amplitude als Radius um einen Punkt O der Zeitaxe beschreibenden Kreises k construirt. Im betrachteten Falle ist diese Amplitude gleich der Hälfte jener gleichen Kurbeln ΦF, ΛL. Wir haben aber, um eine übersichtlichere Zeichnung zu erhalten, diese Amplitude von doppelter Grösse genommen, und demnach erscheinen auch die Ordinaten des stärker gezeichneten, resultirenden Wegdiagramms $\mathfrak{w}_c$, die sich als die algebraische Summe der entsprechenden Ordinaten der Sinoiden $\mathfrak{w}_a$, $\mathfrak{w}_b$ ergeben, in doppelter Grösse. Während 5 Umdrehungen des Rades *2* oder 6 Umdrehungen des Rades *4* wird eine Periode der Bewegung des Punktes C vollendet, welche durch das gezeichnete Stück des Wegdiagramms $\mathfrak{w}_c$ veranschaulicht wird. Die Schwingungen verkleinern sich während der ersten Hälfte dieser Periode und vergrössern sich in gleicher Weise während der zweiten Hälfte derselben. Die Gestalt des Wegdiagramms $\mathfrak{w}_c$ wird mannigfaltig verändert, wenn die Sinoiden $\mathfrak{w}_a$, $\mathfrak{w}_b$ nicht gleichzeitig von einem Punkte der Zeitaxe ausgehen, wenn wir z. B. die Sinoide $\mathfrak{w}_b$ in der Richtung $T_0 T$ der Zeitaxe um eine Strecke verschieben, die einer Phasendifferenz der Schwingungen der Punkte A, B entspricht.

Um die Veränderungen der Bewegung des Punktes C bei verschiedenen Phasendifferenzen zu veranschaulichen, betrachten wir beispielsweise den Fall, dass in Fig. 559 zwei verschiedene Räder *2*, *4* direct in einander greifen, sich also im ungleichen Sinne drehen, und das einfache Uebersetzungsverhältniss 1 : 2 besitzen. Wir nehmen nun zunächst an, dass beim Beginn der Bewegung die Kurbeln ΦF, ΛL sich beide in der Strecke $\Phi\Lambda$ befinden; dann beginnt die Bewegung der Punkte A, B von ihrer Mittellage aus in gleichem Sinne, und die Phasendifferenz ist gleich Null. Wir erhalten dem gemäss in Fig. **560** von T_0 aus gehend auf einer Strecke $T_0 T$ der Zeitaxe einen Wellenzug der Sinoide $\mathfrak{w}_a$, und zwei Wellenzüge der Sinoide $\mathfrak{w}_b$, aus denen das entsprechende Wegdiagramm $\mathfrak{w}_c$ für die Phasendifferenz Null resultirt. Befindet sich die Kurbel ΦF im Beginn der Bewegung stets in $\Phi\Lambda$ und denken wir uns die andere Kurbel ΛL nach einander um bestimmte Winkel von $\Lambda\Phi$ aus in verschiedene Stellungen gedreht, z. B. um die Winkel 90°, 180°, 270°, so entsprechen diesen die Phasendifferenzen $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$. Die Bewegungsvorgänge, welche diesen Phasendifferenzen entsprechen, werden beziehlich durch die Zeichnungen in den Figuren **560**[a], **560**[b], **560**[c] veranschaulicht, in denen die Sinoide $\mathfrak{w}_b$ gegen die unveränderte Sinoide $\mathfrak{w}_a$ resp. um $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ der Wellenlänge von $\mathfrak{w}_b$ oder der Hälfte von $T_0 T$ verschoben ist. In Fig. **560** und **560**[b] sind die Wegdiagramme $\mathfrak{w}_c$ bei weiterer Ausführung für die Phasendifferenzen 0, $\frac{2}{4}$ congruent und nur um eine Strecke gegen einander verschoben. In Fig. **559**[a] und **559**[c] sind die Wegdiagramme $\mathfrak{w}_c$ für die Phasendifferenzen $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ auch congruent, aber ihre gegenseitige Lage ist verschieden und wird gleichartig nach einer Drehung um zwei rechte Winkel.

Bei dem in Fig. **561** gezeichneten Interferenzmechanismus ist wegen der leichteren praktischen Ausführung das Glied *8* durch die Schubstangen *5*, *7* mit den Kurbeln ΦF, ΛL gelenkig verbunden[1]). Der Bewegungsvorgang des Gliedes *6* ist bei diesem Mechanismus im Allgemeinen sehr complicirt; wenn aber die Schubstangen *5*, *7* im Verhältnisse zu den Kurbeln lang sind, so kann dieser Bewegungsvorgang durch die vorhin ausgeführten graphischen Darstellungen annähernd veranschaulicht werden. Ist das Uebersetzungsverhältniss der beiden direct in einander greifenden Räder *2*, *4* gleich 1 : 2, verhalten sich also ihre Zähnezahlen wie 2 : 1, dann bewegt sich der Punkt C bei jenen vier Phasendifferenzen angenähert wie durch die vorhin betrachteten vier Wegdiagramme $\mathfrak{w}_c$ dargestellt wird. In der durch Fig. **561** gegebenen Anordnung ist dieser Mechanismus bei der Fünffarben-Perrotine von Hummel angewendet[2]).

---

[1]) Lanz et Bétancourt, *Essai sur la composition des machines.* 1808. p. 37. — Redtenbacher, *Die Bewegungs-Mechanismen.* 1857. S. 13, oder *Der Maschinenbau.* 1862. B. I. S. 361.

[2]) Herrmann, „Aus der Maschinenhalle der Wiener Weltausstellung"; *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure.* 1874. B. 18. S. 609.

Denken wir uns die Räder *2*, *4* während einer unendlich kleinen Bewegung vermittelst einer durch den Pol *24* gehenden beliebigen Koppel gelenkig verbunden, dann stimmt dieser Mechanismus mit dem in Art. 197 betrachteten Schwengelkurbelgetriebe überein, und wir können demnach auch in analoger Weise, wie es dort gelehrt wurde, die Geschwindigkeit des Punktes C vermittelst der betreffenden Pole construiren. Wir ziehen die Gerade F-*24*, welche die Gerade 7 im Punkte VII_1 trifft, dann die Gerade *34*-VII_1, welche die Gerade F-*23* im Punkte $\mathfrak{B}_1$ schneidet; wir ziehen ferner durch diesen Punkt $\mathfrak{B}_1$ und den Schnittpunkt $\mathfrak{B}$ der Geraden *5*, *7* die Gerade $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$: so bestimmt diese auf der in C zu $C6$ Senkrechten *68*-*36*$^\infty$ den Pol *38* des Schwengelgliedes *8* im Bezug auf das feste Gestell *3*[1]. Nehmen wir nun an, dass F-*23* die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes F sei, und ziehen wir durch *23* zu *5* die Parallele *23*-$A_\mathfrak{v}$, dann liefert diese auf A-*38* die lothrechte Geschwindigkeit $AA_\mathfrak{v}$ von A. Ferner erhalten wir durch die zu AB Parallele $A_\mathfrak{v}B_\mathfrak{v}$ auf C-*38* die lothrechte Geschwindigkeit $CC_\mathfrak{v}$ des Punktes C, resp. des Gliedes *6*, und auf B-*38* die lothrechte Geschwindigkeit $BB_\mathfrak{v}$ von B. In anderer Weise ergiebt sich die Geschwindigkeit von C, wenn wir die Gerade *38*-*23* ziehen, die auf *5* den Pol *28* bestimmt; dann schneiden sich die Geraden *28*-*68*, *23*-*36*$^\infty$ in dem auf $\Phi\Lambda$ liegenden Pol *26* und die Strecke $\overline{26\text{-}23}$ repräsentirt die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes C.

Besonders einfach wird der betrachtete Mechanismus, wenn derselbe, wie in Fig. **562**, hinsichtlich aller Bestandtheile symmetrisch gestaltet ist. In dieser Anordnung vollziehen die Punkte A, B gleichzeitig identische Bewegungen; dem zufolge kann jener Schwengel AB einstückig mit dem Gliede *6* verbunden werden, und wir erhalten dadurch einen übergeschlossenen Mechanismus. So gestaltet hat Cartwright diesen Mechanismus bei seiner Dampfmaschine angewendet[2], und daher wird derselbe auch der Cartwright'sche Mechanismus genannt.

226. **Mechanismus für Erzeugung periodisch veränderlicher, fortschreitender Bewegung.** In Fig. **563** bilden die Glieder *1*, *2*, *3*, *4* einen Kurbelmechanismus; auf den Gelenkaxen *34*, *14* drehen sich

[1] Eine andere, aber umständlichere Construction dieses Pols hat Rittershaus im *Civilingenieur*. 1880. B. 26. S. 233 mitgetheilt.

[2] Cartwright, *Specification* No. 2202 vom 11. Nov. 1797; ferner in den *Annales des arts et manufactures* par O'Reilly (ohne Druckjahr) T. I. p. 84.

die in einander greifenden Räder *5*, *6*, und das Glied *2* besteht aus einem Rade *2*, welches centrisch auf die Axe *23* gesetzt ist und in das Rad *5* eingreift[1]). Von den fünfzehn Polen dieses sechsgliederigen Mechanismus sind durch denselben zehn Pole unmittelbar gegeben. In jeder Axe *34*, *14* der Räder *5*, *6* befinden sich beziehlich die drei Pole *34*, *35*, *45* und *14*, *16*, *46* vereint, und die Pole *25*, *56* sind die Berührungspunkte der betreffenden Rollkreise r_2, r_5 und r_5, r_6 der Räder. Die Bestimmung der übrigen fünf Pole ist aus der übersichtlichen Bezeichnungsweise leicht erkenntlich.

Betrachten wir zunächst das Glied *1* als fest und nehmen wir an, dass das Rad *2* sich um die feste excentrische Axe *12* gleichförmig dreht, so wird, weil der Kurbelmechanismus dann ein Schwingkurbelgetriebe repräsentirt, das Glied *4* Schwingungen um die feste Axe *14* vollziehen, und das auf derselben sitzende Rad *6* wird dadurch in periodisch veränderliche, fortschreitende Drehung versetzt. Um im Bezug auf das feste Glied *1* die Geschwindigkeit für einen Punkt des Rollkreises r_6 des Rades *6*, z. B. für den mit dem Pol *56* coincidirenden Punkt A zu erhalten, nehmen wir an, dass der Punkt *23* des Gliedes *2* sich im festen Gliede *1* mit der constanten lothrechten Geschwindigkeit $\overline{23\text{-}12}$ drehe. Der Pol *26*, der sich als Schnittpunkt der Geraden *12-16*, *25-56* ergiebt, besitzt demnach, als Punkt des Gliedes *2* und als Punkt des Rades *6* betrachtet, dieselbe lothrechte Geschwindigkeit $\overline{26\text{-}12}$; folglich wird durch die zu *25-56* oder A-*26* Parallele *12*-$A_{\mathfrak{v}}$ auf der Geraden A-*16* die lothrechte Geschwindigkeit $A A_{\mathfrak{v}}$ des Punktes A des Rades *6* bestimmt. Bei dieser Bestimmung ist also der Pol *26* gar nicht erforderlich. Man ersieht leicht, dass bei diesem betrachteten Mechanismus während der Rotation des Punktes *23* die Pole *25*, *56* mit dem festen Axenpunkte *12* nicht in eine Gerade gelangen, dass also der Punkt $A_{\mathfrak{v}}$ nicht mit A oder *56* zusammenfallen kann und dass die lothrechte Geschwindigkeit $A A_{\mathfrak{v}}$ auch nicht gleich Null wird. Diese lothrechte Geschwindigkeit verändert sich demnach während jeder Umdrehung des Gliedes *2* periodisch und bewahrt ihren Richtungssinn. Das Rad *6* vollzieht somit eine periodisch veränderliche, fortschreitende Drehung. Wenn die Anordnung des Mechanismus derart ist, dass die lothrechte Geschwindigkeit $AA_{\mathfrak{v}}$ gleich Null wird und auch

[1]) Vergl. Weisbach, „Abänderung der Bewegung" in Hülsse, *Allgemeine Maschinen-Encyclopädie.* 1841. B. I. S. 43.

entgegengesetzten Richtungssinn annehmen kann, dann entsteht eine periodisch veränderliche Bewegung des Rades *2* in beiderlei Sinn, und ein successives Fortschreiten findet in dem Sinne statt, in welchem die Bewegung überwiegt.

Betrachten wir in Fig. **563** das Glied *3* als fest, und nehmen wir an, das Rad *2* rotire gleichförmig um die feste centrische Axe *23*, dann vollzieht das Glied *4* Schwingungen um die feste Axe *34*, und das Rad *6* wird im Bezug auf das rotirende Rad *5* in periodische Bewegung versetzt. Um diese Bewegung zu veranschaulichen, denken wir uns einstweilen das Rad *5* festgestellt, und durch gleichförmige Drehung des Gliedes *3* das Rad *2* umlaufend um das Rad *5* bewegt. Dadurch wird dann dem Gliede *4* sowie dem Rade *6* im Bezug auf *5* eine ungleichförmige Bewegung ertheilt. Nehmen wir an, dass der Punkt *23* im Bezug auf *5* mit der constanten lothrechten Geschwindigkeit $\overline{23\text{-}35}$ um die Axe *35* rotirt, so bestimmt die zu *12-23* Parallele $35\text{-}12_{\mathfrak{v}}$ auf *12-25* die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{12\text{-}12_{\mathfrak{v}}}$ des Punktes *12* und die zu *12-14* Parallele $12_{\mathfrak{v}}\text{-}14_{\mathfrak{v}}$ auf der Geraden *4* die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{14\text{-}14_{\mathfrak{v}}}$ des Punktes *14* im Bezug auf *5*. Einer Drehung des Gliedes *4* in *5* entspricht eine proportionale Drehung von *6* in *5*, und in analoger Weise wie die Bewegung des Punktes *14* vollzieht sich auch die Bewegung des Rades *6* im Bezug auf das Rad *5*. Man ersieht auch hier leicht, dass bei diesem betrachteten Mechanismus die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{14\text{-}14_{\mathfrak{v}}}$ nicht Null wird, und demnach vollzieht das Rad *6* auf dem rotirenden Rade *5* eine periodisch veränderliche, fortschreitende Bewegung. Derartige Bewegungen können jedoch meist in einfacherer Weise durch zwei unrunde Räder bewirkt werden. Der Mechanismus kann aber, ebenso wie vorhin erwähnt wurde, durch entsprechende Anordnung auch periodisch veränderliche Bewegung in beiderlei Sinn erzeugen, die nach und nach in dem einen Sinne successive fortschreitet, und dies ist durch zwei unrunde Räder praktisch nicht zu ermöglichen.

227. **Mechanismen mit Pilgerschrittbewegung.** Für eine periodisch veränderliche Bewegung, die in beiderlei Sinn vor sich geht, aber nach und nach in dem einen Sinne fortschreitet, hat sich in der Praxis die Benennung Pilgerschrittbewegung gebildet. Derartige Bewegungsvorgänge kommen bei Flachsbrechmaschinen in Anwendung, um die gewöhnlich erforderliche grosse Anzahl gleichförmig rotirender Riffelwalzen durch eine kleine Anzahl Riffelwalzen zu ersetzen, die Pilgerschrittbewegung besitzen und

dadurch die Brechung des Flachses ebenso bewirken, wie jene vielen auf einander folgenden Riffelwalzen.

In Fig. **564** ist der Mechanismus der Flachsbreche von Sanford und Mallory schematisch dargestellt[1]). Derselbe unterscheidet sich in seinem Haupttheil von dem vorhin betrachteten Mechanismus nur dadurch, dass die Axe *12* ausserhalb des zum Gliede *2* gehörenden Rades r_2 liegt und dass die Bewegung von diesem Rade durch ein Wechselrad *0* auf ein Doppelrad *5* übertragen wird, dessen beide Rollkreise r_5', r_5 sind. Im Gestell *1* rotirt die Kurbel *12-23* mit dem auf ihrem Kurbelzapfen *23* centrisch befestigten Rade r_2 gleichförmig um die feste Axe *12*; dadurch wird das um die feste Axe *14* rotirende Rad *6* in Pilgerschrittbewegung versetzt, und diese wird auf die Riffelwalzen *7*, *8* und *7'*, *8'* übertragen, die im Gestell *1* gelagert sind. Zwischen den Walzenpaaren *7*, *8* und *7'*, *8'* wird die Brechung des Flachses vollzogen.

Um das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm für die Bewegung der Riffelwalzen zu erhalten und dadurch den Bewegungsvorgang derselben zu veranschaulichen, nehmen wir an, dass der Kurbelzapfen *23* mit der constanten lothrechten Geschwindigkeit $\overline{23\text{-}12}$ rotire, und theilen den vom Punkte *23* beschriebenen Kreis φ in eine Anzahl gleicher Theile, die im Sinne der Drehung beispielsweise von der gezeichneten Lage des Punktes *23* ausgehen. Für jede Kurbellage, die je einem der erhaltenen Theilpunkte entspricht, construiren wir in der oben angegebenen Weise die zugehörige lothrechte Geschwindigkeit des auf dem Rollkreise r_6 liegenden Purktes A des Rades *6*, der mit dem Pol *56* coincidirt. Wir bestimmen vermittelst einer Geraden, welche durch die Endpunkte zweier gleichgerichteter paralleler Radien der Rollkreise r_2, r_5' geht, oder vermittelst einer äusseren gemeinsamen Tangente dieser Rollkreise den auf der Geraden *3* liegenden Pol *25*, und ziehen zu *25-56* die Parallele $12\text{-}A_v$, welche auf der Geraden *4* die lothrechte Geschwindigkeit AA_v des Punktes A liefert. Gemäss der Richtung der lothrechten Geschwindigkeit AA_v rotiren im dargestellten Momente der Bewegung die Kurbel *12-23* und das Rad *6* in gleichem Sinne. Bei der Drehung der Kurbel in der eingezeichneten Pfeilrichtung bewegt sich in diesem Momente der zwischen den Riffelwalzen geführte Flachs

[1]) Guild, *Specification* No. 68 vom 8. Januar 1863. Hartig, „Versuche über den Kraftbedarf der Maschinen in der Flachs- und Wergspinnerei". *Mittheilungen der Königl. Polytechn. Schule zu Dresden.* 1869. Heft 2. S. 51.

in der Richtung $BB_{\mathfrak{v}}$, und die Geschwindigkeit $BB_{\mathfrak{v}}$ desselben ist gleich $AA_{\mathfrak{v}}$, wenn insbesondere der Riffelkranz und der Zahnkranz der Riffelwalzen gleich sind. Der geometrische Ort des Punktes $A_{\mathfrak{v}}$ ist eine ovale Curve χ, welche den Rollkreis r_6 in zwei Punkten schneidet. Man ersieht auch leicht in Fig. **564**, dass der auf *3* ausserhalb der Strecke $\overline{23\text{-}34}$ gelegene Pol *25* während einer Kurbeldrehung zweimal mit den Polen *12*, *56* in je eine Gerade gelangt, dass dem zufolge die lothrechte Geschwindigkeit $AA_{\mathfrak{v}}$ zweimal gleich Null wird und entgegengesetzten Richtungssinn annimmt.

Die so für jene verschiedenen Kurbellagen erhaltenen Strecken $AA_{\mathfrak{v}}$ sind in Fig. **564**ª behufs Construction des zeitlichen orthogonalen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}_3$ eines Walzenpunktes B als Ordinaten in den entsprechenden Punkten einer auf die Zeitaxe T_0T gewählten Strecke angetragen, und dem Anfangspunkte T_0 entspricht $T_0V_0 = AA_{\mathfrak{v}}$. Von diesem wellenförmigen Diagramm $\mathfrak{v}_3$ sind zwei congruente Wellenzüge, die zwei Kurbeldrehungen entsprechen, gezeichnet. Dem ausserhalb des Rollkreises r_6 gelegenen Theile der Curve χ entsprechen die über der Zeitaxe liegenden Wellenberge von $\mathfrak{v}_3$, und dem innerhalb dieses Rollkreises gelegenen Theile der Curve χ entsprechen die unter der Zeitaxe liegenden Wellenthäler von $\mathfrak{v}_3$, weil die Drehung der Riffelwalzen *7*, *7'* der des Rades *6* entgegengesetzt ist. Einer positiven oder negativen Ordinate des Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}_3$ entspricht resp. eine nach rechts oder links gerichtete Geschwindigkeit des im Punkte B zwischen den Riffelwalzen in Pilgerschritt befindlichen Flachses.

Nach dem Satze auf S. 15 verändern sich die Weglängen proportional der Fläche, welche durch das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_3$, die beiden betreffenden Ordinaten und die Zeitaxe umgrenzt wird; daher wird durch dasselbe auch die Pilgerschrittbewegung veranschaulicht. Die positiven Flächenstücke der Wellenberge sind grösser als die negativen Flächenstücke der Wellenthäler; es schreitet demnach der Flachs, wenn wir z. B. mit der Rechtsbewegung beginnen, erst nach rechts, dann um eine Strecke nach links zurück, hierauf um eine grössere Strecke wieder nach rechts und somit successive nach rechts fort[1]).

---

[1]) Rittershaus hat im *Civilingenieur*. 1880. B. 26. S. 28, das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm dieser Pilgerschrittbewegung construirt.

In Fig. **565** ist der Mechanismus einer anderen Flachsbreche schematisch dargestellt, bei welcher durch die drei im festen Gestell *3* gelagerten Räder *2*, *θ*, *5* ein Vorgelege gebildet wird. An dem Rade *2* ist eine Kurbel *23-12* befestigt, welche durch die Koppel *1* mit dem auf der Axe *35* drehbaren Gliede *4* gelenkig verbunden ist. In diesem Gliede sind die beiden Riffelwalzen *6*, *6'* gelagert, welche mit einer an dem Rade *5* befestigten grossen Riffelwalze zusammen arbeiten. Die Triebwelle *35* treibt diese grosse Riffelwalze und das Rad *5* gleichförmig. Das Rad *5* bewegt die Riffelwalzen *6*, *6'* und ferner vermittelst des Wechselrades *θ* das Rad *2* nebst der Kurbel, welche das Glied *4* mit den Lagern der Riffelwalzen in Schwingungen versetzt[1]). Durch diesen Mechanismus wird den Riffelwalzen *6*, *6'* im Bezug auf die rotirende grosse Riffelwalze Pilgerschrittbewegung ertheilt. Die Construction der Geschwindigkeiten kann in derselben Weise wie bei dem Mechanismus in Fig. **563** ausgeführt werden, wenn dort das Glied *3* als Steg betrachtet wird. Denn stellen wir uns vor, dass dort sich zwischen den Rädern *2*, *5* ein Wechselrad *θ* befinde, dann stimmt der Mechanismus im Wesentlichen mit dem in Fig. **565** dargestellten Mechanismus überein. Denken wir uns das Rad *5* festgestellt, und nehmen wir an, das Glied *3* rotire gleichförmig mit der constanten lothrechten Geschwindigkeit $\overline{23\text{-}35}$ des Punktes *23* desselben im Bezug auf *5*, so erhalten wir die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{14\text{-}14_{\mathfrak{v}}}$, welche der Gelenkpunkt *14* im Bezug auf *5* besitzt, indem wir den Pol *25* durch die Gerade *θ2-θ5* auf *23-35* bestimmen, dann zu *23-12* die Parallele $35\text{-}12_{\mathfrak{v}}$ ziehen, die *25-12* im Punkte $12_{\mathfrak{v}}$ trifft, und ferner zur Koppel *1* die Parallele $12_{\mathfrak{v}}\text{-}14_{\mathfrak{v}}$ ziehen, welche auf *4* die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{14\text{-}14_{\mathfrak{v}}}$ liefert. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Riffelwalzen *6*, *6'* auf der grossen Riffelwalze wälzen, ist der Geschwindigkeit $\overline{14\text{-}14_{\mathfrak{v}}}$ proportional. Da diese Geschwindigkeit, wie man leicht aus ihrer Bestimmung erkennt, gleich Null werden kann, und entgegengesetzten Richtungssinn annimmt, so geschieht die Wälzung der Riffelwalzen *6*, *6'* im Bezug auf die gleichzeitig rotirende grosse Riffelwalze in Pilgerschrittbewegung, für welche das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm wie vorhin zur Veranschaulichung construirt werden kann. Die Riffelwalzen *6*, *6'* vollziehen also auch Pilgerschrittbewegung auf dem mit der Drehung

---

[1]) Vergl. *Der practische Maschinen-Constructeur*. 1873. S. 348. — Hoyer, *Lehrbuch der vergleichenden mechanischen Technologie*. 1878. S. 486.

der grossen Riffelwalze fortgeführten Flachse. Um eine grössere Anzahl gleichförmig rotirender Riffelwalzen zu vermeiden, hat man die Pilgerschrittbewegung angewendet. Wenn man aber beachtet, dass dabei durch die Bewegung der Massen in dem einen und dem anderen Sinne für die Praxis grosse Uebelstände auftreten, so wird man doch in manchen Fällen die gleichförmig rotirende Bewegung vorziehen, obwohl dieselbe eine grössere Anzahl Riffelwalzen erfordert.

Zusammengesetzte Mechanismen mit Bandtrieb.

228. **Bandgetriebe mit festen Axen.** In Fig. **566** befinden sich in dem festen Gliede oder Gestell *0* die vier Axen *01*, *02*, *03*, *04* der Scheiben *1*, *2*, *3*, *4* gelagert. Die Bewegung wird von der einfachen Scheibe *1* nach der Doppelscheibe *2* durch einen offenen Riemen, von der Doppelscheibe *2* nach der Doppelscheibe *3* durch einen gekreuzten Riemen und von der Doppelscheibe *3* nach der einfachen Scheibe *4* durch einen offenen Riemen vermittelt. Wenn wir voraussetzen, dass während der Bewegung kein Gleiten der Riemen stattfindet, so wird durch dieses Bandgetriebe, welches ebenso aus Rollen mit umgelegten Schnüren bestehen kann, die Bewegung proportional übertragen, und es treten hier analoge Beziehungen wie beim Vorgelege auf. In kinematischer Hinsicht kann man z. B. den Riemen, der die Bewegung von der Scheibe *1* nach der Scheibe *2* vermittelt, durch eine Zahnstange und diese Scheiben durch Zahnräder ersetzen; demnach bestimmen die betreffenden gemeinsamen Tangenten der theoretischen Scheibenränder durch ihren Schnittpunkt *12* auf der Geraden *01-02* den Pol *12* der beiden Scheiben *1*, *2*. Die Bewegung der beiden Scheiben *1*, *2* kann also auch durch ein Hohlrad *1* mit dem Rollkreisradius *01-12* und ein Vollrad *2* mit dem Rollkreisradius *02-12* hervorgebracht werden. In derselben Weise wie den Pol *12* erhalten wir die beiden Pole *23*, *34*. Die übrigen drei Pole *13*, *24*, *14* ergeben sich als Schnittpunkte der Geradenpaare *01-03*, *12-23*; *02-04*, *34-23*; *01-04*, *34-13*; und als Controle folgt, dass die drei Pole *12*, *24*, *14* auf einer Geraden liegen, die durch Punktirung gekennzeichnet ist. Die Uebersetzung der Bewegung von der Scheibe *1* zur Scheibe *4* kann hiernach auch durch zwei Räder *1*, *4* bewirkt werden, deren Rollkreisradien beziehlich *01-14*, *04-14* sind.

Bezeichnen wir mit r_1, r'_2, r_2, r'_3, r_3, r'_4 die Radien der betreffenden theoretischen Scheibenränder, d. h. die bis zur Riemenmitte gemessenen Radien, und bezeichnen wir ferner mit ω_{10}, ω_{40} die Drehgeschwindigkeiten der Scheiben *1*, *4*, mit u_{10}, u_{40} ihre Umdrehungszahlen, mit w_{10}, w_{40} ihre Drehungswinkel in einer beliebig angenommenen Zeit; dann erhalten wir ebenso wie bei dem Vorgelege:

$$\frac{\omega_{10}}{\omega_{40}} = \frac{u_{10}}{u_{40}} = \frac{w_{10}}{w_{40}} = \frac{r'_2 \cdot r'_3 \cdot r'_4}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}.$$

Somit ergiebt sich auch allgemein bei n Scheiben, wenn ν das Uebersetzungsverhältniss von der ersten Scheibe zur n^{ten} Scheibe bezeichnet:

$$\frac{\omega_{10}}{\omega_{n0}} = \frac{u_{10}}{u_{n0}} = \frac{w_{10}}{w_{n0}} = \frac{r'_2 \cdot r'_3 \cdot r'_4 \cdot \cdot r'_n}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \cdot r_{n-1}} = \pm \nu.$$

Hierbei ist zu beachten, dass offene oder nicht gekreuzte Riemen Drehungen in gleichem Sinne, gekreuzte Riemen Drehungen im entgegengesetzten Sinne bewirken, und dem gemäss ist das Vorzeichen von ν zu bestimmen.

Denken wir uns in Fig. **566** die Doppelscheiben *2*, *3* durch einfache Scheiben ersetzt, ist also $r'_2 = r_2$, $r'_3 = r_3$, dann wird das Uebersetzungsverhältniss von *1* nach *4* nur durch die Radien r_1, r'_4 bedingt, und die Uebersetzung der Bewegung von der Scheibe *1* zur Scheibe *4* kann direct durch einen um dieselben gelegten Riemen vermittelt werden. Der Pol *14* ist dann der Schnittpunkt der beiden gemeinsamen äusseren, oder der beiden gemeinsamen inneren Tangenten der theoretischen Ränder der Scheiben *1*, *4*, je nachdem dieselben in gleichem oder in ungleichem Sinne rotiren. Aus der Bestimmung aller Pole des betrachteten Bandgetriebes in diesem besonderen Falle und auch im allgemeinen Falle ergeben sich viele interessante Lagenbeziehungen der Schnittpunkte der an mehrere Kreise gelegten gemeinsamen Tangenten.

Um eine Drehung in dem einen oder in dem anderen Sinne zu bewirken und auch in Stillstand zu versetzen, wendet man ein Riemengetriebe an, welches in Fig. **567** dargestellt ist. Dasselbe besteht aus einer Trommel oder breitrandigen Scheibe *1*, welche sich im Gestell um eine feste Axe α dreht, und aus vier gleichen coaxialen Scheiben *2*, *3*, *4*, *5*. Die beiden äusseren Scheiben *2*, *5* sind auf einer im Gestell gelagerten Axe β befestigt, und die beiden inneren Scheiben *3*, *4* rotiren lose auf derselben. Von der Trommel geht ein offener und ein gekreuzter Riemen nach je einer der coaxialen Rollen; und vermittelst einer Ausrückvorrichtung werden durch einen Leiter *l* die beiden Riemen in drei verschiedene Lagen gerückt[1]). Befinden sich die Riemen auf den Rollen *2*, *3*, dann treibt der offene Riemen gemäss der Pfeilrichtung die Rolle *2* und ihre Axe β im Sinne nach rechts, und die lose Rolle wird durch den gekreuzten Riemen im entgegengesetzten Sinne gedreht. Werden die Riemen auf die beiden losen Rollen *3*, *4* gelegt, dann ist die Axe β im Stillstand. Werden die Riemen auf die Rollen *4*, *5* gerückt, dann treibt der gekreuzte Riemen die Rolle *5* nebst der Axe β im Sinne nach links und die lose Rolle *4* durch den offenen Riemen nach rechts. In der Praxis heissen derartige Wendegetriebe auch Riemenausrückungen, und werden in verschiedenen Anordnungen ausgeführt[2]).

229. **Bandgetriebe mit einer festen Rollenaxe und einer beweglichen Rollenaxe.** In Fig. **568** dreht sich die Rolle *2* um eine feste Axe *12* im festen System *1* und die Rolle *4* um eine bewegliche Axe *46*. Im Punkte *15* des festen Systems *1* ist ein Seil befestigt, welches die Rolle *4* trägt, über die Rolle *2* gelegt ist und nach der Richtung *s* durch eine Kraft *P* gezogen wird. Betrachten wir zunächst die Rollenaxe *46*, an welcher eine Last *Q* hängt, als frei beweglich, dann wird der Axenpunkt *46* nach statischen Gesetzen stets eine solche Lage einnehmen, bei welcher die verticale Gerade *46*-*Q* die Halbirungsgerade des von den Tangenten *3*, *5* gebildeten Winkels ist. Der Axenpunkt *46* bewegt sich demnach durch Kraftschluss zwangläufig auf einer Curve, die dieser Bedingung gemäss construirt werden kann, die aber in ihrem Gesetze höchst complicirt ist und noch der Untersuchung harrt. In dem besonderen Falle, wenn die Tangenten *3*, *5* parallel sind, geht diese Curve in eine verticale Gerade über.

Wir wollen, weil die kinematische Untersuchung dieses an sich so einfachen Mechanismus im Allgemeinen doch ausserordentlich schwierig ist, annehmen, dass der Axenpunkt *46* in einer festen verticalen Geraden *q* geführt werde. Dies wird in Fig. **568** dadurch bewirkt, dass ein Schlitten *6*, der die Rollenaxe *46* enthält, in einem Schlitze gleitet, dessen Mittellinie die Gerade *q* ist. Um nun diesen Mechanismus der kinematischen Betrachtung zu unterwinden, denken wir uns die geradlinigen Seiltheile *3*, *5* durch

---

[1]) Siehe Rittershaus, „Ueber Riemenführer". *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen.* 1868. S. 161.

[2]) Weisbach-Herrmann, *Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.* 1876. III. Thl. I. Abth. S. 868.

Zahnstangen, die Rollen *2*, *4* durch Zahnräder theoretisch ersetzt; dann erhalten wir einen sechsgliederigen Mechanismus, bei welchem die sieben Pole *12*, *23*, *34*, *45*, *46*, *15*, 16^{∞} unmittelbar gegeben sind, und alle übrigen Pole leicht bestimmt werden können. Von besonderem Interesse ist der Pol *26*. Derselbe ergiebt sich, indem wir senkrecht auf q die Gerade $46\text{-}16^{\infty}$ ziehen, die *5* im Pol *14* schneidet, und die Gerade *14-12*, welche *3* im Pol *24* trifft; dann bestimmt die Gerade *46-24* auf $12\text{-}16^{\infty}$ den Pol *26*. Der Axenpunkt *46* oder der Schieber *6* bewegt sich demnach momentan ebenso wie der mit *26* coincidirende Punkt der Rolle *2*. Denken wir uns die Last Q in diesem Punkte an die Rolle *2* gehängt, so ist die Wirkung dieselbe wie im Punkte *46*. Bezeichnen wir mit r den Radius der Rolle *2*, mit x die Strecke $\overline{12\text{-}26}$, dann ergiebt sich, weil die Geschwindigkeiten des Seiles s und des Schiebers *6* sich wie $r:x$ verhalten, nach dem Princip der virtuellen Verrückungen (Art. 131), ohne Beachtung der Reibung, das theoretische Verhältniss von Kraft zu Last:

$$P:Q = x:r.$$

Diese Darlegung zeigt, dass man vermittelst der Polbestimmung in anderer Weise, als wie bisher vermittelst Zerlegung und Zusammensetzung der Kräfte, dieses Verhältniss bestimmen kann. Der Schlitten *6* kann auch weggemindert werden, so dass die Axe *46* als Zapfen in dem Schlitze gleitet. Anstatt auf einer Geraden q kann der Axenpunkt *46* auch auf einer gegebenen Curve geführt werden, welche die Mittellinie eines krummlinigen Schlitzes bildet. Das Verhältniss von Kraft zu Last wird in diesem allgemeinen Falle, wenn die Normalen an der gegebenen Curve bekannt sind, ebenso wie vorhin vermittelst der Polbestimmung construirt.

230. **Antiker Flaschenzug**[1]). Die Fig. **569** stellt den bekannten aus dem Alterthume stammenden Flaschenzug dar, bei welchem

[1]) Den Flaschenzug, das Vorgelege, das Rad an der Welle und das Schneckenrad im Eingriff mit einem Rade hat schon Heron von Alexandrien beschrieben. Siehe Commandino, *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones.* Venetiis. 1589. p. 331. — Hultsch, *Pappi Alexandrini Collectionis.* 1878. Vol. III. p. 1121. — Martin, „Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie". *Mémoires présentés par divers savants à l'Academie des incriptions et belles-lettres.* 1854. T. IV. p. 33. Ferner findet sich der Flaschenzug in Vitruvius, *De Architectura;* und wir wollen von den vielen Ausgaben dieses Werkes nur einige citiren, die auch Abbildungen des Flaschenzuges enthalten: *Vitruvius Teutsch* von Rivium. 1548. S. CCXCIV; Vitruve, *D'Architecture* par Perrault. Sec. ed. 1684. p. 301. Vitruvius, *Baukunst* von Rode. 1796. B. II. S. 245.

die drei Rollen *1*, *3*, *5* mit festen Axen sich im aufgehängten ruhenden Gliede *0* und die drei Rollen *2*, *4*, *6* mit beweglichen Axen sich im Gliede *7* befinden, an dem die Last Q hängt. Von dem um die Rollen gelegten Seil ist das eine Ende s' an dem Gliede *0* befestigt, und das andere Ende s wird durch eine Kraft P behufs der Hebung der Last Q gezogen. Betrachten wir die sechs tragenden Seiltheile, die zwar nur angenähert parallel sind, als parallel, so wird jeder dieser sechs Seiltheile um $\frac{1}{6}$ der Zugstrecke des Seilendes s verkürzt. Demnach verhalten sich die Geschwindigkeiten des Seilendes s und des gehobenen Gliedes *7* wie $6:1$, oder allgemein, wenn n tragende Seiltheile vorhanden sind, wie $n:1$. Somit ergiebt sich das theoretische Verhältniss von Kraft zu Last:

$$P:Q = 1:n.$$

Bei einer anderen Anordnung dieses Flaschenzuges werden die Rollen, welche in den Gliedern *0*, *7* vertical über einander gelagert sind, in jedem dieser Glieder neben einander lose auf je eine gemeinsame Axe gesetzt. Bei dieser, wie bei der obigen Anordnung, werden die Glieder *0*, *7* Flaschen genannt, und danach ist die Benennung Flaschenzug entstanden.

231. **Differentialflaschenzug und Differentialwinde.** In Fig. **570** ist ein Differentialflaschenzug schematisch gezeichnet. Eine Doppelrolle *1*, deren beide Radien r, r' wenig differiren, befindet sich mit ihrer festen Axe *01* in dem aufgehängten Gliede *0*; eine Rolle *2* ist mit ihrer beweglichen Axe *23* in dem Gliede *3* gelagert, an welchem die Last Q hängt, und wird von einer Kette s getragen, die links über die grössere, rechts über die kleinere Rolle der Doppelrolle *1* geführt ist und geschlossen herabhängt. Um das Gleiten der Kette zu verhindern, sind die Rillen der Rollen mit Einkerbungen versehen, in welche die Kettenglieder eingreifen. Die Curve, auf welcher der Axenpunkt *23* sich bewegt, ist im Allgemeinen sehr complicirt, wenn aber, wie angenommen wird, die Differenz der Radien r, r' verhältnissmässig klein ist oder die Rolle *2* tief herabhängt, dann kann diese Curve sehr angenähert als eine verticale Gerade betrachtet werden.

Wird die Doppelrolle *1* durch die am Seiltheil s wirkende Kraft P um einen Winkel w gedreht, dann entspricht einer Zugstrecke oder Abwindung des Seiltheils s, deren Grösse $r.w$ ist, eine Aufwindung des Seiltheils s', deren Grösse $r'.w$ ist; dem zufolge wird die Rolle *2* sehr angenähert um die Strecke $\frac{1}{2}(r-r')w$ gehoben, und es stehen die Geschwindigkeiten des Seiltheils s

und des Gliedes *3* in dem Verhältnisse $r : \frac{1}{2}(r - r')$. Hiernach ist bei diesem Differentialflaschenzug das theoretische Verhältniss von Kraft zu Last:

$$P : Q = \tfrac{1}{2}(r - r') : r.$$

Je kleiner also die Differenz der theoretischen Rollenradien r, r' der Doppelrolle sind, desto kleiner ist auch die zur Hebung einer Last Q erforderliche Kraft P.

Der betrachtete Differentialflaschenzug[1]) ist aus der bekannten alten Differentialwinde[2]) hervorgegangen, welche in Fig. **571** schematisch dargestellt ist. Bei derselben wird durch eine Kraft an dem Kurbelarme, dessen Länge wir mit R bezeichnen, die festgelagerte Welle *1* gedreht, so dass beim Heben der Rolle *2* der Seiltheil s auf den stärkeren Wellentheil aufgewickelt und der Seiltheil s' von dem schwächeren Wellentheil abgewickelt wird. Der Hebungsvorgang der Rolle *2* nebst der Last Q ist demnach derselbe wie vorhin. Wenn wir die Radien des stärkeren und des schwächeren Wellentheils resp. mit r, r' bezeichnen und beachten, dass die Kraft P an einem Kurbelarme von der Länge R wirkt, so ist den obigen Darlegungen gemäss bei dieser Differentialwinde das Verhältniss von Kraft zu Last:

$$P : Q = \tfrac{1}{2}(r - r') : R.$$

Soll diese Differentialwinde streng kinematisch behandelt werden, dann müssen wir die Axe der Rolle *2* zur Axe der Welle *1* parallel legen, und uns vorstellen, es seien die beiden Wellentheile sowie die Rolle mit Zähnen versehen und die Seiltheile s, s' durch Zahnstangen ersetzt.

232. **Die Aufzugsvorrichtung bei Pendeluhren von Huygens.** Um eine durch Gewicht getriebene Pendeluhr während ihres Ganges ungestört aufzuziehen, wird die gleichzeitig mit den Pendeluhren von Huygens erfundene Aufzugsvorrichtung angewendet, welche in Fig. **572** schematisch dargestellt ist[3]). Eine geschlossene Kette ss' ist über die Triebrolle *1* der Uhr und über die mit einem Sperr-

---

[1]) Dieser Differentialflaschenzug stammt von J. White, *Specification* No. 1650 vom 20. Mai 1788, und wurde von Ransome & Co. praktischer ausgeführt. Siehe *Civil Engineer and Architect's Journal.* 1861. p. 129, und *Polytechn. Journal.* 1861. B. 161. S. 169.

[2]) Weinlig, „Belagerungsmaschinen der Alten" in Hülsse, *Allgemeine Maschinen-Encyclopädie.* 1841. B. I. S. 846.

[3]) Huygens, *Opera varia.* 1724. p. 7, p. 37; *Horologium.* 1658; *Horologium oscillatorium.* 1673. Vergl. auch Schott, *Technica curiosa.* 1664. p. 644.

rade versehene Rolle *2* gelegt, die beide in dem festen Gliede *0*, dem Uhrgestell, gelagert sind. Zu beiden Seiten dieser Rollen hängt die Kette herab, welche rechts eine Rolle *3* mit dem Treibgewichte Q und links eine Rolle *4* mit dem nur zur Kettenspannung dienenden kleinen Gewichte q trägt. Bei dieser Vorrichtung wirkt das Gewicht Q ungestört treibend an der Rolle *1* fort, wenn dasselbe durch Drehung der Rolle *2*, deren Rückgang der Eingriff der Klinke in das Sperrrad verhindert, aufgezogen wird. Die Rollen *1*, *2* müssen, um das Gleiten der Kette zu vermeiden, mit Einkerbungen versehen sein. Wenn aber anstatt der Kette eine Schnur angewendet wird, dann muss dieselbe in einigen Windungen um die beiden Rollen *1*, *2* gelegt werden, damit durch Reibung das Gleiten der Schnur verhindert wird.

233. **Vorrichtung für eine schräge Flugbahn auf der Bühne**[1]. Bei der in Fig. **573** schematisch gezeichneten Vorrichtung befindet sich ein Wagen W auf horizontalen Schienen S des Schnürbodens der Bühne. An diesem Wagen ist ein über die Rolle a geführtes Seil σ befestigt, welches um die Trommel b gewunden und mit derselben fest verbunden ist. Links an einer Stelle J sind die Seile s, s' befestigt, welche beziehlich über die in dem Wagen W gelagerten Rollen c, c' geführt sind und an ihren herabhängenden Enden die Flugbank A tragen. Wenn die Trommel b vermittelst der Kurbel K im Sinne des Pfeiles gedreht wird, windet sich das Seil σ auf diese Trommel und zieht den Wagen W nach rechts. Hierdurch werden die beiden herabhängenden Seiltheile in gleichem Maasse verkürzt, und die Flugbank A wird parallel bleibend durch den Bühnenraum schräg nach aufwärts bewegt, wie die eingezeichneten Pfeile anzeigen. Die Parallelbewegung der Flugbank A ist genau geradlinig und bildet mit der Horizontalen einen Winkel von 45°, wenn die herabhängenden Seiltheile parallel sind. Die geringe Neigung, welche man in der Regel diesen Seiltheilen giebt, bewirkt nur eine sehr geringe Abweichung von der geradlinigen Flugbahn. Soll aber der Flug in einer Curve sich vollziehen, dann müssen auch links die Seilenden gemeinsam auf eine Trommel gewunden werden, und eine der beiden gleichzeitig gedrehten Trommeln muss ungleichförmig gedreht werden.

234. **Führung des Spindelwagens bei Spinnmaschinen.** In Fig. **574** ist die Vorrichtung schematisch dargestellt, durch welche der

---

[1] C. Cantant et J. de Filippi, *Théatres modernes.* 1860. Part. II, planche 25.

Spindelwagen W mit seinen vier Rädern auf den Schienen S, S', durch ein Zugseil z gezogen, so geführt wird, dass derselbe genau parallel bleibt. Jeder der auf dem Wagen W befestigten Zapfen α, β bildet die Axe für je zwei über einander befindliche Rollen. Ein Seil AsB, dessen Enden in A, B befestigt sind, ist rechtsseitig über die untere Rolle des Zapfens α und linksseitig über die untere Rolle des Zapfens β geführt. In symmetrischer Anordnung ist ein Seil $A's'B'$, dessen Enden in A', B' befestigt sind, linksseitig über die obere Rolle des Zapfens α und rechtsseitig über die obere Rolle des Zapfens β geführt. Die Befestigungspunkte A, B und A', B' sind so gewählt, dass die an denselben befestigten Seilenden den Schienen S, S' parallel sind[1]). Gemäss dieser symmetrischen Anordnung der gespannten Seile vollzieht der auf den Schienen in der einen oder der anderen Richtung geführte Spindelwagen die bei den Spinnmaschinen gewünschte genaue Parallelbewegung.

235. **Mechanismen mit Bandtrieb für Erzeugung interferirender Bewegung.** Bei dem in Fig. 575 gegebenen Mechanismus bilden die im Gestell *0* befindlichen drei Zahnräder *1*, *2*, *3* ein Vorgelege. Auf der Stange g im Gestell *0* ist die Hülse *5* verschiebbar, welche sich gegen eine auf diese Stange festgesetzte Schraubenfeder f stützt und die Axe der Rolle *4* trägt. Ueber diese Rolle *4* ist eine Schnur s gelegt, deren beide Enden, mit Oesen versehen, resp. die Kurbelzapfen α, γ der Räder *1*, *3* umfassen, und diese Schnur s wird durch die Schraubenfeder f stets straff gehalten. Durch Drehung eines Rades des Vorgeleges wirken die beiden Kurbelzapfen α, γ an den Schnurenden vermittelst der Rolle *4* auf die Hülse *5*, und ertheilen derselben auf der Stange eine interferirende Bewegung.

Nehmen wir an, dass einer Umdrehung des Rades *1* z. B. zwölf Umdrehungen des Rades *3* entsprechen; und stellen wir uns vor, es wirke der Kurbelzapfen α des Rades *1* allein auf die Rolle *4* oder Hülse *5*, indem wir das obere Schnurende am Gestell befestigen, so wird die Hülse *5* eine Bewegung vollziehen, welche in Fig. 575ª durch das im Bezug auf die Zeitaxe $T_0 T$ gezeichnete orthogonale Wegdiagramm $\mathfrak{w}_\alpha$ veranschaulicht ist. Von diesem Wegdiagramm $\mathfrak{w}_\alpha$ ist nur der Theil durch feinere Linie dargestellt, welcher einer Umdrehung des Rades *1* entspricht. Denken wir uns dagegen, der Kurbelzapfen γ des Rades *3* mit der kür-

[1]) Lanz et Bétancourt, *Essai sur la composition des machines.* 1808. p. 5.

zeren Kurbel wirke allein, so wird der Hülse *5* eine Bewegung ertheilt, welche durch das aus zwölf kleinen Wellenzügen bestehende, entsprechende orthogonale Wegdiagramm $\mathfrak{w}_\gamma$ graphisch dargestellt ist. Aus beiden Wegdiagrammen resultirt dann in gleicher Weise, wie in Art. 225 gezeigt wurde, das stärker gezeichnete Wegdiagramm $\mathfrak{w}$, welches sich längs der Curve $\mathfrak{w}_\alpha$ entlang schlängelt und den Bewegungsvorgang der Hülse *5* bei gleichzeitiger Wirkung beider Kurbelzapfen veranschaulicht.

In Fig. **576** ist noch ein zweiter Mechanismus der betrachteten Art dargestellt, der sich von dem vorhergehenden im Wesentlichen nur dadurch unterscheidet, dass die Schnur s von dem Kurbelzapfen α des Rades *1* aus über eine kleine Rolle gezogen ist, die sich auf einem Zapfen β des Doppelrades *2* befindet, und von da erst über die Rolle *4* nach dem Kurbelzapfen γ des Rades *3* geführt ist. Die Axe der Rolle *4* wird von dem Schlitten *5* getragen, der in dem geradlinigen Schlitze g gleitet; und die Schnur s wird dadurch straff gehalten, dass eine Schnur σ vom Schlitten ausgehend, über eine Rolle ϱ gelegt, an einem als Feder wirkenden elastischen Stabe f befestigt ist. Die Bewegung des Schiebers *5*, die bei diesem Mechanismus so ausserordentlich complicirt ist, hat die Praxis bei der Bewickelung der Spulen zur Führung des Fadens verwendet, um vorschriftsmässig geordnete Lagen des aufgewickelten Garnes auf den gleichzeitig rotirenden Spulen zu erhalten[1]). Die betrachteten verschiedenartigen Mechanismen mit Bandtrieb repräsentiren nur einige charakteristische Typen der vielen mannigfaltig gestalteten ebenen Mechanismen dieser Gruppe.

---

[1]) Vergl. *Encyclopédie méthodique. Manufactures et arts.* 1784. T. II. p. 44. Planche XXI. „Devidage des soies teintes“.

ACHTER ABSCHNITT.

Geführte Mechanismen und übergeschlossene Mechanismen.

Mechanismen für Erzeugung ähnlicher Bewegungen.

236. **Pantograph oder Storchschnabel.** Ist ein zwangläufiger Mechanismus nur durch eine Drehpaarung mit einem festen Gliede verbunden, und wird ein Punkt eines Gliedes, welches dem festen Gliede nicht benachbart ist, in dem festen Gliede oder System geführt, so wird der Mechanismus in demselben zwangläufig bewegt. Derartig bewegte Mechanismen, welche wir einfach geführte Mechanismen nennen, wollen wir zunächst betrachten.

Nehmen wir auf den vier Seiten des in Fig. 577, Taf. XXXVII, gezeichneten Gelenkparallelogramms $ABCD$ die vier in einer Geraden g liegenden Punkte O, P, Q, R an, so bleiben diese vier Punkte während der Veränderung desselben stets auf einer Geraden; denn wegen des Parallelismus der constanten Seitenstrecken AO, DQ bleiben die drei Punkte O, P, Q auf einer bewegten Geraden, und wegen des Parallelismus der constanten Seitenstrecken DP, CR bleiben auch die drei Punkte P, Q, R auf derselben Geraden. Auf dieser Geraden begrenzen die vier Punkte O, P, Q, R sechs veränderliche Strecken, von denen infolge der betreffenden ähnlichen Dreiecke je zwei in je einem constanten Verhältnisse stehen. Wir betrachten einen dieser vier Punkte, z. B. O, als festen Drehpunkt in dem festen Gliede, welches durch die Zeichnungsebene als festes System vertreten sein möge. Dieses feste Glied wollen wir das Stegglied und den festen Drehpunkt in demselben den Fixpunkt nennen. Wird nun einer von den drei Punkten P, Q, R, etwa R im festen System auf einer gegebenen Figur vermittelst der Hand entlang geführt, dann beschreiben die beiden anderen Punkte P, Q Figuren, die der gegebenen Figur ähnlich sind und zu derselben ähnlich liegen. Der Fixpunkt O ist der gemeinsame Aehnlichkeitspunkt dieser drei ähnlichen Figuren; und die Grössenverhältnisse der von P, R und Q, R beschriebenen ähnlichen Figuren sind resp. gleich $AP:BR$ und $BC:BR$. Dieser geführte Mechanismus, der Pantograph oder Storchschnabel genannt wird, besteht also aus drei binären Gliedern BC, CD, DA, einem ternären Gliede AB und dem ruhenden singulären Steggliede, an welches das Glied AB im Fixpunkte O drehbar angeschlossen ist.

Denken wir uns den Punkt R beispielsweise auf einem Kreise r geführt, dessen Mittelpunkt mit M_r bezeichnet ist, so bewegen sich die Punkte P, Q auf den Kreisen p, q, deren Mittelpunkte M_p, M_q auf OM_r liegen. Ersetzen wir den Radius M_rR durch eine um die feste Axe M_r rotirende Kurbel, die in R mit dem Gliede BC gelenkig verbunden ist, dann erhalten wir einen zwangläufigen Mechanismus; und wird ferner einer oder jeder der beiden Radien M_pP, M_qQ in gleicher Weise durch eine Kurbel ersetzt, dann entsteht ein übergeschlossener Mechanismus, dessen festes Glied im letzteren Falle die vier Axen O, M_p, M_q, M_r enthält.

Um zu einer Bewegung eine ähnliche zu erhalten, werden der Einfachheit wegen, wie in Fig. **578**, die beiden Punkte O, R, welche in der Praxis auf den Gliedern AB, BC verstellbar sind, auf einer durch die Ecke D gehenden Geraden g angenommen, dann entspricht einer Bewegung von R eine ähnliche Bewegung von D und das Grössenverhältniss der von D und R beschriebenen ähnlichen Figuren ist gleich $AD:BR$.

Bei dem in Fig. **579** gezeichneten Gelenkparallelogramm $ABCD$ sind zwei gegenüberliegende Glieder durch ein eingefügtes, zu den beiden anderen parallel gelegtes Glied EF gelenkig verbunden, welches sich im Steggliede um den Fixpunkt S dreht; und hierdurch entsteht ein übergeschlossener Mechanismus. Auf den vier Seiten des Parallelogramms $ABCD$ nehmen wir die vier mit S in einer Geraden g liegenden Punkte O, P, Q, R an. Die fünf Punkte bleiben gemäss der obigen Darlegung während der Veränderung des übergeschlossenen Mechanismus in einer Geraden, die um S rotirt; und die Verhältnisse von je zwei auf dieser Geraden befindlichen veränderlichen Strecken sind constant. Einer Bewegung von einem der vier Punkte O, P, Q, R entsprechen ähnliche Bewegungen der übrigen drei Punkte.

Am einfachsten gestaltet sich die Anordnung, wenn der Fixpunkt S in Fig. **580** auf der Diagonale AC des Parallelogramms $ABCD$ genommen wird. Dann ist das constante Verhältniss der von den Eckpunkten A und C beschriebenen ähnlichen, entgegengelegenen Figuren gleich $SE:SF$. In der Praxis werden die Punkte E, F, S resp. auf den Gliedern AB, CD, EF verstellbar gemacht, so dass dadurch dieses Verhältniss beliebig verändert werden kann. Diese Anordnung, bei welcher der Fixpunkt S zwischen den beiden beschreibenden Punkten A, C liegt, hat vor der erstbetrachteten Einrichtung, bei welcher der Fixpunkt ausserhalb der Verbindungsstrecke der beschreibenden Punkte liegt, den Vorzug, dass die Figuren getrennt bleiben, wenn durch eine entsprechende Einstellung jener verstellbaren Punkte das Verhältniss $SE:SF$ der Einheit genähert oder gleich gemacht wird.

Diese Pantographen oder Storchschnabel, welche von Scheiner zuerst angegeben und ausführlich beschrieben wurden[1]), dienen zum Copiren von Zeichnungen in verschiedenen Grössenverhältnissen und werden auch bei Maschinen zur Erzeugung ähnlicher Bewegungen angewendet.

237. **Verallgemeinerung des Pantographen.** Wenn wir in Fig. **581** an den Gliedern BC, CD des Gelenkparallelogramms $ABCD$, dessen Gelenkpunkt A wir als Fixpunkt betrachten, resp. die Punkte R, Q befestigen, so dass die beiden Dreiecke RBC, CDQ ähnlich sind; dann bilden, wie in Art. 126 bewiesen wurde, die Punkte R, A, Q ein den beiden ähnliches, veränderliches Dreieck. Einer Bewegung des einen der Punkte R, Q entspricht eine ähnliche Bewegung des anderen. Wird der Punkt R auf einer Figur geführt, so beschreibt der Punkt Q eine ähnliche Figur[2]). Diese beiden ähnlichen Figuren, deren constantes Grössenverhältniss gleich $BR:BC$ oder $DC:DQ$ ist, sind um den Dreieckswinkel RBC oder CDQ gegen einander gedreht und haben ihren selbstentsprechenden Punkt im Fixpunkte A. Bewegt sich der Punkt R beispielsweise auf einem Kreise r, dessen Mittelpunkt M_r ist, dann vollzieht der Punkt Q eine ähnliche Bewegung auf einem entsprechenden Kreise q mit dem Mittelpunkte M_q. Ersetzen wir die beiden Radien M_rR, M_qQ durch Kurbeln, die sich um die festen

[1]) Chr. Scheiner, *Pantographice, seu ars delineandi.* 1631.

[2]) Diese allgemeinere Erzeugungsweise ähnlicher Bewegungen stammt von Sylvester. Siehe dessen Mittheilung: „On the Plagiograph aliter the Skew Pantigraph". *Nature.* July 1, 1875. Vol. XII. p. 168; und Roberts hat hieraus die dreifache Erzeugung der Koppelcurve abgeleitet.

Axen M_r, M_q drehen, dann erhalten wir einen übergeschlossenen Mechanismus, dessen ruhendes Glied die drei Axen A, M_r, M_q enthält. Betrachten wir etwa den Punkt Q als Fixpunkt, dann erzeugen die beiden Ecken A, R des ähnlich-veränderlichen Dreiecks ARQ ähnliche Bewegungen. Nehmen wir insbesondere den Punkt Q auf der Seite CD zwischen C und D an, dann liegt der betreffende Punkt R auf der Verlängerung von BC mit A, Q in einer Geraden und derselbe ergiebt sich, indem wir RBC ähnlich CDQ machen. Wir erhalten mit diesem Specialfalle dieselbe Anordnung, welche in Fig. 577 auftritt, wenn dort der Fixpunkt O in die Ecke A verlegt wird.

238. **Pantograph für plastische Bildwerke.** An das in Fig. 582 gezeichnete Gelenkviereck $OHQH'$ mit dem Fixpunkte O ist ein Gelenk GPG' derartig angeschlossen, dass die Vierecke $OHQH'$, $OGPG'$ ähnlich sind. Dem zufolge beschreiben die beiden Gelenkpunkte P, Q, die beständig auf dem von O aus gehenden Fahrstrahle liegen, ähnliche Figuren. Dieser Mechanismus erhält aber eine einfachere, praktische Gestaltung, wenn wir die beiden Punkte P, Q, wie in Fig. 583 schematisch dargestellt ist, dadurch auf einem Fahrstrahle bleibend erhalten, dass zwei in ihnen drehbar angeschlossene Schlitten in einem geradlinigen Schlitze gleiten. An diesen beiden Schlitten werden die Spitzen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ befestigt, so dass die Dreiecke $OP\mathfrak{p}$, $OQ\mathfrak{q}$ ähnlich sind; und diese Spitzen, welche auf einer durch O gehenden Geraden bleiben, vollziehen ähnliche Bewegungen. Um aber diese ähnlichen Bewegungen nicht nur in der Ebene, sondern auch im Raume auszuführen, ist an dem Fixpunkte O ein Hook'sches Gelenk angebracht, und dadurch wird die Bewegung im Raume ermöglicht. Behufs einer genaueren Einstellung wird der äussere Schieber vermittelst einer Schraube verschoben. Diese Gestaltung hat Callas[1]) dem Mechanismus gegeben, damit derselbe zur Verkleinerung resp. Vergrösserung von Statuen, Büsten oder anderen plastischen Bildwerken dienen kann. Um das Grössenverhältniss der Gebilde, welches gleich dem Verhältnisse der Strecken $OG : OH$ oder $GP : HQ$ ist, zu verändern, müssen durch eine Vorrichtung die Gelenkpunkte G, H verstellbar sein und die Längen dieser Strecken entsprechende Veränderung erhalten[2]).

---

[1]) Laboulaye, *Traité de cinématique*. 1878. p. 431, 929.

[2]) Das alte „Contrefait-Werk", welches in J. M. Teuber, *Vollständiger Unterricht von der gemeinen und höheren Drehkunst*. 1756. S. 159—181, ausführlich beschrieben ist, liefert nur ähnliche Figuren in entsprechenden paral-

Wenn man auf den parallelen Gliedern GP, HQ, oder auf deren über G, H hinaus gehenden Verlängerungen zwei Punkte annimmt, die gleiche Abstände von G, H haben, und die parallelen Glieder in diesen Punkten durch ein Glied gelenkig verbindet, wie in Fig. **583** durch Gestrichelung angedeutet ist; dann kann der Führungsschlitz weggelassen werden, und es entsteht wieder der gewöhnliche Storchschnabel, bei welchem die Punkte P, Q als Spitzen ähnliche räumliche Bewegungen vollziehen. In dieser Gestaltung hat J. Schilling[1]) den Storchschnabel mit Anfügung eines ausgleichenden Gegengewichtes verwendet.

Mechanismen für Erzeugung inverser Bewegungen.

239. **Der Hart'sche Inversor.** Der Inversor ist ein Mechanismus, durch welchen zu jedem Fahrstrahle der entsprechende reciproke oder inverse Fahrstrahl bestimmt wird, so dass also das Product dieser beiden Fahrstrahlen constant ist. Am einfachsten wird dies, wie Hart angegeben hat[2]), vermittelst eines gelenkigen Antiparallelogramms erreicht, dessen eine Seite sich um einen festen Punkt dreht. In Fig. **584** ist ein gelenkiges Antiparallelogramm $ABCD$ gezeichnet, dessen Seiten $AB = CD = a$, $AD = CB = b$ sind; und zu den parallelen Diagonalen AC, BD desselben ist eine beliebige Parallele gezogen, welche die Seiten AB, BC, CD, DA resp. in den Punkten O, P, Q, R schneidet. Diese vier Punkte theilen die Seiten in gleichem Verhältnisse, und bleiben daher bei Veränderung des gelenkigen Antiparallelogramms stets in einer Geraden. Ferner bestehen die Verhältnisse:

$$\frac{OR}{BD} = \frac{AO}{AB} = \frac{AO}{a}; \qquad \frac{OP}{AC} = \frac{OB}{AB} = \frac{OB}{a};$$

und folglich ist

$$OP \,.\, OR = \frac{AO \,.\, OB}{a^2} \cdot AC \,.\, BD.$$

Ziehen wir zu BA die Parallele DE, die AC in E trifft, und

lelen Ebenen, die stets gleichen Abstand von einander haben, und demnach werden durch dasselbe nicht ähnliche, sondern specielle affine räumliche Gebilde erzeugt.

[1]) *Deutsches Reichspatent* Nr. 5522 vom 17. November 1878.

[2]) Hart, „On certain conversions of motion“. *Messenger of Mathematics.* 1875. Vol. IV. p. 82.

beschreiben wir, weil $DE = DC$ ist, um D den durch C, E gehenden Kreis, so ergiebt sich, da das Product der Strecken AE, AC gleich dem Quadrat der von A an diesen Kreis gelegten Tangente ist,

$$AC \,.\, BD = AC \,.\, AE = \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2 = b^2 - a^2.$$

Hieraus folgt der Satz:

Das Product der beiden parallelen Diagonalen eines gelenkigen Antiparallelogramms ist constant und gleich der Differenz der Quadrate zweier benachbarter Seiten.

Demnach erhalten wir die Beziehung:

$$OP \,.\, OR = AO \,.\, OB \cdot \frac{b^2 - a^2}{a^2} = \mu^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I}).$$

Betrachten wir den Punkt O als Fixpunkt, so ergiebt sich, weil μ eine constante Grösse ist, der Satz:

Bei einem gelenkigen Antiparallelogramm ist das Product der Fahrstrahlen OP, OR constant.

Die constante Grösse μ kann leicht construirt werden; denn beschreiben wir über OP als Durchmesser einen Halbkreis, der die in R auf OP errichtete Senkrechte in einem Punkte J schneidet, so ist die Strecke $OJ = \mu$. Oder wir beschreiben einen durch RP gehenden Kreis, dann ist die von O an denselben gelegte Tangente gleich μ. Die constante Grösse μ^2 wird aber negativ, wenn wir den Fixpunkt O auf der Verlängerung der Seite AB annehmen. Führen wir den einen der Punkte P, R auf einer Figur, dann beschreibt der andere eine entsprechende Figur; und zwei derartige Figuren, bei denen das Product der Fahrstrahlen constant ist, die also durch reciproke Radien bestimmt sind, werden inverse oder kreisverwandte Figuren genannt. Die Punkte P und R vollziehen inverse Bewegungen, und die von denselben beschriebenen entsprechenden Curven heissen inverse Curven für den Modul μ und im Bezug auf O als Inversionscentrum.

Wird in Fig. 585 der Punkt R auf einem Kreise r geführt, dessen Mittelpunkt mit M_r bezeichnet ist, dann beschreibt auch der Punkt P einen Kreis p, dessen Mittelpunkt M_p auf der Geraden OM_r liegt. Denn bezeichnen wir, um die Polargleichung des Kreises r zu erhalten, den Radius desselben durch ϱ_r und ferner den Winkel, welchen der Fahrstrahl OR oder OP mit OM_r bildet, durch θ, so ist:

$$OR = OM_r \cos\theta \pm \sqrt{\varrho_r^2 - \overline{OM}_r^2 \cdot \sin^2\theta}.$$

Hiernach erhalten wir, weil $OR \cdot OP = \mu^2$ ist, durch einfache Umformung die Gleichung

$$OP = \frac{\mu^2}{\overline{OM}_r^2 - \varrho_r^2}\left(OM_r \cos\theta \mp \sqrt{\varrho_r^2 - \overline{OM}_r^2 \cdot \sin^2\theta}\right),$$

aus der wir ersehen, dass auch der Punkt P einen Kreis beschreibt. Setzen wir die constante Grösse $\overline{OM}_r^2 - \varrho_r^2 = \nu^2$, dann verhalten sich die beiden Kreise r, p wie $\nu^2 : \mu^2$, und ebenso auch die Abstände ihrer Mittelpunkte von O. Geht insbesondere der Kreis r durch den Fixpunkt O, ist also die Polargleichung desselben:

$$OR = 2 \cdot OM_r \cos\theta,$$

so ergiebt sich die Gleichung

$$OP = \frac{\mu^2}{2\,OM_r \cos\theta},$$

welche eine auf OM_r senkrechte Gerade repräsentirt.

Die erkannten Beziehungen gelten wechselseitig; und wir erhalten somit den Satz:

Bei inversen oder kreisverwandten Gebilden entspricht jedem nicht durch das Inversionscentrum gehenden Kreise wieder ein Kreis, und jedem durch das Inversionscentrum gehenden Kreise eine Gerade, die auf der Verbindungsgeraden seines Mittelpunktes mit dem Inversionscentrum senkrecht steht.

Wegen des Wechsels der doppelten Vorzeichen in jenen beiden Gleichungen entsprechen sich von den Schnittpunkten, welche ein Fahrstrahl mit den Kreisen r, p in Fig. **585** bildet, resp. die beiden äusseren R, P und die beiden inneren R_I, P_I. Der Fahrstrahl schneidet daher die Kreise r, p in den entsprechenden Punkten unter gleichen entgegengesetzten Winkeln. Es sind demnach die Winkel, welche die Bewegungsrichtungen der Punkte R, P in einem Momente mit dem Fahrstrahle bilden, entgegengesetzt gleich; und daraus folgt, dass der Winkel, unter welchem sich zwei von R beschriebene Curven schneiden, gleich dem Winkel ist, unter welchem sich die entsprechenden von P erzeugten Curven treffen. Vermittelst des Inversors wird also zu einem Gebilde das inverse oder kreisverwandte Gebilde mechanisch erzeugt. Wenn wir die beiden Radien $M_r R$, $M_p P$ durch Kurbeln ersetzen, die sich resp. um die festen Axen M_r, M_p drehen, erhalten wir einen siebengliederigen übergeschlossenen Mechanismus.

Ist die Geschwindigkeit von einem der Punkte R, P gegeben, so kann man nach Art. 33, b) die entsprechende Geschwindigkeit des anderen leicht construiren. Es sei beispielsweise RM_r die lothrechte Geschwindigkeit von R; dann fällen wir von M_r auf OR die Senkrechte $M_r R'$, ziehen durch R zu $M_p P$ die Parallele RR' und durch den erhaltenen Schnittpunkt R' die Gerade OR', welche auf der Verlängerung von $M_p P$ die lothrechte Geschwindigkeit $PP_\mathfrak{v}$ des Punktes P bestimmt. Da die Strecke $RR' = RM_r$ ist, ergiebt sich das Verhältniss der Geschwindigkeiten der Punkte P, Q:

$$\frac{RM_r}{PP_\mathfrak{v}} = \frac{OR}{OP},$$

also gleich dem Verhältnisse der Abstände der Punkte R, P von dem Fixpunkte O. Wegen der ähnlichen Dreiecke $P_\mathfrak{v} PO$, $M_r RO$ ist das Verhältniss

$$\frac{P_\mathfrak{v} O}{P_\mathfrak{v} P} = \frac{M_r O}{M_r R}$$

constant; und folglich ist, wenn der Punkt R mit constanter Geschwindigkeit rotirt, nach Art. 35 der geometrische Ort von $P_\mathfrak{v}$ oder das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm des Punktes P ein Cartesisches Oval, für welches O, M_p Brennpunkte sind.

Gleichzeitig mit der Führung eines der Punkte R, P auf einer Curve beschreibt auch der Punkt Q in Fig. 585 eine bestimmte Curve q; und weil $OR = PQ$ ist, folgen aus obiger Gleichung I) die Beziehungen:

$$OR\,(OQ - OR) = \mu^2 \quad \text{IIa)},$$

$$OP\,(OQ - OP) = \mu^2 \quad \text{IIb)}.$$

Durch eine weitere Untersuchung würde man erkennen, dass, wenn einer der Punkte R, P sich auf einem nicht durch O gehenden Kreise bewegt, der Punkt Q eine Curve vierter Ordnung erzeugt. Um diese Curve q zu zeichnen, machen wir, nachdem die beiden entsprechenden Kreise r, p gezogen sind, auf dem Fahrstrahle die Strecke $PQ = OR$.

Wir nehmen an, es werde der Punkt P in Fig. 585 auf einem Kegelschnitt geführt, und wollen zeigen, dass dann der Punkt R eine Fusspunktencurve eines Kegelschnitts beschreibt. Zu diesem Zwecke beschreiben wir in Fig. 586 um den Fixpunkt O mit dem Radius μ den Kreis $\varkappa$, und zeichnen zu einem Punkte P die auf OP senkrechte Polare π im Bezug auf den Kreis $\varkappa$. Dem zufolge ist, wenn R den Fusspunkt bezeichnet, $OR . OP = \mu^2$. Bewegt sich der Punkt P auf einer Curve p, dann umhüllt die Polare π eine Curve $\mathfrak{p}$. Zwei unendlich nahen Lagen von P entsprechen zwei unendlich nahe Tangenten an $\mathfrak{p}$, deren Schnittpunkt gegen endliche Lagenbeziehungen als ein Punkt P' der Curve $\mathfrak{p}$ anzusehen ist, in welchem diese die Tangente π berührt; und diesem Punkte entspricht als Polare die Verbindungsgerade π' der beiden unendlich nahen Lagen des Punktes P, die also eine Tangente an p ist. Die beiden Curven p, $\mathfrak{p}$ stehen daher in reciproker Beziehung, d. h. die Curve p kann aus $\mathfrak{p}$ in derselben Weise abgeleitet werden, wie $\mathfrak{p}$ aus p. Deshalb werden die beiden Curven die reciproken Polaren genannt; und die Ordnung der einen ist gleich der Classe der anderen. Die mit r bezeichnete Fusspunktencurve von $\mathfrak{p}$ für O als Lothpunkt ist die kreisverwandte Curve von p. Ferner ist, weil auch π' die Polare von P' ist, und P', R' entsprechende Punkte sind, die Fusspunktencurve r' von p für O als Lothpunkt die kreisverwandte Curve von $\mathfrak{p}$.

Beschreibt nun bei dem in Fig. **585** dargestellten Mechanismus der Punkt P einen Kegelschnitt, dann erzeugt der Punkt R eine Fusspunktencurve eines Kegelschnittes für O als Lothpunkt, und umgekehrt, wenn der Punkt R auf der Fusspunktencurve eines Kegelschnittes bewegt wird, erzeugt der Punkt P einen Kegelschnitt. Da nach Art. 129 vermittelst des Zwillingskurbelgetriebes durch einen Koppelpunkt eine Fusspunktencurve einer Ellipse oder Hyperbel beschreiben wird, so kann, wenn wir diesen Koppelpunkt mit dem Punkte R des betrachteten Mechanismus drehbar verbinden, durch den auf diese Weise erhaltenen achtgliederigen Mechanismus vom Punkte P ein Kegelschnitt beschrieben werden[1]).

In Fig. **587** ist bei dem betrachteten Mechanismus zu dem durch O gehenden Kreise r, welchen der Punkt R um M_r beschreibt, die entsprechende auf OM_r senkrechte Gerade p gezeichnet, in der sich der Punkt P bewegt. Hierbei ist aber zu beachten, dass der Punkt R den ganzen Kreis r nicht durchlaufen kann. Die um den Fixpunkt O mit den Radiengrössen $AR - AO$, $OA + AR$ beschriebenen Kreise ζ_i, ζ_a begrenzen beziehlich nach innen und aussen das ringförmige Bewegungsfeld des Punktes R. Ferner wird auch durch die um O mit den Radiengrössen $BP - BO$ und $OB + BP$ beschriebenen Kreise ξ_i, ξ_a das ringförmige Bewe-

[1]) Vergl. Hart a. a. O.

gungsfeld des Punktes P nach innen und aussen begrenzt. Der Punkt R kann demnach nur auf dem Kreise r den ausserhalb ζ_i liegenden Bogen durchlaufen, und diesem entspricht die von P durchschrittene, innerhalb ξ_a befindliche Strecke der Geraden p. Theoretisch entspricht dem innerhalb ζ_i liegenden Bogen des Kreises r der übrige Theil der unbegrenzten Geraden p, und dem Punkte O entspricht der unendlich ferne Punkt dieser Geraden.

Betrachten wir OM_r als ein festes Glied und ersetzen wir den Radius $M_r R$ des durch O gehenden Kreises r durch eine Schwinge, die um die feste Axe M_r schwingt, dann erhalten wir den interessanten von Hart erfundenen sechsgliederigen Gelenkmechanismus, durch welchen eine kreislinige Bewegung in eine geradlinige Bewegung verwandelt wird[1]). In den Grenzlagen klappt das Antiparallelogramm $ABCD$ zusammen; und es kann in ein Parallelogramm übergehen, aber durch Anbringung der in Art. 129 angegebenen Eingriffspaarung wird dies vermieden. Zu den Kreisen r', r'', von denen der erstere den Fixpunkt O ausschliesst, der letztere denselben einschliesst, sind die entsprechenden Kreise p', p'' gezeichnet, deren Radien um so grösser sind, je näher O an den Kreisen r', r'' liegt. Dieser Mechanismus kann demnach auch zur Zeichnung von Kreisbögen mit sehr grossem Radius dienen.

Wird der Punkt R als Fixpunkt angenommen, so erhalten wir aus der obigen Gleichung I) wegen der Gleichheit der Strecken OP, RQ und mit Rücksicht auf die Regel der Vorzeichen:

$$RO \,.\, RQ = -\mu^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III}).$$

Es gelten hiernach zwischen den Punkten O, Q die analogen Beziehungen, wie vorhin zwischen den Punkten R, P, nur mit dem Unterschiede, dass die von O und Q beschriebenen entsprechenden Figuren bezüglich des Fixpunktes R entgegengesetzt gelegen sind.

Wenn in der Fig. **588**, in welcher der Mechanismus weggelassen und nur ein Fahrstrahl RQ gezeichnet ist, der Punkt O sich auf einem durch den Fixpunkt R gehenden Kreise o bewegt, dessen Mittelpunkt M_o ist, so beschreibt der Punkt Q eine auf RM_o senkrechte Gerade q. Gleichzeitig erzeugt aber der Punkt P eine Curve p, die, wenn der Kreis o und die Gerade q gezeichnet sind, sich leicht construiren lässt; denn wir brauchen nur die Strecke $QP = RO$ oder $OP = RQ$ zu machen. Um zu beweisen, dass diese Curve p die Fusspunktencurve einer Parabel ist, be-

[1]) Siehe Hart a. a. O.

stimmen wir auf der Symmetralgeraden $M_0 R$ den Scheitel S der Curve p, indem wir vom Fusspunkte N der Geraden q aus die Strecke NS gleich dem Kreisdurchmesser RF oder $FS = RN$ machen. Errichten wir nun in S auf $M_0 R$ die Senkrechte e, und ziehen wir parallel zu RQ die Gerade FE bis an diese Senkrechte, dann ist wegen der congruenten rechtwinkeligen Dreiecke FSE, RNQ die Strecke $FE = RQ = OP$. Demnach ist die Gerade PE senkrecht auf FE und eine Tangente ET an der Parabel φ, deren Scheitel S und deren Brennpunkt F ist. Denn nach S. 130 wird von dem Schenkel ET des rechten Winkels FET, wenn sein Scheitel E sich auf der Geraden e bewegt, und der andere Schenkel EF durch den festen Punkt F gleitet, die Parabel φ umhüllt, für welche F der Brennpunkt und e die Scheiteltangente ist. Die Curve p ist also für R als Lothpunkt die Fusspunktencurve dieser Parabel φ.

Die Polargleichung dieser Fusspunktencurve können wir leicht aus der gegebenen Construction oder auch aus der folgenden Beziehung ableiten, die zwischen den Punkten O, P besteht, und sich, weil $RQ = RP + OR$ ist, mit Rücksicht auf die Regel der Vorzeichen aus der Gleichung III) ergiebt:

$$RO\,(RP - RO) = -\mu^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{IV)}.$$

Die Polargleichung des Kreises o ist, wenn wir den Winkel $NRP = \theta$ setzen,

$$RO = -FR \,.\, \cos\theta;$$

und folglich erhalten wir die Polargleichung der Curve p:

$$RP = \frac{\mu^2}{FR \,.\, \cos\theta} - FR \,.\, \cos\theta.$$

In dieser Gleichung ist die Constante

$$\frac{\mu^2}{FR} = RN = FS,$$

also gleich dem Abstande des Punktes R von der Geraden q oder dem Abstande des Brennpunktes F vom Scheitel S der Parabel φ. Beschreiben wir den Kreis ω, der gleich dem Kreise o ist und diesen in R berührt, und bezeichnet U den Schnittpunkt, welchen der Fahrstrahl RQ mit ω bildet, so ist auch $RP = UQ$.

Nehmen wir den Kreisdurchmesser $FR = \mu$, dann repräsentirt die Polargleichung

$$RP = \frac{\mu}{\cos\theta} - \mu\cos\theta$$

die Cissoide des **Diokles**. In diesem Falle coincidirt der Lothpunkt R der Fusspunktencurve p mit dem Scheitel S der Parabel φ, und die Gerade q berührt den Kreis ω im Punkte Φ.

Wählen wir den Kreisdurchmesser $FR = \sqrt{2} \,.\, \mu$, dann liefert die Polargleichung

$$RP = \frac{\mu}{\sqrt{2}\cos\theta} - \sqrt{2}\,\mu\cos\theta,$$

weil in diesem Falle der Parabelscheitel S im Mittelpunkte M_o des Kreises o liegt, und die Gerade q durch den Mittelpunkt M_ω des Kreises ω geht, nach S. 334 eine Strophoide. Es kann demnach, wenn wir in Fig. 589 für den Kreis o den Radius $M_o O = M_o R = \frac{1}{2}\mu$ nehmen und als Schwinge betrachten, die sich im festen Gliede $M_o R$ um die Axe M_o dreht, vermittelst des **Hart**schen Mechanismus vom Punkte P die Cissoide p erzeugt werden; und gleichzeitig bewegt sich der Punkt Q auf der Geraden q. In gleicher Weise wird vermittelst dieses Mechanismus vom Punkte P' die Strophoide p' beschrieben, wenn der Punkt O sich auf dem Kreise o' bewegt, dessen Radius $M_o' R = \sqrt{\frac{1}{2}}\mu$ ist; und gleichzeitig erzeugt der Punkt Q' die Gerade q'.

Wegen der symmetrischen Beziehung, in welcher die Punkte O, Q zu einander stehen, ergiebt sich: dass, wenn der Punkt Q sich auf einem durch R gehenden Kreise bewegt, der Punkt O eine Gerade und der Punkt P auch eine Fusspunktencurve einer Parabel beschreibt. Ferner erkennt man aus diesen Darlegungen, dass auch in Fig. 585, wenn einer von den Punkten R, P sich auf einem durch den Fixpunkt O gehenden Kreise bewegt, der Punkt Q eine Fusspunktencurve einer Parabel beschreibt.

Wir wollen schliesslich in Fig. 590 noch annehmen, der Punkt P beschreibe um einen Punkt M_p einen durch den Fixpunkt R gehenden Kreis p, dann ergiebt sich aus der Gleichung IV), indem wir für

$$RP = 2 \,.\, M_p R \,.\, \cos\theta$$

setzen, die Polargleichung

$$RO = M_p R \,.\, \cos\theta \pm \sqrt{\mu^2 + \overline{M_p R}^2 - (M_p R \,.\, \sin\theta)^2},$$

aus der wir ersehen, dass der Punkt O in diesem Falle einen Kreis o beschreibt, dessen Mittelpunkt M_p, und dessen Radius $M_p O = \sqrt{\mu^2 + \overline{M_p R}^2}$ ist. Dieser Kreis enthält wegen der symmetrischen Beziehungen auch den Punkt Q; und hieraus folgt: *Wenn der Punkt P sich auf einem durch den Fixpunkt R gehenden Kreise p bewegt, dann bewegen* sich die beiden Punkte O und Q auf einem zu demselben concentrischen Kreise o. Demnach können wir die vier Punkte O, P, Q, R durch ein viergliederiges Gelenk, dessen Axenpunkt M_p ist, verbinden; und wir erhalten dadurch einen achtgliederigen übergeschlossenen Mechanismus.

240. **Der quadruplane Inversor von Sylvester und Kempe**[1]. Um für diesen Mechanismus, aus welchem der vorher behandelte als ein besonderer Fall hervorgeht, die betreffenden Beziehungen abzuleiten, wollen wir unsere Betrachtungen vom allgemeineren Gesichtspunkte aus beginnen, weil das auf diese Weise gewonnene allgemeinere Resultat auch später weitere Verwendung finden wird. An die Seiten eines beliebigen, in Fig. **591** beispielsweise überschlagenen Gelenkvierecks $ABCD$ construiren wir die ähnlichen Dreiecke ABO, CBP, CDQ, ADR, also derart, dass an den Gelenken A, C die mit χ bezeichneten gleichen Winkel und an den Gelenken B, D die mit ψ bezeichneten gleichen Winkel dieser ähnlichen Dreiecke zusammenstossen. Dann ist infolge dieser Construction das Dreieck AOR ähnlich ABD, und OR bildet mit BD den Winkel χ, ferner ist das Dreieck CPQ ähnlich CBD, und PQ bildet mit BD ebenfalls den Winkel χ; demnach ist OR parallel PQ. In gleicher Weise ergiebt sich, dass die beiden Geraden OP, RQ mit AC denselben Winkel ψ bilden, somit auch parallel sind; und folglich ist $OPQR$ ein Parallelogramm. Bezeichnen wir noch den Winkel AKB mit ε, welchen die beiden sich im Punkte K schneidenden Diagonalen AC, BD des Gelenkvierecks einschliessen, so ergiebt sich, dass in diesem Parallelogramm der Winkel $POR = \chi + \psi + \varepsilon$ und der Winkel $OPQ = 180^0 - (\chi + \psi + \varepsilon)$ ist.

Bei einem in Fig. **592** dargestellten gelenkigen Antiparallelogramm $ABCD$, an dessen Seiten ähnliche Dreiecke in der vorgeschriebenen Weise befestigt sind, ist wegen der parallel bleibenden Diagonalen AC, BD jener Winkel $\varepsilon = 0$; und folglich bilden bei einem gelenkigen Antiparallelogramm die vier Gliedpunkte O, P, Q, R ein veränderliches Parallelogramm mit constanten Winkeln. Aus den ähnlichen Dreiecken BOP, BAC und AOR, ABD ergeben sich die Proportionen:

$$\frac{OP}{AC} = \frac{BO}{BA}, \quad \frac{OR}{BD} = \frac{AO}{AB};$$

---

[1]) Sylvester, *Nature.* July 15, 1875. Vol. XII. p. 214. — Kempe, *Nature.* May 31, 1877. Vol. XVI. p. 88; und Liguine, *Nouvelle Correspondance mathématique.* 1877. T. III. p. 184.

und somit ist das Product

$$OP \,.\, OR = \frac{AO}{AB} \cdot \frac{BO}{BA} \cdot AC \,.\, BD.$$

Nach den Darlegungen in Art. 239 ist, wenn wir wieder die Seiten $AB = CD = a$, $BC = DA = b$ setzen, das Product der Diagonalen

$$AC \,.\, BD = b^2 - a^2;$$

und folglich ist auch das Product

$$OP \,.\, OR = AO \,.\, OB \,.\, \frac{b^2 - a^2}{a^2}$$

constant. Wir erhalten somit den Satz:

Bei einem gelenkigen Antiparallelogramm bilden die vier Gliedpunkte O, P, Q, R ein veränderliches Parallelogramm mit constanten Winkeln und mit constantem Inhalte.

Damit aber das gelenkige Antiparallelogramm, wenn die vier Gelenke A, B, C, D in eine Gerade gelangen, nicht in ein Gelenkparallelogramm übergehen kann, bei welchem diese Beziehung nicht gilt, müssen wir das Antiparallelogramm, wie in Art. 129 angegeben wurde, mit Eingriffspaarung versehen.

Die erhaltene allgemeinere Beziehung stimmt in der Form auch genau mit der in Art. 239 abgeleiteten speciellen Beziehung überein, und enthält diese als speciellen Fall, der eintritt, wenn wir die Punkte O, P, Q, R auf den betreffenden Seiten des Antiparallelogramms so annehmen, dass $AOB \backsim CPB \backsim CQD \backsim ARD$ ist. Jene ähnlichen Dreiecke schrumpfen dann resp. in die Seiten des Antiparallelogramms zusammen und die Winkel χ, ψ werden, je nachdem die Punkte O, P, Q, R auf diesen Seiten innerhalb oder ausserhalb liegen, beide gleich Null, oder der eine gleich Null, der andere gleich 180°.

Betrachten wir in Fig. **592** den Punkt O als Fixpunkt, dann entspricht, weil das Streckenproduct $OP \,.\, OR$ constant ist, einer Bewegung des einen der Punkte P, R eine inverse oder kreisverwandte Bewegung des anderen; und die so erzeugten beiden kreisverwandten Gebilde unterscheiden sich von den früher betrachteten nur dadurch, dass die entsprechenden Punkte P, R nicht wie dort auf einem durch O gehenden Fahrstrahle liegen, sondern auf zwei verschiedenen Fahrstrahlen OP, OR, welche den constanten Winkel $POR = \chi + \psi$ bilden. Wird der Punkt R insbesondere auf einem Kreise r geführt, der durch den Fixpunkt O geht, und dessen Mittelpunkt mit M_r bezeichnet ist; dann bewegt sich der Punkt P auf einer Geraden p, die mit der Verlängerung von OM_r den Winkel $90^0 + \chi + \psi$ bildet.

Da die Winkel des Parallelogramms $OPQR$ constant sind, so umhüllt die Seite PQ desselben bei dieser Bewegung eine Parabel und die Seite QR, welche die bewegte Parabeltangente unter constantem Winkel schneidet, geht beständig durch einen festen Punkt F des Kreises r. Dem zufolge beschreibt der Punkt Q nach Art. 56 für F als Lothpunkt eine Fusspunktencurve einer Parabel, die der von der Seite PQ umhüllten Parabel ähnlich ist.

241. **Der Peaucellier'sche Inversor**[1]). Dieser in Fig. **593** dargestellte Mechanismus besteht aus einem Gelenkrhombus $PHQH'$, dessen vier gleiche Seiten- oder Gliederlängen gleich b sind, und aus dem an H, H' angeschlossenen Gelenke HOH' mit den gleichlangen Gliedern $HO = H'O = a$. Wegen der gleichschenkeligen Dreiecke HOH', HPH', HQH' liegen die drei Gelenkpunkte O, P, Q dieses Mechanismus stets auf einer Geraden. Wir wollen zunächst den Gelenkpunkt O als Fixpunkt betrachten und annehmen, dass $a > b$ sei. Denken wir uns um H den durch P, Q gehenden Kreis beschrieben, und bezeichnen wir die Länge einer von O an diesen Kreis gelegten Tangente durch μ, dann ist das Streckenproduct:

$$OP \,.\, OQ = \mu^2 = a^2 - b^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{I)}$$

constant. Demnach entspricht einer Bewegung eines der Punkte P, Q eine inverse oder kreisverwandte Bewegung des anderen. Wenn der Punkt P auf einem Kreise p um M_p geführt wird, beschreibt auch Q einen Kreis q, dessen Mittelpunkt M_q in der Ge-

[1]) Peaucellier gab in den *Nouvelles Annales de Mathématiques.* 1864. Sér. II. T. III. p. 414 die erste Notiz von seinem Inversor, die aber wegen ihrer aphoristischen Kürze kaum verständlich ist, und daher unbeachtet blieb. Erst nachdem Lipkin im *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Petersbourg.* 1871. T. 16. p. 58 in allgemeiner Gestaltung diesen Inversor, ohne Kenntniss jener Notiz, mittheilte, gab Peaucellier eine verständliche Beschreibung seines Inversors in den *Nouvelles Annales de Mathématiques.* 1873. Sér. II. T. XII. p. 71. Hiernach wurde dieser interessante Mechanismus allgemein bekannt und fand vielseitige Beachtung. Besonders anregend wirkte der hierauf bezügliche Vortrag von Sylvester: „On recent Discoveries in Mechanical Conversion of Motion". *Proceedings of the Royal Institution of Great Britain.* January 23, 1874. Vol. VII. p. 179; übersetzt: „Transformation du mouvement circulaire en mouvement rectiligne", veröffentlicht in *Revue scientifique.* 1874. 4e année, 1er sem. p. 490 und in *Les Mondes.* 1875. T. XXXVII. p. 623; und bald darauf erfand Hart seinen einfacheren Inversor, den wir wegen seiner Einfachheit dem von Peaucellier vorangestellt haben.

raden OM_p liegt. Vermittelst Ersetzung der beiden Radien M_pP, M_qQ durch Kurbeln, welche sich im festen Gliede OM_pM_q drehen, erhalten wir einen neungliederigen übergeschlossenen Mechanismus. Markiren wir auf den Gliedern HO, HP, HQ die in einer zu OQ Parallelen liegenden Punkte O_1, P_1, Q_1, so bleiben auch diese drei Punkte bei der Bewegung des Mechanismus stets in einer Geraden, und es ist auch das Streckenproduct $O_1P_1 \,.\, O_1Q_1$ constant. Demnach gelten von den drei Punkten O_1, P_1, Q_1 dieselben Beziehungen, welche bei den drei Punkten O, P, Q auftreten.

Die Geschwindigkeiten der Punkte P, Q verhalten sich, ebenso wie bei dem Hart'schen Inversor bewiesen wurde, nämlich wie die Abstände dieser Punkte von dem Fixpunkte O; und, wie dort bewiesen wurde, ist das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm des Punktes Q ein Cartesisches Oval, für welches O, M_q Brennpunkte sind.

Um unter der Annahme, dass die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes P beliebig gegeben, etwa gleich PM_p sei, noch eine andere Construction als bei dem Hart'schen Inversor angegeben wurde, auszuführen, ziehen wir zu PH die Parallele M_pH_v, welche auf OH die lothrechte Geschwindigkeit HH_v des Punktes H bestimmt, und ferner die zu HQ Parallele H_vQ_v, die dann auf M_qQ die lothrechte Geschwindigkeit QQ_v des Punktes Q liefert.

Wird in Fig. 594 der Punkt P auf einem durch den Fixpunkt O gehenden Kreise p geführt, dessen Mittelpunkt M_p ist, dann beschreibt der Punkt Q eine auf OM_p senkrechte Gerade q. Der Punkt P kann aber auf diesem Kreise nur den Bogen durchschreiten, der ausserhalb des um O mit dem Radius $a-b$ beschriebenen Kreises ξ_i liegt. Diesem Kreisbogen entspricht auf der Geraden q die Strecke, welche innerhalb des um O mit dem Radius $a+b$ beschriebenen Kreises ξ_a liegt. Indem wir den Radius M_pP als Schwinge betrachten, die sich im festen Gliede OM_p dreht, erhalten wir den achtgliederigen Peaucellier'schen Inversor oder Mechanismus, durch welchen eine kreisförmige Bewegung in eine genaue geradlinige umgewandelt wird. Wenn der Mechanismus zusammenklappt, also die Gelenkpunkte H, H' coincidiren, wird die Bewegung unstetig; dies kann aber, wie in Art. 130 beim gleichschenkeligen Gelenkviereck gezeigt wurde, durch Eingriffspaarung vermieden werden.

Die lothrechte Geschwindigkeit QQ_v des Punktes Q, die einer beliebigen, beispielsweise gleich PM_p genommenen lothrechten Geschwindigkeit des Punktes P entspricht, ist in gleicher Weise, wie oben gezeigt wurde, construirt. Wir können aber für den besonderen Fall, in welchem $M_p P = M_p O$ ist, aus der beim Hart'schen Inversor gegebenen Construction der Geschwindigkeit eine einfachere ableiten. Durch den Schnittpunkt P' der auf OP Senkrechten $M_p P'$ und der auf q Senkrechten PP' ziehen wir die Gerade OP', welche die lothrechte Geschwindigkeit $QQ_\mathfrak{v}$ des Punktes Q bestimmt. Da aber die congruenten Dreiecke OM_pP, $OP'P$ gleichschenkelig sind, so ist $OQ_\mathfrak{v}$ parallel dem Radius M_pP. Es ist demnach auch, wenn wir zu PM_p die Parallele $Q\Xi$ ziehen, die OM_p in Ξ trifft, die lothrechte Geschwindigkeit $QQ_\mathfrak{v} = Q\Xi = O\Xi$, und ferner $Q_\mathfrak{v}O = Q_\mathfrak{v}Q$. Aus dieser letzten Beziehung folgt: das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm des Punktes Q ist eine Parabel mit dem Brennpunkte O und der Leitlinie q. Jenes auf S. 567 abgeleitete Cartesische Oval geht also für diesen besonderen Fall in eine Parabel über[1]). Aber die hier befolgte Voraussetzung, dass die Geschwindigkeit des Punktes P constant sei, kann nur als eine theoretische betrachtet werden; denn da der Punkt P den Kreis p nur theilweise durchläuft, so ist in der Praxis eine constante Geschwindigkeit desselben nicht vollständig zu ermöglichen.

In Fig. **594** sind ferner noch um M_p die concentrischen Kreise p', p'' gezeichnet, denen die Kreise q', q'' entsprechen. Die Radien dieser Kreise sind um so grösser, je näher jene Kreise am Fixpunkte O vorbeigehen; und demnach kann der Peaucellier'sche Inversor auch zum Zeichnen von Kreisen mit beliebig grossen Radien dienen.

In Fig. **595** wollen wir den Gelenkpunkt P als Fixpunkt betrachten, dann ergiebt sich aus obiger Gleichung I) mit Hinsicht auf die Regel der Vorzeichen die folgende Beziehung:

$$PO\,(PQ - PO) = -\mu^2 = -(a^2 - b^2) \quad . \quad . \quad . \quad \text{II)},$$

welche der auf S. 570 abgeleiteten Beziehung IV) gleichartig ist. Dem zufolge erhalten wir, wie dort nachgewiesen wurde, auch hier den Satz:

Der Punkt Q beschreibt eine Fusspunktencurve einer Parabel, wenn der Punkt O auf einem durch den Fixpunkt P gehenden Kreise geführt wird.

---

[1]) Auf diese specielle Beziehung hat D'Ocagne hingewiesen. *Nouvelles Annales de Mathématiques.* 1884. 3e sér. T. III. p. 199. Vergl. auch dessen Bestimmung der Geschwindigkeiten am Peaucellier'schen Inversor. *Daselbst.* 1881. 2e sér. T. XX. p. 456; ferner Liguine, *daselbst.* 1882. 3e sér. T. I. p. 153.

Dem Kreise o, dessen Durchmesser gleich μ ist, entspricht die gezeichnete Cissoide q, und dem Kreise o', dessen Durchmesser gleich $\sqrt{2}\,\mu$ ist, entspricht die gezeichnete Strophoide q'.

Wird in Fig. 596 wieder O als Fixpunkt betrachtet, aber $b > a$ genommen, dann liegt dieser Fixpunkt auf dem Fahrstrahle zwischen den Punkten P, Q; und bei dieser Anordnung ergiebt sich, wenn wir uns um H den durch P, Q gehenden Kreis beschrieben denken:

$$OP\,.\,OQ = -(b+a)(b-a)$$
$$OP\,.\,OQ = -(b^2-a^2) = -\mu^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III}).$$

Bei diesem Peaucellier'schen Inversor mit innerem Fixpunkte O entspricht dem durch O gehenden Kreise p, auf welchem sich der Punkt P bewegt, die geradlinige Bahn q des Punktes Q, und ferner sind zu den concentrischen Kreisen p', p'' die entsprechenden Kreise q', q'' gezeichnet.

Mechanismen für Erzeugung gesetzmässig entsprechender Bewegungen.

242. **Das Gelenkviereck mit senkrechten Diagonalen.** Behufs der Behandlung derjenigen Mechanismen, welche gewisse, gesetzmässig entsprechende Bewegungen erzeugen, gehen wir von dem speciellen Gelenkviereck aus, dessen Diagonalen beständig senkrecht auf einander stehen. Bei dem in Fig. 597, Taf. XXXVIII, gegebenen Gelenkviereck $ABCD$ ist der Schnittpunkt der Diagonalen desselben mit N und der Winkel ANB mit ν bezeichnet; ferner wollen wir die Seiten $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ und die Diagonalstrecken $NA = \alpha$, $NB = \beta$, $NC = \gamma$, $ND = \delta$ setzen. Hiernach ist:

$$\begin{aligned} 2\,\alpha\beta\cos\nu &= \alpha^2+\beta^2-a^2, \\ -\,2\,\beta\gamma\cos\nu &= \beta^2+\gamma^2-b^2, \\ 2\,\gamma\delta\cos\nu &= \gamma^2+\delta^2-c^2, \\ -\,2\,\delta\alpha\cos\nu &= \delta^2+\alpha^2-d^2; \end{aligned}$$

und durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir

$$2\,(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha)\cos\nu = b^2+d^2-(a^2+c^2).$$

Aus dieser Gleichung, die sich auch beim überschlagenen Gelenkviereck ergiebt, folgt, dass unter der Bedingung

$$a^2+c^2 = b^2+d^2$$

der Winkel ν ein Rechter ist, und dass umgekehrt, wenn ν ein Rechter ist, diese Beziehung besteht. Demnach gilt der Satz:

Wenn bei einem Gelenkviereck die Summen der Quadrate der gegenüberliegenden Seiten gleich sind, so sind die Diagonalen beständig senkrecht, und umgekehrt.

Dieser Satz bildet die Grundlage für die Mechanismen, welche Sylvester, durch die Peaucellier'sche Erfindung veranlasst, in anregender Weise mitgetheilt hat[1]), welche dann auch von Saint-Loup[2]), Liguine[3]) und Roos[4]) behandelt wurden.

243. **Mechanismen von Sylvester.** In Fig. **598** ist ein Gelenkviereck $OHQH'$ gegeben, dessen Diagonalen OQ, HH' senkrecht sind. Auf den Seiten OH, OH' dieses Gelenkvierecks nehmen wir zwei Punkte G, G' so an, dass dieselben diese Seiten in gleichen Verhältnissen theilen; demnach ist die Verbindungsgerade GG' parallel zu HH', also auch senkrecht auf OQ. In diesen Punkten schliessen wir an jene Seiten ein Gelenk GPG' an, dessen Gelenkpunkt P auf OQ liegt. Dem zufolge ist auch $OGPG'$ ein Gelenkviereck mit den senkrechten Diagonalen OP, GG', von denen die erste beständig in OQ liegt, und somit befindet sich der Punkt P bei Veränderung des Gelenkvierecks $OHQH'$ stets auf der Diagonale OQ desselben.

Betrachten wir O als Fixpunkt, setzen wir $PG = b$, $QH = c$ und beachten wir ferner, dass in den beiden Dreiecken QOH, POG die Winkel an O, je nachdem O ausserhalb oder innerhalb PQ liegt, sich decken oder zu zwei Rechten ergänzen, dass also $\cos Q\widehat{O}H = \pm \cos P\widehat{O}G$ ist, so ergiebt sich, weil beim negativen Vorzeichen auch die Strecken OP, OQ entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, die allgemein gültige Beziehung:

$$\frac{\overline{OQ}^2 + \overline{OH}^2 - c^2}{OQ \,.\, OH} = \frac{\overline{OP}^2 + \overline{OG}^2 - b^2}{OP \,.\, OG} \quad . \; . \; . \quad \text{I}),$$

oder

$$\frac{OP}{OQ} \cdot \frac{\overline{OQ}^2 + \overline{OH}^2 - c^2}{\overline{OP}^2 + \overline{OG}^2 - b^2} = \frac{OH}{OG} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{I}').$$

---

[1]) Sylvester a. a. O.

[2]) Saint-Loup, „Systèmes articulés simples et multiples et leur applications". *Mémoires de la Société d'emulation du Doubs.* 1875. 4e sér. Vol. X. p. 17.

[3]) Liguine, „Sur les systèmes de tiges articulées". *Nouvelles Annales de Mathématiques.* 1875. 2e sér. T. XIV. p. 529.

[4]) Roos, „Differents systèmes de tringles articulées". *Revue universelle des mines.* 1877. 2e sér. T. 2. p. 1.

Wir haben, um die allgemeine Gültigkeit zu wahren, die betreffenden Strecken absichtlich durch ihre beiden Endpunkte bezeichnet, wenn wir z. B. die Punkte G, G' resp. auf den Verlängerungen von HO, $H'O$ annehmen, erhalten die Strecken OG, OG' entgegengesetzte Vorzeichen; und es werden demnach auf diese Weise die Vorzeichen durch die Lagenverhältnisse von selbst bestimmt. Wird einer der Punkte P, Q auf einer Curve geführt, dann beschreibt der andere eine gesetzmässig entsprechende Curve. Zu jeder Lage dieser Punkte, z. B. zu P, giebt es auf der Geraden OP einen correspondirenden Punkt P_I, den zweiten Schnittpunkt, in welchem der um G mit $GP = b$ beschriebene Kreis diese Gerade schneidet; ebenso giebt es zu jeder Lage des Punktes Q einen correspondirenden Punkt Q_I. Es besteht demnach zwischen den Punkten P, P_I, sowie zwischen den Punkten Q, Q_I resp. die Beziehung:

$$OP \,.\, OP_I = \overline{OG}^2 - b^2,$$
$$OQ \,.\, OQ_I = \overline{OH}^2 - c^2.$$

Eine Curve, bei welcher zwei in einer Geraden liegende Fahrstrahlen ein constantes Product bilden, ist sich selbst invers oder kreisverwandt und wird eine anallagmatische Curve genannt. Die durch die beiden Punkte P, Q erzeugten entsprechenden Gebilde sind wechselweis in gleichartiger Beziehung, weil diese Punkte in gleicher Art mit dem Mechanismus verbunden sind. Da einer Punktlage von P zwei Punktlagen von Q und umgekehrt entsprechen, so stehen die Gebilde in einer zwei-zweideutigen Verwandtschaft. Nehmen wir in Fig. 599 an, der Punkt Q bewege sich auf einer Geraden q, deren Abstand OJ vom Fixpunkte O wir mit ε bezeichnen wollen; und ist ferner, indem wir OJ als Abscissenaxe ansehen, für den Punkt P die Abscisse mit x, die Ordinate mit y bezeichnet; dann erhalten wir:

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad OQ = \frac{\varepsilon\sqrt{x^2 + y^2}}{x},$$

und durch Einsetzung in die Gleichung I') die Gleichung

$$\frac{\varepsilon^2 (x^2 + y^2) + (\overline{OH}^2 - c^2)\, x^2}{\varepsilon x\, (x^2 + y^2 + \overline{OG}^2 - b^2)} = \frac{OH}{OG},$$

der vom Punkte P beschriebenen, entsprechenden anallagmatischen Curve, die also von dritter Ordnung ist und aus den beiden Theilen p, p_I besteht. Die Gerade q bildet mit dem entsprechenden inversen Kreise q_I zusammengehörend eine anallagmatische Curve dritter

Ordnung, die also in die Gerade q und den Kreis q_I zerfällt. Denken wir uns den Gelenkpunkt Q in die zweite Lage nach Q_I verlegt und auf dem durch O gehenden Kreise q_I geführt, dann entspricht diesem Kreise dieselbe Curve pp_I; und somit ergiebt sich der Satz:

Bewegt sich einer von den Punkten P, Q auf einer nicht durch den Fixpunkt O gehenden Geraden oder auf dem ihr entsprechenden durch den Fixpunkt O gehenden inversen Kreise, dann beschreibt der andere Punkt eine anallagmatische Curve dritter Ordnung.

Wenn in Fig. **600** das Verhältniss $OG : OH = b : c$ genommen wird, dann ist $GP \parallel HQ_I$ und $GP_I \parallel HQ$; demnach beschreiben in diesem besonderen Falle die Punktpaare P_I, Q oder P, Q_I ähnliche Gebilde, und dieser specielle Mechanismus ist dann ein Pantograph. Die Punktpaare P, Q oder P_I, Q_I dagegen beschreiben inverse Gebilde; und es ist, wenn wir z. B. das erste dieser Punktpaare betrachten,

$$OP \,.\, OQ = \frac{b}{c}(\overline{OH}^2 - c^2) = \frac{c}{b}(\overline{OG}^2 - b^2).$$

Der Mechanismus ist also bei dieser Anordnung ein Inversor. Wird der Punkt P auf einem durch O gehenden Kreise p geführt, so bewegt sich auch der Punkt Q_I auf einem durch O gehenden Kreise q_I, und die beiden Punkte P_I, Q beschreiben resp. die parallelen Geraden p_I, q, welche auf der durch O gehenden Centralen OJ der beiden Kreise p, q_I senkrecht stehen. Wenn wir einen der Punkte P, Q, z. B. P, als Fixpunkt betrachten und O auf einem durch P gehenden Kreise führen, beschreibt der Punkt Q eine Fusspunktencurve einer Parabel und im speciellen Falle auch eine Cissoide oder Strophoide.

Nehmen wir an, dass in Fig. **601** die Gelenkpunkte G, H und G', H' coincidiren, dann bleiben die allgemeinen Beziehungen bestehen; denn denken wir uns noch das zu HPH' parallele Gelenk $G_x P_x G'_x$ eingefügt, so beschreiben die Punkte P, P_x ähnliche Gebilde, und demnach sind die Beziehungen zwischen den Punkten P, Q dieselben wie im oben betrachteten allgemeinen Falle. Wir erhalten aus I'), wenn OH und OG gleich a gesetzt wird, die Gleichung:

$$\frac{OP}{OQ} \cdot \frac{\overline{OQ}^2 + a^2 - c^2}{\overline{OP}^2 + a^2 - b^2} = 1,$$

welche nur hinsichtlich ihrer Form ein wenig einfacher ist. Wegen der gleichartigen Verbindung der Gelenkpunkte O, P, Q besteht, wenn wir irgend einen dieser Punkte als Fixpunkt betrachten, zwischen den beiden anderen stets dieselbe wechselseitige Beziehung[1]). Im Specialfalle $b = c$ wird der Mechanismus ein Inversor, dessen Vorzug vor dem Peaucellier'schen Inversor darin besteht, dass die Glieder nicht zusammenklappen können; und diese Gestalt hat Lipkin dem Inversor zuerst gegeben[2]). Der Peaucellier'sche Inversor geht aus jenem Mechanismus durch weitere Specialisirung hervor, wenn wir $OH = OH'$, und ferner $HP = H'P = HQ = HQ'$ machen.

Gehen wir wieder von dem allgemeinen Mechanismus aus, und nehmen wir in Fig. 598 den Gelenkpunkt Q als Fixpunkt, dann ergiebt sich aus der Gleichung I'), indem wir nach der Regel der Zeichen

$$OQ = -QO, \quad OP = OQ - PQ = -(QO - QP)$$

setzen, zwischen den beweglichen Punkten O, P die Beziehung:

$$\frac{QO - QP}{QO} \cdot \frac{\overline{QO}^2 + \overline{OH}^2 - c^2}{(QO - QP)^2 + \overline{OG}^2 - b^2} = \frac{OH}{OG} \quad \ldots \text{ II}).$$

Eine gleichartige Beziehung besteht zwischen O, Q, wenn P als Fixpunkt genommen wird; denn die Punkte O, Q sind im Mechanismus gegen den Punkt P analog geordnet, wie O, P gegen Q.

Wenn angenommen wird, dass bei festem Q der Punkt O sich auf einer Geraden bewege, und wenn man in analoger Weise wie oben die Fahrstrahlen QO, QP durch die Coordinaten x, y ausdrückt, dann ergiebt sich aus der Gleichung II), dass die entsprechende Curve, welche der Punkt P beschreibt, von vierter Ordnung ist; und ebenso findet man, dass, wenn der Punkt P sich auf einer Geraden bewegt, auch der Punkt O eine Curve vierter Ordnung beschreibt. Die Punkte O, P sind in verschiedener Art mit dem Mechanismus verbunden und daher sind auch diese beiden Curven vierter Ordnung nicht gleichartig.

Wird das Glied QH des Mechanismus festgestellt, also als Steg genommen, dann beschreibt der Punkt O in diesem festen Gliede um H einen Kreis, und dem zufolge erzeugt der Punkt P

---

[1]) Mannheim hat in den *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1874. Vol. VI. p. 36 gezeigt, dass, wenn einer der bewegten Punkte einen beliebigen Kreis beschreibt, der andere eine anallagmatische Curve vierter Ordnung erzeugt.

[2]) Lipkin, „Ueber eine genaue Gelenk-Geradführung". *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Petersbourg*. 1871. T. 16. p. 58.

eine Kranioide. Denn legen wir in Fig. **602** beispielsweise den Gelenkpunkt G auf die Verlängerung von HO, und lassen wir die nur durch Gestrichelung angedeuteten Glieder $H'Q$, $H'G'$, $G'P$ weg, indem wir dafür als Ersatz das Schlitzglied l einfügen, durch dessen geradlinigen Schlitz die Punkte P, O, Q in gerader Linie gehalten werden, so stimmt dieser Mechanismus mit dem überein, der in Art. 41 zur Erzeugung der Kranioide dient. Da in Fig. **598** die Gelenkpunkte P, Q mit dem Mechanismus gleichartig verbunden sind, so beschreibt auch, wenn wir das Glied PG als Steg betrachten, der Punkt Q eine Kranioide.

Beachtenswerth ist noch der in Fig. **603** dargestellte specielle Fall, in welchem $OG = PG = b$ ist; dann folgt aus II) die einfachere Beziehung:

$$\frac{\overline{QO}^2 + \overline{OH}^2 - c^2}{QO\,(QO - QP)} = \frac{OH}{OG} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II}').$$

Wird der Punkt P auf einem durch den Fixpunkt Q gehenden Kreise p geführt, dessen Mittelpunkt M_p und dessen Durchmesser $Q\Delta$ ist, nehmen wir ferner QM_p als Abscissenaxe, und bezeichnen wir mit x, y die Coordinaten des Punktes O; dann ist

$$QO = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad QP = \frac{Q\Delta\,.\,x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{x^2 + y^2 + \overline{OH}^2 - c^2}{x^2 + y^2 - Q\Delta\,.\,x} = \frac{OH}{OG},$$

welche einen vom Punkte O beschriebenen Kreis o repräsentirt, dessen Mittelpunkt M_o auf der Abscissenaxe QM_p liegt[1]). Ist die Streckensumme $HG + GP > HQ$, dann kann der Gelenkpunkt P mit dem Fixpunkte Q coincidiren, und es kann eine Drehung des starr gewordenen Mechanismus um die vereinten Axen Q, P stattfinden. Bei dieser Drehung beschreibt der Punkt O um Q einen Kreis; und demnach besteht die von O beschriebene vollständige Bahncurve aus diesem Kreise und jenem Kreise o. Wenn wir uns die Kreisradien M_pP, M_oO durch Glieder ersetzt denken, erhalten wir einen übergeschlossenen Mechanismus. Nehmen wir aber aus demselben eins der Glieder QH, QH' z. B. QH wieder heraus, dann bewegt sich der Punkt H auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt Q ist.

---

[1]) Vergl. Sylvester, *Proceedings of the Royal Institution of Great Britain.* 1875. Vol. VII. p. 179.

Durch weitere Specialisirung, indem wir in Fig. **604** annehmen, dass $OG = PG = \frac{1}{2} OH = \frac{1}{2} a$ sei, ergiebt sich aus II') die einfachere Beziehung:

$$\overline{QO}^2 - 2\, QO \,.\, QP = a^2 - c^2 \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \text{II}'').$$

Bei diesem Mechanismus, der nach Sylvester ein binom-quadratischer Extractor genannt wird, liegt der Gelenkpunkt P im Schnittpunkte der Diagonalen QO, HH', weil dieselben rechtwinkelig auf einander stehen und weil G, G' resp. die Mitten von den Seiten OH, OH' sind. Wir können daher auch den Gelenkpunkt P mit den Mitten J, J' der beiden anderen Seiten QH, QH' gelenkig verbinden, wie durch Punktirung angedeutet ist, und erhalten dadurch einen übergeschlossenen achtgliederigen Mechanismus.

Nehmen wir wieder an, dass der Punkt P auf einem durch den Fixpunkt Q gehenden Kreise p bewegt wird, dessen Mittelpunkt M_p und dessen Durchmesser $Q\Delta$ ist, so erhalten wir für diesen specielleren Mechanismus aus obiger Kreisgleichung die einfachere Gleichung:

$$(x^2 - Q\Delta)^2 + y^2 = \overline{Q\Delta}^2 + a^2 - c^2$$

des entsprechenden Kreises o, der vom Punkte O beschrieben wird. Hieraus ersehen wir, dass Δ der Mittelpunkt des Kreises O ist; und dies ist auch direct zu erkennen, weil wir, da Δ auf der Diagonale HH' liegt, die Glieder OH', QH' beziehlich durch die Glieder $O\Delta$, $Q\Delta$ ersetzen und $Q\Delta$ als Steg betrachten können.

Zwischen dem Radius ΔO des Kreises o und dem Abstande $Q\Delta$ des Abstandes seines Mittelpunktes Δ vom Fixpunkte Q bebesteht nach dem Satze S. 578 die Beziehung:

$$\Delta O^2 + c^2 = \overline{Q\Delta}^2 + a^2, \quad \text{oder} \quad \overline{\Delta O}^2 = \overline{Q\Delta}^2 + a^2 - c^2.$$

Demnach ergiebt sich zu jedem Bahnkreise o des Punktes O, dessen Radius und Mittelpunkt unter dieser Bedingung gewählt werden, ein durch den Fixpunkt Q gehender Bahnkreis p des Punktes P.

Wir können den betrachteten sechsgliederigen Mechanismus sehr vereinfachen, wenn wir das Glied PJ einsetzen und die drei Glieder $H'O$, $H'Q$, $G'P$ weglassen. Dadurch erhalten wir den in Fig. **605** gezeichneten viergliederigen Mechanismus[1]). Aus der so erlangten symmetrischen Gestalt dieses Mechanismus erkennt man,

---

[1]) Diese Vereinfachung hat Johnson angegeben im *Messenger of Mathematics*. 1876. Vol. 5. p. 159.

dass die Beziehung zwischen P, Q gegen O als Fixpunkt dieselbe ist, wie die Beziehung zwischen P, O gegen Q als Fixpunkt.

Um ferner auch bei diesem Mechanismus die Bahncurve des Punktes P zu bestimmen, wenn der Punkt O auf einem durch den Fixpunkt Q gehenden Kreise geführt wird, haben wir behufs besserer Vergleichung mit der früheren Darlegung auf S. 576 (Fig. **595**) den Mechanismus in Fig. **606** so gezeichnet, dass der Fixpunkt Q zwischen O und P liegt. Nehmen wir auf QP die Strecke $PQ_I = QP$, ferner auf HP einen beliebigen Punkt H', oder insbesondere $PH' = HP$ an, und denken wir uns die strichpunktirten Strecken durch Glieder ersetzt, so erhalten wir, wie leicht erkenntlich ist, einen Peaucellier'schen Mechanismus mit dem Fixpunkte Q. Wenn bei diesem der Punkt O auf einem durch Q gehenden Kreise geführt wird, beschreibt der Punkt Q_I nach S. 576 eine Fusspunktencurve einer Parabel; und da P stets die Mitte des Fahrstrahles QQ_I ist, so beschreibt der Punkt P eine ähnliche Fusspunktencurve, die sich zu jener wie 1 : 2 verhält. Hieraus folgt der Satz:

Wenn der Punkt O auf einem durch den Fixpunkt Q gehenden Kreise geführt wird, beschreibt der Punkt P eine Fusspunktencurve einer Parabel.

Setzen wir, weil $OH = a$, $QH = c$ ist, $a^2 - c^2 = \mu^2$ und nehmen wir den Durchmesser dieses Kreises gleich μ oder $\sqrt{2}\,\mu$, dann ist diese Fusspunktencurve beziehlich eine Cissoide oder Strophoide. Diese Resultate kann man auch leicht aus der Gleichung II'') ableiten.

Denken wir uns in Fig. **605** oder **606** das Glied QH festgestellt, dann beschreibt der Punkt P nach S. 582 eine Kranioide, die aber in diesem speciellen Falle aus dem um J mit dem Radius JP beschriebenen Kreise, ferner aus den beiden singulären Punkten H, Q besteht, weil der Punkt P mit H und Q coincidiren kann.

Wenn wir schliesslich in Fig. **607** den Punkt P als Fixpunkt betrachten, erhalten wir zwischen den Punkten O, Q die einfache symmetrische Beziehung:

$$\overline{PO}^2 - \overline{PQ}^2 = a^2 - c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I}'').$$

Führen wir nun den Punkt O auf einem durch den Fixpunkt P gehenden Kreise o, dessen Durchmesser δ und dessen Polargleichung für P als Ursprung demnach

$$PO = \delta \cos \theta$$

ist, dann ergiebt sich die folgende Polargleichung

$$PQ = \sqrt{\delta^2 \cos^2 \theta - (a^2 - c^2)}$$

der vom Punkte Q beschriebenen entsprechenden Curve q. Wird insbesondere der Kreisdurchmesser $\delta = \sqrt{2(a^2 - c^2)}$ genommen, so erhalten wir die Polargleichung der Lemniscate:

$$PQ = \sqrt{a^2 - c^2}\ \sqrt{\cos 2\theta}.$$

In Fig. **607** haben wir beispielsweise das Längenverhältniss $OH : QH = a : c = \sqrt{2} : 1$ genommen; dem zufolge ist $\sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ und jener Kreisdurchmesser $\delta = a$. Bei dieser besonderen Anordnung können wir den Gelenkpunkt G in dem Mittelpunkte des Kreises o feststellen, und es ist dann PG das feste Glied eines gleichschenkeligen Schwingkurbelgetriebes $PGHJ$, bei welchem, wie auf S. 312 erwähnt wurde, der Punkt Q der Koppel HJ eine Lemniscate q beschreibt[1]). Die vom Punkte Q erzeugte Curve ist aber in diesem Falle auch eine Kranioide, die also hier aus der Lemniscate q und ferner, weil H mit P coincidiren kann, aus dem um P mit HQ als Radius beschriebenen Kreise besteht. Es ist jedoch nicht nothwendig, dass wir den Gelenkpunkt G im Mittelpunkte des Kreises o feststellen; denn denken wir uns in Fig. **607** diesen Gelenkpunkt G in die bezüglich PQ symmetrische Lage gelegt und den Punkt O auf dem Kreise o geführt, dann bewegt sich G auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt P ist, und der Punkt Q erzeugt dieselbe Lemniscate q in anderer Weise als vorhin.

Der betrachtete Mechanismus ist ein Specialfall des in Fig. **608** dargestellten allgemeineren Mechanismus. Um dies zu erkennen, nehmen wir an, dass die Punkte H, O eines starren Systems HOG sich resp. auf den beiden festen Geraden h, l bewegen, die sich im Punkte P schneiden; dann beschreibt nach Art. 18 der Mittelpunkt G des durch HOP gelegten Systemkreises um P einen Kreis. Ferner sei in H an dieses starre System ein zweites starres System HQJ gelenkig angeschlossen, dessen Punkt Q sich auf der Geraden l bewegt; dem zufolge beschreibt der Mittelpunkt J des durch HQP gelegten Systemkreises auch um P einen Kreis. Wir können daher jene Systeme als Glieder eines Mechanismus betrachten, an welche das Gelenk GPJ angeschlossen ist. Bei der Bewegung dieses Mechanismus bleiben dann die Punkte O, P, Q

[1]) Vergl. die Mittheilung von Sylvester in den *Proceedings of the Royal Institution of Great Britain*. 1875. Vol. VII. p. 192.

stets in der Geraden l und der Punkt H bleibt auf der Geraden h, die mit l einen constanten Winkel hPl bildet. Wenn dieser Winkel gleich einem Rechten genommen wird, fällt G in die Mitte von OH, ferner J in die Mitte von QH, und wir erhalten dann den vorhin betrachteten speciellen Mechanismus. Die Beziehungen zwischen zweien der Punkte O, P, Q, wenn der dritte als Fixpunkt gewählt wird, sind aber bei diesem allgemeineren Mechanismus viel complicirter als bei dem speciellen Mechanismus[1]).

Alle bisher betrachteten, geführten Mechanismen, die durch eine Axe mit dem Steggliede oder festen System verbunden sind, wurden vermittelst Führung eines einzigen Gliedpunktes im festen System zwangläufig bewegt, und aus den meisten dieser einfach geführten Mechanismen konnten übergeschlossene Mechanismen gebildet werden. Im Folgenden wollen wir aber noch einige Mechanismen betrachten, welche durch mehrfache Führung in dem festen System zwangläufig bewegt werden, und noch andere Beispiele übergeschlossener Mechanismen behandeln.

Mehrfach geführte Mechanismen.

244. **Zweifach geführte, zwangläufige Mechanismen.** Jeder zwangläufige Mechanismus wird nach S. 423 durch gleichzeitige bestimmte Führungen zweier Punkte, die zwei verschiedenen Gliedern angehören, zwangläufig bewegt. Wir betrachten zunächst als Repräsentanten eines zwangläufigen Mechanismus in Fig. **609** ein Gelenkviereck $ABCD$, dessen Glieder mit $1, 2, 3, 4$ bezeichnet sind, und nehmen an, ein Punkt H des Gliedes 1 werde mit der Geschwindigkeit HH_v auf einer Curve h und ein Punkt J des benachbarten Gliedes 2 mit der Geschwindigkeit JJ_v auf einer Curve i in einem festen System 0 geführt; dann können die Pole 01, 02, 03, 04 der vier Glieder $1, 2, 3, 4$ im Bezug auf das feste System 0 und die Geschwindigkeiten der Gelenkpunkte A, B, C, D, sowie die Geschwindigkeiten beliebiger Gliedpunkte leicht construirt werden. Dadurch ist also die momentane Bewegung aller Glieder des geführten Mechanismus bestimmt. Indem wir durch den Endpunkt H_b der lothrechten Geschwindigkeit des

[1]) Ein sehr reichhaltiges Literaturverzeichniss der behandelten Mechanismen giebt Liguine, „Liste des travaux sur les systèmes articulés". *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques.* 1883. 2e sér. T. VII. p. 145.

Punktes H zu HA die Parallele $H_v A_v$ ziehen, und ferner durch den Endpunkt J_v der lothrechten Geschwindigkeit des Punktes J zu JA die Parallele $J_v A_v$ ziehen, erhalten wir nach Art. 29 durch den Schnittpunkt A_v dieser Parallelen die lothrechte Geschwindigkeit AA_v des Gelenkpunktes A, welche auch die Normale an der Bahncurve desselben ist. Die Schnittpunkte, welche die Gerade AA_v mit den Geraden HH_v, JJ_v bildet, sind demnach die Pole *01*, *02*. Ferner ergiebt sich der Pol *03* als Schnittpunkt der Geraden *02-23*, *01-13* und der Pol *04* als der Schnittpunkt der Geraden *01-14*, *02-24*. Von den zehn Polen der fünf Glieder *0*, *1*, *2*, *3*, *4* sind sechs Pole durch das Gelenkviereck gegeben, und die vier fehlenden Pole *01*, *02*, *03*, *04* sind durch die ausgeführte Construction bestimmt, bei welcher wir noch die Controle erhalten, dass die drei Pole *03*, *34*, *04* auf einer Geraden liegen.

Ziehen wir nun zu JB die Parallele $J_v B_v$, welche B-*03* im Punkte B_v trifft, und zu HD die Parallele $H_v D_v$, welche D-*01* im Punkte D_v schneidet, so sind BB_v, DD_v die lothrechten Geschwindigkeiten der Gelenkpunkte B, D. Ferner ergiebt sich, indem wir zu BC die Parallele $B_v C_v$ oder zu DC die Parallele $D_v C_v$ bis an C-*03* ziehen, die lothrechte Geschwindigkeit CC_v des Gelenkpunktes C. Dadurch ist dann der Geschwindigkeitszustand jedes der vier Glieder oder Systeme *1*, *2*, *3*, *4* im Bezug auf das feste System *0* bestimmt.

Bei dem in Fig. **610** dargestellten Gelenkviereck $ABCD$, dessen Glieder wieder mit *1*, *2*, *3*, *4* bezeichnet sind, wird ein Punkt H des Gliedes *1* mit der Geschwindigkeit HH_v auf einer Curve h und ein Punkt K des gegenüber liegenden Gliedes *3* mit der Geschwindigkeit KK_v auf einer Curve k im festen System *0* geführt. In diesem Falle denken wir uns den Pol *13*, den Schnittpunkt der Geraden AB, CD, mit H und K verbunden, dann können wir $H\,13\,K$ momentan als ein geführtes, aus den beiden Gliedern *1*, *3* bestehendes Gelenk ansehen, dessen Axe *13* ist. Ziehen wir nun durch den Endpunkt H_v der lothrechten Geschwindigkeit des Punktes H zu H-*13* die Parallele H_v-13_v und durch den Endpunkt K_v der lothrechten Geschwindigkeit des Punktes K zu K-*13* die Parallele K_v-13_v, so bestimmt der Schnittpunkt 13_v dieser Parallelen die lothrechte Geschwindigkeit *13*-13_v der momentan mit *13* coincidirenden Punkte der Glieder *1*, *3*; und demnach sind die Schnittpunkte, welche die Gerade *13*-13_v mit den Geraden HH_v, KK_v bildet, die Pole *01*, *03*. Somit ergiebt sich ferner der Pol *02* als Schnittpunkt der Geraden *01-12*, *03-23* und der Pol *04* als Schnittpunkt der Geraden *01-14*, *03-34*. Die drei Pole *24*, *02*, *04* liegen auf einer Geraden und liefern dadurch eine Controle für die Construction der Pole. Nachdem die vier Pole *01*, *02*, *03*, *04* bestimmt sind, können wir die lothrechten Geschwindigkeiten der Gelenkpunkte A, B, C, D in gleicher Weise wie vorhin construiren.

Um noch bei einem anderen zweifach geführten zwangläufigen Mechanismus die betreffenden Pole zu bestimmen, betrachten wir ein in Fig. **611** dargestelltes, zweiräderiges Vorgelege, dessen beide Zahnräder *1*, *2* in dem Gliede *3* gelagert sind. Wir nehmen an, ein an dem Rade *1* befestigter Punkt H werde mit der Geschwindigkeit HH_v auf einer Curve h und ein an dem Rade *2* befestigter Punkt J werde mit der Geschwindigkeit JJ_v auf einer Curve i im festen System *0* geführt. Denken wir uns den Pol *12*, den Berührungspunkt der beiden Rollkreise der Zahnräder *1*, *2*, mit H und J verbunden, so können wir $H12J$ momentan als ein geführtes Gelenk ansehen, dessen Axe der Pol *12* vertritt. Ziehen wir nun durch den Endpunkt H_v der lothrechten Geschwindigkeit von H zu H-*12* die Parallele H_v-12_v und durch den Endpunkt J_v der lothrechten Geschwindigkeit von J zu J-*12* die Parallele J_v-12_v; dann liefert der Schnittpunkt 12_v dieser Parallelen die Gerade *12*-12_v, welche die Geraden HH_v, JJ_v resp. in den Polen *01*, *02* schneidet, und die beiden Geraden *01-13*, *02-23* treffen sich in dem Pol *03*. Damit ist der Geschwindigkeitszustand eines jeden der drei Glieder *1*, *2*, *3* bestimmt. In analoger Weise, wie in diesen Beispielen gezeigt wurde, können bei jedem zwangläufigen Mechanismus, der durch Führung zweier verschiedenen Gliedern angehörenden Punkte zwangläufig in einem festen System bewegt wird, die Pole aller Glieder im Bezug auf dieses feste System construirt werden.

245. **Dreifach geführte Mechanismen.** Wir betrachten in Fig. **612** zunächst die vier Glieder *1*, *2*, *3*, *4*, welche beziehlich durch die Gelenkaxen *12*, *23*, *34* verbunden sind, und nehmen an, es werden die Punkte H, J, L, die den Gliedern *1*, *2*, *4* angehören, auf den Curven h, i, l im festen System *0* resp. mit den lothrechten Geschwindigkeiten HH_v, JJ_v, LL_v geführt. Wir ziehen nun, behufs der Bestimmung der momentanen Bewegung der Glieder, zu H-*12*, J-*12* die Parallelen H_v-12_v, J_v-12_v, welche sich im Punkte 12_v schneiden; dann ist *12*-12_v die lothrechte Geschwindigkeit des Gelenkpunktes *12*, und die Gerade *12*-12_v schneidet die Geraden HH_v, JJ_v in den Polen *01*, *02*. Hierauf ziehen wir zu J-*23* die

Parallele J_v-23_v, welche auf *02-23* die lothrechte Geschwindigkeit 23-23_v des Gelenkpunktes *23* bestimmt; ferner ziehen wir zu *23-34*, *L-34* die Parallelen 23_v-34_v, L_v-34_v, die sich im Endpunkte 34_v der lothrechten Geschwindigkeit des Gelenkpunktes *34* schneiden. Die Schnittpunkte, welche die Gerade 34-34_v mit den Geraden 23-23_v, LL_v bildet, sind die Pole *03*, *04*. Die Pole *13*, *24* ergeben sich beziehlich als die Schnittpunkte der Geraden *12-23*, *01-03* und *23-34*, *02-04*; und ferner liefern die Geraden *13-34*, *24-12* durch ihren Schnittpunkt den Pol *14*, der auch mit *01*, *04* in einer Geraden liegt. Von den zehn Polen der betrachteten fünf Systeme *0*, *1*, *2*, *3*, *4* sind somit die fehlenden sieben Pole bestimmt.

Wenn wir noch zwischen zwei Gliedern, z. B. zwischen *4*, *1*, ein aus zwei Gliedern *5*, *6* bestehendes Gelenk einfügen, welches an dieselben in den Punkten *45* und *16* angeschlossen ist, so wird auch dieses Gelenk zwangläufig mitbewegt. Durch Ziehung der betreffenden Parallelen werden in bekannter Weise für die Gelenkpunkte *45*, *16*, *56* die lothrechten Geschwindigkeiten 45-45_v, 16-16_v, 56-56_v construirt; und die Gerade 56-56_v schneidet die Geraden *04-45*, *01-16* in den Polen *05*, *06*, welche im Verein mit den vorhin erhaltenen Polen alle noch durch die Glieder *5*, *6* hinzugekommenen übrigen Pole bestimmen.

Um allgemeine Beziehungen abzuleiten, aus denen wichtige specielle Fälle hervorgehen, betrachten wir, Fig. **613**, in einem festen System *0* drei bewegte Systeme *1*, *2*, *3*, denen beziehlich die Curven $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ angehören, und nehmen an, dass die Punkte A, B, C eines mitbewegten Systems *4* resp. auf den bewegten Curven $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bleiben. Sind für die zu den Systemen *1*, *2*, *3* gehörenden Punkte H, J, K, welche momentan auf den in A, B, C errichteten Normalen der Curven $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ liegen, die Geschwindigkeiten HH_v, JJ_v, KK_v im Bezug auf das feste System *0* gegeben, so ist die momentane Bewegung des in dieser Weise geführten Systems *4* bestimmt. Um dies zu begründen, ziehen wir durch die Endpunkte H_v, J_v, K_v der lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte H, J, K zu den Curvennormalen HA, JB, KC beziehlich die Parallelen H_vA_v, J_vB_v, K_vC_v, auf denen nach Art. 27 die noch zu bestimmenden Endpunkte A_v, B_v, C_v der lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte A, B, C liegen müssen; da ferner nach dem Satze auf S. 23 diese Endpunkte ein Dreieck $A_vB_vC_v$ bilden, welches dem Dreieck ABC ähnlich ist und zu demselben ähnlich liegt, wobei der Pol *04* des Systems *4* gegen das feste System *0* der Aehnlichkeitspunkt ist, so sind auch die von den Curvennormalen HA, JB, KC und von den entsprechenden Parallelen $H_v A_v$, $J_v B_v$, $K_v C_v$ gebildeten Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ ähnlich und ähnlich liegend bezüglich desselben Aehnlichkeitspunktes *04*. Demnach treffen sich die Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ in dem Pol *04*, und die von diesem Pol *04* nach den Punkten A, B, C des Systems *4* gehenden Geraden bestimmen auf jenen Parallelen resp. die Endpunkte A_v, B_v, C_v der lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte A, B, C des geführten Systems *4*.

Wenn auf den Geraden HH_v, JJ_v, KK_v noch die Pole *01*, *02*, *03* der Systeme *1*, *2*, *3* gegeben sind, so ist auch die momentane Bewegung dieser drei Systeme bestimmt. Auf den Geraden *A-01*, *B-02*, *C-03*, die beziehlich die Geraden $A_v H_v$, $B_v J_v$, $C_v K_v$ in den Punkten A'_v, B'_v, C'_v treffen, ergeben sich die lothrechten Geschwindigkeiten AA'_v, BB'_v, CC'_v, welche die resp. mit den Punkten A, B, C momentan coincidirenden Punkte der Systeme *1*, *2*, *3* im Bezug auf das feste System *0* besitzen. Demnach repräsentiren die Strecken $A'_v A_v$, $B'_v B_v$, $C' C_v$ die lothrechten Geschwindigkeiten, mit denen sich die Punkte A, B, C des Systems *4* auf den Curven $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Systeme *1*, *2*, *3* bewegen. Sind insbesondere diese lothrechten Geschwindigkeiten gleich Null, so können wir in diesem speciellen Falle die drei Systeme *1*, *2*, *3* als solche betrachten, die in den Punkten A, B, C drehbar mit dem System *4* verbunden sind.

In Fig. **614** ist ein viergliederiger offener Mechanismus dargestellt, der aus dem Gliede *4* und den an diesem in den Punkten A, B, C oder *14*, *24*, *34* angeschlossenen Gliedern *1*, *2*, *3* besteht. Nehmen wir nun an, dass die Punkte H, J, K, welche beziehlich den Gliedern *1*, *2*, *3* angehören, auf den Curven h, i, k im festen System *0* mit den Geschwindigkeiten HH_v, JJ_v, KK_v oder mit den lothrechten Geschwindigkeiten HH_v, JJ_v, KK_v geführt werden, so erhalten wir jenen erwähnten speciellen Fall, und es wird durch diese dreifache Führung der betrachtete offene Mechanismus zwangläufig in dem festen System *0* bewegt. Der Pol *04* ergiebt sich als der Aehnlichkeitspunkt der aus den Geraden HA, JB, KC, sowie aus den entsprechenden Parallelen $H_v A_v$, $J_v B_v$, $K_v C_v$ gebildeten Dreiecke $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$; und die auf den Geraden *A-04*, *B-04*, *C-04* durch diese Parallelen bestimmten Strecken AA_v, BB_v, CC_v repräsentiren die lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte A, B, C in dem festen System *0*. Die Pole *01*, *02*, *03* erhalten wir als die Schnittpunkte, welche die Geraden *14-04*, *24-04*, *34-04* beziehlich mit den Geraden HH_v, JJ_v, KK_v bilden;

und die Pole *12*, *23*, *13* ergeben sich nach der bekannten Bestimmungsweise:

$$\frac{14\text{-}24}{01\text{-}02} > 12, \quad \frac{24\text{-}34}{02\text{-}03} > 23, \quad \frac{34\text{-}14}{03\text{-}01} > 13.$$

Als Controle ist noch zu beachten, dass diese drei Pole *12*, *23*, *13* auf einer Geraden liegen; und somit sind alle zehn Pole des geführten viergliederigen offenen Mechanismus und des festen Systems in der Zeichnung angegeben. Specielle Fälle gehen aus diesem Mechanismus hervor, wenn wir in demselben Drehpaarungen durch Richtpaarungen ersetzen.

Uebergeschlossene Mechanismen.

246. **Beispiele angewandter übergeschlossener Mechanismen.** Bei der Untersuchung der geführten Mechanismen sind schon in vielen Fällen übergeschlossene Mechanismen in Betracht gekommen, um aber weitere Erkenntniss zu erlangen, wollen wir noch einige übergeschlossene Mechanismen besonders behandeln. Aus einem zwangläufigen Mechanismus entsteht ein übergeschlossener Mechanismus, wenn in einem Gliede ein kreiscylindrischer Zapfen befestigt wird, und ein anderes nicht benachbartes Glied mit einer entsprechenden curvenförmigen Nuthe versehen wird, in welcher der Zapfen gleitet, so dass diese beiden Glieder des Mechanismus durch eine hinzugefügte höhere Paarung verbunden sind. Betrachten wir z. B. als Repräsentanten eines zwangläufigen Mechanismus in Fig. **615** ein Kurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$, an dessen Koppel FL ein Zapfen E befestigt ist, der in einer entsprechenden Nuthe ε des Steges $\Phi\Lambda$ gleitet, so wird durch die Hinzufügung der von dem Zapfen E und von der Nuthe ε gebildeten höheren Paarung der Mechanismus ein übergeschlossener; denn nach Wegnahme eines der Glieder ΦF, ΛL bleibt die Zwangläufigkeit der übrigen bewegten Glieder bestehen. Wenn insbesondere die Nuthe ε kreisförmig ist, dann können wir in den Mechanismus ein neues Glied einfügen, welches am Zapfen E durch eine Drehpaarung mit dem Gliede FL und im Mittelpunkte der kreisförmigen Nuthe ε durch eine Drehpaarung mit dem Gliede $\Phi\Lambda$ verbunden wird; und falls die Nuthe ε geradlinig ist, tritt für diese letzte Drehpaarung eine Richtpaarung ein.

Bei einem rechtwinkeligen Kreuzschiebergetriebe, welches in Fig. **616** dargestellt ist, beschreibt die Mitte E des Gliedes FL in dem Kreuzschlitzgliede einen Kreis, dessen Mittelpunkt M der Schnittpunkt der beiden Schlitzmittellinien ist. Demnach können wir ein neues Glied EM einsetzen, welches in E durch eine Drehpaarung mit dem Gliede FL und in M durch eine Drehpaarung mit dem Kreuzschlitzgliede verbunden wird. Diese letzte Drehpaarung muss aber so angebracht werden, dass die beiden Schieber durch die Kreuzung ungehemmt hindurch gehen können. Diesen übergeschlossenen Mechanismus hat Dawes behufs der Geradführung der Kolbenstange bei seiner Dampfmaschine angewendet[1]). Denken wir uns das Glied ME weggenommen und das Kreuzschlitzglied mit einer kreisförmigen Nuthe versehen, in welcher der Zapfen E des Gliedes FL gleitet, dann bleibt der Mechanismus ein übergeschlossener. Denken wir uns aber ferner auch die beiden Schieber weggemindert und die Zapfen F, L entsprechend erweitert, so dass dieselben in den geradlinigen Schlitzen gleiten; dann erhalten wir einen elementaren Mechanismus, dessen beide Glieder durch eine höhere Paarung zwangläufig verbunden sind, oder ein Gliederpaar, bei welchem das kinematische Element des Gliedes FL aus den Cylinderflächen der drei cylindrischen Zapfen F, E, L und das kinematische Element des Kreuzschlitzgliedes aus den betreffenden ebenen Flächen der geradlinigen Schlitze und den cylindrischen Flächen der kreisförmigen Nuthe besteht.

Da bei dem Mechanismus in Fig. **616** jeder Punkt des Gliedes FL, der auf dem über FL als Durchmesser beschriebenen Kreise liegt, sich auf einer durch M gehenden Geraden bewegt, so können wir an der Stelle eines solchen Punktes in dem Gliede FL einen Zapfen befestigen, und auf denselben einen drehbaren Schieber setzen, der in einem entsprechenden geradlinigen Schlitze des Schlitzgliedes gleitet. Durch Einfügung dieses zweiten neuen Gliedes erhalten wir dann einen zweifach übergeschlossenen Mechanismus.

Aus einem in Fig. **617** dargestellten Parallelkurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$ entsteht, wie schon in Art. 128 erörtert wurde, ein übergeschlossener Mechanismus, wenn ein neues Glied F_1L_1 mit den Gliedern ΦF, ΛL durch Drehpaarungen in den Punkten F_1, L_1 verbunden wird, so dass ΦFF_1, ΛLL_1 congruente Dreiecke sind;

[1]) Dawes, *Specification* No. 3980 vom 6. Febr. 1816. — *Abhandlungen der Königlichen Technischen Deputation für Gewerbe in Berlin.* 1826. Thl. I. S. 64.

und durch Einfügung mehrerer derartiger neuen Glieder erhalten wir einen mehrfach übergeschlossenen Mechanismus. In gleicher Weise können wir auch neue Glieder zwischen je zwei der Glieder $\Phi\Lambda$, FL, F_1L_1 einfügen. Das in Fig. **617** gezeichnete doppelte Parallelkurbelgetriebe wird in der Praxis mannigfach angewendet. Wenn die Kurbeln ΦF, ΦF_1 sowie die Kurbeln ΛL, ΛL_1 gleich lang und rechtwinkelig sind, erhalten wir den übergeschlossenen Mechanismus der Kuppelung an den Triebrädern der Locomotive. Befindet sich die feste Axe Φ in der Mitte von FF_1 und ebenso die feste Axe Λ in der Mitte von LL_1, dann ergiebt sich der Mechanismus der Roberval'schen Waage, welche in Fig. **618** dargestellt ist[1]). Das Glied $\Phi\Lambda$ bildet das feste Gestell dieser Waage, und die beiden kreisförmig parallelbewegten Glieder FL, F_1L_1 tragen die Schalen derselben. Da alle Punkte dieser beiden Glieder in jedem Momente parallele Wegelemente durchschreiten und auch gleiche Geschwindigkeit besitzen, so ist nach dem Princip der virtuellen Verrückungen das Gleichgewicht unabhängig von den Angriffspunkten der gleichen Kräfte, die vertical auf den Schalen wirken. In der neueren praktischen Ausführung, hat Westphal zur Erlangung einer constanten relativen Empfindlichkeit der Waage das Glied LL_1 bei Λ in zwei Theile getheilt[2]). Denselben Mechanismus, aber mehrfach in gleicher Gestalt vereint, hat Buchanan[3]) bei seinem Ruderrade verwendet, um den Schaufeln desselben kreisförmige Parallelbewegung zu ertheilen, so dass diese beständig in verticaler Stellung bleiben.

Bei dem in Fig. **619** dargstellten Buchanan'schen Ruderrade wird das Glied $\Phi\Lambda$ durch das Schiff vertreten, und durch die Triebwelle Φ wird das Glied FF_1 gedreht; das Glied LL_1 ist drehbar auf einen an dem Schiffe befestigten, zu Λ centrischen Ring gesetzt, der die Welle Φ excentrisch umschliesst, und die Glieder FL, F_1L_1 tragen die kreisförmig parallelgeführten Schaufeln, welche beständig in verticaler Stellung bleiben. In gleicher Weise sind die beiden um Φ und Λ rotirenden Glieder mit mehreren gleichartigen Armen versehen, welche die zugehörigen Schau-

---

1) Dieser übergeschlossene Mechanismus wird schon in Schott, *Technica curiosa*. 1664. p. 823 beschrieben, und Roberval hat denselben später in gleicher Gestalt für die nach ihm benannte Waage verwendet. Siehe *Journal des Sçavans*. 10 Fevrier 1670.

2) Westphal, *Deutsches Reichspatent* Nr. 955 vom 2. Juli 1877. — E. Brauer, *Konstruktion der Waage*. 1880. S. 50 und 136.

3) Buchanan, *Specification* No. 3741 vom 18. October 1813.

feln führen und somit einen mehrfach übergeschlossenen Mechanismus bilden.

247. **Uebergeschlossene Mechanismen von Kempe.** Werden in Fig. **620** bei zwei Gelenkvierecken $ABCD$, $A'B'C'D'$ zwei Gliederpaare, z. B. AB, $A'B'$ und BC, $B'C'$, resp. in den Punkten O, P durch Drehpaarungen verbunden, so entsteht aus den beiden Gelenkvierecken ein zwangläufiger Mechanismus, und derselbe wird im Allgemeinen starr, wenn wir noch ein drittes Gliederpaar in gleicher Weise durch eine Drehpaarung verbinden. In besonderen Fällen können aber unbeschadet der Zwangläufigkeit auch die beiden anderen Gliederpaare CD, $C'D'$ und DA, $D'A'$ beziehlich in den Punkten Q, R durch Drehpaarungen verbunden werden; und Kempe[1]) hat in einer ergebnissreichen Abhandlung die Beziehungen dargelegt, bei denen die Zwangläufigkeit bestehen bleibt, wenn alle vier Gliederpaare durch Drehpaarungen verbunden sind. Wir wollen diese Beziehungen bei den meisten der so gebildeten übergeschlossenen Mechanismen möglichst einfach geometrisch ableiten und nicht den allgemeineren Weg der umständlichen Rechnung verfolgen, auf welchem Kempe und Darboux[2]) zum Ziele gelangen.

In Fig. **620** ist speciell ein Gelenkparallelogramm $ABCD$ gegeben; in den Gliedern AB, BC, CD, DA nehmen wir beziehlich die Gliedpunkte O, P, Q, R beliebig an und bilden die vier neuen Gelenkparallelogramme $OBPB'$, $PCQC'$, $QDRD'$, $RAOA'$. Zeichnen wir nun das Dreieck AZD, welches dem Dreieck BPC congruent ist, dann sind die beiden Dreiecke $OA'B'$, ARZ sowie die beiden Dreiecke $QD'C'$, DRZ congruent und parallel gelegen; folglich sind die beiden Strecken $A'B'$, $D'C'$ gleich und parallel der constanten Strecke RZ, und die vier Gelenkpunkte A', B', C', D' bilden also ein Parallelogramm. Hiernach sind die beiden Dreiecke $OA'B'$, $QD'C'$ starr, und ebenso sind auch aus gleichem Grunde die beiden Dreiecke $PB'C'$, $RA'D'$ starr. Dem zufolge können wir ein zweites Gelenkparallelogramm $A'B'C'D'$ bilden, dessen Glieder in Reihenfolge mit den entsprechenden Gliedern jenes Gelenkparallelogramms $ABCD$ beziehlich in den Punkten O, P, Q, R durch Drehpaarung verbunden sind. Diese beiden Gelenkparallelogramme stehen also in zwangläufiger Verbindung

[1]) Kempe, „On Conjugate Four-piece Linkages". *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1878. Vol. IX. p. 133.

[2]) Darboux, „Recherches sur un système articulé". *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*. 1879. 2e sér. T. III. p. 151.

und liefern somit einen achtgliederigen übergeschlossenen Mechanismus. In gleicher Beziehung wie diese beiden betrachteten Gelenkparallelogramme stehen die beiden Gelenkparallelogramme $AOA'R$, $CPC'Q$, deren Glieder beziehlich in den Punkten B, B', D', D durch Drehpaarung verbunden sind, und ferner auch die beiden Gelenkparallelogramme $BPB'O$, $DQD'R$, deren Glieder beziehlich in den Punkten C, C', A', A durch Drehpaarung verbunden sind.

Wenn bei dem betrachteten, übergeschlossenen Mechanismus insbesondere die Punkte O, P, Q, R so gewählt werden, dass die Dreiecke ABO, DCQ und ebenso die Dreiecke BCP, ADR gleichartig congruent sind, dann fallen die vier Gelenkpunkte A', B', C', D' zusammen und können demnach zu einem viergliederigen Gelenke vereint werden.

Um zu anderen Beziehungen zu gelangen, betrachten wir in Fig. **621** das Gelenkviereck $ABCD$ als gegeben und bestimmen in den Gliedern AB, BC, CD, DA desselben die Gliedpunkte O, P, Q, R so, dass die Dreiecke ABO, CBP, CDQ, ADR ähnlich sind; dann bilden, wie in Art. 240 bewiesen wurde, die Gliedpunkte O, P, Q, R ein Parallelogramm. Nehmen wir nun ein congruentes zweites Gelenkviereck $A'B'C'D'$ mit den Gliedpunkten O', P', Q', R' an, und bringen wir die beiden congruenten Parallelogramme $OPQR$, $O'P'Q'R'$ derart zur Deckung, dass paarweise die Eckpunkte O, Q'; P, R'; Q, O'; R, P' coincidiren, so können wir je zwei Glieder der beiden Gelenkvierecke in diesen coincidirenden Punkten durch eine Drehpaarung verbinden; und die beiden so verbundenen, congruenten Gelenkvierecke stehen in zwangläufiger Verbindung. In gleicher Beziehung wie die beiden betrachteten congruenten Gelenkvierecke stehen die beiden congruenten Gelenkvierecke $AOC'P'$, $CPA'O'$, deren Glieder beziehlich in den Parallelogrammecken B, D', B', D durch Drehpaarungen verbunden sind, und ferner auch die beiden congruenten Gelenkvierecke $BPD'Q'$, $DQB'P'$, deren Glieder beziehlich in den Parallelogrammecken C, A', C', A durch Drehpaarungen verbunden sind.

In Fig. **622** sind ebenso wie vorhin an den Seiten des gegebenen Vierecks $OPQR$ die ähnlichen Dreiecke ROA, POB, PQC, RQD gezeichnet, und aus dem hierdurch entstandenen Parallelogramm $ABCD$ ist ein Gelenkparallelogramm gebildet, in dessen Gliedern AB, BC, CD, DA sich resp. die Gliedpunkte O, P, Q, R befinden. Wenn wir nun das Gelenkparallelogramm $ABCD$ verändern, so verändern sich auch die genannten Dreiecke, aber sie bleiben ähnlich; denn die in jeder Ecke des Gelenkparallelogramms zusammenstossenden beiden Seiten dieser Dreiecke bleiben constant, und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel erhalten alle gleiche Veränderungen, weil die gegenüberliegenden Glieder des Gelenkparallelogramms im Bezug auf einander Parallelbewegungen vollziehen. Es bleiben demnach auch die Winkel des Vierecks $OPQR$ constant und die Seitenlängen desselben verändern sich alle in gleichem Verhältnisse. Dem zufolge bilden die vier Gliedpunkte O, P, Q, R bei Veränderung des Gelenkparallelogramms $ABCD$ ein ähnlich-veränderliches Viereck. Betrachten wir z. B. den Gliedpunkt O als Fixpunkt, und wird einer von den drei Gliedpunkten P, Q, R im festen ebenen System beliebig bewegt, so vollzieht jeder der beiden anderen Punkte, wie S. 294 bewiesen wurde, eine ähnliche Bewegung, und dadurch erhalten wir eine andere Verallgemeinerung des Pantographen als in Art. 237 dargelegt wurde.

Wenn wir in Fig. **623** ausser dem erhaltenen Gelenkparallelogramm $ABCD$ in gleicher Weise durch die ähnlichen Dreiecke ROA', POB', PQC', RQD' noch ein zweites Gelenkparallelogramm $A'B'C'D'$ bilden und die gleichartig bezeichneten Gliederpaare AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CD, $C'D'$; DA, $D'A'$ beziehlich in den Punkten O, P, Q, R durch Drehpaarungen verbinden, so stehen diese beiden Gelenkparallelogramme in zwangläufiger Verbindung. In diesem übergeschlossenen Mechanismus sind die vier Gelenkvierecke $RAOA'$, $PBOB'$, $PCQC'$, $RDQD'$ ähnlich. Bei den beiden ähnlichen Gelenkvierecken $RAOA'$, $PCQC'$ sind die Gliederpaare RA, QC; AO, CP; OA', PC'; $A'R$, $C'Q$ beziehlich in den Punkten D, B, B', D' drehbar verbunden, und bei den beiden ähnlichen Gelenkvierecken $PBOB'$, $RDQD'$ sind die Gliederpaare PB, QD; BO, DR; OB', RD'; $B'P$, $D'Q$ beziehlich in den Punkten C, A, A', C' drehbar verbunden.

Wir betrachten in Fig. **624** die ähnlich-veränderliche Punktgruppe O, P, Q, R des Gelenkparallelogramms $ABCD$ in der mit R', O', P', Q' bezeichneten Reihenfolge und erhalten dadurch ein überschlagenes Viereck. An den Seiten dieses Vierecks construiren wir die ähnlichen Dreiecke $R'O'A'$, $P'O'B'$, $P'Q'C'$, $R'Q'D'$ und bilden aus dem erhaltenen Parallelogramm $A'B'C'D'$ ein zweites Gelenkparallelogramm, bei welchem dieselbe ähnlich-veränderliche Punktgruppe auftritt. Wenn wir nun die Gliederpaare AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CD, $D'A'$; DA, $C'D'$, beziehlich in den doppelt bezeichneten Punkten OO', PP', QR', $Q'R$ durch Drehpaarungen verbinden, so stehen diese beiden Gelenkparallelogramme in zwangläufiger Verbindung. Die Reihenfolge der Verbindung dieser Glieder wird hier aber durch Wechselung der beiden letzten Gliederpaare verändert. Da die Punktgruppe O, P, Q, R drei verschiedene Vierecke liefert, so können wir in analoger Weise wie das zweite Gelenkparallelogramm noch ein drittes bilden. Die Glieder der beiden Gelenkvierecke $(OO')B(PP')B'$ und $(Q'R)D(QR')D'$ sind in den Punkten A, C, C', A' durch Drehpaarungen verbunden; und die Reihenfolge der Verbindungen wird auch hier durch Wechselung zweier Glieder verändert.

Bei dem in Fig. **625** gezeichneten Gelenkviereck $ABCD$ mit senkrechten Diagonalen sind die Gliedpunkte O, P, Q, R auf den Seiten so angenommen, dass die Punktgruppen ABO, CBP, CDQ, DAR ähnlich sind; demnach bilden die Gliedpunkte O, P, Q, R bei Veränderung des Gelenkvierecks $ABCD$ ein veränderliches Rechteck, dessen Seiten OP, RQ und OR, PQ beziehlich zu den senkrecht bleibenden Diagonalen AC, BD parallel sind und sich diesen Diagonalen proportional verändern. Wir construiren nun zu ORA das congruente Dreieck ORA', ebenso zu PQC das congruente Dreieck PQC' und bezeichnen mit B', D' resp. die Schnittpunkte der Geraden OA', PC' und RA', QC'; dem zufolge befinden sich die Punkte A', C' auf der Geraden AC. Hiernach sind auch die Dreiecke OPB, OPB' sowie die Dreiecke RQD, RQD' congruent, und die Punkte B', D' liegen somit in der Geraden BD; denn diese Dreiecke haben beziehlich je eine gemeinsame Seite und entsprechend gleiche anliegende Winkel. Demnach sind auch die Dreiecke ABC, $A'B'C'$ und ADC, $A'D'C'$ ähnlich, und folglich sind die beiden Vierecke $ABCD$, $A'B'C'D'$ symmetrisch ähnlich. Betrachten wir nun auch das zweite Viereck $A'B'C'D'$, auf dessen Seiten die Punktgruppen $A'B'O$, $C'B'P$, $C'D'Q$, $A'D'R$ ähnlich sind, als ein Gelenkviereck, so bilden bei Veränderung desselben die Punkte O, P, Q, R ein veränderliches Rechteck, dessen Seiten OP, RQ und OR, PQ sich proportional den parallelen Diagonalen $A'C'$, $B'D'$ verändern. Demnach können wir die gleichartig bezeichneten Glieder der beiden symmetrisch ähnlichen Gelenkvierecke $ABCD$, $A'B'C'D'$ in den Punkten O, P, Q, R durch Drehpaarungen zwangläufig verbinden und erhalten dadurch einen übergeschlossenen Mechanismus. Bei diesem Mechanismus sind die anderen verbundenen Gelenkvierecke $OBPB'$, $RDQD'$ und $PCQC'$, $OARA'$ alle gleichschenkelig.

Werden in Fig. **626** auf den Seiten des Gelenkvierecks $ABCD$ die Punkte O, P, Q, R in den Mitten angenommen, dann schrumpft in diesem speciellen Falle das Viereck $A'B'C'D'$ in dem Schnittpunkte M der senkrechten Diagonalen zusammen, und es entsteht in M ein aus den Gliedern MO, MP, MQ, MR gebildetes viergliederiges Gelenk. Kempe hat auch bei einem beliebigen Gelenkviereck $ABCD$ die Punkte O, P, Q, R auf den Seiten desselben und die Längen der vier Glieder MO, MP, MQ, MR des viergliederigen Gelenkes so bestimmt, dass die Zwangläufigkeit bestehen bleibt. Jener specielle Mechanismus, bei welchem die Punkte O, P, Q, R in den Mitten der Seiten liegen, geht dann auch als specieller Fall aus diesem allgemeineren Mechanismus hervor. Ferner hat Kempe aus diesem allgemeineren Mechanismus durch Annahme unendlich langer Glieder einen von Hart erfundenen sechsgliederigen Gelenkmechanismus abgeleitet, der vermittelst einer kreisförmigen Bewegung eine geradlinige Bewegung erzeugt[1]).

Die betrachteten übergeschlossenen Mechanismen, welche aus zwei Gelenkvierecken gebildet wurden, bei denen benachbarte Glieder des einen mit benachbarten Gliedern des anderen verbunden sind, werden zu weiteren Untersuchungen anregen, die zunächst beantworten, ob auch bei besonderen Beziehungen aus zwei Gelenkvierecken übergeschlossene Mechanismen entstehen, wenn je zwei benachbarte Glieder des einen mit je zwei gegenüberliegenden Gliedern des anderen durch Drehpaarungen verbunden werden. Die übergeschlossenen Mechanismen, unter deren Polen mannigfache interessante Beziehungen auftreten, werden in Zukunft ein ergiebiges Gebiet der kinematisch-geometrischen Forschung bilden.

---

[1]) Hart, *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1876. Vol. VIII. p. 288. Vergl. auch Darboux' Abhandlung im *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*. 1879. 2e sér, T. III. p. 144.

NEUNTER ABSCHNITT.

Mechanismen für angenäherte Geradführung.

Ableitung geometrischer Hülfsbeziehungen.

248. **Erzeugungsweisen geradliniger Bewegungen.** Am einfachsten wird eine geradlinige Bewegung vermittelst eines elementaren Mechanismus erzeugt, dessen beide Glieder durch eine Richtpaarung verbunden sind. Das bewegte Glied vollzieht in dem als fest betrachteten anderen Gliede eine geradlinige Parallelbewegung, die wir eine Parallelgleitung nennen.

Wenn bei einem Mechanismus ein kreiscylindrischer Zapfen eines bewegten Gliedes in einem geraden Schlitze des festen Gliedes gleitet, vollziehen alle Punkte der geometrischen Axe des Zapfens geradlinige Bewegung, die eine geradlinige Zapfengleitung genannt wird. Die einfachste Erzeugung einer geradlinigen Zapfengleitung erhalten wir durch einen ebenen elementaren Mechanismus, wenn bei der höheren Paarung, welche die beiden Glieder desselben verbindet, ein kreiscylindrischer Zapfen des zwangläufig bewegten Gliedes in einem geraden Schlitze des festen Gliedes gleitet.

Bewegen wir ein ebenes System in einem festen ebenen System so, dass ein Punkt A sich auf einer Geraden α und ein Punkt F sich auf einer Bahncurve φ bewegt, und construiren wir die entsprechende Bahncurve λ eines Punktes L; dann vollzieht der Punkt A eine geradlinige Bewegung, wenn die beiden Punkte F, L auf ihren Bahncurven φ, λ bewegt werden. Um dies praktisch auszuführen, betrachten wir die beiden ebenen Systeme als Glieder eines ebenen elementaren Mechanismus, ersetzen im bewegten Gliede die Punkte F, L durch kreiscylindrische Zapfen und versehen das feste Glied mit entsprechenden krummen Schlitzen, deren Mittellinien die Bahncurven φ, λ sind, so dass die Zapfen in diesen Schlitzen gleiten. Durch diesen elementaren Mechanismus mit einer höheren Paarung wird der Punkt A geradlinig auf jener Geraden α geführt; und eine derartige geradlinige Führung des Punktes A wird eine genaue Geradführung genannt.

Wenn insbesondere die beiden Schlitze gerade aber nicht parallel sind, die Punkte F, L sich also auf Geraden φ, λ bewegen, welche die Mittellinien dieser Schlitze bilden; dann vollzieht das bewegte Glied nach Art. 18 eine elliptische Bewegung und alle Punkte des bewegten Gliedes, welche auf einem bestimmten Kreise k liegen, bewegen sich auf Geraden. In diesem besonderen Falle können wir auf die Zapfen drehbare Schieber oder Schlitten setzen, die in den entsprechend erweiterten, geraden Schlitzen gleiten. Dadurch wird die höhere Paarung vermittelst vier niederer Paarungen, zwei Drehpaarungen und zwei Richtpaarungen ersetzt; und es wird ein Kreuzschiebergetriebe gebildet, welches die genaue Geradführung aller auf dem Kreise k liegenden Punkte bewirkt.

Bewegt sich der Punkt L auf einer Geraden λ und der Punkt F auf einem Kreise φ, dessen Mittelpunkt Φ auf λ liegt, und dessen Radius $\Phi F = FL$ ist, dann vollzieht das bewegte Glied auch eine elliptische Bewegung. In diesem Falle enthält das feste Glied einen geraden Schlitz und einen kreisförmigen Schlitz, in denen beziehlich die Zapfen des bewegten Gliedes gleiten, welche die Punkte L, F vertreten. Bei diesem elementaren Mechanismus können wir die höhere Paarung durch drei Drehpaarungen und eine Richtpaarung ersetzen, wenn wir auf den Zapfen L einen drehbaren Schlitten setzen, der in dem entsprechenden geraden Schlitze gleitet, und ferner ein Glied ΦF einfügen, welches in Φ durch eine Drehpaarung mit dem festen Gliede und in F durch eine Drehpaarung mit dem bewegten Glied FL verbunden ist. Dadurch erhalten wir ein gleichschenkeliges Schubkurbelgetriebe, welches die genaue Geradführung aller derjenigen Punkte des Gliedes FL bewirkt, die auf dem um F mit dem Radius $F\Phi$ beschriebenen Kreise liegen.

Das Kreuzschiebergetriebe und das gleichschenkelige Schubkurbelgetriebe sind die beiden einzigen einfachen Mechanismen mit niederen Paarungen, die genaue Geradführungen erzeugen. Bei dem Kreuzschiebergetriebe wird aber, weil es zwei Richtpaarungen enthält, die genaue Geradführung durch zwei geradlinige Bewegungen bewirkt, und bei dem gleichschenkeligen Schubkurbelgetriebe, welches eine Richtpaarung besitzt, wird die genaue Geradführung durch eine geradlinige Bewegung und eine kreislinige Bewegung erzeugt. Man hat lange die Möglichkeit bezweifelt, dass eine genaue Geradführung durch einen Gelenkmechanismus, der also nur Drehpaarungen enthält, bewirkt werden könne und durch kreislinige Bewegung allein erzeugbar sei. Diese Möglichkeit wurde aber zuerst überraschend durch den Peaucellier'schen Inversor und in einfacher Weise durch den Hart'schen Inversor offenbart, wie in Art. 241 und 239 dargelegt ist; und diesen folgten bald noch andere zusammengesetzte Gelenkmechanismen von Kempe[1]) und Hart[2]), welche genaue Geradführungen bewirken. Mit regem Interesse sind diese zusammengesetzten Mechanismen viel behandelt worden[3]), und man hat mannigfache Anwendungen derselben in der Maschinentechnik erwartet; aber man hat auch ihren Werth in dieser Richtung überschätzt. Ein Mechanismus ist um so praktischer, je weniger Glieder und Gelenke derselbe enthält; auch die Drehpaarungen in demselben sind oft leichter herstellbar und verursachen meistens weniger Reibung als die Richtpaarungen. Die Praxis bevorzugt daher stets die einfachen Mechanismen mit Drehpaarungen und erfordert in den meisten Fällen nur die Erzeugung einer angenähert geradlinigen Bewegung, bei welcher ein Stück der Bahncurve eines Punktes sich einer Geraden sehr nahe anschmiegt; und eine derartige Bewegung wird eine angenäherte Geradführung genannt. Der kinematischen Forschung ist daher die Lösung der Aufgabe zugewiesen: durch das Kurbelgetriebe und vereinzelt auch durch andere einfache Mechanismen angenäherte Geradführungen zu erzeugen, die den praktischen Anforderungen vollständig genügen. Behufs der Aufsuchung dieser angenäherten Geradführungen bedürfen wir einiger geometrischer Hülfsbeziehungen, durch welche wir diesen Zweck erreichen; und daher müssen wir zuvörderst die Lagenbeziehungen von drei, vier und fünf conplanen congruenten ebenen Systemen eingehend untersuchen.

---

[1]) Kempe, „On a General Methode of producing exact Rectilinear Motion by Linkwork". *Proceedings of the Royal Society of London.* June 17, 1875. Vol. XXIII. p. 565. — „How to Draw a Straight Line". *Nature.* June 14, 1877. Vol. XVI. p. 125.

[2]) Hart, „On some Cases of Parallel Motion". *Proceedings of the London Mathematical Society.* April 12, 1877. Vol VIII. p. 288.

[3]) Vergl. Liguine, „Liste des travaux sur les systèmes articulés". *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques.* 1883. 2e sér. T. VII. p. 143.

249. **Betrachtung dreier conplaner congruenter ebener Systeme und deren Mittelpunktsystem.** In Fig. **627**, Taf. XXXIX, sind durch die drei homologen Punktpaare A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 drei in einer Ebene liegende congruente ebene Systeme S_1, S_2, S_3 gegeben. Die zu diesen Systemen gehörenden drei selbstentsprechenden Punkte oder Pole, welche hier nicht als Drehpunkte, sondern als geometrisch wichtige Punkte in Betracht kommen, wollen wir dieser Unterscheidung wegen anders als bisher beziehlich mit P^{12}, P^{13}, P^{23} bezeichnen. In dieser Bezeichnungsweise geben die beiden an P als Marken angefügten Ziffern die beiden Systeme zu erkennen, denen der betreffende Pol angehört und für welche derselbe der Doppelpunkt ist. Der Pol P^{12} der beiden Systeme S_1, S_2 ergiebt sich, indem wir in der Mitte auf A_1A_2 und in der Mitte auf B_1B_2 je eine Senkrechte errichten, als Schnitt dieser beiden Senkrechten. In analoger Weise erhalten wir den Pol P^{13} von S_1, S_3 und den Pol P^{23} von S_2, S_3. Zu dem Punkte P^{23}, der als selbstentsprechender Punkt den Systemen S_2, S_3 angehört, ergiebt sich der entsprechende oder homologe Punkt P^{23}_1 im System S_1 als der zweite Schnittpunkt der beiden durch P^{23} gehenden, um P^{12} und P^{13} beschriebenen Kreise. Dem zufolge wird der Punkt P^{23}_1 auch bestimmt, indem wir von P^{23} auf $P^{12}P^{13}$ die um ihre eigene Länge verlängerte Senkrechte $P^{23}P^{23}_1$ ziehen. In gleicher Weise erhalten wir auf den beiden anderen, um ihre eigene Länge verlängerten Senkrechten $P^{13}P^{13}_2$, $P^{12}P^{12}_3$ den Punkt P^{13}_2 in S_2, der dem Pol P^{13} von S_1, S_3 entspricht, und den Punkt P^{12}_3 in S_3, der dem Pol P^{12} von S_1, S_2 entspricht.

Nehmen wir im System S_1, Fig. **627**, einen beliebigen Punkt D_1 an, so können wir, gestützt auf das Poldreieck $P^{12}P^{13}P^{23}$, die homologen Punkte D_2, D_3 in den Systemen S_2, S_3 in folgender Weise construiren. Wir beschreiben um P^{12} und P^{13} die beiden durch D_1 gehenden Kreise, deren zweiter Schnittpunkt mit $\mathfrak{D}$ bezeichnet ist, und beschreiben ferner um P^{23} den durch $\mathfrak{D}$ gehenden Kreis, der jene beiden ersten Kreise beziehlich in den homologen Punkten D_2, D_3 trifft. Denn, weil nach dieser Construction die Dreiecke $P^{12}P^{23}_1D_1$, $P^{12}P^{23}\mathfrak{D}$ und auch die Dreiecke $P^{12}P^{23}\mathfrak{D}$, $P^{12}P^{23}D_2$ symmetrisch congruent sind, so sind die beiden Dreiecke $P^{12}P^{23}_1D_1$, $P^{12}P^{23}D_2$ gleichartig congruent, also entsprechende Dreiecke in den Systemen S_1, S_2, und folglich sind D_1, D_2 entsprechende Punkte in diesen Systemen. In gleicher Weise ergiebt sich, dass auch D_1, D_3 entsprechende Punkte der Systeme S_1, S_3 sind. Nach dieser Bestimmungsweise erhalten wir zu D_1 auch die homologen Punkte D_2, D_3, indem wir von D_1 auf $P^{12}P^{13}$ die um ihre eigene Länge verlängerte Senkrechte $D_1\mathfrak{D}$ ziehen, dann von $\mathfrak{D}$ auf $P^{12}P^{23}$ und $P^{13}P^{23}$ beziehlich die um ihre eigene Länge verlängerten Senkrechten $\mathfrak{D}D_2$, $\mathfrak{D}D_3$ fällen. Wenn also das Poldreieck $P^{12}P^{13}P^{23}$ gegeben ist, dann können wir je drei homologe Punkte der Systeme S_1, S_2, S_3 construiren, und demnach sind diese drei Systeme durch das Poldreieck bestimmt. Nehmen wir aber insbesondere die drei Pole P^{12}, P^{23}, P^{13} in einer Geraden liegend an, dann sind gemäss der Bestimmung der homologen Punkte die drei Systeme S_1, S_2, S_3 identisch, und dieser specielle Fall kommt nicht in Betrachtung.

Denken wir uns in Fig. **628** durch je drei homologe Punkte von drei congruenten ebenen Systemen S_1, S_2, S_3 einen Kreis gezeichnet, wie z. B. den durch die drei homologen Punkte D_1, D_2, D_3 bestimmten Kreis, dessen Mittelpunkt Δ ist; dann bildet die Gesamtheit aller Mittelpunkte dieser Kreise ein ebenes System, welches wir mit Σ^{123} bezeichnen und das Mittelpunktsystem nennen. Betrachten wir von den drei Systemen S_1, S_2, S_3 zunächst nur das System S_1 in Beziehung zu dem Mittelpunktsystem Σ^{123}, so entspricht einem Punkte D_1 in S_1 eindeutig ein Punkt Δ in Σ^{123}. Wenn wir umgekehrt im System Σ^{123} einen Punkt Δ annehmen, so gehört zu diesem eine eindeutig bestimmte Gruppe von drei homologen Punkten, die auf einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt Δ ist. Denn gäbe es noch eine zweite derartige Gruppe von drei homologen Punkten, dann müssten, weil die beiden Kreise je drei homologe Punkte enthalten, die drei Pole P^{12}, P^{13}, P^{23} gemäss ihrer Construction in dem gemeinsamen Mittelpunkte Δ dieser beiden Kreise zusammenfallen. Und diesen speciellen Fall, in welchem demnach auch alle Mittelpunkte in einem Punkte coincidiren, schliessen wir aus. Hieraus folgt also, dass auch einem Punkte Δ im Mittelpunktsystem Σ^{123} eindeutig ein Punkt im System S_1 entspricht. Nur für die Punkte P^{12}, P^{13}, P_1^{23} in S_1 und für die Punkte P^{12}, P^{13}, P^{23} in Σ^{123} erleidet dieses gegenseitige eindeutige Entsprechen, wie wir bald erkennen werden, eine Ausnahme. Nach der angegebenen Construction der homologen Punkte entspricht dem Punkte D_1 in S_1 der bezüglich zur Geraden $P^{12}P^{13}$ symmetrisch liegende Punkt $\mathfrak{D}$ in einem zu S_1 symmetrisch congruenten System $\mathfrak{S}$, und es bestehen demnach zwischen den Systemen $\mathfrak{S}$ und Σ^{123} dieselben Beziehungen, wie zwischen den Systemen S_1 und Σ^{123}.

Ziehen wir den Radius ΔD_1, der die Seite $P^{12}P^{13}$ des Poldreiecks im Punkte J' trifft, so ist, je nachdem die Punkte $\mathfrak{D}$, Δ einerseits oder beiderseits der Geraden $P^{12}P^{13}$ liegen, $\mathfrak{D}J' \pm J'\Delta = \Delta D_1$ gleich dem Radius des durch D_1, D_2, D_3 gehenden Kreises, und die beiden Geraden $J'\mathfrak{D}$, $J'\Delta$ bilden gleiche Winkel mit der Geraden $P^{12}P^{13}$. Dasselbe gilt, wenn wir ferner die beiden Radien ΔD_2, ΔD_3 ziehen, welche die Seiten $P^{12}P^{23}$, $P^{23}P^{13}$ resp. in den Punkten J'', J''' schneiden, bezüglich dieser Seiten und dieser Punkte. Demnach sind die Punkte $\mathfrak{D}$, Δ die Brennpunkte eines Kegelschnitts, der das Poldreieck in den Punkten J', J'', J''' berührt; und der über der Hauptaxe dieses Kegelschnitts als Durchmesser beschriebene Kreis geht gemäss den Darlegungen auf S. 129 durch die Fusspunkte der von $\mathfrak{D}$ und Δ auf die Seiten des Poldreiecks gefällten Lothe. Beachten wir, dass die gleichen Winkel $P_1^{23}P^{12}P^{23}$, $D_1P^{12}D_2$ resp. von den Geraden $P^{12}P^{13}$, $P^{12}\Delta$ halbirt werden und dass auch die Gerade $P^{12}P^{23}$ den Winkel $\mathfrak{D}P^{12}D_2$ halbirt, so ist demnach der Winkel $P_1^{23}P^{12}D_1 = P^{13}P^{12}\Delta$ und $P^{23}P^{12}\mathfrak{D} = - P^{13}P^{12}\Delta$. Es bilden also die beiden von einer Ecke des Poldreiecks nach den Punkten $\mathfrak{D}$, Δ gehenden Geraden gleiche symmetrisch gelegene Winkel mit den zu dieser Ecke gehörenden Seiten des Poldreiecks. Auf Grund dieser bekannten Eigenschaft, dass die von dem Schnittpunkte zweier Tangenten eines Kegelschnittes nach den Brennpunkten desselben gezogenen Geraden gleiche symmetrisch gelegene Winkel mit diesen Tangenten bilden, erhalten wir zu einem Punkte $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{S}$ den entsprechenden Punkt Δ in Σ^{123}, indem wir den Winkel $P^{13}P^{12}\Delta$ entgegengesetzt gleich $P^{23}P^{12}\mathfrak{D}$ und den Winkel $P^{12}P^{13}\Delta$ entgegengesetzt gleich $P^{23}P^{13}\mathfrak{D}$ machen. Wenn wir ferner auch zu dem Winkel $P^{12}P^{23}\mathfrak{D}$ den entgegengesetzt gleichen Winkel $P^{13}P^{23}\Delta$ construiren, erhalten wir eine Controle. In gleicher Weise wird umgekehrt zu einem Punkte Δ in Σ^{123} der entsprechende Punkt $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{S}$ bestimmt.

Um nun zu einem Punkte D_1 des Systems S_1, welches zu $\mathfrak{S}$ symmetrisch congruent ist, den entsprechenden Punkt Δ im System Σ^{123} zu construiren, machen wir den Winkel $P^{13}P^{12}\Delta = P_1^{23}P^{12}D_1$, den Winkel $P^{12}P^{13}\Delta = P_1^{23}P^{13}D_1$ und als Controle den Winkel $P^{13}P^{23}\Delta = P^{12}P_1^{23}D_1$. Ebenso ergiebt sich umgekehrt zu einem Punkte Δ in Σ^{123} der entsprechende Punkt D_1 in S_1. Ferner erhalten wir hiernach auch zu dem Punkte D_1 den entsprechenden Punkt Δ, indem wir den Winkel $D_1P^{12}\Delta = P^{13}P^{12}P^{23}$ und den Winkel $D_1P^{13}\Delta = P^{12}P^{13}P^{23}$ machen, und analog wird umgekehrt zu einem Punkte Δ der entsprechende Punkt D_1 bestimmt.

Construiren wir in gleicher Weise zu einem zweiten Punkte D_1' den entsprechenden Punkt Δ', so ist der Winkel $D_1 P^{12} D_1' = \Delta P^{12} \Delta'$, der Winkel $D_1 P^{13} D_1' = \Delta P^{13} \Delta'$ und der Winkel $D_1 P_1^{23} D_1' = \Delta P^{23} \Delta'$, oder diese Winkelpaare ergänzen sich zu zwei Rechten. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Die entsprechenden Punktpaare $D_1 D_1'$. $\Delta\Delta'$ in den Systemen S_1, Σ^{123} erscheinen von je einem der Pole P^{12}, P^{13} aus, sowie auch von dem Pol P^{23} und dem Punkte P_1^{23} aus unter je zwei gleichen Winkeln, resp. unter zwei Winkeln, die sich zu zwei Rechten ergänzen.

Wenden wir die erste oder die zweite der Constructionen entsprechender Punkte auf die Punkte P^{12}, P^{13}, P_1^{23} des Systems S_1 an, dann ergiebt sich, dass dem Punkte P^{12} alle Punkte der Geraden $P^{13}P^{23}$, dem Punkte P^{13} alle Punkte der Geraden $P^{12}P^{23}$ und dem Punkte P_1^{23} alle Punkte der Geraden $P^{12}P^{13}$ in Σ^{123} entsprechen. Wegen der gleichartigen Wechselbeziehung der Systeme S_1, Σ^{123} entsprechen auch den Punkten P^{12}, P^{13}, P^{23} des Systems Σ^{123} resp. alle Punkte der Geraden $P^{13}P_1^{23}$, $P^{12}P_1^{23}$, $P^{12}P^{13}$. Die drei zu dem System S_1 gehörenden Punkte P^{12}, P^{13}, P_1^{23} heissen Hauptpunkte, und die drei durch sie bestimmten Geraden heissen Hauptgerade dieses Systems; ebenso werden auch die drei zum System Σ^{123} gehörenden Punkte P^{12}, P^{13}, P^{23} Hauptpunkte und die durch sie bestimmten Geraden Hauptgerade dieses Systems genannt.

Aus der Bestimmungsweise der entsprechenden Punkte der Systeme S_1, Σ^{123} folgt, wenn wir im System S_1 auf einer Geraden d, die durch keinen Hauptpunkt dieses Systems geht, eine Punktreihe $D_1 D_1' \, . \, .$ annehmen, dass den durch dieselbe bestimmten projectiven Strahlenbüscheln $P^{12}(D_1 D_1' \, . \, .)$, $P^{13}(D_1 D_1' \, . \, .)$, $P_1^{23}(D_1 D_1' \, . \, .)$ beziehlich die entsprechenden Strahlenbüschel $P^{12}(\Delta\Delta' \, . \, .)$, $P^{13}(\Delta\Delta' \, . \, .)$, $P^{23}(\Delta\Delta' \, . \, .)$ congruent sind. Demnach sind auch diese drei letzten Strahlenbüschel projectiv, und je zwei dieser Strahlenbüschel erzeugen im System Σ^{123} denselben Kegelschnitt δ, welcher der Geraden d entspricht und durch die drei Hauptpunkte P^{12}, P^{13}, P^{23} dieses Systems geht. Wenn die Gerade im System S_1 durch einen der drei Hauptpunkte P^{12}, P^{13}, P_1^{23} desselben, z. B. durch P^{12} geht, dann entspricht dieser Geraden ein geradliniger Kegelschnitt, d. h. der Kegelschnitt zerfällt in zwei Gerade; denn wir erhalten in diesem besonderen Falle zu der Punktreihe $D_1 D_1' \, . \, .$ auf einer Geraden $P^{12}D_1$ die entsprechende projective Punktreihe $\Delta\Delta' \, . \, .$ auf der Geraden $P^{12}\Delta$, und zu dem mit P^{12} coincidirenden Punkte des Systems S_1 ergeben sich alle Punkte der Geraden $P^{13}P^{23}$ als entsprechende Punkte in Σ^{123}. Demnach entspricht in Fig. 628 der Geraden $P^{12}D_1$ der aus den beiden Geraden $P^{12}\Delta$, $P^{13}P^{23}$ bestehende Kegelschnitt. Ebenso ergiebt sich, dass der Geraden $P^{13}D_1$ der aus den Geraden $P^{13}\Delta$, $P^{12}P^{23}$ bestehende Kegelschnitt und der Geraden $P_1^{23}D_1$ der aus den Geraden $P^{23}\Delta$, $P^{12}P^{13}$ bestehende Kegelschnitt entspricht. Dem gemäss sind den Hauptpunkten P^{12}, P^{13}, P_1^{23} in S_1 resp. die Hauptpunkte P^{12}, P^{13}, P^{23} in Σ^{123} zugeordnet; und es coincidiren also in den Polen P^{12}, P^{13} je zwei zugeordnete Hauptpunkte.

Denken wir uns auf der unendlich fernen Geraden im System S_1 eine Punktreihe D_1D_1'.. gegeben, dann sind die entsprechenden Strahlen der Büschel $P^{12}(D_1D_1'..)$, $P^{13}(D_1D_1'..)$ parallel, und folglich sind diese Büschel congruent. Da dem ersten dieser Büschel das congruente Büschel $P^{12}(\Delta\Delta'..)$ und dem zweiten das congruente Büschel $P^{13}(\Delta\Delta'..)$ entspricht, so sind auch diese beiden letzten Büschel congruent, und demnach ist der hierdurch in Σ^{123} erzeugte Kegelschnitt, welcher der unendlich fernen Geraden des Systems S_1 entspricht, ein durch die drei Hauptpunkte P^{12}, P^{13}, P^{23} gehender Kreis. Den unendlich fernen Punkten D_1, D_1'.. in S_1 entsprechen die unendlich fernen Punkte $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$.. in $\mathfrak{S}$, und betrachten wir diese unendlich fernen Punkte $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$.. als die unendlich fernen Brennpunkte der dem Poldreieck eingeschriebenen Parabeln, so folgt, dass die endlichen Brennpunkte dieser Parabeln auf dem um das Poldreieck beschriebenen Kreise liegen. Denken wir uns im System S_1 auf einem durch zwei Hauptpunkte P^{12}, P^{13} gehenden Kreise eine Reihe von Punkten angenommen, so liefert die Construction der entsprechenden Punkte im System Σ^{123} auf einem durch die zugeordneten Hauptpunkte P^{12}, P^{13} gehenden Kreise eine ähnliche Reihe entsprechender Punkte. Wegen der gleichartigen Wechselbeziehungen der Systeme S_1, Σ^{123} gelten alle Beziehungen von S_1 zu Σ^{123} auch umgekehrt von Σ^{123} zu S_1; und somit ergiebt sich aus unseren Darlegungen das Resultat:

Das System S_1 und das Mittelpunktsystem Σ^{123} stehen in quadratischer Verwandtschaft, bei welcher P^{12}, P^{13}, P_1^{23} in S_1 und P^{12}, P^{13}, P^{23} in Σ^{123} beziehlich zugeordnete Hauptpunkte sind; jeder Geraden in dem einen System entspricht ein Kegelschnitt in dem anderen System, der durch die Hauptpunkte desselben geht, und dieser Kegelschnitt zerfällt in zwei Gerade oder ist ein Kreis, je nachdem die Gerade durch einen Hauptpunkt ihres

Systems geht oder im Unendlichen liegt; jedem in dem einen System durch zwei Hauptpunkte gehenden Kreise entspricht im anderen System ein durch die beiden zugeordneten Hauptpunkte gehender Kreis, und die entsprechenden Punktreihen auf diesen Kreisen sind ähnlich.

Bei der quadratischen Verwandtschaft entspricht einer Curve n^{ter} Ordnung in einem System eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung in dem anderen System. Um dies zu beweisen, nehmen wir an: es sei s_1 eine Curve n^{ter} Ordnung in S_1, der eine Curve σ in Σ^{123} entspricht, und denken uns zu einer beliebigen Geraden λ in Σ^{123} den entsprechenden Kegelschnitt l_1 in S_1 bestimmt, dann schneidet derselbe die Curve s_1 in $2n$ Punkten, denen auf der Geraden λ somit $2n$ Punkte entsprechen; und diese sind die $2n$ Schnittpunkte, welche die Gerade λ mit der Curve σ bildet, die also von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung ist.

Wenn die betrachteten drei Systeme S_1, S_2, S_3 unendlich nahe an einander gelegt werden, geht diese quadratische Verwandtschaft in diejenige über, welche, wie in Art. 53 erörtert wurde, zwischen den Krümmungsmittelpunkten im bewegten System und im festen System besteht.

250. **Besondere Lagenbeziehungen homologer Punkte in drei und in vier conplanen congruenten ebenen Systemen.** Um aus den erhaltenen Ergebnissen noch andere für die Folge wichtige Beziehungen abzuleiten, betrachten wir wieder die drei Systeme S_1, S_2, S_3 im Zusammenhange mit dem Mittelpunktsystem Σ^{123}, welches zu jedem dieser drei Systeme in gleicher Beziehung steht. In Fig. **629** sind durch die drei Punkte $P^{12}P^{13}P_1^{23}$, $P^{12}P_2^{13}P^{23}$, $P_3^{12}P^{13}P^{23}$ resp. die Kreise k_1^{123}, k_2^{123}, k_3^{123} gezogen, die sich in den Systemen S_1, S_2, S_3 entsprechen; und jedem dieser Kreise entspricht die unendlich ferne Gerade im Mittelpunktsystem Σ^{123}. Zu je drei homologen Punkten $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, .. dieser Kreise gehört ein unendlich ferner Mittelpunkt in Σ^{123}; demnach liegen je drei dieser homologen Punkte auf einem unendlich grossen Kreise, d. h. auf einer Geraden. In den entsprechenden congruenten Punktreihen A_1B_1 .., A_2B_2 .. auf den Kreisen k_1^{123}, k_2^{123}, welche sich im Pol P^{12} und in einem Punkte U^{123} schneiden, ist der Pol P^{12} ein selbstentsprechender Punkt; dem zufolge gehen die Geraden $\overline{A_1A_2A_3}$, $\overline{B_1B_2B_3}$, .. durch den Schnittpunkt U^{123} dieser beiden Kreise; und da dieselbe Beziehung bei den Kreisen k_2^{123}, k_3^{123} und k_3^{123}, k_1^{123} gilt, so müssen sich die drei Kreise

k_1^{123}, k_2^{123}, k_3^{123} in einem Punkte U^{123} schneiden. Dieser Punkt U^{123} ist der Höhenschnittpunkt des Poldreiecks $P^{12}P^{13}P^{23}$, weil die auf den Seiten dieses Dreiecks senkrechten Geraden $P^{12}P_3^{12}$, $P^{13}P_2^{13}$, $P^{23}P_1^{23}$ je drei homologe Punkte enthalten, von denen je zwei in dem betreffenden Pol coincidiren. Schliessen wir die unendlich ferne Gerade aus, welche in conplanen congruenten ebenen Systemen sich selbst entspricht, dann ergiebt sich hiernach der Satz:

Alle Geraden, welche je drei homologe Punkte von drei conplanen congruenten ebenen Systemen enthalten, gehen durch den Höhenschnittpunkt des Poldreiecks; alle Punkte in dem einen System, von denen jeder mit seinen beiden homologen Punkten in je einer Geraden liegt, befinden sich auf einem Kreise dieses Systems; derselbe geht durch die beiden Pole, die dieses System mit den beiden anderen besitzt, ferner durch den Punkt dieses Systems, der dem dritten Pol entspricht, und durch den Höhenschnittpunkt des Poldreiecks.

Betrachten wir nun vier in einer Ebene liegende congruente ebene Systeme S_1, S_2, S_3, S_4 als gegeben, und bestimmen wir für die drei Systeme S_1, S_2, S_3 in dem zugehörigen Poldreieck $P^{12}P^{13}P^{23}$ den Höhenschnittpunkt U^{123}, ferner ebenso für die drei Systeme S_1, S_2, S_4 in dem zugehörigen Poldreieck $P^{12}P^{24}P^{14}$ den Höhenschnittpunkt U^{124}, so ist die Verbindungsgerade $U^{123}U^{124}$ die einzige Gerade, welche vier homologe Punkte dieser vier Systeme enthält. Die vier Systeme liefern sechs Pole, die vier Poldreiecke bilden und somit auch die vier Höhenschnittpunkte U^{123}, U^{124}, U^{134}, U^{234} derselben bestimmen; und diese vier Höhenschnittpunkte liegen demnach auf der genannten Geraden. In dem Falle, wenn die vier Systeme derartig liegen, dass sich auf zwei Geraden je vier homologe Punkte befinden, giebt es nach Art. 18 unendlich viele in einem Punkte sich schneidende Gerade, welche je vier homologe Punkte tragen. Dem zufolge müssen in diesem besonderen Falle, damit diese Unbestimmtheit eintritt, die vier Höhenschnittpunkte in dem Durchschnittspunkte jener unendlich vielen Geraden zusammenfallen. Hiernach erhalten wir den Satz:

In vier conplanen congruenten ebenen Systemen giebt es im Allgemeinen nur eine einzige Gruppe von vier homologen Punkten, die auf einer Geraden liegen, und diese Gerade enthält die vier Höhenschnittpunkte der vier Poldreiecke dieser Systeme.

Beachten wir, dass der Punkt D_1 des Systems S_1, der mit seinen homologen Punkten D_2, D_3, D_4 der Systeme S_2, S_3, S_4 in jener Geraden liegt, sich auf jedem der drei Kreise k_1^{123}, k_1^{124}, k_1^{134} befindet, die beziehlich durch die vier Punkte $U^{123} P^{12} P^{13} P_1^{23}$, $U^{124} P^{12} P^{14} P_1^{24}$, $U^{134} P^{13} P^{14} P_1^{34}$ gehen: so ist der Punkt D_1 als zweiter Schnittpunkt zweier dieser Kreise bestimmt und muss ferner auf der Geraden liegen, die durch zwei der Höhenschnittpunkte U^{123}, U^{124}, U^{134}, U^{234} gegeben ist. Wenn wir nun zu dem so erhaltenen Punkte D_1 die homologen Punkte D_2, D_3, D_4 construiren, dann liegen diese vier Punkte in der genannten Geraden. Anstatt des Punktes D_1 im System S_1 können wir auch in analoger Weise in einem der anderen drei Systeme den betreffenden Punkt bestimmen.

Nehmen wir in den drei Systemen S_1, S_2, S_3 drei entsprechende Gerade e_1, e_2, e_3 als Träger homologer Punktreihen an, dann erhalten wir nach obiger Darlegung den Satz:

Die Mittelpunkte derjenigen Kreise, welche je drei homologe Punkte von entsprechenden geraden Punktreihen dreier congruenter ebener Systeme enthalten, liegen auf einem Kegelschnitt, der durch die drei Pole dieser Systeme geht.

Ziehen wir vier congruente ebene Systeme S_1, S_2, S_3, S_4 in Betracht, zu denen die vier Mittelpunktsysteme Σ^{123}, Σ^{124}, Σ^{134}, Σ^{234} gehören, und sind in den congruenten Systemen resp. die vier entsprechenden Geraden e_1, e_2, e_3, e_4 als die Träger von vier congruenten Punktreihen gegeben, so entspricht den drei Geraden e_1, e_2, e_3 ein durch die Pole P^{12}, P^{13}, P^{23} gehender Kegelschnitt ε^{123} im Mittelpunktsystem Σ^{123} und den drei Geraden e_1, e_2, e_4 ein durch die Pole P^{12}, P^{14}, P^{24} gehender Kegelschnitt ε^{124} im zugehörigen Mittelpunktsystem Σ^{124}. Die beiden Kegelschnitte ε^{123}, ε^{124} schneiden sich ausser im Pol P^{12} entweder noch in drei reellen Punkten oder in einem reellen Punkte und in zwei imaginären Punkten. Diese Schnittpunkte sind Mittelpunkte solcher Kreise, die durch vier homologe Punkte der vier congruenten Punktreihen gehen. Der Pol P^{12}, in dem sich diese Kegelschnitte treffen, ist von den Systemen S_3, S_4 resp. von den Punktreihen e_3, e_4 unabhängig und kann daher nicht Mittelpunkt eines Kreises sein, der durch vier homologe Punkte geht. Ferner entsprechen den Geraden e_1, e_3, e_4 und e_2, e_3, e_4 resp. in den Mittelpunktsystemen Σ^{134}, Σ^{234} die Kegelschnitte ε^{134}, ε^{234}, welche die Mittelpunkte der genannten Kreise enthalten. Da die vier Kegelschnitte ε^{123}, ε^{124}, ε^{134}, ε^{234}

sechs Combinationen zur zweiten Classe geben, so können die Mittelpunkte jener Kreise auf sechs verschiedene Weisen als Schnittpunkte je zweier dieser Kegelschnitte bestimmt werden. Wir erhalten hiernach die Sätze:

Bei vier conplanen congruenten ebenen Systemen befinden sich auf einer Geraden in einem dieser Systeme drei Punkte, von denen jeder mit seinen drei homologen Punkten der drei anderen Systeme auf je einem Kreise liegt; aber von den drei Punkten dieser Geraden können zwei imaginär sein.

Bei vier in einer Ebene liegenden, congruenten Punktreihen giebt es entweder einen oder drei Kreise, welche durch vier homologe Punkte gehen.

251. **Lagenbeziehung der sechs Pole von vier conplanen congruenten ebenen Systemen.** Die Lagen der sechs Pole P^{12}, P^{13}, P^{23}, P^{14}, P^{24}, P^{34} von vier in einer Ebene liegenden congruenten ebenen Systemen S_1, S_2, S_3, S_4 stehen in einem merkwürdigen Zusammenhange, dessen Untersuchung für die Bestimmung der Geradführung wichtig ist. Angenommen, es seien die fünf Pole P^{12}, P^{13}, P^{23}, P^{14}, P^{24} gegeben, dann sind, wie S. 603 gelehrt wurde, durch die drei Pole P^{12}, P^{13}, P^{23} die drei zugehörigen Systeme S_1, S_2, S_3, und durch die drei Pole P^{12}, P^{14}, P^{24} die drei zugehörigen Systeme S_1, S_2, S_4 bestimmt. Demnach sind durch fünf Pole die vier Systeme gegeben und folglich ist auch durch fünf Pole der sechste Pol bestimmt. Wir nehmen in Fig. **630** zunächst die vier Pole P^{12}, P^{13}, P^{23}, P^{14} an, construiren zu dem Punkte P^{23} in S_2 den entsprechenden Punkt P_1^{23} in S_1 durch die von P^{23} auf $P^{12}P^{13}$ gefällte, um ihre eigene Länge verlängerte Senkrechte $P^{23}P_1^{23}$, und machen das Dreieck $P^{12}P^{23}P_2^{14}$ dem Dreieck $P^{12}P_1^{23}P^{14}$ congruent; dann entspricht dem zu S_1 oder S_4 gehörenden Punkte P^{14} der Punkt P_2^{14} in S_2. Demnach enthält die Halbirungsgerade $P^{12}h$ des Winkels $P^{14}P^{12}P_2^{14}$, die in der Mitte auf $P^{14}P_2^{14}$ senkrecht steht, den Pol P^{24}. Diese Gerade $P^{12}h$ wird aber, wie man leicht erkennt, einfacher bestimmt, indem wir den Winkel $P^{23}P^{12}P^{24} = P^{13}P^{12}P^{14}$, oder auch den Winkel $P^{14}P^{12}P^{24} = P^{13}P^{12}P^{23}$ machen. Aus der Gleichheit dieser Winkel, deren Schenkel wir als richtungsfreie Gerade betrachten müssen, folgt wegen der gleichartigen gegenseitigen Beziehung aller sechs Pole der Satz:

Die beiden durch einen Pol gehenden Geradenpaare, welche sich auf je zwei Pole stützen, deren

Marken gleiche Ziffern enthalten, umfassen gleiche Winkel.

Diese gleichen Winkel, welche an den Polen auftreten, sind in Fig. **630** der Uebersichtlichkeit wegen durch ausgezogene und durch gestrichelte Kreisbögen gekennzeichnet. Wird nun ausser den vier Polen P^{12}, P^{23}, P^{13}, P^{14} noch der fünfte Pol P^{24} auf der Geraden $P^{12}h$ beliebig angenommen, dann können wir nach dem abgeleiteten Satze den sechsten Pol P^{34} in folgender Weise bestimmen. Wir machen den Winkel $P^{14}P^{13}P^{34} = P^{12}P^{13}P^{23}$ und ferner den Winkel $P^{14}P^{24}P^{34} = P^{12}P^{24}P^{23}$; denn dann sind die Winkel der durch P^{13} gehenden Geradenpaare, die sich resp. auf die Polpaare $P^{14}P^{34}$, $P^{12}P^{23}$ stützen, gleich, und ebenso sind auch die Winkel der durch P^{24} gehenden Geradenpaare gleich, welche sich beziehlich auf dieselben Polpaare stützen. Bezüglich der sechs Pole von vier Systemen folgt also:

Bei Annahme der drei Pole dreier Systeme und eines vierten Pols kann der fünfte Pol nur noch auf einer bestimmten Geraden gewählt werden, und dann ist der sechste Pol bestimmt.

Betrachten wir das in Fig. **630** gezeichnete Viereck $P^{13}P^{23}P^{24}P^{14}$ und nennen wir zwei Pole, in deren Marken keine gleiche Ziffern vorkommen, Gegenpole, so sind die gegenüber liegenden Ecken dieses Vierecks zwei Paar Gegenpole; und die durch jeden der beiden anderen Gegenpole P^{12}, P^{34} gehenden Geradenpaare, welche sich auf je zwei gegenüber liegende Seiten dieses Vierecks stützen, bilden gleiche Winkel. Nehmen wir nun an, es seien die zwei Gegenpolpaare $P^{13}P^{24}$, $P^{23}P^{14}$ gegeben, dann müssen die beiden anderen Gegenpole P^{12}, P^{34} auf einer Curve liegen, die wir die Pollagencurve nennen wollen; und diese Pollagencurve ist demnach der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus die gegenüber liegenden Seiten jenes Vierecks unter je zwei gleichen Winkeln resp. unter zwei sich zu 180° ergänzenden Winkeln erscheinen. Wenn wir den Pol P^{12} als einen Brennpunkt eines Kegelschnitts betrachten, der die Seiten des Dreiecks $P^{23}P^{24}\Pi^{12}$ berührt, so ist nach S. 604 der Pol P^{34} der zweite Brennpunkt dieses Kegelschnitts, weil die Geraden $P^{23}P^{12}$, $P^{23}P^{34}$ gleiche symmetrisch gelegene Winkel mit den zur Ecke P^{23} gehörenden Dreiecksseiten bilden, und weil ebenso auch die Geraden $P^{24}P^{12}$, $P^{24}P^{34}$ gleiche symmetrisch gelegene Winkel mit den zur Ecke P^{24} gehörenden Dreiecksseiten einschliessen. In gleicher Weise ergiebt sich, dass die Pole P^{12}, P^{34} auch die Brennpunkte eines

Kegelschnitts sind, der die Seiten des Dreiecks $P^{23}P^{13}\Pi^{34}$ berührt; denn die Geraden $P^{23}P^{12}$, $P^{23}P^{34}$ bilden gleiche symmetrische Winkel mit den zur Ecke P^{23} gehörenden Seiten dieses Dreiecks, und die Geraden $P^{13}P^{12}$, $P^{13}P^{34}$ bilden gleiche symmetrische Winkel mit den zur Ecke P^{13} gehörenden Dreiecksseiten. Die Pollagencurve wird demnach auch von den Brennpunkten der Kegelschnitte gebildet, welche das Vierseit berühren, in dem die Gegenpolpaare $P^{13}P^{24}$, $P^{23}P^{14}$ gegenüber liegende Ecken sind.

Denken wir uns durch die Pole P^{13}, P^{23} sowie durch die Pole P^{14}, P^{24} je einen Kreis gezogen, so dass der Schnittpunkt der von P^{13}, P^{14} ausgehenden Durchmesser dieser beiden Kreise auf dem um das Dreieck $P^{13}P^{14}\Pi^{12}$ beschriebenen Kreise liegt; dann erscheinen die Strecken $P^{13}P^{23}$, $P^{14}P^{24}$ von den Schnittpunkten dieser Kreise aus unter gleichen Winkeln resp. unter Winkeln, die sich zu 180^0 ergänzen, und ebenso auch die Strecken $P^{13}P^{14}$, $P^{23}P^{24}$. Die Pollagencurve wird demnach durch zwei projective Kreisbüschel erzeugt, deren Grundpunkte beziehlich P^{13}, P^{23} und P^{14}, P^{24} sind und deren entsprechende Kreise mit der zugehörigen Chordale gleiche Winkel bilden, die sich in gleichem Sinne ändern[1]). Ferner folgt hieraus, dass die Pollagencurve auch das Erzeugniss zweier derartiger Kreisbüschel ist, deren Grundpunkte beziehlich die Pole P^{13}, P^{14} und P^{23}, P^{24} sind.

Die beiden projectiven Kreisbüschel sind specielle projective Kegelschnittbüschel, bei denen die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte je zwei Grundpunkte vertreten, und sie erzeugen demnach im Allgemeinen eine Curve vierter Ordnung, die durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte und durch die Grund-

---

[1]) Wenn sich diese gleichen Winkel im entgegengesetzten Sinne ändern, erhalten wir eine zweite Curve, von deren Punkten aus nur die beiden Strecken $P^{13}P^{23}$, $P^{14}P^{24}$ unter zwei gleichen resp. unter zwei sich zu 180^0 ergänzenden Winkeln erscheinen, aber nicht die beiden anderen Strecken $P^{13}P^{14}$, $P^{23}P^{24}$; daher kommt diese zweite Curve hier nicht in Betracht. Auf diese beiden Curven hat Steiner aufmerksam gemacht. Vergl. Steiner, *Gesammelte Werke*. B. 2. S. 621, oder *Journal für reine und angewandte Mathematik*. 1853. B. 45. S. 375. Siehe die Abhandlungen von Schröter, *Mathematische Annalen*. 1872. B. 5. S. 50, von Stammer, *Archiv für Mathematik und Physik*. 1882. Thl. 68. S. 18 und von Schoute, *Journal für reine und angewandte Mathematik*. 1885. B. 99. S. 98. Der specielle Fall, wenn zwei Endpunkte jener Strecken coincidiren, wurde auch behandelt von Schröter, *Mathematische Annalen*. 1873. B. 6. S. 85, und von Hermes, *Journal für reine und angewandte Mathematik*. 1884. B. 97. S. 177; aber die gegenseitigen Beziehungen und die mannigfaltigen Gestaltungen jener beiden Curven in vielen besonderen Fällen sind noch nicht vollständig bekannt.

punktpaare $P^{13}P^{23}$, $P^{14}P^{24}$ geht. Da sich aber in den Kreisbüscheln die beiden unendlich grossen Kreise entsprechen, von denen jeder projectiv betrachtet aus der betreffenden Chordale und der unendlich fernen Geraden besteht, so zerfällt die erzeugte Curve vierter Ordnung in eine Curve dritter Ordnung und in die unendlich ferne Gerade, die unbeachtet bleiben kann. Die erzeugte Curve enthält, weil sich die Chordalen $P^{13}P^{23}$, $P^{14}P^{24}$ entsprechen, den Schnittpunkt Π^{12} dieses Geradenpaares; und wegen der gleichartigen Beziehung aller Pole enthält die erzeugte Curve auch die übrigen fünf Schnittpunkte der betreffenden Geradenpaare. Hieraus folgt der Satz:

Die Pollagencurve, auf der die sechs Pole von vier Systemen liegen, ist eine durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte gehende Curve dritter Ordnung und enthält die sechs Schnittpunkte Π^{12}, Π^{13}, Π^{14}, Π^{23}, Π^{24}, Π^{34} der sechs Geradenpaare

$$\frac{P^{13}P^{23}}{P^{14}P^{24}},\quad \frac{P^{12}P^{23}}{P^{14}P^{34}},\quad \frac{P^{12}P^{24}}{P^{13}P^{34}},\quad \frac{P^{12}P^{13}}{P^{24}P^{34}},\quad \frac{P^{12}P^{14}}{P^{23}P^{34}},\quad \frac{P^{13}P^{14}}{P^{23}P^{24}}.$$

Wenn zwei Gegenpolpaare $P^{13}P^{24}$, $P^{23}P^{14}$ gegeben sind, ist die Pollagencurve durch dieselben bestimmt und kann in der angegebenen Weise construirt werden. Nehmen wir dann in Fig. **631** auf der Pollagencurve σ den fünften Pol P^{12} beliebig an, so ergiebt sich der sechste Pol P^{34} auf derselben, indem wir die Gerade $P^{12}P^{13}$ ziehen, welche die Pollagencurve in dem dritten Punkte Π^{23} schneidet, und ferner die Gerade $\Pi^{23}P^{24}$ ziehen, die auf der Pollagencurve den sechsten Pol P^{34} bestimmt. Demnach erhalten wir den Satz:

Bei Annahme zweier Gegenpolpaare, welche die Pollagencurve bestimmen, kann der fünfte Pol noch auf der Pollagencurve gewählt werden, und dann ist der sechste Pol auf derselben bestimmt.

Ziehen wir von einem beliebigen Punkte Π^{23} der Pollagencurve nach zwei Gegenpolen, z. B. nach P^{13}, P^{24}, die Geraden $\Pi^{23}P^{13}$, $\Pi^{23}P^{24}$, dann bestimmen diese auf der Pollagencurve resp. die Gegenpole P^{12}, P^{34}; und die beiden Geraden $P^{12}P^{24}$, $P^{13}P^{34}$ treffen sich in einem Punkte Π^{14} auf dieser Curve. Wenn wir insbesondere Π^{23} in P^{23} liegend annehmen, ergeben sich die Punkte Π^{12}, Π^{34} als Gegenpole. Wir können uns so unendlich viele Vierseite verschaffen, deren Ecken sich auf der Pollagencurve befinden und deren drei Paar Gegenecken drei Gegenpolpaare repräsentiren.

Durch jedes dieser Vierseite wird die Pollagencurve in der oben angegebenen Weise bestimmt. Die drei Verbindungsgeraden der Gegenecken des Vierseits, d. h. die drei Diagonalen desselben, bilden in Fig. **631** ein Dreieck xyz. Fällen wir von der Ecke z die Höhe zi auf die gegenüber liegende Seite xy, so sind die vier vom Fusspunkte i nach z, P^{13}, x, P^{24} gehenden Strahlen harmonisch, und weil die conjuncten Strahlen iz, ix senkrecht auf einander stehen, sind die Winkel $P^{13}iP^{23}$, $P^{14}iP^{24}$ gleich; folglich ist auch i ein Punkt der Pollagencurve. Demnach geht die Pollagencurve auch durch die Höhenfusspunkte des Diagonalendreiecks eines jeden jener Vierseite.

Um den in Fig. **631** gezeichneten besonderen Fall zu erhalten, in welchem die Geraden $P^{12}P^{24}$, $P^{13}P^{34}$ parallel sind, ihr Schnittpunkt Π^{14} also im Unendlichen sich befindet, muss der Punkt Π^{23} in den endlichen Brennpunkt Γ der Parabel gelegt werden, welche dem durch die Gegenpolpaare $P^{13}P^{24}$, $P^{23}P^{14}$ gegebenen, stark ausgezogenen Vierseit eingeschrieben ist; dann fällt Π^{14} mit dem unendlich fernen, zweiten Brennpunkte dieser Parabel zusammen. Behufs der Construction des endlichen Brennpunktes Γ ist zu beachten, dass für jede Parabel, welche einem Dreieck eingeschrieben ist, der endliche Brennpunkt nach S. 606 auf dem diesem Dreieck umschriebenen Kreise liegt. Da nun von den vier Seiten des Vierseits vier Dreiecke gebildet werden, so schneiden sich die vier um dieselben beschriebenen Kreise in dem Brennpunkte Γ. Wir brauchen demnach nur zwei dieser Kreise, etwa den durch $P^{13}P^{23}\Pi^{34}$ gehenden Kreis und den durch $P^{23}P^{24}\Pi^{12}$ gehenden Kreis zu zeichnen, welche sich ausser im Punkte P^{23} in dem auf der Pollagencurve liegenden Brennpunkte Γ jener Parabel schneiden.

Die Pollagencurve können wir nun auch als das Erzeugniss zweier projectiver Kreisbüschel betrachten, deren Grundpunkte $P^{12}P^{13}$, $P^{24}P^{34}$ sind und deren entsprechende Kreise mit der zugehörigen Chordale gleiche Winkel bilden, die sich in gleichem Sinne ändern. Die beiden über $P^{12}P^{13}$ und $P^{24}P^{34}$ als Durchmesser beschriebenen entsprechenden Kreise liefern demnach durch ihre Schnittpunkte Ξ, Ψ, die auch imaginär sein können, zwei Punkte der Pollagencurve. Um nun eine andere möglichst einfache Erzeugungsweise der Pollagencurve zu erlangen, nehmen wir die Schnittpunkte Ξ, Ψ als Grundpunkte eines Kreisbüschels und weisen demselben das projective Strahlenbüschel zu, dessen Scheitelpunkt Γ ist und dessen Strahlen durch die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise des Kreisbüschels gehen. Dem unendlich grossen Kreise entspricht demnach der auf der Chordale $\Xi\Psi$ senkrechte Strahl $\Gamma\Pi^{14}$, der den unendlich grossen Kreis in dem unendlich fernen Punkte Π^{14} und in dem Punkte τ auf der Chordale schneidet. Dieses Kreisbüschel und das entsprechende projective Strahlenbüschel erzeugen eine durch die unendlich fernen Kreispunkte gehende Curve dritter Ordnung, auf der die acht Punkte Ξ, Ψ, Γ, Π^{14}, P^{12}, P^{13}, P^{24}, P^{34} liegen. Die auf diese einfachere Weise erzeugte Curve, welche nach Art. 38 und 40 eine Focalcurve ist, muss, weil sie mit der Pollagencurve die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte und die genannten acht Punkte, also zehn Punkte gemeinsam hat, mit der Pollagencurve identisch sein. Da die vom Punkte Γ nach zwei beliebigen Gegenpolen, wie z. B. nach P^{13}, P^{24}, gezogenen Geraden auf der Pollagencurve zwei andere Gegenpole P^{12}, P^{34} bestimmen und da die Verbindungsgeraden $P^{12}P^{24}$, $P^{13}P^{34}$ parallel sind, so folgt, dass die Mitte von der Verbindungsstrecke je zweier Gegenpole auf der Geraden ζ liegt, welche die Mittelpunkte der durch Ξ, Ψ gehenden Kreise enthält. Demnach ist die Gerade ζ, die wir die Mittellinie nennen wollen, durch die Mitten der beiden Verbindungsstrecken zweier Gegenpolpaare bestimmt. Sind in Fig. **631** die zwei Paar Gegenpole $P^{13}P^{24}$, $P^{23}P^{14}$ gegeben, dann repräsentiren auch die beiden dadurch mit gegebenen Punkte Π^{12}, Π^{34} ein Gegenpolpaar und die Mittellinie ζ wird demnach durch die Mitten von zweien der drei Diagonalen $P^{13}P^{24}$, $P^{23}P^{14}$, $\Pi^{12}\Pi^{34}$ des hierdurch erhaltenen vollständigen Vierseits bestimmt. Aus dieser Darlegung folgt, weil jedes Gegenpolpaar auch ein Brennpunktpaar eines dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnittes ist, die bekannte Beziehung, dass die Mittelpunkte aller einem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitte auf einer Geraden liegen, die auch die drei Mitten der drei Diagonalen dieses Vierseits enthält. Wird nun der Brennpunkt Γ der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel in der angegebenen Weise vermittelst zweier Kreise bestimmt, die zweien von den vier durch jenes Vierseit gebildeten Dreiecken umschrieben sind, so können wir die Construction der Pollagencurve in folgender Weise construiren. Wir ziehen von dem Punkte Γ, der das Centrum der Focalcurve heisst, und auch Focalcentrum genannt werden soll, nach zweien von jenen sechs Punkten z. B. die Geraden ΓP^{13}, ΓP^{24}, welche die Mittellinie ζ beziehlich in m', m'' schneiden, beschreiben um m' mit dem Radius $m'P^{13}$ einen Kreis k', um m'' mit dem Radius $m''P^{24}$ einen

Kreis k''; dann ist durch diese beiden Kreise k', k'', welche sich in zwei reellen oder in zwei imaginären Punkten schneiden, das betreffende Kreisbüschel bestimmt, und jeder Kreis desselben liefert mit dem von Γ nach seinem Mittelpunkte gehenden Strahle zwei Schnittpunkte, die Punkte der Pollagencurve sind[1]). Es ergiebt sich hiernach das Resultat:

Die Pollagencurve ist eine Focalcurve und kann wie diese, wenn zwei Paar Gegenpole gegeben sind, vermittelst eines Kreisbüschels und eines projectiven Strahlenbüschels, dessen Strahlen durch die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise gehen, construirt werden.

252. **Die Kreispunktcurve und die Mittelpunktcurve.** Aus dem in Art. 250 erhaltenen Ergebnisse, dass bei vier in einer Ebene liegenden congruenten ebenen Systemen S_1, S_2, S_3, S_4 eine beliebige Gerade in einem derselben, z. B. in S_1, drei Punkte enthält, von denen jeder mit seinen drei homologen Punkten der anderen Systeme auf je einem Kreise liegt, folgt ferner, dass die Gesamtheit aller derartigen Punkte im System S_1 eine Curve s_1 dritter Ordnung bildet, die wir die Kreispunktcurve des Systems S_1 nennen. Dieser zu S_1 gehörenden Kreispunktcurve s_1 entsprechen in den drei anderen Systemen S_2, S_3, S_4 resp. die congruenten Curven s_2, s_3, s_4, die wir nicht weiter beachten wollen. Ferner entspricht der Kreispunktcurve s_1 in allen vier Mittelpunktsystemen ein und dieselbe Curve σ, welche der geometrische Ort aller Mittelpunkte derjenigen Kreise ist, die vier homologe Punkte enthalten, und welche wir die Mittelpunktcurve der vier congruenten Systeme nennen. Um zu beweisen, dass die Kreispunktcurve und die Mittelpunktcurve von gleicher Art sind, müssen wir bestimmte Punkte ermitteln, die auf diesen Curven liegen. Da alle in einer Ebene liegenden congruenten ebenen Systeme, also auch jene vier Systeme, die unendlich fernen imaginären Kreispunkte als selbstentsprechende Punkte besitzen, so folgt, dass die Kreispunktcurve und die Mittelpunktcurve durch die unendlich fernen imaginären Kreispunkte gehen.

Wenn in Fig. **632** die sechs Pole P^{12}, P^{23}, P^{13}, P^{14}, P^{24}, P^{34} von vier congruenten Systemen bekannt sind, dann erhalten wir zu dem Pol P^{12} die entsprechenden Punkte P_3^{12}, P_4^{12}, indem wir von

[1]) Diese von Küpper stammende einfache Construction haben Schröter und Durège in anderer Weise abgeleitet. *Mathematische Annalen.* 1872. B. 5. S. 58 und 89.

P^{12} auf die sich in Π^{12} schneidenden Geraden $P^{13}P^{23}$, $P^{14}P^{24}$ die um ihre eigene Länge verlängerten Senkrechten fällen. Demnach ist der Schnittpunkt Π^{12} dieser beiden Geraden der Mittelpunkt des durch die vier homologen Punkte P^{12}, P^{12}, P_3^{12}, P_4^{12} der vier Systeme S_1, S_2, S_3, S_4 gehenden Kreises. In gleicher Weise ergiebt sich, dass der Schnittpunkt Π^{34} der Geraden $P^{13}P^{14}$, $P^{23}P^{24}$ der Mittelpunkt des Kreises ist, der die vier homologen Punkte P_1^{34}, P_2^{34}, P^{34}, P^{34} trägt. Eine analoge Beziehung besteht bei jedem Schnittpunkte von je zwei anderen Verbindungsgeraden der betreffenden Pole, und hieraus folgt der Satz:

Die Kreispunktcurve s_1 im System S_1 geht durch die sechs Punkte P^{12}, P^{13}, P^{14}, P_1^{23}, P_1^{24}, P_1^{34}, und die Mittelpunktcurve σ geht durch die entsprechenden sechs Schnittpunkte Π^{12}, Π^{13}, Π^{14}, Π^{23}, Π^{24}, Π^{34} der Geradenpaare

$$\begin{array}{cccccc} P^{13}P^{23} & P^{12}P^{23} & P^{12}P^{24} & P^{12}P^{13} & P^{12}P^{14} & P^{13}P^{14} \\ P^{14}P^{24}, & P^{14}P^{34}, & P^{13}P^{34}, & P^{24}P^{34}, & P^{23}P^{34}, & P^{23}P^{24}. \end{array}$$

Beachten wir, dass in Fig. **632**, wie S. 605 gezeigt wurde, allen Punkten der Geraden $P^{13}P_1^{23}$ in S_1 der einzige Punkt P^{12} im Mittelpunktsystem Σ^{123} entspricht, dann entspricht ebenso auch allen Punkten der Geraden $P^{14}P_1^{24}$ in S_1 der einzige Punkt P^{12} im Mittelpunktsystem Σ^{124}; folglich entspricht dem Schnittpunkte p_1^{12} dieser beiden Geraden $P^{13}P_1^{23}$, $P^{14}P_1^{24}$ der Punkt P^{12} in Σ^{123} sowie in Σ^{124}, und es liegt also der Punkt p_1^{12} des Systems S_1 mit seinen drei homologen Punkten auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt P^{12} ist. In analoger Weise ergiebt sich dieselbe Beziehung für die übrigen Schnittpunkte je zweier derartiger Geraden, und hiernach erhalten wir den Satz:

Die Mittelpunktcurve σ geht durch die sechs Pole P^{12}, P^{13}, P^{14}, P^{23}, P^{24}, P^{34}, und die Kreispunktcurve s_1 im System S_1 geht durch die entsprechenden sechs Schnittpunkte p_1^{12}, p_1^{13}, p_1^{14}, p_1^{23}, p_1^{24}, p_1^{34} der Geradenpaare

$$\begin{array}{cccccc} P^{13}P_1^{23} & P^{12}P_1^{23} & P^{12}P_1^{12} & P^{12}P^{13} & P^{12}P^{14} & P^{13}P^{14} \\ P^{14}P_1^{24}, & P^{14}P_1^{34}, & P^{13}P_1^{34}, & P_1^{24}P_1^{34}, & P_1^{23}P_1^{34}, & P_1^{23}P_1^{24}. \end{array}$$

Einer Curve dritter Ordnung im System S_1 entspricht in dem Mittelpunktsystem Σ^{123} eine Curve sechster Ordnung; da aber die Kreispunktcurve s_1, die von dritter Ordnung ist, im System S_1 durch die drei Hauptpunkte P^{12}, P^{13}, P_1^{23} dieses Systems geht, denen beziehlich die drei Hauptgeraden $P^{13}P^{23}$, $P^{12}P^{23}$, $P^{12}P^{13}$ in dem Mittelpunktsystem Σ^{123} entsprechen, so folgt, wenn wir diese drei Gerade abrechnen, dass die entsprechende Mittelpunktcurve σ auch eine Curve dritter Ordnung ist. Nachdem wir erkannt haben, dass die Mittelpunktcurve und die Pollagencurve beide von dritter Ordnung sind, beide die sechs Pole P^{12}, P^{13}, P^{14}, P^{23}, P^{24}, P^{34} und die sechs Punkte Π^{12}, Π^{13}, Π^{14}, Π^{23}, Π^{24}, Π^{34} enthalten, folgt, dass die Mittelpunktcurve mit der Pollagencurve identisch ist. Da ferner die Mittelpunktcurve und die Kreispunktcurve gleichartig und in gleicher Weise bestimmt sind, so erhalten wir das Resultat:

Die Mittelpunktcurve und die Kreispunktcurve sind Focalcurven, und können als solche vermittelst eines Kreisbüschels und eines projectiven Strahlenbüschels, dessen Strahlen durch die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise gehen, construirt werden.

253. **Construction der Mittelpunktcurve und der Kreispunktcurve.** Behufs der Construction der Mittelpunktcurve σ seien in Fig. **633** die beiden Gegenpolpaare $P^{13}P^{24}$, $P^{23}P^{14}$ gegeben, welche als zwei Paar Gegenecken das fein ausgezogene Vierseit bestimmen. Wir zeichnen das Focalcentrum Γ als den Schnittpunkt zweier Kreise, die zwei von den durch das Vierseit gebildeten vier Dreiecken umschrieben sind, ziehen durch die Mitten der drei Diagonalen $P^{13}P^{24}$, $P^{23}P^{14}$, $\Pi^{12}\Pi^{34}$ des Vierseits die Mittellinie ζ, verbinden zwei der sechs Ecken des Vierseits, etwa P^{23}, P^{24}, mit dem Focalcentrum Γ und beschreiben um die Schnittpunkte m', m'', welche die erhaltenen Verbindungsgeraden mit der Mittellinie ζ bilden, die beziehlich durch P^{23}, P^{24} gehenden Kreise k', k'', die jene Geraden auch anderseits in Punkten der Curve σ treffen. Diese beiden Kreise, welche sich nicht in reellen Punkten schneiden, bestimmen ein Kreisbüschel mit imaginären Grundpunkten. Um die Kreise dieses Kreisbüschels zu beschreiben, construiren wir den Fusspunkt o der auf ζ senkrechten Chordale k, indem wir durch die Schnittpunkte, welche k' mit ζ bildet, einen Kreis $\mathfrak{k}$ ziehen, der den Kreis k'' in zwei Punkten G, H schneidet; dann trifft die Secante GH die Mittellinie ζ im Punkte o. Hierauf bestimmen wir den Berührungspunkt t einer vom Punkte o an den Kreis k'' gelegten Tangente und beschreiben um o mit ot den Orthogonalkreis $\varkappa$, der alle Kreise des Kreisbüschels rechtwinkelig schneidet und die Mittellinie ζ in den beiden Grenzpunkten ν', ν'' des Kreisbüschels trifft. Eine andere einfache Construction der Chordalen ergiebt sich, wenn wir durch das Focalcentrum Γ Gerade nach zwei Gegenecken jenes Vierseits, z. B. ΓP^{13}, ΓP^{24} ziehen, und ferner zur Mittellinie ζ die Parallelen $P^{24}\varepsilon$,

$P^{13}\eta$ ziehen, welche diese Geraden resp. in den Curvenpunkten ε, η treffen. Die Geraden $\varepsilon\eta$, $P^{13}P^{24}$ und die durch Γ zu ζ parallele Gerade $\Gamma\tau$ bilden ein Dreieck xyz, dessen Höhenfusspunkte auf der Curve σ liegen; dann ist die durch die Ecke x auf $\Gamma\tau$ oder ζ senkrecht gezogene Gerade k die Chordale des Kreisbüschels, weil der Fusspunkt τ ein Curvenpunkt ist und weil dem zu ζ parallelen Strahle $\Gamma\tau$ im Kreisbüschel die Chordale entspricht. Damit wir nun, wie in Art. 40 angegeben wurde, andere Punkte der Mittelpunktcurve oder Focalcurve erhalten, ziehen wir durch Γ eine beliebige Gerade, legen von ihrem mit ζ gebildeten Schnittpunkte an $\varkappa$ eine Tangente und beschreiben um diesen Schnittpunkt mit der Tangentenlänge einen Kreis, der auf der Geraden zwei Punkte der Mittelpunktcurve liefert. Diese Curve ist, weil in Fig. **633** die Grundpunkte des Kreisbüschels imaginär sind, eine eintheilige Focalcurve und geht durch die beiden Grenzpunkte ν', ν'' des Kreisbüschels. Die Geraden $\Gamma\nu'$, $\Gamma\nu''$ berühren demnach in diesen Punkten ν', ν'' die Focalcurve, die den Kreis $\varkappa$ ausserdem in den Berührungspunkten der von Γ an $\varkappa$ gelegten Tangenten schneidet. Je nachdem die beiden Kreise k', k'' sich schneiden, nicht schneiden oder berühren, ist die Mittelpunktcurve σ eine zweitheilige, eine eintheilige oder eine doppelpunktige Focalcurve.

Wenn insbesondere, wie in Fig. **634**, die Gegenpole P^{13}, P^{24} beiderseits in gleichen Abständen von der durch die Gegenpole P^{23}, P^{14} gehenden Geraden liegen, dann fällt die Mittellinie ζ mit dieser Geraden zusammen; es sind dem zufolge die Gegenpole P^{23}, P^{14} die Grenzpunkte des Kreisbüschels, und der über $P^{23}P^{14}$ als Durchmesser beschriebene Kreis ist der Orthogonalkreis $\varkappa$. In diesem bei den Geradführungen vorkommenden Falle können wir das Focalcentrum Γ auch noch in anderer Weise als bisher bestimmen. Wir errichten in der Mitte i auf $P^{14}P^{24}$ die Senkrechte in, welche die Chordale ok in n trifft, und ziehen von P^{24} aus auf nP^{24} eine Senkrechte, auf der, wie man leicht erkennt, das Focalcentrum Γ liegen muss. In gleicher Weise errichten wir in der Mitte i' auf $P^{13}P^{14}$ die Senkrechte $i'n'$, welche die Chordale ok in n' schneidet, und ziehen von P^{13} aus auf $n'P^{13}$ eine Senkrechte, die ebenfalls das Focalcentrum Γ enthält; demnach ist Γ der Schnittpunkt dieser Senkrechten $P^{24}\Gamma$, $P^{13}\Gamma$.

Liegen in Fig. **635** die Gegenpole P^{13}, P^{24} symmetrisch zu der durch die Gegenpole P^{23}, P^{14} gehenden Geraden, dann ist diese Gerade die Mittellinie ζ, und das Focalcentrum Γ liegt auf derselben. Dem zufolge zerfällt die Focalcurve in die Gerade ζ und den durch die Punkte P^{13}, P^{24}, Π^{12}, Π^{34} gehenden Kreis χ, dessen Mittelpunkt Γ ist; und die beiden Gegenpole P^{23}, P^{14} sind harmonisch zu den Schnittpunkten, welche der Kreis χ mit der Geraden ζ bildet.

Wenn in Fig. **636** die Gegenpolpaare $P^{13}P^{24}$, $P^{23}P^{14}$ in Parallelen und beiderseits in gleichen Abständen von einer auf diesen Parallelen senkrecht stehenden Geraden liegen, so ist diese Gerade, welche die Punkte Π^{12}, Π^{34} und das Focalcentrum Γ enthält, die Mittellinie ζ. In diesem besonderen Falle besteht die Focalcurve aus der Geraden ζ und dem durch die Pole P^{13}, P^{14}, P^{23}, P^{14} gehenden Kreise χ, dessen Mittelpunkt Γ ist; und es sind die Punkte Π^{12}, Π^{34} harmonisch zu den Schnittpunkten, die der Kreis χ mit der Geraden ζ bildet.

Befinden sich in Fig. **637** die beiden Gegenpolpaare $P^{13}P^{24}$, $P^{23}P^{14}$ auf einer Geraden ζ, dann beschreiben wir über $P^{13}P^{24}$ als Durchmesser einen Kreis k, ferner einen beliebigen durch P^{23}, P^{14} gehenden Kreis $\mathfrak{k}$, der k in zwei Punkten G, H schneidet, ziehen die gemeinschaftliche Secante GH, welche ζ im Punkte Γ trifft, und beschreiben um Γ mit der Länge einer von Γ an den Kreis k gelegten Tangente ΓC als Radius den Kreis χ. Nach dieser Construction sind die Schnittpunkte, in denen der Kreis χ die Gerade trifft, harmonisch zu den Punktpaaren $P^{13}P^{24}$, $P^{23}P^{14}$; und es bilden somit die von einem Punkte des Kreises χ nach diesen Schnittpunkten und beiden Gegenpolpaaren gehenden Geraden eine Strahleninvolution. Dem zufolge erscheinen die Strecken $P^{13}P^{23}$, $P^{14}P^{24}$ oder $P^{13}P^{14}$, $P^{23}P^{24}$ von den Punkten des Kreises χ aus unter je zwei gleichen Winkeln; und die Focalcurve besteht in diesem besonderen Falle aus der Geraden ζ und dem Kreise χ. Wenn, wie in Fig. **637ª**, die Strecken $P^{13}P^{23}$, $P^{14}P^{24}$ gleich sind, dann geht der Kreis χ in eine Gerade über, die in der gemeinsamen Mitte der Verbindungsstrecken der Gegenpolpaare $P^{13}P^{24}$, $P^{23}P^{14}$ auf ζ senkrecht steht, und die Focalcurve besteht in diesem speciellen Falle aus den senkrechten Geraden ζ, χ und der unendlich fernen Geraden.

In Fig. **638** ist noch der Fall dargestellt, in welchem die Gegenpolpaare $P^{13}P^{24}$, $P^{23}P^{14}$ die gegenüber liegenden Ecken eines Parallelogramms sind. Der unendlich ferne Schnittpunkt Γ_∞ der beiden Parallelen $P^{13}P^{23}$, $P^{14}P^{24}$ kann dann als das Focalcentrum betrachtet werden; und die beiden über $P^{13}P^{23}$, $P^{14}P^{24}$ als Durchmesser beschriebenen Kreise k', k'', welche sich in den Punkten Ψ, Ξ schneiden, bestimmen ein Kreisbüschel mit den Grundpunkten Ψ, Ξ. Die Focalcurve ist dem zufolge das Erzeugniss dieses Kreisbüschels und des projectiven Parallelstrahlenbüschels, dessen Strahlen durch die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise zu $P^{13}P^{23}$ resp. $P^{14}P^{24}$ parallel gehen. Der sich ablösende Bestandtheil der so erzeugten Focalcurve fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen und die Focalcurve σ ist demnach, wie sich leicht nachweisen lässt, eine gleichseitige Hyperbel. Denn denken wir uns von einem der Grundpunkte Ψ, Ξ nach den beiden Schnittpunkten, welche ein Kreis des Kreisbüschels mit dem entsprechenden Strahle des Parallelstrahlenbüschels bildet, Gerade gezogen, so stehen diese senkrecht auf einander; und wenn der Kreis unendlich gross wird, der entsprechende Strahl also ins Unendliche rückt, dann gehen die beiden senkrechten Geraden von dem Grundpunkte nach den beiden unendlich fernen Punkten der Focalcurve, und demnach sind die zu diesen beiden Geraden parallelen Asymptoten senkrecht. Der Schnittpunkt o der Diagonalen des Parallelogramms ist der Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel, und die Hauptaxe derselben liegt in der Geraden, welche den von der Chordale $o\Xi$ mit der zu $P^{13}P^{23}$ parallelen Geraden $o\Gamma_\infty$ gebildeten Winkel $\Gamma_\infty o \Xi$ halbirt. Der um o beschriebene durch Ψ, Ξ gehende Kreis k''' schneidet demnach die Gerade $o\Gamma_\infty$ in zwei Punkten der Hyperbel. Ist jenes Parallelogramm insbesondere ein Rhombus, dann degenerirt die gleichseitige Hyperbel zu zwei rechtwinkeligen Geraden, die mit den Diagonalen des Rhombus zusammenfallen.

Ebenso wie die Mittelpunktcurve können wir in jedem der Systeme S_1, S_2, S_3, S_4 die ihr gleichartige entsprechende Kreispunktcurve construiren. Die zum System S_1 gehörende Kreispunktcurve geht durch die Punkte P^{12}, P^{13}, P^{14}, P_1^{23}, P_1^{24}, P_1^{34} und ist durch zwei Paar von diesen Punkten, deren zweizifferige Marken keine gleichen Ziffern enthalten, bestimmt. In gleicher Weise wie bei der Mittelpunktcurve treten auch bei der Kreispunktcurve analoge specielle Fälle auf, wenn diese Punktpaare ebenso wie jene Gegenpolpaare sich in besonderen gegenseitigen Lagen befinden.

254. **Bestimmung der Kreise, welche fünf homologe Punkte von fünf conplanen congruenten ebenen Systemen enthalten.** Nachdem wir die Construction der Mittelpunktcurve und mit dieser zugleich die der Kreispunktcurve abgeleitet und für verschiedene Fälle ausgeführt haben, nehmen wir fünf in einer Ebene liegende ebene Systeme S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 an; dann gehört zu den vier Systemen S_1, S_2, S_3, S_4 eine Mittelpunktcurve σ^{1234}, welche durch

die sechs Pole P^{12}, P^{13}, P^{14}, P^{23}, P^{24}, P^{34} geht und durch zwei Paar Gegenpole bestimmt ist. Ebenso gehört zu den vier Systemen S_1, S_2, S_3, S_5 eine Mittelpunktcurve σ^{1235}, die durch die sechs Pole P^{12}, P^{13}, P^{15}, P^{23}, P^{25}, P^{35} geht und durch zwei Paar Gegenpole bestimmt ist. Diese beiden Mittelpunktcurven, die sich in den drei Polen P^{12}, P^{13}, P^{23} und den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten schneiden, treffen sich als Curven dritter Ordnung noch in vier Punkten Δ, Φ, Λ, T, welche Mittelpunkte solcher Kreise sind, auf denen je fünf homologe Punkte der fünf Systeme S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 liegen. Von diesen vier Schnittpunkten können alle reell, alle imaginär, oder zwei reell und zwei imaginär sein. Wir erhalten hiernach in allgemeiner Form ausgedrückt den für die folgenden Anwendungen sehr wichtigen Satz:

In fünf beliebig in einer Ebene liegenden congruenten ebenen Systemen giebt es vier Gruppen von je fünf homologen Punkten, die auf je einem Kreise liegen.

Da wir aus fünf Elementen fünf Combinationen zur vierten Classe bilden können, so giebt es fünf verschiedene Mittelpunktcurven, die sich in den vier Punkten Δ, Φ, Λ, T schneiden.

Im System S_1 entspricht den vier Systemen S_1, S_2, S_3, S_4 eine Kreispunktcurve s_1^{1234}, welche in S_1 die Systempunkte trägt, die mit homologen Punkten von S_2, S_3, S_4 auf Kreisen liegen. Diese Kreispunktcurve geht durch die Punkte P^{12}, P^{13}, P^{14}, P_1^{23}, P_1^{24}, P_1^{34} und ist durch zwei Paar von diesen Punkten bestimmt, deren zweizifferige Marken keine gleichen Ziffern enthalten. Ebenso entspricht den vier Systemen S_1, S_2, S_3, S_5 eine Kreispunktcurve s_1^{1235}, die durch die sechs Punkte P^{12}, P^{13}, P^{15}, P_1^{23}, P_1^{25}, P_1^{35} geht und in gleicher Weise durch zwei Paar von diesen Punkten bestimmt ist, deren zweizifferige Marken keine gleichen Ziffern enthalten. Beide Kreispunktcurven haben die drei Punkte P^{12}, P^{13}, P_1^{23} und die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte gemeinsam und schneiden sich daher als Curven dritter Ordnung noch in vier Punkten D_1, F_1, L_1, T_1 des Systems S_1, von denen jeder mit seinen vier homologen Punkten der Systeme S_2, S_3, S_4, S_5 auf einem Kreise liegt.

Wenn wir also zwei Kreispunktcurven im System S_1 construiren, dann erhalten wir die vier Schnittpunkte D_1, F_1, L_1, T_1, denen als zugehörige Kreismittelpunkte jene vier Schnittpunkte Δ, Φ, Λ, T der Mittelpunktcurven entsprechen. Sind die Punkte D_1, F_1, L_1, T_1 im System S_1 gefunden, so erhalten wir in bekannter

Weise die zugehörigen Kreismittelpunkte Δ, Φ, Λ, T; sind dagegen die Punkte Δ_1, Φ, Λ, T zuerst bestimmt worden, dann betrachten wir diese Punkte in dem Mittelpunktsystem Σ^{123} liegend und construiren zu diesen, wie auf S. 604 angegeben wurde, die entsprechenden Punkte D_1, F_1, L_1, T_1 im System S_1. Wir werden zur Bestimmung der homologe Punkte tragenden Kreise entweder zwei Mittelpunktcurven oder zwei Kreispunktcurven benutzen, je nachdem die ersten oder die letzten leichter zu construiren sind. Die abgeleiteten geometrischen Ergebnisse werden uns den Weg zur Auffindung angenäherter Geradführungen ebenen, auf dem wir zu vielen praktisch wichtigen Resultaten gelangen[1].

Construction angenähert geradführender Mechanismen.

255. **Bestimmung des geradgeführten Koppelpunktes bei einem gegebenen Kurbelgetriebe.** In Fig. **639** ist beispielsweise ein Doppelschwinggetriebe $\Phi F_1 L_1 \Lambda$ gezeichnet, dessen Steg $\Phi\Lambda$ und dessen Koppel $F_1 L_1$ ist. Wir nehmen die zwei Lagen $F_1 L_1$, $F_4 L_4$ der Koppel als die Bewegungsgrenzen für die zu bestimmende Geradführung an, und wählen zwischen diesen zwei andere Lagen $F_2 L_2$, $F_3 L_3$ der Koppel; dann wird derjenige mit der Koppel $F_1 L_1$ verbundene Punkt D_1, der in den vier angenommenen Lagen der Koppel auf einer Geraden $\mathfrak{d}$ liegt, ein Curvenstück beschreiben, von dem vier Punkte in dieser Geraden liegen. Alle anderen mit der Koppel verbundenen Punkte besitzen diese Eigenschaft bezüglich jener vier Lagen nicht. Wenn die Bewegungsgrenzen derart sind, dass eine Geradführung nicht mehr erwartet werden kann, dann ist die Lage des Punktes D_1 im Bezug auf die Koppel $F_1 L_1$ von den beiden Zwischenlagen abhängig; wenn aber die Grenzen derart sind, dass eine Geradführung zulässig wird, dann verschwindet diese Abhängigkeit fast vollständig, und die Wahl der Zwischenlagen hat demnach nur einen sehr geringen Einfluss auf die Bestimmung des geradgeführten Punktes. Am günstigsten ist es jedoch, wenn die Abstände der auf einander folgenden Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 gleich oder sehr wenig verschieden sind; denn dann

[1] Die erhaltenen geometrischen Beziehungen wurden in anderer Weise zuerst abgeleitet und auf die angenäherten Geradführungen angewendet in L. Burmester, „Geradführung durch das Kurbelgetriebe". *Civilingenieur.* 1876. B. 22. S. 597, ferner daselbst 1877. B. 23. S. 227 und 319.

wird innerhalb der Strecke $D_1 D_4$ die Möglichkeit der Abweichung der Curve δ von der Geraden $\mathfrak{d}$ am meisten beschränkt.

Durch die vier Koppellagen $F_1 L_1$, $F_2 L_2$, $F_3 L_3$, $F_4 L_4$ sind vier Lagen S_1, S_2, S_3, S_4 eines conplan bewegten ebenen Systems bestimmt; und wir können demnach, wie im Art. 250 angegeben wurde, den Koppelpunkt D_1 resp. den Punkt D_1 im System S_1 bestimmen, der mit den drei homologen Punkten D_2, D_3, D_4 in der Geraden $\mathfrak{d}$ liegt und die Geradführung vollzieht. In Fig. **639** sind in den beiden Lagen $F_1 L_1$, $F_2 L_2$ die beiden Punkte F_1, F_2 zusammengelegt und demnach coincidirt der Pol P^{12} mit denselben. Der Pol P^{13} ist als Schnitt der Halbirungsgeraden der Winkel $F_1 \Phi F_3$, $L_1 \Lambda L_3$ und der Pol P^{23} als der Schnitt der Halbirungsgeraden der Winkel $F_2 \Phi F_3$, $L_2 \Lambda L_3$ gezeichnet; und ferner ist der Höhenschnittpunkt U^{123} des Poldreiecks $P^{12} P^{13} P^{23}$ construirt. In analoger Weise sind die Pole P^{14}, P^{24} und der Höhenschnittpunkt U^{124} des Poldreiecks $P^{12} P^{14} P^{24}$ gezeichnet. Die beiden beziehlich durch die Punkte U^{123}, P^{12}, P^{13} und U^{124}, P^{12}, P^{14} gezogenen, sich in P^{12} schneidenden Kreise k_1^{123}, k_1^{124}, deren Mittelpunkte mit M_1^{123}, M_1^{124} bezeichnet sind, bestimmen durch ihren zweiten Schnittpunkt den Koppelpunkt D_1, und dadurch, dass dieser Punkt auf der Verbindungsgeraden $\mathfrak{d}$ der Höhenschnittpunkte U^{123}, U^{124} liegt, erhalten wir eine Controle für die Richtigkeit der Zeichnung. Wenn die beiden Kreise sich nicht unter günstigen Winkeln schneiden und den Punkt D_1 als Schnitt nicht genau bestimmen, dann erhalten wir diesen Punkt D_1, indem wir von P^{12} auf die Verbindungsgerade $M_1^{123} M_1^{124}$ der Mittelpunkte eine Senkrechte fällen und dieselbe um ihre eigene Länge verlängern.

Sind etwa die Höhenschnittpunkte ungünstig gelegen und bei der Construction nicht verwendbar, dann construiren wir die zu dem System S_1 gehörenden Punkte P_1^{23}, P_1^{24}, die den Polen P^{23}, P^{24} entsprechen, indem wir von P^{23} auf $P^{12} P^{13}$, von P^{24} auf $P^{12} P^{14}$ beziehlich die um ihre eigene Länge verlängerten Senkrechten $P^{23} P_1^{23}$, $P^{24} P_1^{24}$ fällen. Jene beiden Kreise k_1^{123}, k_1^{124}, die den Punkt D_1 liefern, sind dann auch resp. durch die Punkte P^{12}, P^{13}, P_1^{23} und P^{12}, P^{14}, P_1^{24} bestimmt. Denken wir uns ferner controlweise noch den Pol P^{34} und den Punkt P_1^{34} durch die auf $P^{13} P^{14}$ gefällte, um ihre eigene Länge verlängerte Senkrechte construirt, und den durch die Punkte P^{13}, P^{14}, P_1^{34} bestimmten Kreis beschrieben, so geht auch dieser durch den Punkt D_1. Auf der vollständig gezeichneten von dem Koppelpunkte D_1 beschriebenen Bahncurve δ sind die dem Punkte D_1 entsprechenden und mit demselben auf der Geraden $\mathfrak{d}$ liegenden Punkte D_2, D_3, D_4 markirt. Die Bahncurve δ schmiegt sich bei dem betrachteten Beispiele noch über die angenommenen Grenzlagen D_1, D_4 hinaus so innig an die Gerade $\mathfrak{d}$, dass die Bewegung des Punktes D_1 als eine ausserordentlich genaue Geradführung bezeichnet werden kann. Wenn wir für verschiedene Lagen des geradgeführten Punktes D_1 innerhalb des angenähert geraden Curvenstückes die Normalen an der Curve δ in bekannter Weise construiren, dann zeigt sich, dass diese Normalen sehr angenähert senkrecht auf der Geraden $\mathfrak{d}$ stehen, und hierdurch wird die Genauigkeit dieser Geradführung bestätigt. Durch die Construction der Normalen in den Punkten D_1, D_2, D_3, D_4 der Curve δ erkennt man, dass die graphisch nicht angebbare Ausbiegung zwischen $D_1 D_2$ nach links, zwischen $D_2 D_3$ nach rechts und zwischen $D_3 D_4$ wieder nach links von der Geraden $\mathfrak{d}$ erfolgt. Demnach wird diese Gerade von der Curve ausserhalb der Strecke $D_1 D_4$ noch in zwei anderen Punkten geschnitten, von denen der eine in der Nähe von D_1, der andere in der Nähe von U^{123} liegt. Die Gerade $\mathfrak{d}$ hat also mit dem angenäherten Theil der Curve δ sechs Punkte gemeinsam; und dies ist die höchste Anzahl reeller Schnittpunkte, welche erreicht werden kann, weil die Koppelcurve nach S. 305 von der sechsten Ordnung ist. Nach der Anzahl dieser Schnittpunkte wird eine Geradführung bezeichnet, und in diesem Falle ist also die angenähert geradlinige Bewegung des Punktes D_1 eine sechspunktige angenäherte Geradführung genannt.

Nach dem Roberts'schen Satze in Art. 126 kann die Koppelcurve δ in dreifacher Weise durch Kurbelgetriebe erzeugt werden; demnach können wir dieselbe Geradführung noch durch zwei andere Kurbelgetriebe hervorbringen. Behufs der Bestimmung dieser beiden Kurbelgetriebe ist in Fig. **639**[a] das betrachtete Kurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$ in halber Grösse gezeichnet und das Dreieck $\Phi\Lambda\Omega$ construirt, welches dem Koppeldreieck FLD ähnlich ist. Durch die angefügten Parallelogramme ΦFDF_I, ΛLDL_{II} werden die Punkte F_I, L_{II} bestimmt, welche die Verbindungsstrecken $F_I D$, $L_{II} D$ liefern; und an diesen Strecken sind die mit FLD ähnlichen Dreiecke $F_I D O_I$, $D L_{II} O_{II}$ gezeichnet. Hiernach ergiebt sich das Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ mit dem Koppeldreieck $F_I O_I D$ und das Kurbelgetriebe $\Lambda L_{II} O_{II} \Omega$ mit dem Koppeldreieck $L_{II} O_{II} D$. Durch diese beiden Kurbelgetriebe wird vom Punkte D dieselbe Bahncurve δ und demnach dieselbe Geradführung erzeugt, welche das erste Kurbelgetriebe hervorbringt. Durch die Vereinigung der drei Kurbelgetriebe wird in Fig. **639a** ein zehngliederiger übergeschlossener Mechanismus gebildet, bei welchem die starren Dreiecke FLD, $F_I D O_I$, $DL_{II} O_{II}$ und die veränderlichen Dreiecke $F_I L_{II} \Omega$, $F\Lambda O_{II}$, $\Phi L O_I$ dem Dreiecke $\Phi\Lambda\Omega$ ähnlich sind.

Bei dem ersten Kurbelgetriebe $\Phi F L \Lambda$ kann, wenn der Punkt D die ganze Strecke der Geradführung durchschreiten soll, nur der Arm ΛL als treibende Schwinge verwendet werden. Denn vom Arme ΦF aus ist die Bewegung nicht eindeutig übertragbar, weil bei derselben die Punkte Λ, L, F in eine Gerade, also in eine Todtlage gelangen. Bei dem zweiten Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ kann aus gleichem Grunde nur der Arm ΩO_I als Schwinge dienen. Bei dem dritten Kurbelgetriebe $\Lambda L_{II} O_{II} \Omega$ treten zwei Todtlagen ein, wenn der Punkt D die ganze Geradführung durchläuft; demnach kann hier keiner der beiden Arme als treibende Schwinge genommen werden. Ist es aber möglich, dass die Todtlagen vermittelst Beharrungsschlusses überschritten werden, dann können wir in allen drei Fällen jeden der Arme als treibende Schwinge verwenden. Um also einen Einblick in den Bewegungsvorgang zu erlangen, muss stets eine derartige Musterung dieser Kurbelgetriebe stattfinden.

256. **Construction eines Kurbelgetriebes mit einem auf der Koppelstange liegenden geradgeführten Punkte.** Werden vier homologe Strecken D_1F_1, D_2F_2, D_3F_3, D_4F_4, die vier congruente Punktreihen bestimmen, so angenommen, dass die vier entsprechenden Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 auf einer Geraden $\mathfrak{d}$ und die vier entsprechenden Punkte F_1, F_2, F_3, F_4 auf einem Kreise φ liegen, dessen Mittelpunkt Φ ist; dann giebt es nach dem zweiten Satze S. 610 ausser dem Kreise φ und der Geraden $\mathfrak{d}$, die einen unendlich grossen Kreis mit unendlich fernem Mittelpunkte Δ_∞ vertritt, stets noch einen Kreis λ, der durch vier entsprechende Punkte L_1, L_2, L_3, L_4 dieser congruenten Punktreihen geht. Der Mittelpunkt Λ dieses Kreises ergiebt sich als der vierte Schnittpunkt je zweier der vier Kegelschnitte ε^{123}, ε^{124}, ε^{134}, ε^{234}, die resp. durch fünf Punkte $P^{12}P^{13}P^{23}\Phi\Delta_\infty$, $P^{12}P^{14}P^{24}\Phi\Delta_\infty$, $P^{13}P^{14}P^{34}\Phi\Delta_\infty$, $P^{23}P^{24}P^{34}\Phi\Delta_\infty$ bestimmt sind; und dieser vierte Schnittpunkt kann, weil drei Schnittpunkte je zweier dieser Kegelschnitte bekannt sind, nach den Lehren der projectiven Geometrie vermittelst gerader Linien construirt werden. Diese Construction, welche jedoch sehr umständlich ist, vereinfacht sich und wird leicht ausführbar, wenn einer der in Betracht kommenden beiden Kegelschnitte aus zwei Geraden besteht. Für diesen Fall, der bei der Bestimmung

einer Geradführung oft eintritt, wollen wir die Construction jenes Mittelpunktes Λ ausführen.

Um in Fig. **640** das Kurbelgetriebe $\Phi F_1 L_1 \Lambda$ zu construiren, bei welchem ein auf der Koppelstange $F_1 L_1$ liegender Punkt D_1 eine angenäherte Geradführung vollzieht, nehmen wir die Gerade $\mathfrak{d}$ sowie den Kreis φ mit dem Mittelpunkte Φ an und wählen auf $\mathfrak{d}$ für die Geradführung die Grenzlagen D_1, D_4. Hierauf theilen wir die Strecke $D_1 D_4$ in drei gleiche Theile, betrachten die Theilpunkte D_2, D_3 als zwei Zwischenlagen des geradgeführten Punktes, und legen die beiden homologen Strecken $D_1 F_1$, $D_2 F_2$ so, dass die beiden entsprechenden Punkte F_1, F_2 und mit diesen also auch der Pol P^{12} auf dem Kreise φ vereint liegen. Dann sind auch die beiden anderen homologen Strecken $D_3 F_3$, $D_4 F_4$ bestimmt, deren entsprechende Punkte F_3, F_4 sich auf dem Kreise φ befinden. Der Pol P^{13} ergiebt sich als der Schnittpunkt der Halbirungsgeraden des Winkels $F_1 \Phi F_3$ und der in der Mitte D_2 von $D_1 D_3$ auf $\mathfrak{d}$ errichteten Senkrechten; und in gleicher Weise werden die anderen Pole bestimmt. Dem zufolge liegen die beiden Pole P^{13}, P^{23} auf einer durch Φ gehenden Geraden, und der durch die Punkte P^{12}, P^{13}, P^{23}, Φ, Δ_∞ bestimmte Kegelschnitt ε^{123} zerfällt also in die auf $\mathfrak{d}$ senkrechte Gerade $P^{12}\Delta_\infty$ und die Gerade ΦP^{13}. Diese letzte Gerade ΦP^{13} trägt alle Mittelpunkte der durch P^{12}, F_3 oder F_1, F_2, F_3 gehenden Kreise und kommt hier nicht weiter in Betracht. Ebenso zerfällt auch der durch die Punkte P^{12}, P^{14}, P^{24}, Φ, Δ_∞ bestimmte Kegelschnitt ε^{124} in die Geraden $P^{12}\Delta_\infty$, ΦP^{14}. Durch die Punkte P^{13}, P^{14}, P^{34}, Φ, Δ_∞ ist der Kegelschnitt ε^{134} gegeben, der mit jenem ersten geradlinigen Kegelschnitt die drei Punkte P^{13}, Φ, Δ_∞ gemein hat. Wir können dann den vierten Schnittpunkt Λ dieser beiden Kegelschnitte, d. h. den zweiten Schnittpunkt, welchen die Gerade $P^{12}\Delta_\infty$ mit dem Kegelschnitt ε^{134} bildet, nach dem Pascal-schen Satze vermittelst gerader Linien construiren, indem wir das Sechseck $P^{13}P^{14}P^{34}\Phi\Lambda\Delta_\infty$ betrachten, welches dem Kegelschnitt ε^{134} eingeschrieben ist. In diesem Sechseck wird durch die Gegenseiten $P^{14}P^{34}$, $\Lambda\Delta_\infty$ der Schnittpunkt g, durch die Gegenseiten $P^{34}\Phi$, $\Delta_\infty P^{13}$ der Schnittpunkt h und damit die Pascal'sche Gerade gh bestimmt, die $P^{13}P^{14}$ im Punkte i schneidet. Demnach liefert die Gerade $i\Phi$ auf $P^{12}\Delta_\infty$ den Mittelpunkt Λ des Kreises λ, und dieser Punkt kann, indem wir die Reihenfolge der vier Ecken P^{13}, P^{14}, P^{34}, Φ jenes Sechsecks verändern, durch zwölf verschiedene Constructionen bestimmt werden; und ferner ergeben sich ebenso viele verschiedene Constructionen, wenn wir den Kegelschnitt ε^{234} verwenden. Ist die Constellation der fünf gegebenen Punkte auf dem Kegelschnitt ε^{134} für die Construction des Punktes Λ ungünstig, so können wir auch leicht noch andere Punkte dieses Kegelschnitts bestimmen, indem wir auf den Geraden D_1F_1, D_3F_3, D_4F_4 drei homologe Punkte annehmen und den Mittelpunkt des durch dieselben gehenden Kreises construiren; dann ist dieser Mittelpunkt ein neuer Punkt dieses Kegelschnitts.

Um nun den Kreis λ zu zeichnen, bestimmen wir zum Mittelpunkte Λ den entsprechenden Punkt L_1 auf D_1F_1, indem wir gemäss den Darlegungen auf S. 604 den Winkel $\Lambda P^{13}L_1$ gleich dem zum Winkel $\Phi P^{13}F_1$ gehörenden Nebenwinkel machen; dann schneidet der Schenkel $P^{13}L_1$ die Gerade D_1F_1 im Punkte L_1, der dem Punkte Λ entspricht, und ΛL_1 ist der Radius des Kreises λ, der durch die vier homologen Punkte L_1, L_2, L_3, L_4 geht. Eine andere Construction dieses Radius ergiebt sich, wenn wir beachten, dass die Mitten der Verbindungsstrecken entsprechender Punkte zweier congruenter Punktreihen, wie z. B. $D_2F_2L_2\ldots$, $D_3F_3L_3\ldots$, auf einer Geraden q liegen. Ziehen wir nun diese Gerade q durch die Mitten von D_2D_3, F_2F_3, hierauf die Gerade $P^{23}\Lambda$, und ferner durch den Schnittpunkt l dieser beiden Geraden auf $P^{23}\Lambda$ eine Senkrechte, so schneidet diese die Geraden D_2F_2, D_3F_3 resp. in den homologen Punkten L_2, L_3, durch welche der Kreis λ geht. Wir haben hierdurch das Kurbelgetriebe $\Phi F_1L_1\Lambda$ erhalten, bei welchem der auf der Koppelstange F_1L_1 liegende Punkt D_1 eine Bahncurve δ beschreibt, von der sich das Curvenstück D_1D_4 sehr nahe an die Gerade $\mathfrak{d}$ anschmiegt. Diese Gerade $\mathfrak{d}$ schneidet die Curve δ, welche von der Geraden $\Phi\Lambda$ symmetrisch getheilt wird, in den Punkten D_1, D_2, D_3, D_4 und ferner auf dem weiter abgebogenen Theile in einem Punkte D_x. Es muss demnach, weil die Curve von der sechsten Ordnung ist, noch ein sechster Schnittpunkt existiren, und dieser liegt zwischen D_1, D_2; denn, wenn wir an den Punkten D_1, D_2 die Normalen der Curve construiren, zeigt sich, dass von D_1 nach D_2 erst eine Ausbiegung nach links, dann nach rechts und beim Durchgange durch D_2 wieder nach links erfolgt. Wir erhalten daher in diesem Falle eine fünfpunktige angenäherte Geradführung.

Da nach dem in Art. 126 abgeleiteten Roberts'schen Satze die Koppelcurve δ in dreifacher Weise durch Kurbelgetriebe erzeugt werden kann, so erhalten wir dieselbe Geradführung noch durch zwei andere Kurbelgetriebe, bei denen der geradgeführte

Punkt auf der zugehörigen Koppelstange liegt. Um diese beiden Kurbelgetriebe zu zeichnen, ist in Fig. 640ᵃ das gefundene Kurbelgetriebe wieder durch $\Phi F L \Lambda$ dargestellt, und auf $\Lambda\Phi$ ist der Punkt Ω so bestimmt, dass $\Lambda\Phi\Omega$ ähnlich LFD ist; ferner sind die Parallelogramme $\Phi F D F_I$, $\Lambda L D L_{II}$ construirt und durch Ω zu den verlängerten Geraden DF_I, $L_{II}D$ resp. die Parallelen ΩO_{II}, ΩO_I gezogen, durch welche das Parallelogramm $\Omega O_I D O_{II}$ entstanden ist. Hierdurch erhalten wir das Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ mit dem auf der verlängerten Koppelstange $O_I F_I$ liegenden geradgeführten Punkte D und das Kurbelgetriebe $\Lambda L_{II} O_{II} \Omega$ mit dem auf der Koppelstange $L_{II} O_{II}$ liegenden geradgeführten Punkte D. Es wird demnach durch diese beiden Kurbelgetriebe vom Punkte D dieselbe Bahncurve δ beschrieben und somit dieselbe Geradführung bewirkt, welche das erste Kurbelgetriebe erzeugt. Durch die Vereinigung der drei Kurbelgetriebe wird in Fig. **640ᵃ** ein zehngliederiger übergeschlossener Mechanismus gebildet, bei welchem die starren Punktgruppen FLD, $F_I D O_I$, $D L_{II} O_{II}$ und die veränderlichen Punktgruppen $F_I L_{II} \Omega$, $F \Lambda O_{II}$, $\Phi L O_I$ der Punktgruppe $\Phi\Lambda\Omega$ ähnlich sind.

Wird in Fig. **640** die Gerade $\mathfrak{b}$ durch einen Kreis ersetzt, liegt also der Mittelpunkt Δ desselben im Endlichen, dann ist die Construction des auf ΔP^{12} befindlichen Mittelpunktes Λ dieselbe wie vorhin; und wir erhalten ein Kurbelgetriebe, bei welchem die vom Punkte D_1 beschriebene Bahncurve δ sich innerhalb des Kreisbogens $D_1 D_3$ sehr nahe an denselben anschmiegt. Da wir den Radius des Kreises $\mathfrak{b}$ beliebig gross nehmen können, so wird auf diese Weise sehr angenähert ein Bogenstück eines grossen Kreises erzeugt und damit eine angenäherte Kreisführung gewonnen.

257. **Zugbrücke mit horizontal geradgeführtem Gesamtschwerpunkte.** Durch verschiedene Einrichtungen wird es ermöglicht, dass der Aufzug einer Zugbrücke mit einer verhältnissmässig kleinen Kraft bewirkt werden kann[1]). Um dies aber durch einen sehr einfach gestalteten Mechanismus der Zugbrücke zu erreichen, verwenden wir ein in Fig. **641**, Taf. XL, dargestelltes Kurbelgetriebe $\Phi F_1 L_1 \Lambda$, bei welchem der Arm ΦF_1 die aufziehbare Brückenbahn oder Klappe bildet und der auf der Koppel FL liegende Punkt D_1 der Gesamtschwerpunkt der drei beweglichen

[1]) Fränkel, „Bewegliche Brücken“: *Handbuch der Ingenieurwissenschaft* von Schäffer und Sonne. 1882. B. II. Abth. II. S. 66.

Glieder ΦF_1, $F_1 L_1$, $L_1 \Lambda$ ist. Wird nun das Kurbelgetriebe so eingerichtet, dass bei einer Drehung der Klappe aus der horizontalen Lage ΦF_1 in die aufrechte verticale Lage ΦF_4 der Gesamtschwerpunkt, also der Koppelpunkt D_1, sich sehr angenähert auf einer horizontalen Geraden $\mathfrak{d}$ bewegt, so ist bei der Aufziehung nur diejenige Kraft erforderlich, welche die Reibung überwindet.

Behufs der Construction dieses Kurbelgetriebes nehmen wir die horizontale Gerade $\mathfrak{d}$ etwa in der Höhe gleich $\frac{1}{2}\Phi F_4$ über der festen Axe Φ an, wählen auf $\mathfrak{d}$ den Punkt D_1 in günstigem Abstande von F_1 und bestimmen auf $\mathfrak{d}$ den Punkt D_4, so dass $D_4 F_4 = D_1 F_1$ ist. Wir theilen dann die Strecke $D_1 D_4$ durch die Punkte D_2, D_3 in drei gleiche Theile und construiren auf dem von F_1 beschriebenen Viertelkreise φ die Punkte F_2, F_3, indem wir $D_2 F_2 = D_3 F_3 = D_1 F_1$ machen. Hierdurch erhalten wir die vier Koppellagen $D_1 F_1$, $D_2 F_2$, $D_3 F_3$, $D_4 F_4$, und wir müssen nun den Mittelpunkt Λ des Kreises λ bestimmen, der durch vier homologe Punkte L_1, L_2, L_3, L_4 dieser Koppellagen geht. Der Mittelpunkt Λ ergiebt sich als der Schnittpunkt zweier Kegelschnitte ε^{124}, ε^{234}, die beziehlich alle Mittelpunkte der durch je drei homologe Punkte der Geraden $D_1 F_1$, $D_2 F_2$, $D_4 F_4$ und $D_2 F_2$, $D_3 F_3$, $D_4 F_4$ gehenden Kreise enthalten. Dieser Schnittpunkt kann zwar, wie S. 626 erwähnt ist, linear construirt werden; es ist jedoch in der Ausführung ebenso leicht, zwei günstig gelegene kurze Stücke dieser Kegelschnitte zu construiren. Wenn wir auf jenen Geraden einige Gruppen von vier homologen Punkten markiren, von denen z. B. eine durch die vier homologen Punkte X_1, X_2, X_3, X_4 gebildet wird, erkennen wir bald ungefähr die Stelle, an welcher der Schnittpunkt Λ der beiden Kegelschnitte ε^{124}, ε^{234} liegt. Indem wir die Mittelpunkte X^{124}, X^{234} der beziehlich durch X_1, X_2, X_4 und X_2, X_3, X_4 gehenden Kreise construiren, liefert X^{124} einen Punkt des Kegelschnitts ε^{124} und X^{234} einen Punkt des Kegelschnitts ε^{234}. Behufs der genauen Bestimmung dieser Mittelpunkte verwenden wir die betreffenden Pole; denn ziehen wir z. B. von dem Pol P^{23} nach der Mitte der Strecke $X_2 X_3$ die Gerade $P^{23} X^{234}$, welche den Mittelpunkt X^{234} enthält, so ist diese Gerade genauer als eine durch die Mitte auf die kurze Strecke $X_2 X_3$ senkrecht gezogene Gerade. Sind nun in dieser Weise durch einige Punkte die betreffenden Stücke der Kegelschnitte ε^{124}, ε^{234} gezeichnet, die sich in dem gesuchten Mittelpunkte Λ schneiden, so ist hiermit die zweite feste Axe Λ des Kurbelgetriebes gefunden. Der Gelenkpunkt L_1 auf der Geraden $D_1 F_1$, der mit den drei homologen Punkten L_2, L_3,

L_4 auf dem um Λ beschriebenen Kreise λ liegt, ergiebt sich, indem wir den Winkel $F_1P^{12}L_1 = \Phi P^{12}\Lambda$ machen. In anderer Weise erhalten wir den Punkt L_1 und zugleich den Punkt L_2, wenn wir die Gerade q ziehen, welche durch die Mitten aller Verbindungsstrecken der entsprechenden Punkte der Geraden D_1F_1, D_2F_2 geht, und ferner durch ihren mit der Geraden $P^{12}\Lambda$ gebildeten Schnittpunkt l auf $P^{12}\Lambda$ die Senkrechte L_1L_2 ziehen. Bei dem so erhaltenen Kurbelgetriebe beschreibt der Koppelpunkt D_1 eine Curve δ, die sich innerhalb der Strecke D_1D_4 sehr nahe an die horizontale Gerade $\mathfrak{d}$ anschmiegt, und dies wird auch durch die Construction der betreffenden Curvennormalen bestätigt, weil dieselben zur Geraden $\mathfrak{d}$ sehr angenähert senkrecht sind. Die weitere Ausführung der Curve δ zeigt, dass die Gerade $\mathfrak{d}$ den weiter abgebogenen Curventheil noch in zwei Punkten schneidet. Demnach hat der angenäherte Curventheil nur die vier Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 mit der Geraden $\mathfrak{d}$ gemein und das Kurbelgetriebe liefert somit nur eine vierpunktige Geradführung.

Bei der in Fig. **641** schematisch dargestellten Zugbrücke muss der Arm ΛL_1 mit einem Gegengewichte versehen sein, so dass der Gesamtschwerpunkt in D_1 liegt, dann wird derselbe sehr angenähert horizontal geführt, und der Aufzug der Brücke erfordert nur eine die Reibung überwindende Kraft. Bei der Delile'schen Zugbrücke[1]) wird die horizontale Geradführung des Gesamtschwerpunktes D_1 dadurch bewirkt, dass ein in grösserem Abstande von D_1 befindlicher Punkt L_1 der Stange D_1F_1 sich im Mauerwerke auf einer entsprechenden Curve bewegt. Wenn diese Curve aber, wie oben gezeigt wurde, vermittelst eines zweckmässig gestalteten Kurbelgetriebes sehr angenähert durch ein Kreisbogenstück λ ersetzt werden kann, so ergeben sich bei dieser Zugbrücke viele praktische Vortheile.

258. **Evans'sche Geradführung.** Bei dem in Fig. **642** dargestellten Kurbelgetriebe $\Phi F_1L_1\Lambda$ sind die Koppellagen F_1L_1, F_2L_2 und F_4L_4, F_3L_3 symmetrisch zu der Halbirungsgeraden $\Phi\Delta_\infty$ des Ausschlagwinkels $F_1\Phi F_4$ des Armes ΦF_1, auf der die homologen Punkte L_1, L_4 sowie L_2, L_3 coincidiren; und die vier entsprechenden Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 des angenähert geradgeführten Punktes der Koppelstange F_1L_1 liegen in einer auf $\Phi\Delta_\infty$ senkrechten Geraden $\mathfrak{d}$. Eine in dieser Weise durch ein Kurbelgetriebe erzeugte, angenähert geradlinige Bewegung, die Evans bei der Dampf-

[1]) *Bulletin de la Société d'encouragement.* 1824. Année 23. p. 14.

maschine angewendet hat[1]), wird eine **Evans'sche Geradführung** genannt.

Um das Kurbelgetriebe $\Phi F_1 L_1 \Lambda$ so zu bestimmen, dass durch dasselbe eine möglichst angenäherte Geradführung bewirkt wird, nehmen wir auf der Geraden $\mathfrak{d}$ die Annäherungsstrecke $D_1 D_4$ an, auf welcher die Gerade $\Phi\Delta_\infty$ in der Mitte Γ senkrecht steht, zeichnen auf $\mathfrak{d}$ in gleichen Abständen von Γ die Punkte D_2, D_3, indem wir insbesondere die Strecke $D_1 D_4$ in drei gleiche Theile theilen, und wählen für die Strecke $D_1 L_1$ eine zweckmässige Länge. Hierdurch sind die symmetrisch gelegenen gleichen Strecken $D_1 L_1$, $D_2 L_2$, $D_3 L_3$, $D_4 L_4$ bestimmt, deren Endpunkte L_1, L_4 und L_2, L_3 auf der Geraden $\Gamma\Delta_\infty$ beziehlich in den Gegenpolen P^{14}, P^{23} coincidiren; und die beiden in bekannter Weise construirten Gegenpole P^{12}, P^{34} liegen symmetrisch zu $P^{14}P^{23}$ in der auf $P^{14}P^{23}$ senkrecht durch die Mitte gehenden Geraden. Die Gegenpolpaare $P^{14}P^{23}$, $P^{12}P^{34}$ bilden also einen Rhombus, und dem zufolge besteht die Mittelpunktcurve der vier congruenten Systeme, die durch jene vier homologen Strecken bestimmt sind, nach S. 621 aus den beiden senkrechten Geraden $\Gamma\Delta_\infty$, $P^{12}P^{34}$ und der unendlich fernen Geraden; und dies ist auch ohne Ableitung aus der allgemeinen Beziehung direct aus der symmetrischen Anordnung ersichtlich. Jedem auf der Geraden $P^{12}P^{34}$ gewählten Mittelpunkte Λ entspricht ein durch die vier homologen Punkte L_1, L_2, L_3, L_4 gehender Kreis φ, und jedem auf der Geraden $\Gamma\Delta_\infty$ gewählten Mittelpunkte Φ entspricht ein Kreis φ, der vier homologe Punkte F_1, F_2, F_3, F_4 der vier Geraden $D_1 L_1$, $D_2 L_2$, $D_3 L_3$, $D_4 L_4$ enthält. Um zu einem angenommenen Mittelpunkte Φ den entsprechenden Punkt F_1 auf der Geraden $D_1 L_1$ zu construiren, machen wir den Winkel $D_1 P^{12} F_1 = \Delta_\infty P^{12} \Phi$, und umgekehrt ergiebt sich auch in dieser Weise zu einem angenommenen Punkte F_1 der entsprechende Punkt Φ. Ferner erhalten wir auch zugleich die Punkte F_1, F_2, indem wir die Gerade q ziehen, welche durch die Mitten der Verbindungsstrecken aller homologen Punkte der Geraden $D_1 L_1$, $D_2 L_2$ geht und ΦP^{12} im Punkte l schneidet, und dann durch l auf ΦP^{12} die Senkrechte $F_1 F_2$ ziehen. Hierdurch ist zu dem festen Axenpunkte Φ der entsprechende Gelenkpunkt F_1 ermittelt; und wenn wir noch auf der Geraden $P^{12}P^{34}$ den anderen festen Axenpunkt Λ zweckmässig liegend annehmen, so ist das Kurbelgetriebe $\Phi F_1 L_1 \Lambda$

[1]) *Abhandlungen der Königlichen Technischen Deputation für Gewerbe.* 1826. I. Thl. S. 225.

bestimmt, bei welchem der Punkt D_1 der Koppelstange eine Curve δ beschreibt, die sich auf der Strecke $D_1 D_4$ sehr nahe an die Gerade $\mathfrak{d}$ anschmiegt. Aus der Gestalt der zur Geraden $\Phi\Lambda$ symmetrischen Curve δ und aus den Lagen ihrer Normalen $D_1\mathfrak{P}_1$, $D_4\mathfrak{P}_4$ erkennt man, dass dieselbe von der Geraden $\mathfrak{d}$ oberhalb D_1 nach rechts, unterhalb D_4 aber nach links abbiegt, und dass ihr weiter abgebogener Theil die Gerade $\mathfrak{d}$ auch in einem Punkte schneidet; demnach wird der angenäherte Theil von der Geraden $\mathfrak{d}$ ausser in den vier Punkten D_1, D_2, D_3, D_4 noch in einem fünften Punkte geschnitten, und folglich bewirkt dieses Kurbelgetriebe eine fünfpunktige Geradführung.

Durch die Wahl des festen Axenpunktes Λ auf der Geraden $P^{12}P^{34}$ wird die Lage des fünften Schnittpunktes noch näher bestimmt. Soll derselbe z. B. mit dem Punkte D_2 zusammenfallen, dann muss die Curvennormale $D_2\mathfrak{P}_2$ zur Geraden $\mathfrak{d}$ senkrecht sein. Ziehen wir also auf $\mathfrak{d}$ die Senkrechte $D_2\mathfrak{P}_2$, welche die Gerade ΦF_2 in $\mathfrak{P}_2$ trifft, und nehmen wir, wie beispielsweise in Fig. **642** geschehen ist, den festen Axenpunkt Λ im Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{P}_2 L_2$, $P^{12}P^{34}$ an, so ist $\mathfrak{P}_2$ der Pol für die Lage $F_2 L_2$. Jener fünfte Schnittpunkt fällt dann mit D_2 zusammen, weil dieser Anordnung gemäss die Gerade $\mathfrak{d}$ die Curve δ im Punkte D_2 berührt. Bei tieferer Lage des Punktes Λ weicht die rechtsseitige Curvennormale für den Punkt D_2 nach unten von jener Senkrechten ab, und jener fünfte Schnittpunkt liegt dann zwischen D_1, D_2; dagegen nähern sich die Curvennormalen $D_1\mathfrak{P}_1$, $D_4\mathfrak{P}_4$ um so mehr der senkrechten Stellung zur Geraden $\mathfrak{d}$, je länger der Arm ΛL_1 genommen wird. Bei höherer Lage des Punktes Λ, die aber für die Geradführung ungünstiger ist, würde sich der genannte fünfte Schnittpunkt zwischen D_2, D_3 befinden.

Sind die Punkte Φ, F_1 und die beiden Koppellagen $F_1 L_1$, $F_2 L_2$ im Voraus angenommen, so ist dadurch der geradgeführte Punkt D_1 auf der Koppelstange $F_1 L_1$ bestimmt. Um diesen Punkt D_1 zu construiren, ziehen wir durch den Pol P^{12} zu $\Gamma\Delta_\infty$ die Parallele $P^{12}d$ bis an die Gerade q, welche die Mitten aller Verbindungsstrecken der homologen Punkte der Geraden $F_1 L_1$, $F_2 L_2$ enthält, und ferner ziehen wir durch den Schnittpunkt d die auf $\Gamma\Delta_\infty$ senkrechte Gerade $\mathfrak{d}$, welche die beiden Geraden $F_1 L_1$, $F_2 L_2$ in den Punkten D_1, D_2 und die symmetrischen Geraden $F_3 L_3$, $F_4 L_4$ in den Punkten D_3, D_4 trifft.

Bei der obigen Construction des Kurbelgetriebes $\Phi F_1 L_1 \Lambda$ wurde der feste Axenpunkt Φ auf der Geraden $\Gamma\Delta_\infty$ beliebig angenommen und der entsprechende Punkt F_1 auf der Geraden D_1L_1 durch die gleichen Winkel $D_1P^{12}F_1$, $\Delta_\infty P^{12}\Phi$ bestimmt. Dem gemäss entspricht einer Punktreihe auf der Geraden $\Gamma\Delta_\infty$ eine projective Punktreihe auf der Geraden L_1D_1; dem Punkte Γ entspricht die Mitte von D_1L_1, und dem unendlich fernen Punkte Δ_∞ entspricht der Punkt D_1. In dem durch die Koppellage F_1L_1 bestimmten ebenen System ist also die Gerade F_1L_1 der eine Bestandtheil der Kreispunktcurve, und der andere Bestandtheil ist, wie man leicht erkennt, der über D_1L_1 als Durchmesser beschriebene Kreis s'. Jeder Punkt dieses Kreises liegt mit seinen drei homologen Punkten auf einer durch den Punkt Γ gehenden Geraden; und den Punkten der unendlich fernen Geraden σ', die mit zur Mittelpunktcurve gehört, entsprechen die Punkte dieses Kreises, welche grösstentheils auch angenäherte Geradführungen vollziehen, aber hier nicht weiter betrachtet werden sollen.

Nach dem Roberts'schen Satze in Art. 126 giebt es noch zwei andere Kurbelgetriebe, welche dieselbe Koppelcurve δ, also auch dieselbe Geradführung, wie das erhaltene, in Fig. **642**ᵃ wieder gezeichnete Kurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$ erzeugen. Behufs der Construction dieser beiden Kurbelgetriebe bilden wir die Parallelogramme ΦFDF_I, ΛLDL_{II}, ziehen die Gerade $L\Phi$, welche DF_I in O_I trifft, und zu ΛL die Parallele $O_I\Omega$, die auf $\Phi\Lambda$ den dritten festen Axenpunkt Ω bestimmt; hierauf bilden wir das Parallelogramm $\Omega O_I D O_{II}$, dann sind $\Phi F_I O_I \Omega$ und $\Omega O_{II} L_{II} \Lambda$ die beiden neuen Kurbelgetriebe, deren Koppelpunkt D dieselbe Curve δ beschreibt. Bei dem hierdurch entstandenen zehngliederigen übergeschlossenen Mechanismus liegen wie die Punkte L, Φ, O_I, so auch die Punkte Λ, F, O_{II} und Ω, F_I, L_{II} beständig in je einer Geraden; und damit ergiebt sich eine Controle für die Construction. Die beiden Kurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$, $\Phi F_I O_I \Omega$ sind in ihrer Gestaltung und auch in ihrem Bewegungsvorgange gleichartig; aber die Gesamtlänge der drei beweglichen Glieder des ersten ist kürzer als die des letzten. Gleichzeitig mit der Koppel FL des Kurbelgetriebes $\Phi FL\Lambda$ gelangt auch die Koppel $F_I O_I$ bezüglich der Geraden $\Phi\Gamma$ in zwei Paar symmetrische Lagen. Das Kurbelgetriebe $\Lambda L_{II} O_{II} \Omega$, bei welchem der geradgeführte Punkt D auf der Koppel $L_{II} O_{II}$ zwischen den beiden Gelenkpunkten L_{II}, O_{II} liegt, ist den beiden anderen Kurbelgetrieben gestaltlich nicht gleichartig und auch im Bewegungsvorgange von denselben verschieden. Die Koppel $L_{II} O_{II}$ des Kurbelgetriebes $\Lambda L_{II} O_{II} \Omega$ ist den Armen ΛL, ΩO_I der beiden anderen Kurbelgetriebe parallel, und demnach entsprechen jenen beiden symmetrischen Lagenpaaren ihrer Koppeln zwei parallele Lagenpaare der Koppel $L_{II}O_{II}$. Bei dem Kurbelgetriebe $\Lambda L_{II}O_{II}\Omega$ sind die beiden äusseren Lagen der Koppel $L_{II}O_{II}$, die den Punkten D_1, D_4 entsprechen, sowie die beiden inneren Lagen derselben, die den Punkten D_2, D_3 entsprechen, parallel, die Sehnen der entsprechenden Ausschlagbögen der Arme ΛL_{II}, ΩO_{II} sind der Geraden $\mathfrak{d}$ parallel. Die in der erkannten Weise durch das Kurbelgetriebe $\Lambda L_{II}O_{II}\Omega$ erzeugte Geradführung, die der folgende Art. 259 eingehend behandelt, wird eine Watt-sche Geradführung genannt, und demnach erhalten wir den Satz:

Die Evans'sche Geradführung und die Watt'sche Geradführung werden durch identische Bewegungen des geradgeführten Punktes erzeugt.

Diese identischen Bewegungen können auch ohne Ableitung aus dem Roberts'schen Satze leicht erkannt werden. Wir zeichnen zu diesem Zwecke in Fig. **642**^a^ das Parallelogramm $\Lambda LFL'$ und markiren auf FL' den Punkt D', welcher in der Geraden ΛD liegt. Dadurch erhalten wir ein Kurbelgetriebe $\Lambda L'F\Phi$, dessen Koppelpunkt D' eine Curve δ' beschreibt, und diese Curve δ' ist nach der Lehre vom Storchschnabel der Curve δ, die vom dem Koppelpunkte D des Kurbelgetriebes $\Phi FL\Lambda$ erzeugt wird, im Verhältnisse $LF : LD$ ähnlich. Da ferner die beiden Kurbelgetriebe $\Lambda L'F\Phi$, $\Lambda L_{II}O_{II}\Omega$ in gleichem Verhältnisse ähnlich sind, so wird auch vermittelst des Kurbelgetriebes $\Phi F_I O_I \Lambda$ durch den Koppelpunkt D die Curve δ beschrieben[1]).

Bei dem in Fig. **643** dargestellten speciellen Falle ist der Axenpunkt Λ ins Unendliche gelegt. Das Kurbelgetriebe geht dann in ein Schubkurbelgetriebe $\Phi F_1 L_1 \Lambda_\infty$ über, bei welchem die Bahncurve δ des geradgeführten Punktes nach S. 327 von vierter Ordnung ist. Die Gerade $\mathfrak{d}$ schneidet demnach die von der Geraden $\Phi\lambda$ symmetrisch getheilte Curve δ nur in den vier Punkten D_1, D_2, D_3, D_4, und wir erhalten somit eine vierpunktige symmetrisch angenäherte Geradführung. Die Curvennormalen $D_1\mathfrak{P}_1$, $D_4\mathfrak{P}_4$ nähern sich hier mehr als vorher der zu $\mathfrak{d}$ senkrechten Stellung, und dem zufolge schmiegt sich die Curve δ noch über die Punkte D_1, D_4 hinaus sehr nahe an die Gerade $\mathfrak{d}$ an.

Durch Construction des Parallelogramms $\Phi F_1 D_1 F_I$ ergiebt sich nach dem Roberts'schen Satze ein zweites Schubkurbel-

---

[1]) Vergl. Rittershaus, „Zur Frage der Gelenk-Geradführungen". *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure.* 1877. B. 21. S. 217.

getriebe $\Phi F_I O_I \Omega_\infty$, bei welchem der Punkt D_1 der Koppel $F_I O_I$ dieselbe Bahncurve δ erzeugt. Die dritte Erzeugungsweise verschwindet in diesem speciellen Falle, weil alle Gelenkpunkte des betreffenden Kurbelgetriebes sich im Unendlichen befinden.

In Fig. **644** ist auf der Geraden $\mathfrak{d}$ die Annäherungsstrecke $D_1 D_5$ durch die Punkte D_2, D_3, D_4 in fünf gleiche Theile getheilt; darauf sind die vier zur Geraden $D_3 \Delta_\infty$ symmetrischen Koppellagen $D_1 L_1$, $D_2 L_2$, $D_4 L_4$, $D_5 L_5$ gezeichnet, und der Radius ΛL_1 des durch die coincidirenden Punktpaare L_1, L_5 und L_2, L_4 gehenden Kreises λ ist zweckmässig gewählt. Ferner ist die Koppellage $D_3 L_3$ gezeichnet, die von der Geraden $D_3 \Delta_\infty$ wenig abweicht, weil der Punkt L_3 auf dem Kreise λ nahe an dieser Geraden liegt. Der Kreis φ, dessen Mittelpunkt Φ im Punkte D_3, der Mitte von $D_1 D_5$, liegt und dessen Radius $\Phi F_1 = \frac{1}{2} D_1 L_1$ ist, schneidet die fünf gleichen Strecken $D_1 L_1$, $D_2 L_2$, $D_3 L_3$, $D_4 L_4$, $D_5 L_5$ in ihren Mitten, den fünf homologen Punkten F_1, F_2, F_3, F_4, F_5. Demnach erhalten wir ein Kurbelgetriebe $\Phi F_1 L_1 \Lambda$, bei welchem die Bahncurve δ des Koppelpunktes D_1 von der Geraden $\mathfrak{d}$ in den fünf Punkten D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 geschnitten wird. Die durch diese Anordnung bewirkte fünfpunktige Geradführung ist genauer als die in Fig. **642** dargestellte, weil alle fünf Schnittpunkte sich in gleichen Abständen befinden, also günstiger vertheilt sind, und dadurch werden die Abweichungen der Curve δ von der Geraden $\mathfrak{d}$ innerhalb der Annäherungsstrecke vermindert. Trotzdem, dass der Arm ΛL_1 verhältnissmässig kurz gegen die Annäherungsstrecke $D_1 D_5$ ist, ergiebt sich doch eine sehr angenäherte Geradführung. Je länger aber dieser Arm gewählt wird, desto mehr angenähert ist diese Geradführung; denn es entsteht eine genaue Geradführung, wenn der Arm ΛL_1 unendlich lang ist und somit ein gleichschenkeliges Schubkurbelgetriebe gebildet wird. Aber die Praxis verzichtet in vielen Fällen auf diese genaue Geradführung, welche eine Richtpaarung erfordert, und bevorzugt wegen der leichteren Herstellung und der geringeren Reibung der Drehpaarungen die angenäherte Geradführung.

Gemäss dem Roberts'schen Satze sind auch in Fig. **644** die beiden anderen Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ und $\Omega O_{II} L_{II} \Lambda$, welche dieselbe Curve δ erzeugen, ebenso wie in Fig. **642**[a] gezeichnet. Von diesen ist das Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ dem ersten Kurbelgetriebe $\Phi F_1 L_1 \Lambda$ gleich. Bei dem Kurbelgetriebe $\Lambda L_{II} O_{II} \Omega$, welches die Watt'sche Geradführung liefert, sind die Arme ΛL_{II}, ΩO_{II} gleich, und der geradgeführte Punkt D_1 liegt in der Mitte der Koppel $O_{II}L_{II}$, die um so länger ist, je grösser jener Arm ΛL_1 gewählt wird. Die Geradführung durch das Kurbelgetriebe $\Lambda L_{II} O_{II} \Omega$ wird demnach um so mehr angenähert, je grösser die Koppel $L_{II} O_{II}$ im Verhältnisse zu den Armen desselben ist.

Infolge der kinematisch symmetrischen Gestalt dieses Kurbelgetriebes wird die von der Koppelmitte D_1 beschriebene Curve δ, die zur Geraden $\Lambda\Omega$ symmetrisch ist, auch von der in D_3 auf $\Lambda\Omega$ senkrechten Geraden symmetrisch getheilt. Diese viertheilig symmetrische Bahncurve δ hat demnach in D_3 einen Doppelpunkt.

Lässt man insbesondere die beiden symmetrischen Koppellagen D_2L_2, D_4L_4 in der Geraden $\Phi\Delta_\infty$ zusammenfallen, dann coincidirt auch die Koppellage D_3L_3 mit denselben, und die drei Punkte D_2, D_3, D_4 vereinen sich zu einem Wendepunkte der Curve δ, an dem die Gerade $\mathfrak{d}$ die Wendetangente ist. Bei diesem besonderen Falle, welcher der altherkömmlichen Bestimmung dieser Geradführung entspricht, wird zwar erreicht, dass die Bewegungsrichtung des geradgeführten Punktes in der Lage D_3 genau mit der Geraden $\mathfrak{d}$ zusammenfällt; dagegen wird aber der Curve δ auf den Strecken D_1D_3, D_3D_5 die Freiheit grösserer Abweichung gegeben.

In Fig. **645** ist der vorhin betrachtete Mechanismus (Fig. **642**), bei welchem der Punkt D des Gliedes FL sich längs der Geraden $\mathfrak{d}$ sehr angenähert im Bezug auf das Glied $\Phi\Lambda$ bewegt, verkleinert gezeichnet. Wenn wir in diesen Mechanismus das neue Glied DH einfügen, welches in D mit FL durch eine Drehpaarung und in H mit $\Phi\Lambda$ durch eine zu $\mathfrak{d}$ parallele Richtpaarung verbunden ist, so erhalten wir einen fünfgliederigen übergeschlossenen Mechanismus. Bei festgestelltem Gliede $\Phi\Lambda$ wird demnach, wenn wir dem Arme ΦF die zulässige Schwingung ertheilen, das Glied DH, dessen Hülse H auf der zu $\mathfrak{d}$ parallelen Stange η gleitet, geradlinig parallel bewegt. Wird umgekehrt das Glied DH festgestellt und das bis A verlängerte Glied FL um die jetzt feste Axe D, soweit es der Mechanismus zulässt, in die Lage $F'L'$ gedreht, dann vollzieht das Glied $\Phi\Lambda$ von der tiefsten bis in die höchste Lage $\Phi'\Lambda'$ eine geradlinige Parallelbewegung im Bezug auf das Glied DH. Diese Umkehrung der Bewegung, welche durch Feststellung des Gliedes DH dieses übergeschlossenen Mechanismus bewirkt wird, hat Nehrlich in unwesentlich veränderter Gestalt desselben bei der Bewegung des Pumpenkolbens angewendet[1]).

---

[1]) Redtenbacher, *Der Maschinenbau.* 1862. B. I. S. 376.

Aus historischem Interesse ist in Fig. **646** noch schematisch der Mechanismus der Dampfmaschine dargestellt, bei welcher Evans die nach ihm benannte Geradführung angewendet hat. Durch das Kurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$ mit den festen Axen Φ, Λ wird der Punkt D der Koppelstange FL sehr angenähert längs der Geraden $\mathfrak{d}$ bewegt, weil $\Phi F = DF = FL$ und der Arm ΛL zweckmässig gewählt ist. An die Koppelstange FL, welche den Balancier vertritt, ist in dem Punkte D die Stange d des im Dampfcylinder vertical auf- und niedergehenden Kolbens drehbar angeschlossen; und ferner ist die Koppelstange FL durch die Pleuelstange EC mit der Kurbel ΓC gelenkig verbunden, die also durch die Kolbenbewegung in Drehung versetzt wird.

259. **Watt'sche Geradführung.** In Fig. **647** ist das dargestellte Kurbelgetriebe $\Phi F_1 L_1 \Lambda$ so eingerichtet, dass der geradgeführte Punkt D_1 der Koppel $F_1 L_1$ auf einer Geraden $\mathfrak{d}$ in vier symmetrische Lagen D_1, D_2, D_3, D_4 und die Koppel beziehlich in die parallelen Lagenpaare $F_1 D_1$, $F_4 D_4$ und $F_2 D_2$, $F_3 D_3$ gelangt, die entgegengesetzt gleiche Winkel mit der Geraden $\mathfrak{d}$ bilden; demnach sind die beiden Sehnen $F_1 F_4$, $F_2 F_3$ des Bogens φ in gleichen Abständen der Geraden $\mathfrak{d}$ parallel, und ebenso auch die beiden Sehnen $L_1 L_4$, $L_2 L_3$ des Bogens λ. Die in dieser Weise durch ein Kurbelgetriebe erzeugte angenäherte geradlinige Bewegung eines Punktes D_1 der Koppelstange $F_1 L_1$ ist die vorhin auf S. 635 erwähnte, viel bewunderte und viel behandelte Watt'sche Geradführung, welche James Watt vor hundert Jahren mit genialer Ueberlegung bei seiner Dampfmaschine zuerst angewendet hat[1]).

Behufs der Construction des Kurbelgetriebes $\Phi F_1 L_1 \Lambda$, welches eine möglichst angenäherte Geradführung bewirkt, betrachten wir den Arm ΦF_1 mit der festen Axe Φ und den Ausschlagwinkel $F_1 \Phi F_4$ oder die Sehne $F_1 F_4$ des Ausschlagbogens φ als gegeben. Auf diesem Ausschlagbogen markiren wir zwischen F_1, F_4 die symmetrisch liegenden Punkte F_2, F_3, die wir beispielsweise so wählen, dass ihre auf $F_1 F_4$ senkrechten Projectionen N_2, N_3 die Sehne $F_1 F_4$ in drei gleiche Theile theilen, und in der Mitte zwischen den beiden parallelen Sehnen $F_1 F_4$, $F_2 F_3$ ziehen wir die parallele Gerade $\mathfrak{d}$. Hierauf nehmen wir für die Koppelstrecke $F_1 D_1$ eine zweckmässige Länge an und construiren auf der Geraden $\mathfrak{d}$ die

[1]) J. Watt, *Specification* No. 1432 vom 28. April 1784. — Muirhead, *Mechanical Inventions of James Watt.* 1854. Vol. III. p. 88.

Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 durch die Eintragung der gleichen Strecken F_1D_1, F_2D_2, F_3D_3, F_4D_4; dadurch sind die parallelen Koppellagen F_1D_1, F_4D_4 und F_2D_2, F_3D_3 bestimmt, die entgegengesetzt gleiche Winkel mit der Geraden $\mathfrak{d}$ bilden, und die Punktgruppen $D_1D_2D_3D_4$, $F_1N_2N_3F_4$ sind congruent. Wird nun für die Koppel F_1L_1 eine beliebige Länge angenommen, so erhalten wir durch die gleichen Strecken F_1L_1, F_2L_2, F_3L_3, F_4L_4 die vier auf einem Kreise λ liegenden homologen Punkte L_1, L_2, L_3, L_4; und der Mittelpunkt Λ dieses Kreises λ liefert die feste Axe des zweiten Armes ΛL_1 des Kurbelgetriebes $\Phi F_1L_1\Lambda$, bei welchem der Koppelpunkt D_1 eine Bahncurve δ beschreibt, die durch die vier Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 der Geraden $\mathfrak{d}$ geht und sich derselben auf der Strecke D_1D_4 sehr nahe anschmiegt.

Um aber eine tiefere Erkenntniss der Beziehungen zu erlangen, wollen wir zunächst die Mittelpunktcurve σ der durch die vier homologen Strecken F_1D_1, F_2D_2, F_3D_3, F_4D_4 bestimmten, congruenten ebenen Systeme ermitteln. Wir construiren den Pol P^{12} für die beiden homologen Strecken F_1D_1, F_2D_2 als Schnittpunkt der Halbirungsgeraden des Winkels $F_1\Phi F_2$ und der in der Mitte von D_1D_2 auf $\mathfrak{d}$ errichteten Senkrechten. Ziehen wir nun durch D_1, P^{12} die Gerade t_1 und durch D_2, P^{12} die homologe Gerade t_2, so liegt der Pol P^{13} der beiden homologen Strecken F_1D_1, F_3D_3, weil F_2D_2 parallel F_3D_3 ist, in der Geraden t_1; und die durch D_3P^{13} gehende dritte homologe Gerade t_3 ist zu t_2 parallel. Aus gleichem Grunde liegt auch der Pol P^{24} in der Geraden t_2, ebenso der Pol P^{34} in der Geraden t_3, und die vierte durch D_4 gehende homologe Gerade t_4, die zu t_1 parallel ist, enthält die beiden Pole P^{24}, P^{34}. Infolge der gleichen Winkel $\mathfrak{d}D_1F_1$, $\mathfrak{d}D_2F_2$ ist die Gerade t_1 auf F_1D_1 senkrecht, und somit sind auch die Geraden t_2, t_3, t_4 resp. auf F_2D_2, F_3D_3, F_4D_4 senkrecht. Es bilden demnach die Gegenpolpaare $P^{12}P^{34}$, $P^{13}P^{24}$ die gegenüber liegenden Ecken eines Parallelogramms, dessen Seiten t_1, t_2, t_3, t_4 durch die homologen Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 gehen und beziehlich auf den Geraden F_1D_1, F_2D_2, F_3D_3, F_4D_4 senkrecht stehen; folglich besteht die Mittelpunktcurve der vier ebenen Systeme nach S. 621 aus einer gleichseitigen Hyperbel σ, deren Mittelpunkt in der Mitte dieses Parallelogramms liegt, und aus der unendlich fernen Geraden τ. Wegen der symmetrischen Anordnung der Lagen sind die Abstände der Pole P^{12}, P^{34}, sowie der Pole P^{13}, P^{24} von der Geraden $\mathfrak{d}$ beziehlich gleich; dem zufolge ist die Mitte o der Strecke D_1D_4 auch die Mitte des Parallelogramms und der Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel σ, für welche die Gerade $\mathfrak{d}$ die eine Asymptote und die auf derselben senkrechte Gerade $o\Delta_\infty$ die andere Asymptote ist. Die gleichseitige Hyperbel σ ist durch diese Asymptoten und den auf ihr liegenden Punkt Φ, also ohne jene Pole, bestimmt. Dieselbe kann hiernach leicht in bekannter Weise construirt werden, indem wir durch Φ Gerade ziehen, welche die Asymptoten schneiden, und auf diesen Geraden die zwischen den Hyperbelästen und Asymptoten befindlichen Streckenpaare gleich machen.

Jeder Punkt L_1 der unbegrenzten Geraden F_1D_1 liegt mit seinen drei homologen Punkten L_2, L_3, L_4 auf je einem Kreise, dessen Mittelpunkt Λ sich auf der Hyperbel σ befindet. Jedem Punkte dieser Geraden entspricht somit ein Punkt dieser Hyperbel, und dem Punkte D_1 entspricht der unendlich ferne Punkt Δ_∞ der Asymptote $o\Delta_\infty$. Ferner liegen je vier homologe Punkte E_1, E_2, E_3, E_4 der vier Geraden t_1, t_2, t_3, t_4 auf einer zu $\mathfrak{d}$ parallelen Geraden, und es giebt also bei der betrachteten besonderen Anordnung der Koppellagen unendlich viele Gruppen von vier homologen Punkten, die auf parallelen Geraden liegen. Demnach zerfällt die Kreispunktcurve des durch die Strecke F_1D_1 bestimmten ebenen Systems in die beiden unbegrenzten senkrechten Geraden F_1D_1, t_1D_1 und die nicht in Betracht kommende unendlich ferne Gerade. Dies ergiebt sich auch als Folgerung aus den allgemeinen Darlegungen S. 620, wenn wir in diesem System die Punkte P_1^{34}, P_1^{24} bestimmen, welche den Polen P^{34}, P^{24} entsprechen. Der Pol P^{14}, sowie auch der Pol P^{23}, liegt in senkrechter Richtung zu $\mathfrak{d}$ im Unendlichen. Ziehen wir also auf $P^{13}P^{14}$ die um ihre eigene Länge verlängerte Senkrechte $P^{34}P_1^{34}$ und ebenso auf $P^{12}P^{14}$ die um ihre eigene Länge verlängerte Senkrechte $P^{24}P_1^{24}$, so liegen die Punkte P_1^{34}, P_1^{24} auf der Geraden t_1 bezüglich D_1 zu den Polen P^{12}, P^{13} symmetrisch; dem zufolge bestimmen diese auf t_1 symmetrisch gelegenen vier Punkte eine Kreispunktcurve, die aus den beiden senkrechten Geraden F_1D_1, t_1D_1 und der unendlich fernen Geraden besteht.

Nehmen wir auf der Hyperbel σ einen zweckmässig gewählten Punkt Λ als festen Axenpunkt an, so ergiebt sich der entsprechende Gelenkpunkt L_1 auf der Geraden F_1D_1, indem wir den Winkel $D_1P^{12}L_1 = \Delta_\infty P^{12}\Lambda$ machen, und umgekehrt erhalten wir in dieser Weise zu einem auf F_1D_1 angenommenen Punkte L_1 den entsprechenden Punkt Λ auf der Hyperbel σ. Der Punkt Λ ergiebt sich auch als Mittelpunkt des durch die vier homologen

Punkte L_1, L_2, L_3, L_4 gehenden Kreises λ, indem wir in der Mitte l auf der Verbindungsstrecke $L_1 L_4$, die gleich und parallel $F_1 F_4$ ist, die Senkrechte $l\Lambda$ errichten, und ferner auch in der Mitte l' auf der Verbindungsstrecke $L_1 L_2$ die Senkrechte $l'\Lambda$ errichten, welche durch den Pol P^{12} geht und demnach vermittelst desselben genauer bestimmt wird. Ob die Wahl des Punktes Λ auf der Hyperbel σ oder des Punktes L_1 auf der Geraden $F_1 D_1$ für die Geradführung günstig ist, das wird aber erst durch die Construction der betreffenden Normalen an der Bahncurve δ des Punktes D_1 erkannt. Watt hat bei seiner ersten Anordnung, um den Punkt Λ näher an der Geraden $\mathfrak{d}$ zu erhalten, die Strecke $D_1 L_1$ länger als $F_1 D_1$ gewählt; und je länger diese Strecke genommen wird, desto näher liegt Λ an $\mathfrak{d}$. Je nachdem wir den Punkt L_1 auf der unbegrenzten Geraden $F_1 D_1$ unterhalb oder oberhalb D_1 annehmen, liegt der entsprechende Punkt Λ auf dem unteren oder oberen Hyperbelast. Ebenso wie für den Punkt Λ können wir auch für den Punkt Φ verschiedene Lagen auf der Hyperbel σ wählen und die entsprechenden Lagen des Punktes F_1 bestimmen.

Die Bahncurve δ, welche der Koppelpunkt D_1 des erhaltenen Kurbelgetriebes $\Phi F_1 L_1 \Lambda$ beschreibt, schneidet die Gerade $\mathfrak{d}$ in den Punkten D_1, D_2, D_3, D_4 und schmiegt sich derselben sehr nahe an; diese Bahncurve ist symmetrisch zur Geraden $\Phi\Lambda$ und besitzt einen Doppelpunkt in derselben. Da die Bahncurve δ über die Annäherungsstrecke $D_1 D_4$ hinaus nach beiden Seiten von der Geraden $\mathfrak{d}$ abbiegt, so muss diese Gerade innerhalb $D_1 D_4$ mit dem angenäherten Curventheil auch noch einen fünften Schnittpunkt bilden; und demnach ist die angenähert geradlinige Bewegung des Punktes D_1 eine fünfpunktige Geradführung. Am günstigsten ist es, wenn wir den Punkt Λ in den Schnittpunkt legen, den die Gerade Φo auf der Hyperbel σ bestimmt, dann sind Φ, Λ Endpunkte eines Hyperbeldurchmessers, und die Strecken $F_1 D_1$, $D_1 L_1$, sowie die Arme ΦF_1, ΛL_1 sind gleich lang. Bei dieser besonderen Anordnung, die wir nachher noch eingehender behandeln werden, geht die Bahncurve δ auch durch die Mitte o der Strecke $D_1 D_4$, und jener fünfte Schnittpunkt liegt also in dieser Mitte.

Betrachten wir einen auf der Geraden t_1 innerhalb bestimmter Entfernung von D_1 liegenden Punkt E_1 als einen an der Koppel $F_1 L_1$ befestigten Punkt, so beschreibt auch dieser Punkt eine fünfpunktige Geradführung. Wir haben den Punkt E_1 beispielsweise in der grössten rechtsseitigen Entfernung von D_1 angenommen, die bestimmt wird, indem wir von dem Pol $\mathfrak{P}_1$ der Koppellage $F_1 L_1$

auf $\mathfrak{b}$ die Senkrechte $\mathfrak{P}_1 E_1$ bis an t_1 ziehen; dem zufolge berührt die vom Punkte E_1 beschriebene, nicht gezeichnete Bahncurve die zu $\mathfrak{b}$ parallele Gerade $E_1 E_4$ in dem Punkte E_1. Wird aber der Punkt E_1 näher an D_1 gelegt, dann schneidet die Gerade $E_1 E_4$ den angenäherten Theil dieser Bahncurve noch in einem fünften unterhalb E_1 liegenden Punkte. In gleicher Weise wird die grösste linksseitige Entfernung vermittelst des Pols der Koppellage $F_4 L_4$ bestimmt. Die Geradführung des Punktes D_1 ist aber mehr angenähert als die des Punktes E_1, weil die Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 sich in gleichen Abständen befinden, und die Punkte E_1, E_2, E_3, E_4 ungleich vertheilt liegen.

Bei der Construction des Kurbelgetriebes für eine Watt'sche Geradführung hat man bisher nur die beiden äussersten Lagen und die mittlere Lage der Koppel angenommen. Diese specielle Anordnung der Koppellagen tritt ein, wenn wir die beiden Punkte F_2, F_3 in der Mitte des Ausschlagbogens zusammenfallen lassen; dann coincidiren auch die beiden Punkte D_2, D_3 in der Mitte o der Strecke $D_1 D_4$ und die Gerade $\mathfrak{b}$ berührt in o die Bahncurve δ, der in diesem Falle auf den Strecken $o D_1$ und $o D_4$ die Möglichkeit grösserer Abweichung gewährt wird.

Wenn die Praxis es erfordert, dass in Fig. **648** die beiden festen Axenpunkte Φ, Λ des geradführenden Kurbelgetriebes $\Phi F_1 L_1 \Lambda$ nach einer Seite der Geraden $\mathfrak{b}$ liegen, dann müssen wir, wie Watt es in seiner zweiten Anordnung ausgeführt hat, den Punkt L_1 auf der Verlängerung von $D_1 F_1$ annehmen. Zu diesem Punkte L_1 ergiebt sich wieder der entsprechende Punkt Λ als Schnittpunkt der in der Mitte l auf der Strecke $L_1 L_4$ errichteten Senkrechten $l\Lambda$ und der von dem Pol P^{12} nach der Mitte l' der Strecke $L_1 L_2$ gezogenen Geraden $P^{12} l'$. Die durch dieses Kurbelgetriebe bewirkte angenähert geradlinige Bewegung des Punktes D_1 hat aber eine kürzere Annäherungsstrecke als die vorige, und sie ist nur eine vierpunktige Geradführung, weil die Bahncurve δ von der Geraden $\mathfrak{b}$ innerhalb der Annäherungsstrecke $D_1 D_4$ nur in den vier Punkten D_1, D_2, D_3, D_4 und ausserhalb derselben noch in zwei Punkten geschnitten wird.

In Fig. **649** ist das gleicharmige Kurbelgetriebe $\Phi F_1 L_1 \Lambda$ dargestellt, bei welchem die Koppelmitte D_1 eine sehr angenäherte Watt'sche Geradführung erzeugt. Behufs der Ableitung einer einfachen Construction dieses Kurbelgetriebes betrachten wir den Arm ΦF_1, welcher um den festen Axenpunkt Φ schwingt, als gegeben, nehmen die Sehne $F_1 F_5$ des Ausschlagbogens φ beispielsweise gleich der Länge dieses Armes. Diese Sehne F_1F_5 theilen wir durch die Punkte N_2, N_3, N_4 in symmetrische Theile, und weil es am zweckmässigsten ist, speciell in vier gleiche Theile. Die durch die Punkte N_2, N_4 auf F_1F_5 gezogenen Senkrechten N_2F_2, N_4F_4 liefern die auf dem Ausschlagbogen φ symmetrisch liegenden Punkte F_2, F_4. In der Mitte zwischen den parallelen Sehnen F_1F_5, F_2F_4 ziehen wir die parallele Gerade $\mathfrak{d}$, und bestimmen auf derselben den Punkt D_1, indem wir die Koppelstrecke F_1D_1, beispielsweise gleich $\frac{1}{2}\Phi F_1$ genommen, eintragen. Auf der Geraden $\mathfrak{d}$ machen wir die Punktgruppe $D_1D_2D_3D_4D_5$ der Punktgruppe $F_1N_2N_3N_4F_5$ congruent. Die so erhaltenen gleichen Verbindungsstrecken F_1D_1, F_2D_2, F_4D_4, F_5D_5, von denen die beiden äusseren sowie die beiden inneren parallel sind, bilden vier Koppellagen; und eine fünfte mittlere Koppellage F_3D_3 ergiebt sich, indem wir auf dem Bogen φ den Punkt F_3 so bestimmen, dass $F_3D_3 = F_1D_1$, also gleich jenen vier Strecken ist. Wir verlängern nun die Strecke ΦD_3 um ihre eigene Länge bis Λ, ebenso die Strecke F_1D_1 um ihre eigene Länge bis L_1; und als Controle ergiebt sich, dass $\Lambda L_1 = \Phi F_1$ ist. Hiernach ist also das gleicharmige Kurbelgetriebe $\Phi F_1L_1\Lambda$ bestimmt, bei welchem die Koppelmitte D_1 eine viertheilig symmetrische Bahncurve δ beschreibt, welche durch die fünf, in gleichen Abständen auf der Geraden $\mathfrak{d}$ liegenden Punkte D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 geht. Diese Bahncurve δ, die in der Mitte D_3 der Annäherungsstrecke D_1D_5 einen Doppelpunkt besitzt, schmiegt sich innerhalb der verhältnissmässig langen Annäherungsstrecke D_1D_5 bewunderungswürdig nahe an die Gerade $\mathfrak{d}$ an; denn es zeigt sich, dass die Curvennormalen an jenen fünf Punkten nur sehr wenig von der zur Geraden $\mathfrak{d}$ senkrechten Stellung abweichen. Für die mittlere Koppellage F_3L_3 sind die beiden Arme ΦF_3, ΛL_3, sowie die Curvennormale am Punkte D_3 parallel und sehr angenähert senkrecht zur Geraden $\mathfrak{d}$. Bei der verhältnissmässig langen Annäherungsstrecke D_1D_5, welche gleich der Armlänge genommen wurde, ist die Annahme der Koppellänge gleich der halben Armlänge für die Geradführung sehr günstig. Die Geradführung ist aber nach S. 637 um so mehr angenähert, je länger die Koppel bei unveränderter Armlänge genommen wird. Aus diesen Darlegungen ergiebt sich demnach die folgende einfache Construction des gleicharmigen Kurbelgetriebes für die Watt'sche Geradführung:

Wir halbiren in N_2 die halbe Sehne F_1N_3 des Ausschlagbogens φ, den der Endpunkt F_1 des gegebenen

Armes ΦF_1 beschreibt, ziehen auf $F_1 N_3$ die Senkrechte $N_2 F_2$ bis an φ, ziehen ferner durch die Mitte von $N_2 F_2$ zu $F_1 N_3$ die parallele Gerade $\mathfrak{d}$, und bestimmen auf derselben die Punkte D_1, D_3, indem wir die Strecke $F_1 D_1$ gleich der zweckmässig gewählten halben Koppellänge und die Strecke $D_1 D_3 = F_1 N_3$ machen; hierauf verlängern wir die Strecke ΦD_3 um ihre eigene Länge bis Λ und ebenso die Strecke $F_1 D_1$ um ihre eigene Länge bis L_1.

Die beiden festen Axenpunkte Φ, Λ sind die Endpunkte eines Durchmessers der gleichseitigen Hyperbel σ, die vermittelst ihrer senkrechten Asymptoten $D_3\mathfrak{d}$, $D_3\Delta_\infty$ und des Punktes Φ leicht construirt werden kann. Legen wir die Axenpunkte in die Endpunkte eines etwas längeren Durchmessers der Hyperbel σ, und bestimmen wir in der oben angegebenen Weise die beiden entsprechenden Punkte auf der Koppel, dann verkürzt sich die Koppel und es verlängern sich die Arme; aber die Geradführung des Punktes D_1 bleibt innerhalb der Strecke $D_1 D_5$ sehr angenähert. Legen wir dagegen die festen Axenpunkte in die Endpunkte eines kürzeren Durchmessers der Hyperbel σ, dann verlängert sich zwar die Koppel und die Arme verkürzen sich; aber die Geradführung wird, wie die Construction der Curvennormalen zeigt, dennoch ungünstiger. Demnach ist die Annäherungsstrecke $D_1 D_5$, welche der Armlänge gleich ist, die grösste zulässige Annäherungsstrecke einer sehr angenäherten Watt'schen Geradführung des gleicharmigen Kurbelgetriebes. In der Praxis wird meist eine viel kürzere Annäherungsstrecke verlangt; und je kürzer aber die Annäherungsstrecke genommen wird, desto mehr angenähert ist stets die Geradführung, weil die Schnittpunkte, welche der angenäherte Theil der Bahncurve δ mit der Annäherungsstrecke bildet, um so näher an einander liegen.

Wenn wir in Fig. **649** die auf dem Ausschlagbogen φ symmetrisch liegenden Punkte F_2, F_4 beziehlich mit F_1, F_5 zusammenfallen lassen, dann coincidirt der Punkt D_2 mit D_1, ebenso der Punkt D_4 mit D_5, und die Gerade $\mathfrak{d}$, welche dem zufolge in die Ausschlagsehne $F_1 F_5$ fällt, berührt die Bahncurve δ in den beiden Punkten D_1, D_5. Dadurch wird aber die Bahncurve δ, deren Doppelpunkt D_3 in der Geraden $\mathfrak{d}$ liegt, auf den Strecken $D_3 D_1$, $D_3 D_5$ zur grösseren Abweichung von dieser Geraden veranlasst. Lassen wir dagegen die beiden Punkte F_2, F_4 in der Mitte des Ausschlagbogens φ zusammenfallen, dann vereinen sich die beiden

Punkte D_2, D_4 in dem Doppelpunkte D_3 der Bahncurve zu einem Wendepunkte, und die Gerade $\mathfrak{d}$, welche dem zufolge die Pfeilhöhe des Ausschlagbogens φ halbirt, berührt die Bahncurve δ in diesem Wendepunkte. Dadurch wird aber die Bahncurve δ nach den Schnittpunkten D_1, D_5 hin, welche sie mit der Geraden $\mathfrak{d}$ bildet, ebenfalls zur grösseren Abweichung von dieser Geraden veranlasst. Beide Fälle sind also für die Geradführung nicht so günstig wie jene Annahme, bei welcher die fünf Punkte D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 in gleichen Abständen auf der Annäherungsstrecke vertheilt liegen. Der letzte dieser beiden besonderen Fälle stimmt mit der bisherigen ungenaueren Construction des geradführenden gleicharmigen Kurbelgetriebes überein, bei welcher nur die beiden äusseren Koppellagen und die innere Koppellage in Betracht gezogen werden.

In Fig. **650** ist am Balancier ΦG_1, der um die feste Axe Φ schwingt, das Watt'sche Parallelogramm $F_1 G_1 H_1 J_1$ nebst dem Gegenlenker ΛL_1 gezeichnet. In den geradgeführten Punkten H_1, D_1 sind resp. die Stangen h, d des Dampfkolbens und des Pumpenkolbens aufgehängt; und die feste Axe Λ des Gegenlenkers ist praktischer Forderung gemäss nach aussen seitwärts von der Stange h gelegt.

Um das Watt'sche Parallelogramm nach unserer Darlegung so zu construiren, dass möglichst angenäherte Geradführungen der Punkte D_1 und H_1 erzeugt werden, nehmen wir auf dem Balancier ΦG_1 einen mehr nach G_1 hin gelegenen Punkt F_1 an, halbiren in N_2 die halbe Sehne $F_1 N_3$ des gegebenen Ausschlagbogens $F_1 \varphi F_5$, ziehen auf $F_1 N_3$ die Senkrechte $N_2 F_2$ bis an φ, ziehen ferner durch die Mitte von $N_2 F_2$ zu $F_1 N_3$ die parallele Gerade $\mathfrak{d}$ und bestimmen auf derselben die Punkte D_1, D_3, indem wir die Strecke $F_1 D_1$ gleich der zweckmässig gewählten halben Koppellänge und die Strecke $D_1 D_3 = F_1 N_3$ machen; hierauf verlängern wir die Strecke ΦD_3 um ihre eigene Länge bis Λ, und ebenso die Strecke $F_1 D_1$ um ihre eigene Länge bis L_1. Wir ziehen dann die Gerade ΦD_1, welche die zur Koppel $F_1 L_1$ parallele Gerade $G_1 H_1$ in dem Punkte H_1 schneidet, und damit ergiebt sich das Gelenkparallelogramm $F_1 G_1 H_1 J_1$, dessen Eckpunkt J_1 aber nicht mit L_1 zusammenfällt. Durch das so erhaltene gleicharmige Kurbelgetriebe $\Phi F_1 L_1 \Lambda$ wird eine sehr angenäherte fünfpunktige Geradführung des Punktes D_1 bewirkt, und der Eckpunkt H_1 des Parallelogramms vollzieht eine vergrösserte, ähnliche fünfpunktige Geradführung, wenn das Parallelogramm aus der höchsten Lage

$F_1 G_1 H_1 J_1$ in die tiefste Lage $F_5 G_5 H_5 J_5$ bewegt wird. Wird es nicht gefordert, dass die feste Axe Λ nach aussen seitwärts von der Stange h liegen soll, und darf die Verlängerung dieser Axe Λ die Gerade h treffen, dann nehmen wir den Punkt F auf dem Balancier ΦG_1 in der Mitte an. Bei dieser speciellen Anordnung befindet sich dem zufolge der Punkt Λ in der Geraden h und die beiden Punkte J_1, L_1 fallen zusammen. Wir können das Parallelogramm $F_1 G_1 H_1 J_1$ im Voraus annehmen und den in J_1 angeschlossenen Gegenlenker nach S. 638 so bestimmen, dass möglichst angenäherte Geradführungen der Punkte D_1, H_1 erzeugt werden. Dem zufolge erhalten wir ein ungleicharmiges Kurbelgetriebe, bei welchem die feste Axe Λ seitwärts von h nach aussen liegt, und der geradgeführte Punkt D_1 auf der Koppel $F_1 J_1$ sich nicht in der Mitte, sondern näher an J_1 befindet.

In Fig. **651** ist der Mechanismus dargestellt, durch welchen am Fränkel'schen Dehnungszeichner[1]) die Geradführung des Schreibstiftes bewirkt wird. Um einen möglichst sicheren Gang des Schreibstiftes M zu erhalten, der sich in der Mitte des Gliedes DD' befindet, ist dieses Glied in den geradgeführten Mitten D, D' mit den Koppeln zweier symmetrischer gleicharmiger Kurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$, $\Phi' F' L' \Lambda'$ drehbar verbunden. Behufs der Construction des Kurbelgetriebes $\Phi FL\Lambda$ in der mittleren Lage wird durch die Mitte N_2 der halben Sehne $F_1 N_3$ des Ausschlagbogens auf diese die Senkrechte $N_2 F_2$ bis an den Ausschlagbogen und durch deren Mitte zu $F_1 N_3$ die parallele Gerade $\mathfrak{b}$ gezogen; auf dieser Geraden wird die Koppelmitte D so bestimmt, dass $N_3 D$ gleich der gewählten halben Koppellänge ist; ferner wird um D mit dem Radius DN_3 ein Kreis beschrieben, auf dem die Punkte F, L liegen, und die Strecke ΦD um ihre eigene Länge bis Λ verlängert. Die Koppel kann bei den beiden symmetrischen gleicharmigen Kurbelgetrieben $\Phi FL\Lambda$, $\Phi' F' L' \Lambda'$, wenn es die Einordnung in den Apparat und die Erlangung eines sicheren Ganges des Schreibstiftes erfordert, verhältnissmässig kurz gewählt werden. Denn betrachten wir in Fig. **651**ᵃ die von den Punkten D, D' beschriebenen Bahncurven δ, δ', welche schematisch mit übertriebener Abweichung von der Geraden $\mathfrak{b}$ gezeichnet sind, so bewegen sich die Punkte D, D' wechselseitig auf diesen Bahncurven an der Geraden $\mathfrak{b}$ entlang und bewirken eine Ausgleichung der Abweichungen des bewegten Punktes M von der Geraden $\mathfrak{b}$.

[1]) Fränkel, „Der Dehnungszeichner". *Civilingenieur*. 1882. B. 28. S. 200.

Ein nach der abgeleiteten, einfachen Construction hergestelltes, gleicharmiges Kurbelgetriebe erzeugt eine fünfpunktige Watt'sche Geradführung, welche einer Geraden ausserordentlich centrisch-symmetrisch angenähert ist und den praktischen Anforderungen vollständig genügt. Es wird daher die Watt'sche Geradführung und die ihr identische Evans'sche Geradführung durch die complicirteren Mechanismen von Hart und Peaucellier, die genaue Geradführungen bewirken, nicht verdrängt werden. Die vielen Vorschläge, welche diese Verdrängung ohne Grund anstreben, sind werthlos und haben in der Praxis keine Beachtung gefunden. Die Watt'sche Geradführung ist unsäglich viel analytisch behandelt worden[1]); aber eine tiefere geometrische Einsicht und eine einfache Construction des Kurbelgetriebes, welches eine möglichst angenäherte Watt'sche Geradführung erzeugt, haben wir erst durch unsere synthetischen Darlegungen erlangt.

260. **Geradführung und Proportionalität am Indicator**[2]). In Fig. **652**, Taf. XLI, ist der angenähert geradführende Mechanismus des Thompson'schen Indicator schematisch dargestellt, welcher zur Messung des Dampfdruckes dient, der während der Bewegung einer Dampfmaschine im Dampfcylinder auftritt. Der Cylinder C wird mit dem Dampfcylinder der Maschine in communicirende Verbindung gesetzt, so dass der Dampfdruck auf den Kolben K wirkt, der dicht mit geringer Reibung im Cylinder C gleitet und von einer Schraubenfeder f nebst der atmosphärischen Luft einen beständigen Gegendruck erhält. Die Kolbenstange h ist durch die Schubstange $H_5 G_5$ mit der Koppel $F_5 L_5$ des Kurbelgetriebes $\Phi F_5 L_5 \Lambda$ gelenkig verbunden, und an der Koppel ist im Punkte D_5 ein Schreibstift befestigt, der eine zur Kolbenstange h parallele Evans'sche Geradführung vollzieht. Um einen Cylinder, der vermittelst einer Vorrichtung um seine Axe proportional der Bewegung des Kolbens der Dampfmaschine gedreht wird, ist ein Papierblatt gelegt; und auf diesem zeichnet der parallel zur

---

[1]) Siehe die bezügliche Literatur in Kerl, *Repertorium der techn. Literatur*, auch im *Real-Index zum Polytechn. Journal* unter „Dampfmaschine" resp. „Geradführung". — Liguine, „Liste des travaux sur les systèmes articulés". *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*. 1883. 2e sér. T. VII. p. 145. — Die Identität der Watt'schen und der Evans'schen Geradführung hat Mohr zuerst bewiesen. *Polytechn. Journal*. 1841. B. 81. S. 16.

[2]) Völckers, *Der Indicator*. 2. Aufl. 1878. — M. v. Pichler, *Der Indicator und sein Diagramm*. 1880; und in der *Zeitschr. d. österreich. Ingenieur- u. Architekten-Vereins*. 1883. S. 133. — Schäffer u. Budenberg, *Ueber Indicatoren*. 1882. — Rosenkranz, *Der Indicator und seine Anwendungen*. 4. Aufl. 1885.

Cylinderaxe geführte Schreibstift das Indicatordiagramm, dessen Abscissen der Bewegung des Kolbens der Dampfmaschine und dessen Ordinaten dem veränderlichen Dampfdrucke proportional sind, der vom Dampfcylinder her auf den Kolben K wirkt.

Um den Mechanismus in Fig. 652 den Anforderungen gemäss so zu construiren, dass der Koppelpunkt D_5 eine sehr angenäherte Evans'sche Geradführung erzeugt und sich auch möglichst angenähert proportional der Verschiebung des Kolbens K oder des Gelenkpunktes H_5 der Kolbenstange h bewegt, betrachten wir zunächst auf der Geraden $\mathfrak{d}$ die Hubhöhe D_1D_5 des geradgeführten Punktes oder Schreibstiftes D_5 als gegeben, theilen dieselbe durch die Punkte D_2, D_3, D_4 in vier gleiche Theile und wählen für die Koppelstange D_5L_5 eine zweckmässige Länge. Hierdurch sind die vier symmetrischen Koppellagen D_1L_1, D_2L_2, D_4L_4, D_5L_5, bei denen beziehlich die Punkte L_1, L_5 und L_2, L_4 in der auf $\mathfrak{d}$ senkrechten Geraden $D_3\Delta_\infty$ coincidiren. Legen wir nun den festen Axenpunkt Φ in D_3, ferner den festen Axenpunkt Λ an passende Stelle auf die Gerade ζ, welche die Strecke L_1L_2 senkrecht halbirt; und beschreiben wir um Λ den durch L_1, L_2 gehenden Kreisbogen λ, dann ist auch, indem wir auf λ den Punkt L_3 so bestimmen, dass D_3L_3 gleich der gewählten Länge D_5L_5 ist, die mittlere Koppellage D_3L_3 gegeben, welche nur wenig von der Geraden $D_3\Delta_\infty$ abweicht. Der Gelenkpunkt F_5 liegt bei dieser Anordnung in der Mitte von D_5L_5 und bewegt sich auf dem um Φ beschriebenen Kreisbogen φ. Gemäss dieser Construction des Kurbelgetriebes $\Phi F_5L_5\Lambda$ erzeugt der Koppelpunkt D_5 eine Bahncurve δ, deren angenäherter Theil mit der Geraden $\mathfrak{d}$ die fünf Punkte D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 gemein hat und sich derselben auf der Strecke D_1D_5 sehr nahe anschmiegt.

Behufs Erlangung einer möglichst angenäherten Proportionalität der Bewegungen der Punkte H_5, D_5 muss die Lage der Geraden, welche die Kolbenstange h vertritt, und die Länge der Schubstange H_5G_5 noch bestimmt werden. Wir nehmen den Gelenkpunkt G_5 auf der Koppelstange in zweckmässiger Lage an, bestimmen die homologen Punkte G_1, G_2, G_3, G_4 und ziehen die Verbindungsgeraden G_1G_5, G_2G_4, welche der Geraden $\mathfrak{d}$ parallel sind und die Gerade $D_3\Delta_\infty$ resp. in den Punkten c, γ schneiden. Demnach erhalten wir die Proportionen:

$$\frac{D_1D_3}{G_1c} = \frac{D_1L_1}{G_1L_1}, \qquad \frac{D_2D_3}{G_2\gamma} = \frac{D_2L_2}{G_2L_2},$$

und hieraus ergiebt sich, weil $D_1D_3 = 2D_2D_3$ ist,

$$G_1 c = 2 G_2 \gamma.$$

Die zu $D_3 \Delta_\infty$ Parallelen $G_2 b$, $G_4 d$ bestimmen also auf der Strecke $G_1 G_5$ die Punkte b, d, so dass diese Strecke durch b, c, d in vier gleiche Theile getheilt wird. Wir ziehen nun in der Mitte zwischen den Parallelen $G_1 G_5$, $G_2 G_4$ die parallele Gerade h und construiren auf derselben den Mittelpunkt H_3 des durch G_3, γ gehenden Kreises, indem wir $H_3 G_3 = H_3 \gamma$ machen. Hierdurch erhalten wir die Lage der Kolbenstange h und für die Schubstange $H_5 G_5$ die Länge $H_3 G_3$, durch welche die möglichst angenäherte Proportionalität der Bewegungen der Punkte H_5, D_5 bedingt wird. Denn, wenn wir auf der Geraden h die Punktgruppe $H_1 H_2 H_3 H_4 H_5$ construiren, welche der Punktgruppe $G_1 b c d G_5$ congruent ist, so bestimmen die nicht gezeichneten gleichen Strecken $H_1 G_1$, $H_2 G_2$, $H_3 G_3$, $H_4 G_4$, $H_5 G_5$ die fünf entsprechenden Lagen der Schubstange $H_5 G_5$, und den in gleichen Abständen befindlichen Punkten H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 auf der Geraden h entsprechen auch die in gleichen Abständen liegenden Punkte D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 auf der Geraden $\mathfrak{d}$. Die Bewegungen des Kolbens K und des Schreibstiftes D_5 sind also durch die fünf Theilpunkte hindurch in dem Verhältnisse $L_5 G_5 : L_5 D_5$ ähnlich. Dem zufolge wird auch die Aehnlichkeit dieser Bewegungen mit vollkommen genügender Genauigkeit innerhalb der Theilstrecken fortbestehen. Um dies zu bestätigen, wollen wir noch das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ des Punktes D_5 construiren, welches sich auf die Bewegungsrichtung in der Geraden $\mathfrak{d}$ bezieht und einer gleichförmigen Bewegung des Punktes H_5 entspricht. Zu diesem Zwecke nehmen wir als constante lothrechte Geschwindigkeit des Punktes H_5 eine auf h senkrechte Strecke $H_5 H_\mathfrak{v}^5$ an; und demnach ist das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm des bewegten Punktes H_5 eine zu h parallele Strecke $H_\mathfrak{v}^1 H_\mathfrak{v}^5$.

Wir ziehen durch den Schnittpunkt $\mathfrak{P}_5$ der Geraden ΦF_5, ΛL_5, welcher der Pol der Koppellage $F_5 L_5$ ist, die Geraden $\mathfrak{P}_5 G_5$, $\mathfrak{P}_5 D_5$, dann zu $H_5 G_5$ die Parallele $H_\mathfrak{v}^5 G_\mathfrak{v}^5$, die auf $\mathfrak{P}_5 G_5$ die lothrechte Geschwindigkeit $G_5 G_\mathfrak{v}^5$ abschneidet, und ferner zu $G_5 D_5$ die Parallele $G_\mathfrak{v}^5 D_\mathfrak{v}^5$, die auf $\mathfrak{P}_5 D_5$ die lothrechte Geschwindigkeit $D_5 D_\mathfrak{v}^5$ des Punktes D_5 bestimmt. Hierauf ziehen wir auf $\mathfrak{d}$ die Senkrechte $D_5 D_\mathfrak{v}^V$ und auf diese die Senkrechte $D_\mathfrak{v}^5 D_\mathfrak{v}^V$; demnach ist die Strecke $D_5 D_\mathfrak{v}^V$ gleich der Componente der Geschwindigkeit des Punktes D_5 für die Richtung in der Geraden $\mathfrak{d}$, und die kleine Strecke $D_\mathfrak{v}^V D_\mathfrak{v}^5$ ist gleich der zur Geraden $\mathfrak{d}$ senkrechten Componente, welche durch die abweichende Bewegung des

Punktes D_5 von dieser Geraden verursacht wird und in dem Endpunkte D_5 der Annäherungsstrecke $D_1 D_5$ am grössten ist. In gleicher Weise sind die Punkte $D_\mathfrak{v}^I$, $D_\mathfrak{v}^{II}$, $D_\mathfrak{v}^{III}$, $D_\mathfrak{v}^{IV}$ und andere zwischen denselben liegende Punkte des Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ bestimmt, welches zur Geraden $\mathfrak{d}$ parallel ist und nur in der Nähe von $D_\mathfrak{v}^V$ eine sehr geringe Abbiegung zeigt. Damit ist die Proportionalität der Wege der Punkte H_5, D_5 bestätigt.

Wird der Mechanismus nach der älteren Bestimmungsweise der Evans'schen Geradführung hergestellt, bei welcher nur drei Koppellagen in Betracht kommen, so dass die drei Koppellagen $F_2 L_2$, $F_3 L_3$, $F_4 L_4$ in der Geraden $D_3 \Delta_\infty$ coincidiren, und die Länge der Schubstange $H_5 G_5$ willkürlich ist, dann zeigt sich die geradlinige Bewegung des Punktes D_5 und die Proportionalität der Bewegungen der Punkte H_5, D_5 weniger genau; denn dieser Bestimmungsweise gemäss entsprechen sich nur die tiefsten, mittleren und höchsten Lagen der Punkte H_5, D_5 auf den Geraden h und $\mathfrak{d}$; und hierin liegt eine geringere Gewähr für die Proportionalität der Wege der Punkte H_5, D_5. Nach dieser Anordnung, welche die Anforderung der Genauigkeit noch nicht in der höchsten erreichbaren Vollkommenheit erfüllt, werden bisher die in der Praxis sehr geschätzten Indicatoren von der Firma Dreyer, Rosenkranz & Droop ausgeführt[1]). Wenn aber die von uns gegebene strengere Construction befolgt wird, so kann vermittelst eines kleineren Mechanismus eine verhältnissmässig längere angenäherte Geradführung und eine genauere Proportionalität erlangt werden; und je geringer die Masse der bewegten Theile des geradführenden Mechanismus ist, desto zuverlässiger ist die Aufzeichnung des Schreibstiftes.

In Fig. **653** ist derselbe Mechanismus in der angegebenen Weise dargestellt, nur mit dem Unterschiede, dass der feste Axenpunkt Φ nach Angabe von Thompson[2]) nicht in D_3, der Mitte der Annäherungsstrecke $D_1 D_5$, sondern seitwärts von $\mathfrak{d}$ auf der Geraden $D_3 \Delta_\infty$ angenommen ist. Der entsprechende Gelenkpunkt F_5 ergiebt sich auf $D_5 L_5$ nach S. 605 durch die Gleichheit der Winkel $D_5 P^{45} F_5$, $\Delta_\infty P^{45} \Phi$, deren gemeinsamer Scheitel P^{45} der Pol der beiden Koppellagen $D_4 L_4$, $D_5 L_5$ ist. Der angenäherte

---

[1]) Dreyer, Rosenkranz & Droop, *Deutsches Reichspatent* Nr. 13663 vom 8. August 1880. — Rosenkranz, *Der Indicator und seine Anwendung.* 4. Aufl. 1885.

[2]) *Scientific American.* 1876. Vol. XXXV. p. 278. — *Engineering.* 1877. Vol. XXIV. p. 312. — *Polytechnisches Journal.* 1877. B. 223. S. 39.

Theil der vom Punkte D_5 beschriebenen Bahncurve δ schneidet die Gerade $\mathfrak{d}$ in den vier Punkten D_1, D_2, D_4, D_5 und ferner in einem fünften Punkte, der aber bei dieser Anordnung nicht in D_3 liegt. Daher ist bei diesem Mechanismus die Bahncurve δ innerhalb der Strecke $D_2 D_4$ zwar nicht so sehr angenähert wie bei dem vorhin betrachteten Mechanismus; aber in der Wirkungsweise ist, wie das gezeichnete Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ bestätigt, graphisch kein Unterschied zu erkennen.

Denken wir uns, um die Gesamtmasse der beweglichen Glieder in Fig. **652** möglichst zu verringern, den Arm ΦF_5 weggenommen und den kürzeren durch Punktirung gekennzeichneten Arm $\mathsf{A} A_5$ eingesetzt, der sich um die feste Axe A dreht und in A_5 gelenkig mit der Schubstange $H_5 G_5$ verbunden ist, so erhalten wir den Crosby'schen Indicator[1]). Damit auch bei dieser Anordnung der Punkt D_5 eine sehr angenäherte Geradführung vollzieht, so dass die Bahncurve desselben die fünf Punkte D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 mit der Geraden $\mathfrak{d}$ gemein hat und eine möglichst angenäherte Proportionalität stattfindet, muss der feste Axenpunkt A der Mittelpunkt eines Kreises sein, der durch fünf homologe Punkte der fünf Lagen der Schubstange $H_5 G_5$ geht. Da die Lagen $H_1 G_1$, $H_5 G_5$ und die Lagen $H_2 G_2$, $H_4 G_4$ parallel sind, so liegen, wie bei der Watt'schen Geradführung, die Mittelpunkte aller durch je vier homologe Punkte dieser vier Geraden gehenden Kreise auf einer leicht zu construirenden, gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten die Gerade h und die in H_3 auf ihr senkrechte Gerade sind. Ferner bilden die Mittelpunkte aller durch je drei homologe Punkte der Geraden $H_1 G_1$, $H_2 G_2$, $H_3 G_3$ gehender Kreise einen Kegelschnitt, der auf der Hyperbel den Punkt A bestimmt; und zu diesem ergiebt sich in bekannter Weise der entsprechende Gelenkpunkt A_5.

Bei dem in Fig. **654** schematisch dargestellten Richards-schen Indicator[2]) ist der Mechanismus der Watt'schen Geradführung angewendet. Die Construction des gleicharmigen Kurbelgetriebes $\Phi F_5 L_5 \Lambda$, welches eine fünfpunktige Geradführung erzeugt, wird wie S. 643 gelehrt wurde construirt. Wir nehmen die Länge des Armes ΦF_5 an und betrachten die Sehne $F_1 F_5$ des Ausschlagbogens $F_1 \varphi F_5$, die gleich der Hubhöhe $D_1 D_5$ des geradgeführten Punktes oder Schreibstiftes D_5 ist, als gegeben. Wir

---

[1]) *Engineering.* 1884. Vol. 37. p. 185.

[2]) *Mechanics' Magazine.* 1863. p. 10. — *Polytechnisches Journal.* 1863. B. 168. S. 82.

ziehen durch die Mitte N_4 der halben Sehne N_3F_5 auf diese die Senkrechte N_4F_4 bis an den Bogen φ, ziehen ferner durch die Mitte von N_4F_4 zur Sehne F_1F_5 die parallele Gerade $\mathfrak{d}$, bestimmen auf derselben den Punkt D_5 so, dass F_5D_5 gleich der gewählten halben Koppellänge ist, und machen auf $\mathfrak{d}$ die Strecke $D_5D_3 = F_5N_3$; dann liefert die um ihre eigene Länge bis Λ verlängerte Strecke ΦD_3 den zweiten festen Axenpunkt Λ und die um ihre eigene Länge bis L_5 verlängerte Strecke F_5D_5 die höchste Koppellage F_5L_5. Die Koppelmitte D_5 beschreibt die Bahncurve δ, deren angenäherter Theil die fünf in gleichen Abständen befindlichen Punkte D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 mit der Geraden $\mathfrak{d}$ gemein hat und sich derselben sehr nahe anschmiegt. Behufs der Bestimmung der Schubstange H_5G_5 und der Kolbenstange H_5h, nehmen wir auf dem Arme ΦF_5 den Gelenkpunkt G_5 beispielsweise so an, dass $\Phi G_5 = \frac{1}{4}\Phi F_5$ ist, ziehen zu F_5D_5 die Parallele G_5H_5 bis an die Gerade ΦD_5 und zu $\mathfrak{d}$ die Parallele H_5h. Da die Abweichung der Bewegung des Punktes D_5 von der Geraden $\mathfrak{d}$ innerhalb der Annäherungsstrecke D_1D_5 bei der fünfpunktigen Watt'schen Geradführung, welche mit der in Fig. **652** angewandten Evans'schen Geradführung übereinstimmt, ausserordentlich klein ist, so sind die Bewegungen der Punkte H_5, D_5 sehr angenähert in dem Verhältnisse $\Phi G_5 : \Phi F_5$ ähnlich; denn es würde eine genaue Aehnlichkeit stattfinden, wenn der Punkt D_5 sich genau in der Geraden $\mathfrak{d}$ bewegte. Demnach wird durch diese Anordnung die Proportionalität der Wege des Kolbens K und des Schreibstiftes D_5 gewährleistet.

261. **Sechspunktige symmetrisch angenäherte Geradführung.** In Fig. **655** ist ein gleicharmiges Kurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$ mit einem gleichschenkeligen Koppeldreieck FDL dargestellt. Dieses Koppeldreieck bewegt sich symmetrisch bezüglich der in der Mitte auf $\Phi\Lambda$ senkrechten Geraden ζ, und die Spitze D desselben beschreibt demnach eine von der Geraden ζ symmetrisch getheilte Bahncurve δ. Wegen der symmetrischen Anordnung des in seiner mittleren Stellung gezeichneten Kurbelgetriebes $\Phi FL\Lambda$ gesellen sich zu demselben nach dem Roberts'schen Satze zwei gleiche, symmetrisch gelegene Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$, $\Lambda L_{II} O_{II} \Omega$, bei welchen der Koppelpunkt D dieselbe Bahncurve δ erzeugt. Behufs der Construction des Kurbelgetriebes $\Phi F_I O_I \Omega$ bilden wir das Parallelogramm ΦFDF_I, zeichnen an F_ID und an $\Phi\Lambda$ beziehlich die Dreiecke $F_I O_I D$, $\Phi\Omega\Lambda$, welche dem gleichschenkeligen Koppeldreieck FDL ähnlich sind. In derselben Weise erhalten wir das zweite gleiche, symmetrisch gelegene Kurbel-

getriebe $\Lambda L_{II} O_{II} \Omega$. Das hierdurch entstandene Parallelogramm $O_I D O_{II} \Omega$ ist wegen der symmetrischen Anordnung ein Rhombus, demnach ist bei den beiden gleichen Kurbelgetrieben $O_I D = O_I \Omega = O_I F_I$ und $O_{II} D = O_{II} \Omega = O_{II} L_{II}$. In der gezeichneten Stellung, bei welcher der beschreibende Punkt D sich in der Symmetralgeraden ζ befindet, liegt der Gelenkpunkt F_I auf der Geraden $\Omega\Phi$ und der Gelenkpunkt L_{II} auf der Geraden $\Omega\Lambda$.

Wenn wir das Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ mit einem gleichschenkeligen Koppeldreieck $F_I O_I D$, dessen beide gleiche Seiten $O_I F_I$, $O_I D$ gleich dem an die Spitze O_I angeschlossenen Arme ΩO_I sind, als erstgegeben betrachten und nach dem Robertsschen Satze die beiden zugesellten Kurbelgetriebe zeichnen, so erhalten wir das gleiche Kurbelgetriebe $\Lambda L_{II} O_{II} \Lambda$ und das gleicharmige Kurbelgetriebe $\Phi F L \Lambda$ mit dem gleichschenkeligen Koppeldreieck FDL, dessen Spitze D eine von der Geraden ζ symmetrisch getheilte Bahncurve δ beschreibt. Ist also bei einem Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ mit einem gleichschenkeligen Koppeldreieck $F_I O_I D$ der an die Spitze O_I desselben angeschlossene Arm ΩO_I gleich den beiden gleichen Seiten desselben, dann beschreibt die Basisecke D eine symmetrisch gestaltete Bahncurve δ.

Das betrachtete Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ können wir in Fig. 656 so anordnen, dass die vom Koppelpunkte D beschriebene symmetrische Bahncurve δ innerhalb einer zweckmässig lang gewählten Annäherungsstrecke $D_1 D_6$ mit einer Geraden $\mathfrak{d}$ sechs in gleichen Abständen befindliche Punkte D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 gemein hat und sich dieser Geraden sehr nahe anschmiegt. Wir betrachten das gleichschenkelige Koppeldreieck $F_I O_I D$ des zu bestimmenden Kurbelgetriebes $\Phi F_I O_I \Omega$ als gegeben, und demnach ist auch der an die Spitze O_I des Koppeldreiecks angeschlossene Arm ΩO_I, der gleich den beiden gleichen Seiten desselben ist, mit seinem festen Axenpunkte Ω bekannt. Um die noch unbekannten Theile dieses Kurbelgetriebes zu bestimmen, müssen wir zwei Hülfscurven construiren. Zu dem Zwecke beschreiben wir um Ω mit dem Arme ΩO_I als Radius den Kreis ω, machen den Winkel $\zeta \Omega \Phi$, auf dessen Schenkel $\Omega\Phi$ der feste Axenpunkt Φ liegt, gleich der Hälfte des Winkels $F_I O_I D$, theilen eine auf ζ senkrecht gezogene Strecke $m' D'_1$, deren Länge gleich der gewählten halben Annäherungsstrecke ist, durch die Punkte D'_2, D'_3 so, dass $D'_1 D'_2 = D'_2 D'_3 = 2 D'_3 m'$ ist, und ziehen durch die Punkte D'_1, D'_2, D'_3 zur Geraden ζ Parallele $D'_1 D''_1$, $D'_2 D''_2$, $D'_3 D''_3$, welche auf mehreren anderen zu ζ Senkrechten, z. B. auf $D''_1 m''$, die

Punkte D_1'', D_2'', D_3'' bestimmen. Hierauf fassen wir das gegebene Koppeldreieck $F_I O_I D$ in einen Dreispitzzirkel, legen vermittelst desselben die Ecke D nach einander in die Punkte D_1', D_2', D_3', aber gleichzeitig die Ecke O_I in die entsprechenden Lagen einerseits auf den Kreis ω, und markiren die zugehörigen Lagen F_1', F_2', F_3' der Ecke F_I, sowie den Mittelpunkt Φ' des durch die Punkte F_1', F_2', F_3' gehenden Kreises, der die zu $\Omega\Phi$ parallel gezogene Gerade $\Phi' F'$ im Punkte F' schneidet. Der Mittelpunkt Φ' dieses Kreises kann, falls die Punkte F_1', F_2', F_3' nicht günstig liegen, mit Hülfe der betreffenden Pole je zweier der drei Dreieckslagen sicherer construirt werden. Wiederholen wir dasselbe Verfahren, indem wir die Ecke D jenes in den Dreispitzzirkel gefassten Koppeldreiecks nach einander in die Punkte D_1'', D_2'', D_3'' legen, während die Ecke O_I auf dem Kreise ω bleibt, so ergeben sich für die Ecke F_I die drei zugehörigen Lagen F_1'', F_2'', F_3'' nebst dem Mittelpunkte Φ'' des durch dieselben gehenden Kreises, der die zu $\Omega\Phi$ parallel gezogene Gerade $\Phi'' F''$ im Punkte F'' trifft. Wir erhalten somit durch die Punkte Φ', Φ'', .. ein Stück einer Hülfscurve η und durch die Punkte F', F'', .. ein Stück einer Hülfscurve h. Diese beiden Hülfscurven η, h schneiden die Gerade $\Omega\Phi$ resp. in den Punkten Φ, F_I, von denen Φ der gesuchte zweite feste Axenpunkt und F_I der Gelenkpunkt des gesuchten Armes ΦF_I ist, der in der verlängerten Geraden $\Omega\Phi$ liegt, wenn sich der Koppelpunkt D in der Geraden ζ befindet. Führen wir nun die Ecken O_I, F_I des in den Dreispitzzirkel gefassten Koppel dreiecks $F_I O_I D$ beziehlich auf dem Kreise ω und auf dem um Φ mit dem Radius ΦF_I beschriebenen Kreise φ, bis die Ecke D successive in jene drei Parallelen $D_1' D_1''$, $D_2' D_2''$, $D_3' D_3''$ gelangt, so werden auf diesen durch die drei entsprechenden Lagen $F_1 O_1 D_1$, $F_2 O_2 D_2$, $F_3 O_3 D_3$ die Punkte D_1, D_2, D_3 erhalten, welche auf einer zu ζ senkrechten Geraden $\mathfrak{d}$ liegen und diese Gerade bestimmen. Der Koppelpunkt D des so construirten Kurbelgetriebes $\Phi F_I O_I \Omega$ beschreibt demnach die von der Geraden ζ symmetrisch getheilte Bahncurve δ, welche mit der Geraden $\mathfrak{d}$ die sechs in gleichen Abständen befindlichen Punkte D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 gemein hat, und erzeugt also eine sechspunktige symmetrisch angenäherte Geradführung. Zeichnen wir nun in Fig. 655 zu dem erhaltenen Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ das zugesellte gleicharmige Kurbelgetriebe $\Phi F L \Lambda$ mit dem gleichschenkeligen Koppeldreieck FDL, so erzeugt die Spitze D dieselbe sechspunktige symmetrisch angenäherte Geradführung; und dasselbe gilt von dem zweiten zugesellten Kurbelgetriebe $\Lambda L_{II} O_{II} \Omega$.

In Fig. **658** ist bei dem Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ der Gelenkpunkt O_I insbesondere auf $F_I D$ gelegt, also $O_I F_I = O_I \Omega = O_I D$, und in diesem besonderen Falle ist die Gerade $\Omega \zeta$ senkrecht auf der Geraden $\Omega \Phi$. Dieses Kurbelgetriebe, dessen Koppelpunkt D eine sechspunktige symmetrisch angenäherte Geradführung bewirkt, ist in der angegebenen Weise, wie die gleichartige Bezeichnung zu erkennen giebt, durch die Hülfscurven η, h construirt. In Fig. **657** sind zu dem so erhaltenen Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ die beiden zugesellten Kurbelgetriebe $\Phi F L \Lambda$, $\Lambda L_{II} O_{II} \Omega$ gezeichnet, welche dieselbe sechspunktige symmetrisch angenäherte Geradführung erzeugen. Das gleicharmige Kurbelgetriebe $\Phi F L \Lambda$, bei welchem die Koppelmitte D unserer Anordnung gemäss eine sechspunktige symmetrisch angenäherte Geradführung innerhalb der Strecke $D_1 D_6$ bewirkt, wurde zuerst von Tchébychew in anderer Auffassung analytisch behandelt[1]); und durch sehr umständliche Rechnungen hat er günstige Maassverhältnisse für dieses Kurbelgetriebe zur Erlangung einer angenäherten Geradführung abgeleitet, welche von ihm bei einer Dampfmaschine angewendet wurde[2]).

262. **Vierpunktige symmetrisch angenäherte Geradführung.** Wenn wir in Fig. **659** bei dem noch zu bestimmenden Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ das gleichschenkelige Koppeldreieck $F_I O_I D$ als gegeben betrachten, dessen gleiche Seiten $O_I F_I$, $O_I D$ gleich dem an die Spitze O_I angeschlossenen Arme ΩO_I sind, so können wir verschiedene Kurbelgetriebe construiren, deren Koppelpunkt D eine vierpunktige symmetrisch angenäherte Geradführung erzeugt. Um z. B. ein solches Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ zu erhalten, beschreiben wir um den angenommenen festen Axenpunkt Ω mit dem Arme ΩO_I als Radius den Kreis ω, machen den Winkel $\zeta \Omega \Phi = \frac{1}{2} F_I O_I D$, und nehmen auf einer zur Geraden ζ senkrecht gezogenen Geraden $\mathfrak{d}$ die Punkte D_1, D_2 so an, dass $D_1 m$ gleich der gewählten halben Annäherungsstrecke $D_1 D_4$ und $D_1 D_2 = 2 D_2 m$ ist. Hieranf fassen wir das gegebene gleichschenkelige

---

1) Tchébychew (meist auch Tschebischeff geschrieben), *Mémoires des Savants étrangeres présentés à l'Académie de St. Petersbourg.* 1854. T. VII. p. 537; ferner in den *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen.* 1870. S. 168, Uebersetzung der russisch geschriebenen Abhandlung in den *Memoiren der Academie in St. Petersburg.* 1868. B. XIV. S. 38.

2) *Officieller Ausstellungsbericht Wien 1873.* Motoren von Radinger. Heft 83. S. 84.

Koppeldreieck $F_I O_I D$ in den Dreispitzzirkel, legen vermittelst desselben die Ecke D nach einander in die Punkte D_1, D_2, ferner die Ecke O_I einerseits auf den Kreis ω in die entsprechenden Lagen O_1, O_2 und markiren die zugehörigen Lagen F_1, F_2 der Ecke F_I; dann ist der auf $\Omega\Phi$ liegende Mittelpunkt Φ des durch die Punkte F_1, F_2 gehenden Kreises φ der gesuchte feste Axenpunkt Φ und der Radius ist gleich der Länge des gesuchten Armes ΦF_I des Kurbelgetriebes $\Phi F_I O_I \Omega$, welches in der Stellung gezeichnet ist, die der in ζ befindlichen Lage des Koppelpunktes D entspricht. Der feste Axenpunkt Φ kann auch mit Hülfe des Pols P^{12} der beiden Dreieckslagen $F_1 O_1 D_1$, $F_2 O_2 D_2$ bestimmt werden, indem wir von P^{12} durch die Mitte der Verbindungsstrecke $F_1 F_2$ die Gerade $P^{12}\Phi$ ziehen, welche die Gerade $\Omega\Phi$ in dem Punkte Φ schneidet. Der Koppelpunkt D des so erhaltenen Kurbelgetriebes $\Phi F_I O_I \Omega$ beschreibt eine von der Geraden ζ symmetrisch getheilte Bahncurve δ, welche die vier in gleichen Abständen befindlichen Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 mit der Geraden $\mathfrak{d}$ gemein hat und dieselbe ausserhalb der Annäherungsstrecke $D_1 D_4$ noch in zwei Punkten schneidet. Wenn wir in diesem Falle, bei welchem das gleichschenkelige Koppeldreieck $F_I O_I D$ an der Spitze O_I einen spitzen Winkel besitzt, nach Art. 261 die Construction eines Kurbelgetriebes ausführten, welches eine sechspunktige symmetrisch angenäherte Geradführung bewirkt; dann würde sich ergeben, dass der Arm ΦF_I verhältnissmässig lang wird und das Kurbelgetriebe eine für die Praxis nicht verwendbare Gestalt annimmt. Es müssten also auch beide Schleifen der symmetrischen Bahncurve δ verschwinden, damit der angenäherte Theil derselben die betreffende Gerade $\mathfrak{d}$ in sechs Punkten schneidet. Zu dem Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ ist das zugesellte gleicharmige Kurbelgetriebe $\Phi F L \Lambda$ mit dem gleichschenkeligen Koppeldreieck FDL und das zugesellte, dem ersten gleiche, symmetrisch gelegene Kurbelgetriebe $\Lambda L_{II} O_{II} \Omega$ gezeichnet, welche beide dieselbe vierpunktige symmetrisch angenäherte Geradführung erzeugen.

In Fig. **660** ist das erhaltene gleicharmige Kurbelgetriebe $\Phi F L \Lambda$ in den beiden Stellungen $\Phi F_1 L_1 \Lambda$, $\Phi F_2 L_2 \Lambda$ gezeichnet, die den Lagen D_1, D_2 des Koppelpunktes D entsprechen; und es sind durch die zugehörigen Pole $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ die Normalen $D_1\mathfrak{P}_1$, $D_2\mathfrak{P}_2$ an der Bahncurve δ bestimmt. Diese Normalen sind angenähert senkrecht zur Geraden $\mathfrak{d}$; und dadurch wird bestätigt, dass die Bahncurve δ sich innerhalb der Annäherungsstrecke $D_1 D_4$ an die Gerade $\mathfrak{d}$ sehr nahe anschmiegt.

Wenn wir in Fig. 660 ein gleicharmiges Kurbelgetriebe in den beiden Stellungen $\Phi F_1 L_1 \Lambda$, $\Phi F_2 L_2 \Lambda$ als gegeben betrachten, so können wir auf der Geraden z_1, welche in der Mitte Z_1 auf der Koppel $F_1 L_1$ senkrecht steht, leicht den Punkt D_1 bestimmen, der eine vierpunktige symmetrisch angenäherte Geradführung erzeugt. Wir markiren auf den homologen Geraden $z_1 Z_1$, $z_2 Z_2$ noch zwei beliebige homologe Punkte Y_1, Y_2, ziehen durch die Mitten der Verbindungsstrecken $Y_1 Y_2$, $Z_1 Z_2$ die Gerade q, construiren den Pol P^{12} der beiden Koppellagen $F_1 L_1$, $F_2 L_2$; wir ziehen ferner durch P^{12} auf $\Phi\Lambda$ die Senkrechte $P^{12}d$, welche die Gerade q im Punkte d trifft und durch d zu $\Phi\Lambda$ die parallele Gerade $\mathfrak{d}$, welche die Geraden z_1, z_2 in den homologen Punkten D_1, D_2 schneidet. Zeichnen wir nun zu diesen Punkten D_1, D_2 die bezüglich der Geraden ζ symmetrisch gelegenen Punkte D_3, D_4, so beschreibt der Koppelpunkt D_1 eine Bahncurve δ, welche die vier Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 mit der Geraden $\mathfrak{d}$ gemein hat; aber wir können hier durch die Annahme jener beiden Stellungen des Kurbelgetriebes nicht erlangen, dass diese vier Punkte sich alle in gleichen Abständen befinden.

Den Punkten D_1, D_2, D_3, D_4 entsprechen vier zu der Geraden ζ symmetrische Koppellagen, welche vier ebene Systeme S_1, S_2, S_3, S_4 bestimmen. Die Gegenpolpaare $P^{12}P^{34}$, $P^{13}P^{24}$ dieser Systeme liegen, wie man leicht erkennt, auch symmetrisch zur Geraden ζ, und dem zufolge besteht die Mittelpunktcurve dieser vier Systeme nach S. 620 aus der Geraden ζ und dem durch diese Gegenpolpaare gehenden Kreise χ, der auch die Punkte Φ, Λ enthält. Jeder Punkt der Geraden z_1 des Systems S_1 liegt mit seinen drei homologen Punkten auf je einem Kreise, dessen Mittelpunkt sich auf der Geraden ζ befindet. Demnach besteht die Kreispunktcurve im System S_1 aus der Geraden z_1 und dem durch die Pole P^{12}, P^{13} gehenden Kreise x_1, der auch die Punkte F_1, L_1 enthält. Jeder Punkt des Kreises x_1 im System S_1 liegt also mit seinen drei homologen Punkten auf je einem Kreise, dessen Mittelpunkt sich auf dem Kreise χ befindet. Nehmen wir nun auf dem Kreise χ zwei zur Geraden ζ symmetrisch liegende Punkte Φ', Λ' als feste Axenpunkte an, so entsprechen diesen zwei auf dem Kreise x_1 zur Geraden z_1 symmetrisch liegende Gelenkpunkte F_1', L_1'; und die Punktgruppen $\Phi\Phi'\Lambda'\Lambda$, $FF_1'L_1'L$ sind nach dem Satze auf S. 606 ähnlich. Wir erhalten hierdurch ein zweites gleicharmiges Kurbelgetriebe $\Phi' F_1' L_1' \Lambda'$, dessen Koppelpunkt D_1 eine Bahncurve δ beschreibt, welche dieselben vier Punkte D_1, D_2,

D_3, D_4 mit der Geraden $\mathfrak{d}$ gemein hat; und von diesem Kurbelgetriebe sind der besseren Uebersicht wegen in Fig. **661** die beiden den Punkten D_1, D_2 entsprechenden Stellungen $\Phi' F_1' L_1' \Lambda'$, $\Phi' F_2' L_2' \Lambda'$ gezeichnet. In gleicher Weise erhalten wir durch die Annahme der beiden auf dem Kreise χ symmetrisch zu ζ liegenden festen Axenpunkte Φ'', Λ'' und durch die Bestimmung der entsprechenden auf dem Kreise x_1 liegenden Gelenkpunkte F_1'', L_1'' ein drittes derartiges gleicharmiges Kurbelgetriebe $\Phi'' F_1'' L_1'' \Lambda''$, von dem in Fig. **662** die den beiden Punkten D_1, D_2 entsprechenden Stellungen gezeichnet sind. Es können also vermittelst der beiden Kreise χ, x_1 unendlich viele gleicharmige Kurbelgetriebe bestimmt werden, bei welchen der betreffende Koppelpunkt D_1 eine Bahncurve beschreibt, die mit der Geraden $\mathfrak{d}$ die vier Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 gemein hat, und somit eine vierpunktige symmetrisch angenäherte Geradführung erzeugt. Wir dürfen aber mit der Annahme der festen Axenpunkte auf dem Kreise χ in Fig. **660** in der unteren Hälfte desselben nicht zu tief herabgehen; denn bei tief auf diesem Kreise liegenden festen Axenpunkten vergrössern sich die Abweichungen der Bahncurve von der Geraden, so dass eine angenäherte Geradführung nicht mehr stattfindet. Die in der angegebenen Weise durch ein gleicharmiges Kurbelgetriebe erzeugte angenäherte Geradführung, welche Roberts[1]) erfunden hat, wird die Roberts'sche Geradführung genannt und der Mechanismus derselben wird auch als Roberts'scher Lenker bezeichnet.

263. **Sechspunktige symmetrisch angenäherte Geradführung vermittelst eines Schleifkurbelgetriebes erzeugt.** Die bisher betrachteten angenäherten Geradführungen wurden durch zweckmässig angeordnete Kurbelgetriebe bewirkt. Wir können aber ein in Fig. **663**, Taf. XLII, dargestelltes Schleifkurbelgetriebe $\Phi F_1 \Lambda$, bei welchem die Stange $F_1 D_1$ in einer um die feste Axe Λ drehbaren Hülse H gleitet und von der Kurbel ΦF_1 bewegt wird, auch leicht so einrichten, dass ein auf der Stange $F_1 D_1$ liegender Punkt D_1, dessen Bahncurve δ eine Kreiskonchoide ist, eine sechspunktige symmetrisch angenäherte Geradführung beschreibt. Behufs der Construction dieses Schleifkurbelgetriebes theilen wir die auf der Geraden $\mathfrak{d}$ gewählte Annäherungsstrecke $D_1 D_6$ durch die Punkte D_2, D_3, D_4, D_5 in fünf gleiche Theile, errichten in der Mitte m auf derselben die senkrechte Gerade $m\Delta_\infty$ und nehmen

[1]) Willis, *Principles of Mechanism.* 1841. p. 411.

auf dieser Geraden den festen Axenpunkt Λ in zweckmässiger Lage an. Durch die sechs Punkte D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 sind sechs Lagen der durch den festen Punkt Λ gleitenden starren Geraden bestimmt. Wir betrachten nun zunächst die vier Lagen $D_1\Lambda$, $D_2\Lambda$, $D_3\Lambda$, $D_4\Lambda$, construiren den Pol P^{12} der beiden Lagen $D_1\Lambda$, $D_2\Lambda$ als den Schnittpunkt der in der Mitte D_1D_2 auf $\mathfrak{d}$ senkrechten Geraden dP^{12} und der Halbirungsgeraden ΛP^{12} des Winkels $D_1\Lambda F_2$, die auf der Halbirungsgeraden $\Lambda\eta$ des zugehörigen Nebenwinkels $D_1\Lambda D_2$ senkrecht steht; ferner bestimmen wir in gleicher Weise die Pole P^{14}, P^{24} für die Lagen $D_1\Lambda$, $D_4\Lambda$ und $D_2\Lambda$, $D_4\Lambda$. Wir markiren sodann auf den drei Geraden $D_1\Lambda$, $D_2\Lambda$, $D_4\Lambda$ drei homologe Punkte A_1, A_2, A_4, indem wir die von beliebiger Länge gewählten, gleichen Strecken D_1A_1, D_2A_2, D_4A_4 auftragen, und construiren den Mittelpunkt A des durch diese drei homologen Punkte gehenden Kreises. Der Kegelschnitt ε^{134}, der die Mittelpunkte aller durch je drei homologe Punkte der Geraden $D_1\Lambda$, $D_3\Lambda$, $D_4\Lambda$ gehenden Kreise trägt, zerfällt, weil die Geraden $D_3\Lambda$, $D_4\Lambda$ bezüglich der Geraden $m\Delta_\infty$ symmetrisch liegen, in die Gerade $m\Lambda_\infty$ und in eine andere Gerade, die hier nicht in Betracht kommt. Der Kegelschnitt ε^{124}, der die Mittelpunkte aller durch je drei homologe Punkte der Geraden $D_1\Lambda$, $D_2\Lambda$, $D_4\Lambda$ gehenden Kreise enthält, ist durch die fünf Punkte P^{12}, P^{14}, P^{24}, A, Δ_∞ bestimmt und schneidet die Gerade $m\Delta_\infty$ ausser in dem unendlich fernen Punkte Δ_∞ in dem Mittelpunkte Φ des Kreises φ, der durch vier homologe Punkte F_1, F_2, F_3, F_4 und wegen der symmetrischen Anordnung jener sechs Lagen auch durch die beiden übrigen homologen Punkte F_5, F_6 geht. Um den Mittelpunkt Φ als den zweiten Schnittpunkt der Geraden $m\Delta_\infty$ und des Kegelschnitts ε^{124} nach dem Pascal'schen Satze zu construiren, nehmen wir die Ecken des Sechsecks, welches dem Kegelschnitt ε^{124} eingeschrieben ist, beispielsweise in der Reihenfolge P^{14}, P^{24}, A, P^{12}, Φ, Δ_∞; dann liefern die Gegenseiten $P^{24}\mathsf{A}$, $\Phi\Delta_\infty$ den Schnittpunkt g und die Gegenseiten $\mathsf{A}P^{12}$, $\Delta_\infty P^{14}$ den Schnittpunkt h. Dadurch erhalten wir die Pascal'sche Gerade gh, welche die Gerade $P^{14}P^{24}$ im Punkte i schneidet, und somit ergiebt sich die Gerade iP^{12}, die auf $m\Delta$ den gesuchten Mittelpunkt Φ bestimmt. Den Punkt F_1 der Geraden $D_1\Lambda$, der dem Mittelpunkte Φ entspricht, erhalten wir durch die gleichen Winkel $\Phi P^{12}F_1$, $\Delta_\infty P^{12}D_1$; oder indem wir die Verbindungsgerade q durch die Mitten a, d der Verbindungsstrecken A_1A_2, D_1D_2 ziehen, und ferner durch den Schnittpunkt f, den dieselbe mit der Geraden $P^{12}\Phi$ bildet, auf $P^{12}\Phi$ die Senkrechte F_1F_2 ziehen, welche $D_1\Lambda$, $D_2\Lambda$ resp. in den Punkten F_1, F_2 trifft. Der um Φ durch die Punkte F_1, F_2 gezogene Kreis φ enthält demnach die sechs homologen Punkte F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6. Der Punkt D_1 der Stange F_1D_1 des Schleifkurbelgetriebes $\Phi F_1\Lambda$ beschreibt also dieser Anordnung gemäss eine von der Geraden $m\Delta_\infty$ symmetrisch getheilte Bahncurve δ, welche die sechs in gleichen Abständen befindlichen Punkte D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6 mit der Geraden $\mathfrak{d}$ gemein hat, und erzeugt dem zufolge eine sechspunktige symmetrisch angenäherte Geradführung, die sich innerhalb der verhälnissmässig langen Annäherungsstrecke D_1D_6 ausserordentlich nahe an die Gerade $\mathfrak{d}$ anschmiegt.

Wenn in Fig. **664** ein Schleifkurbelgetriebe $\Phi F_1\Lambda$ gegeben ist, so kann man für einen vorgeschriebenen Drehungswinkel $F_1\Phi F_4$ des Armes ΦF_1 leicht den Punkt D_1 der Stange F_1D_1 bestimmen, der innerhalb einer entsprechenden Annäherungsstrecke D_1D_4 eine vierpunktige symmetrisch angenäherte Geradführung erzeugt. Wir wählen zwischen den beiden gegebenen zur Geraden Λm symmetrischen Lagen $F_1\Lambda$, $F_4\Lambda$ noch zwei andere symmetrische Lagen $F_2\Lambda$, $F_3\Lambda$, bestimmen in bekannter Weise den Pol P^{12} der Lagen $F_1\Lambda$, $F_2\Lambda$ und nehmen auf denselben noch zwei beliebige homologe Punkte A_1, A_2 an. Hierauf ziehen wir durch die Mitten a, f der Verbindungsstrecken A_1A_2, F_1F_2 die Gerade q, ferner durch den Pol P^{12} zu Λm die Parallele $P^{12}d$, welche q im Punkte d schneidet, und durch d die auf Λm senkrechte Gerade $\mathfrak{d}$, die auf jenen vier Lagen die vier homologen Punkte D_1, D_2, D_3, D_4 bestimmt. Aber es ist hier nicht zu erlangen, dass diese vier Punkte sich alle in gleichen Abständen befinden. Der Punkt D_1 der Stange F_1D_1 erzeugt demnach eine vierpunktige symmetrisch angenäherte Geradführung. Die von der Geraden Λm symmetrisch getheilte Bahncurve δ des Punktes D_1 weicht, wie man aus der Bestimmung ihrer Normalen $\mathfrak{P}_1D_1$ erkennt, in den Endpunkten D_1, D_4 der Annäherungsstrecke D_1D_4 nach der Kurbelseite hin von der Geraden $\mathfrak{d}$ ab und schneidet demnach dieselbe ausserhalb der Annäherungsstrecke D_1D_4 noch in zwei zu Λm symmetrisch gelegenen Punkten. Die Annäherungsstrecke ist bei dieser Anordnung aber verhältnissmässig kurz im Vergleich zu jener sechspunktigen symmetrisch angenäherten Geradführung.

Bei der älteren Construction des geradführenden Schleifkurbelgetriebes wird zwischen den beiden Lagen ΛD_1, ΛD_4 nur eine

Lage in der Geraden $\mathrm{A}m$ angenommen und der Mittelpunkt Φ eines durch drei homologe Punkte gehenden Kreises construirt. Dieser Construction gemäss coincidiren die beiden Punkte D_2, D_3 in m auf der Geraden $\mathfrak{d}$; aber hierin liegt eine geringe Gewähr für die Annäherung der Bahncurve δ an die Gerade. In dieser unzweckmässigen Weise wurde bisher das geradführende Schleifkurbelgetriebe construirt, welches von Reichenbach[1]) stammt und daher auch Reichenbach'scher Lenker genannt wird.

264. **Allgemeine fünfpunktige angenäherte Geradführung.** Behufs der Construction der Kurbelgetriebe, bei welchen der geradgeführte Punkt mit den beiden Gelenkpunkten der Koppel ein bestimmtes Dreieck bildet und eine fünfpunktige angenäherte Geradführung vollzieht, nehmen wir in Fig. **665** die fünf entsprechenden gleichen Strecken D_1F_1, D_2F_2, D_3F_3, D_4F_4, D_5F_5 so an, dass die fünf homologen Punkte D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 sich in gleichen Abständen auf einer Geraden $\mathfrak{d}$ befinden und die fünf homologen Punkte F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 auf einem Kreise φ liegen, dessen Mittelpunkt Φ ist. Hierdurch sind fünf congruente ebene Systeme S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 bestimmt, und da es in diesen fünf Systemen nach dem Satze auf S. 622 ausser dem Kreise φ und dem durch die Gerade $\mathfrak{d}$ gebildeten unendlich grossen Kreise noch zwei Kreise λ, τ giebt, welche ebenfalls je fünf homologe Punkte L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 und T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 enthalten, so können wir die Mittelpunkte $\mathrm{\Lambda}$, T der Kreise λ, τ vermittelst zweier Mittelpunktcurven construiren. Wir betrachten zunächst die vier Systeme S_1, S_2, S_3, S_4 und die Mittelpunktcurve σ^{1234} derselben, welche durch die sechs zugehörigen Pole P^{12}, P^{13}, P^{23}, P^{14}, P^{24}, P^{34} geht und durch zwei Gegenpolpaare bestimmt ist. Von diesen sechs Polen liegen die Gegenpole P^{14}, P^{23} auf der in der Mitte von D_2D_3 auf $\mathfrak{d}$ senkrechten Geraden ζ_I, und ferner liegen die Gegenpole P^{12}, P^{34}, sowie die Gegenpole P^{13}, P^{24} beziehlich in gleichen Abständen von der Geraden $P^{14}P^{23}$ oder ζ_I; und folglich ist diese Gerade ζ_I die Mittellinie der Mittelpunktcurve σ^{1234}. Um nun dieselbe, wie S. 619 (Fig. **634**) gelehrt wurde, vermittelst eines Kreisbüschels und eines projectiven Strahlenbüschels, dessen Strahlen durch die Mittelpunkte der entsprechenden Kreise gehen, zu construiren, beschreiben wir über $P^{14}P^{23}$ als Durchmesser den Orthogonalkreis $\varkappa_I$ des Kreisbüschels und bestimmen das Focalcentrum Γ_I, welches

---

[1]) *Jahrbücher des Polytechnischen Institutes in Wien.* 1820. B. II. S. 336. — *Abhandlungen der Königlichen Technischen Deputation für Gewerbe.* 1826. I. Thl. S. 370.

der Scheitelpunkt des Strahlenbüschels ist. Da die Mittelpunktcurve σ^{1234} auch durch den Punkt Φ geht, so erhalten wir das Focalcentrum Γ_I, wenn wir in der Mitte i_I auf ΦP^{14} eine Senkrechte $i_I n_I$ bis an die Chordale k_I errichten und die auf $n_I \Phi$ senkrechte Gerade $\Phi\Gamma_I$ ziehen, ferner ebenso in der Mitte i'_I auf $P^{12}P^{14}$ die Senkrechte $i'_I n'_I$ bis an die Chordale k_I errichten und die auf $n'_I P^{12}$ senkrechte Gerade $P^{12}\Gamma_I$ ziehen. Hiernach ergiebt sich der Scheitelpunkt Γ_I des Strahlenbüschels als Schnittpunkt der Geraden $\Phi\Gamma_I$, $P^{12}\Gamma_I$, und es sind somit zur Bestimmung der Mittelpunktcurve σ^{1234} ausser dem gegebenen Punkte Φ nur die beiden Gegenpole P^{14}, P^{23} und ein dritter Pol, wie z. B. P^{12}, erforderlich; aber das Hindurchgehen der gezeichneten Mittelpunktcurve σ^{1234} durch die übrigen Pole dient als Controle für die Richtigkeit der Zeichnung. Betrachten wir nun die vier Systeme S_1, S_2, S_4, S_5 und die Mittelpunktcurve σ^{1245} derselben, welche durch die sechs zugehörigen Pole P^{12}, P^{14}, P^{24}, P^{15}, P^{25}, P^{45} und durch den Punkt Φ geht, so liegen die Gegenpole P^{15}, P^{24} auf der in D_3 auf $\mathfrak{d}$ senkrechten Geraden ζ_{II}, und die anderen Gegenpole P^{12}, P^{45}, sowie P^{14}, P^{25} befinden sich resp. in gleichen Abständen von der Geraden $P^{15}P^{24}$ oder ζ_{II}, welche also die Mittellinie der Mittelpunktcurve σ^{1245} ist. Wir beschreiben hiernach über $P^{15}P^{24}$ als Durchmesser den Orthogonalkreis $\varkappa_{II}$, bestimmen wie vorhin das Focalcentrum Γ_{II} und erhalten somit die gezeichnete Mittelpunktcurve σ^{1245}. Die beiden Mittelpunktcurven σ^{1234}, σ^{1245}, welche auch durch den unendlich fernen Mittelpunkt Δ_∞ des unendlich grossen Kreises $\mathfrak{d}$ gehen, schneiden sich in den beiden neuen Punkten Λ, T; und dies sind die Mittelpunkte der Kreise λ, τ, die je fünf homologe Punkte jener fünf Systeme enthalten.

Um in dem System S_1 den Punkt T_1 zu bestimmen, der dem Mittelpunkte T entspricht, betrachten wir diesen Mittelpunkt T als in dem Mittelpunktsystem Σ^{124} liegend, welches zu den drei Systemen S_1, S_2, S_4 gehört. Demnach ergiebt sich, wenn wir den Winkel $D_1P^{12}T_1 = \Delta_\infty P^{12}\mathrm{T}$ und den Winkel $D_1P^{14}T_1 = \Delta_\infty P^{14}\mathrm{T}$ machen, der Punkt T_1 als Schnittpunkt der beiden Schenkel $P^{12}T_1$, $P^{14}T_1$; und der um T mit dem Radius $\mathrm{T}T_1$ beschriebene Kreis τ enthält die fünf homologen Punkte T_1, T_2, T_3, T_4, T_5. In analoger Weise ergiebt sich im System S_1 der Punkt L_1, der dem Mittelpunkte Λ entspricht, und der um Λ mit dem Radius ΛL_1 beschriebene Kreis λ, welcher die fünf homologen Punkte L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 enthält. Diese homologen Punkte werden vermittelst eines Dreispitzzirkels eingetragen; und dadurch, dass diese Punkte genau auf den betreffenden Kreisen liegen, wird die Richtigkeit und Genauigkeit der Construction bestätigt.

Bilden wir erstens das Kurbelgetriebe $\Phi F_1 L_1 \Lambda$ mit dem Koppeldreieck $F_1 L_1 D_1$, so beschreibt der Koppelpunkt D_1 eine Bahncurve δ, welche die fünf in gleichen Abständen befindlichen Punkte D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 mit der Geraden $\mathfrak{d}$ gemein hat und sich derselben sehr nahe anschmiegt. Bilden wir zweitens der besseren Uebersicht wegen gesondert in der Fig. **666** das Kurbelgetriebe $\Lambda L_1 T_1 \mathrm{T}$ mit dem Koppeldreieck $L_1 T_1 D_1$, so erzeugt der Koppelpunkt D_1 eine zweite Bahncurve δ', welche dieselben fünf Punkte mit der Geraden $\mathfrak{d}$ gemein hat, sich aber weniger genau anschmiegt; denn dies ersieht man leicht durch die Bestimmung der Curvennormalen. Und bilden wir drittens gesondert in der Fig. **667** das Kurbelgetriebe $\Phi F_1 T_1 \mathrm{T}$ mit dem Koppeldreieck $F_1 T_1 D_1$, so durchläuft der Punkt D_1 eine dritte Bahncurve δ'', welche mit der Geraden $\mathfrak{d}$ dieselben fünf Punkte gemein hat, sich aber ebenfalls weniger genau anschmiegt als die erste Bahncurve. In diesem dritten Falle ist das Kurbelgetriebe $\Phi F_1 T_1 \mathrm{T}$ ein durchschlagendes und die Bahncurve δ'' besitzt einen Sonderdoppelpunkt G (S. 297). Jedes der drei Kurbelgetriebe bewirkt also eine fünfpunktige angenäherte Geradführung; und von diesen Geradführungen erweist sich die erste als die am meisten angenäherte. Nach dem R o b e r t s'schen Satze gesellen sich noch zu jedem dieser drei Kurbelgetriebe je zwei neue Kurbelgetriebe, welche beziehlich die gleiche Bahncurve erzeugen; und somit erhalten wir neun Kurbelgetriebe, welche fünfpunktige angenäherte Geradführungen bewirken. Von diesen kann man die zweckmässigsten auswählen, und ferner kann man auch durch Verkürzung der verhältnissmässig langen Annäherungsstrecke die Genauigkeit der Geradführung erhöhen.

In der verkleinerten Zeichnung Fig. **668** sind zu dem ersten Kurbelgetriebe $\Phi F_1 L_1 \Lambda$ die beiden zugesellten Kurbelgetriebe $\Phi F_I O_I \Omega$ und $\Lambda L_{II} O_{II} \Omega$ nach dem R o b e r t s'schen Satze in bekannter Weise dargestellt, bei denen der Koppelpunkt D_1 dieselbe gezeichnete Bahncurve δ erzeugt. Ebenso sind in Fig. **669** zu dem zweiten Kurbelgetriebe $\Lambda L_1 T_1 \mathrm{T}$ die beiden zugesellten Kurbelgetriebe $\Lambda L_I O_I \Omega$ und $\mathrm{T} T_{II} O_{II} \Omega$ construirt. Ferner sind schliesslich in Fig. **670** zu dem dritten durchschlagenden Kurbelgetriebe $\Phi F_1 T_1 \mathrm{T}$ die beiden zugesellten, ebenfalls durchschlagenden Kurbelgetriebe $\mathrm{T} T_I O_I \Omega$ und $\Phi F_{II} O_{II} \Omega$ gezeichnet.

ZEHNTER ABSCHNITT.

Mechanismen bewährter Schiebersteuerungen.

Steuerungen mit einem Schieber.

265. **Zweck der Schiebersteuerung an der Dampfmaschine.** Die mannigfach gestalteten Mechanismen der Steuerungen der Dampfmaschinen bilden ein unübersehbar grosses ergiebiges Gebiet für die kinematische Untersuchung; und wir wollen deshalb hier nur die Mechanismen derjenigen Schiebersteuerungen betrachten, welche sich in der Praxis bewährt haben, um zu zeigen, in welcher Weise die Beziehungen der Bewegungsvorgänge und die Lösungen der betreffenden Aufgaben durch die kinematische Behandlung dargelegt werden.

In Fig. **671**, Taf. XLIII, ist der Längsschnitt einer liegenden Dampfmaschine schematisch gezeichnet, bei welcher die Kurbel ΦF, die Kurbelstange FL und die Kolbenstange LK nebst dem in dem Cylinder C gleitenden Kolben K ein Schubkurbelgetriebe bilden. Damit der Kolben in dem Cylinder durch den Dampfdruck getrieben hin- und herbewegt wird und die Drehung der Kurbel ΦF vermittelst der Kurbelstange bewirkt, muss der Dampf in entsprechender Weise geleitet werden. Zu diesem Zwecke wird vermittelst eines Excenters und einer Excenterstange ein Dampfschieber s in hin- und hergehende Bewegung versetzt. In unserem Schema ist der Excenter, dessen Mittelpunkt E und dessen Excentricität also gleich ΦE ist, der Einfachheit wegen durch eine Kurbel ΦE vertreten, die wir auch den Excenterarm nennen. Durch die Excenterstange EH ist dieser Excenterarm mit der Schieberstange σ gelenkig verbunden; an derselben ist der Schieber s befestigt, der mit einer ebenen Fläche an dem Cylinder auf einer ebenen Bahn, dem Schieberspiegel, gleitet. Von diesem führen die zwei Kanäle $\varkappa$, $\varkappa'$ in den Cylinder, und ferner geht der zwischen den beiden befindliche Kanal ω, der auch die Höhlung heisst, nach aussen. In der gezeichneten Stellung tritt der Dampf des Kessels vom Schieberkasten her durch den Kanal $\varkappa$ und bewegt den Kolben K näher zur Wellenaxe Φ, gleichzeitig strömt aber der vor dem Kolben befindliche Dampf durch den Kanal $\varkappa'$ und die Schiebergrube in die Höhlung ω nach aussen. Hat der Kolben die nach der Welle Φ gerichtete Bewegung, die auch der *Eingang* genannt wird, vollendet; dann muss durch den Schieber eine Wechselung der Dampfströmung bewirkt werden, so dass jetzt der Dampf durch den Kanal $\varkappa'$ in den Cylinder eintreten und anderseits durch den Kanal $\varkappa$, der vermittelst der Schiebergrube mit der Höhlung ω communicirt, ausströmen kann. Infolge dessen entfernt sich wieder der Kolben von der Welle Φ; und wenn diese Bewegung des Kolbens, die auch der *Ausgang* genannt wird, beendet ist, hat die Kurbel ΦF, die durch Beharrungsschluss die Todtpunkte F_0, F_τ überschreitet, eine Umdrehung gemacht. Durch die Lehre von der Schiebersteuerung müssen die theoretischen Beziehungen der Bewegungen des Schiebers und des Kolbens dargelegt werden, welche den praktischen Anforderungen entsprechen und zur Lösung der vorkommenden Aufgaben führen.

Wir haben in der schematischen Darstellung der Dampfmaschine der besseren Uebersicht wegen den Schieber schräg über den Dampfcylinder gleitend angenommen. Meistens gleitet der Schieber aber neben dem Dampfcylinder, so dass die Richtung der Schieberbewegung zur Cylinderaxe LK parallel ist; und von dieser für die Darlegung einfacheren Einrichtung werden wir bei unseren späteren Betrachtungen vorzugsweise ausgehen.

Der Excenterarm ΦE, oder die Excentricität, ist im Verhältniss zu der Excenterstange EH meistens sehr klein, oft kleiner als 1 : 50, so dass wir die Excenterstange gegen den Excenterarm als unendlich lang ansehen können. Demnach stimmt die Bewegung des Schiebers sehr angenähert überein mit der Bewegung, welche die senkrechte Projection des rotirenden Punktes E auf der Geraden ΦH oder auf der Schubrichtung des Schiebers vollzieht. Bei der Kolbenbewegung ist aber das Verhältniss der Kurbel ΦF zu der Schubstange FL oft nicht kleiner als 1 : 5; daher kann die Kolbenbewegung nicht durch die Projectionsbewegung des Kurbelzapfens F ersetzt werden. In Fig. **671**, wo das Verhältniss $\Phi F : FL = 1 : 3$ ist, weicht demnach das in bekannter Weise nach Art. 143 gezeichnete, orthogonale örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ des Punktes L schon bedeutend von der Kreis-form ab. Dieses Verhältniss der Kurbel zur Schubstange wollen wir als Beispiel in der Folge stets annehmen.

266. **Bogenförmiges Kolbendiagramm.** Sollen in Fig. **671** für verschiedene Wegstrecken des Kolbens resp. des Punktes L der Kolbenstange, die entsprechenden Kurbelstellungen und umgekehrt zu diesen die Wegstrecken bestimmt werden, so beschreiben wir um L mit der Kurbelstange LF_e einen Kreisbogen, der den Kurbelkreis φ in den Punkten F_e, F_a schneidet, dann ist, wenn die Kurbel sich in der Richtung des eingezeichneten Pfeiles bewegt, ΦF_e die entsprechende Kurbelstellung für den Eingang und ΦF_a für den Ausgang des Kolbens. Beschreiben wir ferner um die Weggrenzen L_0, L_τ des Punktes L mit der Kurbelstange die Kreisbögen ζ_0, ζ_τ, die den Kurbelkreis φ in den Todtpunkten F_0, F_τ berühren; dann repräsentirt die zu ΦL parallele Strecke $Z_e F_e = L_0 L$ die Weglänge, welche der Punkt L oder Kolben vom Beginn des Einganges bis zur Kurbelstellung ΦF_e durchschritten hat; und anderseits stellt die zu ΦL parallele Strecke $F_e Z_e' = L L_\tau$ die Weglänge dar, die der Kolben noch während seines Einganges zu durchlaufen hat. In gleicher Weise giebt die zu ΦL parallele Strecke $Z_a' F_a$ auch die Weglänge des Kolbens beim Ausgange, wenn der Kurbelzapfen sich in F_a befindet. Wir erhalten also hierdurch ein durch Kreisbögen gebildetes Diagramm für den Kolbenweg, welches wir das bogenförmige Kolbendiagramm und allgemein das bogenförmige Wegdiagramm nennen[1]).

267. **Bewegungsphasen des Schiebers.** Um die Bewegungsvorgänge des Schiebers zu veranschaulichen, ist in Fig. **672** der Längsschnitt des Schiebers AB-$B'A'$ und der des Schieberspiegels $\Psi\Gamma\Delta\Omega$-$\Omega'\Delta'\Gamma'\Psi'$ gegeben. Beide sind symmetrisch gestaltet, und der Schieber schwingt symmetrisch zur Mitte ω des Schieberspiegels. Um die Schwingungsmitte M des Schieberpunktes A beschreiben wir mit dem Excenterarme den Kreis ε. Nehmen wir nun an, es rotire auf diesem Kreise ein Punkt ebenso wie das

[1]) Dieses bogenförmige Wegdiagramm, welches ohne Beachtung der Literatur unstatthaft nach Schorch benannt wird, ist schon bei älteren Untersuchungen angewandt. — Clark, *Railway Machinery.* 1855. Vol. I. p. 30. — Gray, „Geometry of the Slide Valve". *The Artizan.* 1860. Vol. 18. p. 311; ferner im *Civilingenieur.* 1861. B. 7. S. 359. — Schorch, „Kolben u. Schieberdiagramme", *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure.* 1876. B. XX. S. 304. — A. Seemann, „Zur Theorie der Schiebersteuerungen", *daselbst.* 1878. B. XXII. S. 445. Auch dessen *Müller'sche Schieberdiagramme in Anwendung auf die Steuerungen der Betriebsdampfmaschinen.* 1881.

Excentermittel, dann stimmt nach obiger Voraussetzung die Bewegung der Projection von diesem Punkte auf $\Psi\Psi'$ sehr angenähert mit der Bewegung des Schieberpunktes A überein. Dasselbe gilt von allen Schieberpunkten, so auch von dem Schieberpunkte A', für welchen um seine Schwingungsmitte M' der gleiche Kreis ε' beschrieben ist. Wir haben in bekannter Weise die Sinoide $\mathfrak{w}_A$, die das orthogonale Wegdiagramm des Punktes A darstellt, construirt, indem wir auf der in M zum Schieberspiegel $\Psi\Psi'$ senkrechten Geraden eine beliebige Strecke $T_0 T_{24}$, sowie den Kreis ε in eine Anzahl, etwa 24 gleicher Theile theilen und die auf $M T_{24}$ senkrechten Kreisordinaten, die diesen Kreistheilpunkten angehören, nach den entsprechenden Theilpunkten als Sinoidenordinaten antragen. Ferner sind auch für die Schieberpunkte B, B', A' die zugehörigen congruenten Wegdiagramme $\mathfrak{w}_B$, $\mathfrak{w}_{B'}$, $\mathfrak{w}_{A'}$ gezeichnet. Die zur Zeichnungsebene senkrechten Kanten A, B des Schiebers bewegen sich von der äussersten rechtsseitigen Lage über den als Steg benannten Flächentheil $\Psi\Gamma$ des Schieberspiegels, überschreiten den Kanal $\Gamma\Delta$ und gleiten auf dem Flächentheil $\Delta\Omega$, der als Rippe bezeichnet wird, weiter, bis A nach α gelangt, und kehren dann wieder auf ihrem Wege zurück. Während dieses Hin- und Herganges des Schiebers coincidirt seine Lappenkante A, sowie seine Grubenkante B zweimal mit jeder der Kanalseiten Γ, Δ; und dem gemäss haben wir für die Bewegung des Schieberlappens AB acht verschiedene Phasen *I*, *II*, *III*, . . . *VIII* zu betrachten, die in ihrer Reihenfolge durch ausgezogene Linien schematisch dargestellt sind.

In der Phase *I* bewegt sich die Grubenkante B über die Kanalseite Γ; es beginnt damit die Verengerung des Kanals $\Gamma\Delta$, resp. die Drosselung des durch ihn ausströmenden Dampfes. Mit der Phase *II*, in welcher die Grubenkante B die andere Kanalseite Δ überschreitet, ist die vollständige Schliessung des Kanals eingetreten. Diese dauert fort bis zur Phase *III*, die dem Uebergange der Lappenkante A über Γ entspricht. Nun beginnt das Oeffnen des Kanals und die geweiterte Einströmung des Dampfes. In der Phase *IV* schreitet A über Δ, und der Kanal ist für die Einströmung vollständig geöffnet. Nach diesen vier Phasen gelangt der Schieber in die äusserste linksseitige Stellung, bewegt sich dann in entgegengesetzter Richtung, und jetzt treten die vier folgenden Phasen hinsichtlich der betrachteten in symmetrischer Folge auf. Mit der Phase *V*, in welcher A sich über Δ befindet, beginnt wieder die Verengerung des Kanals und somit die Drosselung des einströmenden Dampfes. In der Phase *VI*, wo A über Γ steht, ist der Kanal vollständig geschlossen; dies dauert bis zu der Phase *VII*, dem Uebergange von B über Δ. Jetzt beginnt die geweiterte Ausströmung des Dampfes, und mit der Phase *VIII*, in welcher B über Γ hinweggeht, ist der Kanal für die Ausströmung vollständig geöffnet. Dies währt so lange, bis der Schieber nach seiner äussersten rechtsseitigen Lage gehend in die Phase *I* wieder zurückkehrt. Ganz analoge Vorgänge der Bewegung finden anderseits am Kanal $\Gamma'\Delta'$ durch den Schieberlappen $A'B'$ statt. Die betreffenden acht Phasen *I'*, *II'*, *III'*, .. *VIII'* des Schiebers sind durch einpunktige Gestrichelung gekennzeichnet und geben ohne weitere Erörterung ein übersichtliches klares Bild dieser Vorgänge.

268. **Das primitive Schieberdiagramm in Verbindung mit dem bogenförmigen Kolbendiagramm.** Nach dieser Betrachtung der Bewegung des Schiebers auf seiner Bahn $\Psi'\Psi'$ und seiner Lagen bezüglich der Kanäle müssen auch die Beziehungen, in welchen die gleichzeitigen Bewegungen des Schiebers und des Kolbens zu einander stehen, graphisch übersichtlich dargelegt werden, damit wir die Aenderung und Wechselung der Dampfströmung überschauen. Zu diesem Zwecke ist in Fig. **673** wieder wie vorhin mit dem angenommenen Excenterarme als Radius um Φ der Kreis ε beschrieben, und hierbei wurde von vornherein ein solcher Maassstab gewählt, dass dieser Kreis ε zugleich den Kurbelkreis der Dampfmaschine vertritt. Wir erhalten somit den Bewegungsvorgang des Schiebers in entsprechender Vergrösserung; und wir nennen das auf dem Kreise ε bewegt gedachte Excentermittel das ideelle Excentermittel. Mit der Phase *III*, wo die Lappenkante A mit Γ coincidirt, beginnt die Einströmung des Dampfes in den Kanal $\Gamma\Delta$, und dieser Lage von A entspricht der senkrecht über Γ liegende Punkt E_{III}, in welchem sich auf dem Kreise ε das ideelle Excentermittel E befindet. Nehmen wir nun an, dass in diesem Momente der Kurbelzapfen F im Punkte F_{III}, also noch vor der Todtlage F_0 steht, so ist der Winkel $F_{III}\Phi E_{III}$ bestimmt, den der Excenterarm mit der Kurbel bildet, und heisst der Aufkeilwinkel, weil das Excentrik unter diesem Winkel gegen die Kurbel gedreht auf der Welle festgekeilt wird. Ist aber die Richtung der Schieberbewegung nicht, wie oben vorausgesetzt wurde, dem Dampfcylinder parallel, sondern bildet sie wie in Fig. **671** mit der Cylinderaxe einen Winkel $L\Phi H$, dann muss der zugehörige Aufkeilwinkel noch um diesen Winkel $L\Phi H$ vergrössert

werden. Der Kurbelzapfen F hat also noch den Bogen $F_{III}F_0$ zu durchlaufen bis der Eingang des Kolbens beginnt; während dessen ist das ideelle Excentermittel nach E_0 und die Lappenkante A nach der Projection A_0 desselben gelangt. Somit ist beim Beginn des Kolbeneinganges der Kanal schon um die Strecke ΓA_0 eröffnet, die Voröffnungsstrecke oder die lineare Voreilung genannt wird; und der entsprechende Winkel $F_{III}\Phi F_0$ heisst der Voröffnungswinkel.

Drehen wir nun das stärker ausgezogene und in Gedanken mit $E\Phi F$ bezeichnete Dreieck $E_0\Phi F_0$ um Φ in die verschiedenen Lagen, welche jenen acht Phasen entsprechen, so werden damit die Vorgänge der rechtsseitigen Dampfströmung erkennbar. Befindet sich die Dreiecksseite EF in der Lage $E_{III}F_{III}$, die der Phase III entspricht, in welcher A mit Γ coincidirt, dann beginnt das Oeffnen des Kanals $\Gamma\Delta$ und die geweiterte Einströmung des Dampfes. Wenn bei weiterer Drehung EF nach $E_{IV}F_{IV}$ gekommen ist, also A über Δ steht, tritt die Phase IV ein. In diesem Momente ist der Kanal vollständig geöffnet, und die zu ΦF_0 parallele Strecke $Z_{IV}F_{IV}$ stellt die Weglänge dar, die der Kolben auf seinem Eingange bis dahin zurückgelegt hat. Beim Eintritt der Phase V ist EF nach E_VF_V gegangen und die Lappenkante A inzwischen wieder nach Δ zurückgekehrt; daher hat, während der Kurbelzapfen den Bogen $F_{IV}F_V$ durchschritt, volle Dampfeinströmung auf den Kolben gewirkt, dessen entsprechende Weglänge durch die Strecke Z_VF_V repräsentirt wird. Mit der Weiterbewegung beginnt die Drosselung des einströmenden Dampfes bis zur Phase VI, in der EF nach $E_{VI}F_{VI}$ gelangt ist und der Kanal geschlossen wird, so dass der eingetretene Dampf von jetzt an nur durch seine Expansion auf den Kolben wirkt. Die Wegstrecke $Z_{VI}F_{VI}$, die der Kolben auf seinem Eingange bis zum Momente der Expansion zurücklegt, heisst die Füllungsstrecke und das Verhältniss derselben zu seiner ganzen Weglänge heisst der Füllungsgrad oder die Füllung beim Kolbeneingange. Diese Expansion währt so lange, bis die Phase VII eintritt, in welcher die Grubenkante B mit Δ coincidirt. Um aber für diese Phase und für die folgenden Phasen die entsprechenden Lagen des Excentermittels E auf dem Kreise ε zu erhalten, machen wir auf dem Durchmesser F_0F_τ die Strecke $\Gamma C = BA$ und auch die Strecke $\Delta D = BA$, dann ist für die Phase VII, in welcher B über Δ schreitet, der Punkt D, die Projection von E_{VII} und damit auch die zugehörige Lage F_{VII} bestimmt. Von nun an beginnt die geweiterte Ausströmung des

Dampfes durch die Grube; und wenn die Phase $VIII$ erreicht ist, in welcher der Uebergang der Grubenkante B über Γ stattfindet, resp. E_{VIII} senkrecht unter C steht und F nach F_{VIII} gelangt ist, beginnt die volle Ausströmung. Gleich nachdem diese begonnen hat, überschreitet der Kurbelzapfen F den Todtpunkt F_τ, und der Kolben beginnt seinen Ausgang. Mit der Phase I oder den Lagen E_I, F_I, von denen E_I senkrecht über C liegt, hört die volle Ausströmung auf, weil die Grubenkante B zurückkehrend über Γ schreitet und somit die Drosselung des ausströmenden Dampfes bewirkt, welche in der Phase II mit der vollständigen Schliessung des Kanals endet. Das ideelle Excentermittel E hat sich nach E_{II} senkrecht über D, der Kurbelzapfen F nach F_{II} gedreht, und der Kolben hat auf seinem Ausgange bis zur Umkehr noch den Weg $F_{II} Z_{II}$ zu durchlaufen; infolge dessen tritt Compression des zwischen Kolben und Schieber eingeschlossenen Dampfes ein, die mit der Phase III oder den Lagen E_{III}, F_{III} aufhört.

Bei dieser Darlegung kommen vorzugsweise die gleichzeitigen Stellungen des Schiebers und der Kurbel in Betracht, und das ideelle Excentermittel E spielt hier nur eine vermittelnde Rolle. Wir brauchen daher nur die betreffenden Lagen des Kurbelzapfens zu construiren. Diese ergeben sich somit direct, wenn wir in Fig. **673** den Kreisdurchmesser NO ziehen, so dass der Winkel $F_\tau \Phi N$ dem Aufkeilwinkel $F_0 \Phi E_0$ entgegengesetzt gleich ist. Anstatt des Aufkeilwinkels ist es üblich, den Winkel $Y\Phi E_0$ einzuführen, den der Excenterarm ΦE_0 bei der Todtlage ΦF_0 der Kurbel mit der auf ΦF_0 errichteten Senkrechten ΦY bildet. Dieser auch mit ϑ bezeichnete Winkel $Y\Phi E_0$ wird der Voreilwinkel genannt. Demnach erhalten wir auch den Durchmesser NO, indem wir den Winkel $Y\Phi N = \vartheta$, also dem Voreilwinkel $Y\Phi E_0$ entgegengesetzt gleich machen. Auf diesem Durchmesser bestimmen wir die Strecken $\Phi\Gamma_\varepsilon = \Phi\Gamma$, $\Phi\Delta_\varepsilon = \Phi\Delta$; ferner die Strecken $\Gamma_\varepsilon C_\varepsilon = \Delta_\varepsilon D_\varepsilon = AB$, d. h. gleich der Länge des Schieberlappens und ziehen dann durch die vier Punkte Δ_ε, Γ_ε, D_ε, C_ε Senkrechte auf NO, welche auf dem Kreise ε die betreffenden Lagen des Kurbelzapfens bestimmen. Diese primitive Bestimmungsweise ist schon bei den ältesten Untersuchungen der Schiebersteuerung angewandt worden[1]). Und der Erste, welcher die kreisförmige Bewegung eines Punktes auf einen Durchmesser

[1]) Diese einfache Bestimmungsweise stammt schon aus dem Jahre 1833. Vergl. Reech: *Mémoire sur les Machines à vapeur*. 1844. p. 1.

seiner Kreisbahn projicirte, erfand auch dieses einfache Diagramm, welches wir deshalb das **primitive Schieberdiagramm** nennen.

Diese Darstellung ist in Fig. **673b** der besseren Uebersichtlichkeit wegen in doppelter Grösse ausgeführt, und es sind die rechtsseitig am Kolben stattfindenden Vorgänge der Dampfbewegungen eingeschrieben, welche während einer Umdrehungsperiode den acht Phasen I, II, . . $VIII$ entsprechen.

Analoge Vorgänge der Dampfbewegung finden an der linken Seite des Kolbens statt, wie man leicht in Fig. **673** aus der gleichartigen Bezeichnungsweise ersieht. Das Oeffnen des Kanals $\Gamma'\Delta'$ beginnt durch die Bewegung des Schiebers nach rechts in der Phase VII', bei welcher das ideelle Excentermittel in E'_{VII} senkrecht unter Γ' liegt und der Kurbelzapfen sich in F'_{VII} befindet. Wenn der Kurbelzapfen nach dem Todtpunkte F_τ gelangt ist und demgemäss das Excentermittel die Lage E_τ einnimmt, so bestimmt die zugehörige Projection A_τ die Voröffnungsstrecke $\Gamma'A_\tau$. Dieselbe ist wegen der symmetrischen Anordnung gleich jener Voröffnungsstrecke ΓA_0; und ferner sind auch beiderseits die Voröffnungswinkel gleich. Mit der Phase $VIII'$ beginnt die volle Einströmung, welche bis zur Phase I' währt. Hierauf erfolgt die Drosselung des einströmenden Dampfes bis zur Phase II'. Inzwischen ist das Excentermittel über E'_{VIII}, E'_I nach E'_{II}, der Kurbelzapfen über F'_{VIII}, F'_I nach F'_{II} geschritten. Demnach beginnt die Expansion, wenn der Kurbelzapfen sich in F'_{II} befindet und der Kolben während seines Ausganges die Wegstrecke oder Füllungsstrecke $Z'_{II}F'_{II}$ zurückgelegt hat. Die Füllungsstrecke $Z'_{II}F'_{II}$ beim Ausgange des Kolbens ist aber kürzer als diejenige $Z_{VI}F_{VI}$ beim Eingange. Wenn also der Schieber symmetrisch zur Bahnmitte schwingt, so hat dies zwar Gleichheit der beiden Voröffnungsstrecken, dagegen aber Ungleichheit der beiden Füllungsstrecken zur Folge.

Die den acht Phasen I', II', . . $VIII'$ entsprechenden Lagen des Kurbelzapfens ergeben sich auch direct, ebenso wie oben gezeigt wurde, indem wir den Kreisdurchmesser $N'O'$ parallel ON ziehen oder den Winkel $Y'\Phi'N'$ entgegengesetzt gleich dem Voreilwinkel $Y'\Phi E_\tau = \vartheta$ machen, und auf diesem Durchmesser $O'N'$ in umgekehrter Folge dieselbe Punktreihe construiren, die der Durchmesser ON trägt; also $\Phi'\Gamma'_\varepsilon = \Phi'\Gamma'$, $\Phi'\Delta'_\varepsilon = \Phi'\Delta'$, ferner $\Gamma'_\varepsilon C'_\varepsilon = \Delta'_\varepsilon D'_\varepsilon = A'B'$ auftragen. Diese Darstellung nebst der Einschreibung der linksseitig am Kolben stattfindenden Vorgänge der Dampfbewegungen ist in Fig. **673**[a] doppelt vergrössert ausgeführt. Die Punktreihe $C'_\varepsilon D'_\varepsilon \Phi' \Gamma'_\varepsilon \Delta'_\varepsilon$ auf $N'O'$, welche der Punktreihe $C_\varepsilon D_\varepsilon \Phi \Gamma_\varepsilon \Delta_\varepsilon$ auf NO entgegengerichtet congruent ist, bestimmt die Lagen F'_I, F'_{II}, F'_{III}, .. F'_{VIII} des Kurbelzapfens, die den acht Phasen I', II', .. $VIII'$ entsprechen.

269. **Bestimmung des Aufkeilwinkels und der Lage des Schwingungsweges des Schiebers bei gegebenen gleichen Füllungsstrecken.** Die Ungleichheit der Füllungsstrecken beim Ein- und Ausgange des Kolbens vergrössert die Ungleichförmigkeit im Gange der Dampfmaschine. Die Praxis verlangt daher meist Gleichheit der Füllungsstrecken und verzichtet auf die Gleichheit der Voröffnungsstrecken oder der Voröffnungswinkel[1]). Dies kann bei dem gegebenen Schieber durch einen bestimmten Voreilwinkel und eine bestimmte Verschiebung des Schwingungsweges des Schiebers erreicht werden, so dass dieser nicht mehr symmetrisch zur Mitte des Schieberspiegels schwingt. Sollen in Fig. **674** die Füllungsstrecken $Z_{VI}F_{VI}$, $Z'_{II}F'_{II}$ beide z. B. gleich $0{,}8 . \overline{F_0 F_\tau}$ sein, so können wir den zugehörigen Aufkeilwinkel oder den Voreilwinkel ϑ und die entsprechende Verschiebung in folgender Weise construiren. Wir nehmen in Fig. **675** den Abstand $\Phi\Phi'$ der beiden Mittelpunkte Φ, Φ' der Kreise ε, ε' gleich $AA' - \Gamma\Gamma'$ (Fig. **672**) und bestimmen auf diesen Kreisen die Punkte F_{VI}, F'_{II}, so dass die Füllungsstrecken $Z_{VI}F_{VI} = Z'_{II}F'_{II} = 0{,}8 . \overline{F_0 F_\tau}$ sind. Hierauf construiren wir eine Hülfscurve h. Wir ziehen zu diesem Zwecke auf $\Phi\Phi'$ eine beliebige Senkrechte, die den Kreis ε unterseits in u_1 schneidet, nehmen dann die Strecke $F_{VI}u_1$ in den Zirkel und beschreiben mit derselben um F'_{II} einen Kreisbogen, der die Senkrechte einerseits in x_1 trifft. Durch Wiederholung dieses Verfahrens für verschiedene Senkrechte, von denen vier gestrichelt gezeichnet sind, liefern die betreffenden Punkte x_1, .. x_4 ein Stück der Hülfscurve h. Ziehen wir nun durch den Schnittpunkt E'_{II}, welchen dieses Curvenstück mit dem Kreise ε' bildet, eine Senkrechte auf $\Phi\Phi'$, deren Fusspunkt mit η bezeichnet ist, und die den Kreis ε unterseits in E_{VI} schneidet, so ist $F_{VI}E_{VI} = F'_{II}E'_{II}$. Hierdurch ist die Entfernung des Kurbelzapfens F_{VI} von dem ideellen Excentermittel E_{VI} gefunden und somit der Aufkeilwinkel $F_{VI}\Phi E_{VI}$ nebst dem Voreilwinkel $\delta = F_{VI}\Phi E_{VI} - 90^\circ$ bestimmt. Machen wir nun in Fig. **672** auf dem Schieberspiegel $\Psi\Psi'$ die Strecke $\Gamma\mathfrak{m} = \eta\Phi$ und die Strecke $\Gamma'\mathfrak{m}' = \eta\Phi'$, so sind $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ resp. die

[1]) Falkenburg, *Neue Schieberdiagramme.* 1883. S. 29.

Schwingungsmitten der Lappenkanten A, A' und die Strecke mm', welche gleich MM' ist, liefert die Lage des Schwingungsweges des Schiebers AB-$B'A'$. Die in Fig. **675** vollständig gezeichnete Hülfscurve h, welche von der zu $\Phi\Phi'$ Parallelen lF'_{II} symmetrisch getheilt wird, schneidet den Kreis ε' ausser in E'_{II} noch in drei anderen Punkten; es giebt demnach in geometrischer Hinsicht hier vier Lösungsresultate, von denen aber die letzten drei für die praktische Ausführung nicht geeignet sind.

In Fig. **674** ist der erhaltene Aufkeilwinkel $F_{VI}\Phi E_{VI}$ an dem gegebenen Schenkel ΦF_{VI} construirt, und die Projection γ von E_{VI} auf $F_0 F_\tau$ ist von Φ um jene Strecke $\Phi\eta$ entfernt. Durch den Winkel $F_\tau \Phi N = E_{VI}\Phi F_{VI}$ ist der Durchmesser NO sowie der Voreilwinkel $Y\Phi N = \vartheta$ bestimmt. Wir machen auf diesem Durchmesser die Strecken $\Phi\gamma_\varepsilon = \Phi\gamma$, $\gamma_\varepsilon\delta_\varepsilon = \gamma\delta = \Gamma\Delta$, ferner $\gamma_\varepsilon c_\varepsilon = \delta_\varepsilon d_\varepsilon = AB$; dann liefern die in diesen Punkten auf NO senkrecht gezogenen Geraden durch ihre Schnitte auf dem Kreise ε die Lagen des Kurbelzapfens, welche den acht Phasen der rechtsseitigen Dampfbewegung entsprechen. Im Kreise ε' ziehen wir den zu NO parallelen Durchmesser $N'O'$, machen auf demselben $\Phi'\gamma'_\varepsilon = \Phi'\gamma'$, $\gamma'_\varepsilon\delta'_\varepsilon = \gamma'\delta' = \Gamma\Delta$, ferner $\gamma'_\varepsilon c'_\varepsilon = \delta'_\varepsilon d'_\varepsilon = A'B'$ und erhalten dann in gleicher Weise auf dem Kreise ε' die Lagen des Kurbelzapfens, die den acht Phasen der linksseitigen Dampfbewegung entsprechen. Wir sehen aus dieser graphischen Darstellung, dass die beiden Voröffnungswinkel $F_{III}\Phi F_0$, $F'_{VII}\Phi' F_\tau$ sehr verschieden sind. Der erste für die rechtsseitige Dampfbewegung ist verhältnissmässig klein, der zweite für die linksseitige ziemlich gross geworden; dafür ist aber der praktische Vortheil, der in der Gleichheit der Füllungsstrecken $Z_{VI}F_{VI}$, $Z'_{II}F'_{II}$ liegt, eingetreten. Ferner erkennen wir aus der Ungleichheit der Kreisbögen $F_{IV}F_V$, $F'_{VIII}F'_I$, dass die Zeitdauer der rechtsseitigen vollen Einströmung bedeutend kleiner als die der linksseitigen vollen Einströmung ist.

270. **Bestimmung der Lage des Schwingungsweges des Schiebers behufs Erlangung gleicher Füllung bei gegebenem Voreilwinkel.** Ist der Aufkeilwinkel oder der Voreilwinkel gegeben, das Excenter also auf der Welle schon festgekeilt, so kann man durch Verschiebung des Schwingungsweges des Schiebers auf dem Schieberspiegel gleiche Füllung für den Ein- und Ausgang des Kolbens erhalten, deren Grösse dadurch bestimmt ist. Um diese Verschiebung constructiv zu ermitteln, denken wir uns wieder die beiden Kreise ε, ε' soweit in Fig. **676** zusammengeschoben, dass die Entfernung ihrer Mittelpunkte $\Phi\Phi' = AA' - \Gamma\Gamma'$ ist und zeichnen

die Kreisbögen ζ_0, ζ'_τ, durch welche die Wegstrecken des Kolbens bestimmt werden; dann nehmen wir auf dem Kreise ε einen beliebigen Punkt f an, ziehen zu $\Phi\Phi'$ die Parallele fz, die den Kolbenweg für den Eingang darstellt, wenn der Kurbelzapfen sich in f befindet, construiren ferner auf ε den Punkt e, so dass der Winkel $f\Phi e$ gleich dem gegebenen Aufkeilwinkel ist. Hierauf fällen wir von e auf $\Phi\Phi'$ die Senkrechte ee', die den Kreis ε' in e' schneidet, machen in diesem Kreise die Sehne $e'f' = ef$, ziehen durch f' zu $\Phi\Phi'$ die Parallele $f'z'$ bis an den Kreisbogen ζ'_τ und tragen auf dieselbe die Strecke $z'x = zf$ ab. Durch Wiederholung dieser Construction liefern die so bestimmten Punkte x eine Hülfscurve h, die den Kreis ε' in einem Punkte F'_{II} schneidet. Wird nun im Kreise ε' die Sehne $F'_{II}E'_{II} = ef$ gemacht, hierauf von E'_{II} auf $\Phi\Phi'$ die Senkrechte $E'_{II}E_{VI}$ gefällt, die $\Phi\Phi'$ in η, den Kreis ε unterhalb in E_{VI} trifft, und wird ferner auch im Kreise ε die Sehne $E_{VI}F_{VI} = ef$ gemacht; dann repräsentiren die zu $\Phi\Phi'$ parallel gezogenen Strecken $Z_{VI}F_{VI}$, $Z'_{II}F'_{II}$ die gesuchten gleich langen Füllungsstrecken, und jener Fusspunkt η bestimmt in gleicher Weise, wie vorhin angegeben wurde, die Verschiebung des Schwingungsweges des Schiebers und damit auch die zugehörigen Diagramme.

271. **Das Zeuner'sche Schieberdiagramm.** Das bisher betrachtete direct aus der Schieberbewegung hervorgegangene Diagramm ist in constructiver Beziehung das einfachste und natürlichste; aber es verliert seine Anwendbarkeit, wenn, wie sich zeigen wird, bei den Doppelschiebern die Kanalöffnungen und bei den Coulissensteuerungen die Excentricität und der Voreilwinkel nicht mehr constant sind. In diesem Falle muss man das Diagramm durch eine weniger einfache Construction bestimmen, aber es bietet dafür den Vortheil der Anwendbarkeit bei complicirteren Schiebersteuerungen. Anstatt, wie es oben geschah, in Fig. **674** auf den Durchmesser NO in den Punkten c_ε, d_ε, γ_ε, δ_ε Senkrechte zu errichten, die auf dem Kreise ε die Lagen des Kurbelzapfens für die zugehörigen acht verschiedenen Phasen bestimmen, beschreiben wir nun in Fig. **677**, Taf. XLIV, um den Mittelpunkt Φ concentrische Kreise, welche durch die vier Punkte c_ε, d_ε, γ_ε, δ_ε gehen, ferner über den Strecken ΦN, ΦO, die gleich der Excentricität sind, als Durchmesser die Kreise $\mathfrak{w}_e$, $\mathfrak{w}_a$ und ziehen durch ihre mit den concentrischen Kreisen gebildeten Schnittpunkte die von Φ ausgehenden Radien ΦF_I, ΦF_{II}, .. ΦF_{VIII}, welche dann die Kurbellagen für die acht Phasen sind. Denn betrachten wir z. B. den

Radius ΦF_{IV}, der durch den Schnittpunkt W_{IV} geht, so ist das Dreieck $\Phi\,\delta_\varepsilon F_{IV}$ dem rechtwinkeligen Dreieck $\Phi\, W_{IV} N$ congruent, und demnach ist $\delta_\varepsilon F_{IV}$ senkrecht auf dem Durchmesser NO. Die Kreise $\mathfrak{w}_\varepsilon$, $\mathfrak{w}_a$ sind also, wie schon in Art. 145 beim Kreuzkurbelgetriebe gelehrt wurde, das polare Wegdiagramm des Schiebers; und die Strecke $\Phi\, W_{IV}$ stellt für die Kurbellage ΦF_{IV} den Weg eines Schieberpunktes von seiner Schwingungsmitte aus gemessen dar[1]). Es genügt hier zwar der eine Kreis $\mathfrak{w}_\varepsilon$, weil z. B. der Punkt W^I auch den Radius ΦF_I bestimmt, dessen entgegengesetzte Verlängerung durch W^I geht; aber der zweite congruente Kreis $\mathfrak{w}_a$, dessen Punkt W_I ebenfalls diesen Radius liefert, erleichtert die Uebersichtlichkeit. Der mit dem Radius Φd_ε beschriebene Kreis ist in Fig. **677** sehr klein, seine Schnittpunkte mit dem Kreise $\mathfrak{w}_a$ liegen daher sehr nahe an Φ. In solchem Falle muss man auf die Geraden, welche diese Schnittpunkte mit O verbinden, die betreffenden Radien ΦF_{II}, ΦF_{VII} senkrecht ziehen. Diese Construction der zu den acht Phasen gehörenden Kurbellagen ist hiernach unabhängig von dem Kreise ε, dessen Radius also beliebig gewählt werden kann.

Wir haben dieses für die Folge so wichtige Diagramm in Fig. **677**^{b} im Zusammenhange mit dem bogenförmigen Diagramm des Kolbenweges gezeichnet, um von der Veränderung der Kanalöffnungen und der Kolbenlagen ein übersichtliches Bild zu empfangen. Die Eröffnung für den rechtsseitigen Dampfeintritt beginnt mit der Kurbelstellung ΦF_{III} und ist in der Todtlage ΦF_0 gleich der Strecke $\chi_0 W_0$, welche die Kreise γ_ε, $\mathfrak{w}_\varepsilon$ auf ΦF_0 abschneiden und welche als die lineare Voreilung bezeichnet wurde. Mit der weiteren Drehung vergrössert sich die von diesen Kreisen auf dem Kurbelradius bestimmte Strecke; sie erreicht bei der Kurbellage ΦF_{IV} resp. bei dem Kolbenwege $Z_{IV} F_{IV}$ ihr Maximum $\chi_{IV} W_{IV} = \gamma_\varepsilon \delta_\varepsilon$ gleich der Kanalweite; dann bleibt die Oeffnung constant, bis die Kurbel nach ΦF_V gekommen ist. Von hier an verengert sich die Oeffnung, und mit der Kurbelstellung ΦF_{VI}, die dem Kolbenwege $F_{VI} Z_{VI}$ entspricht, tritt die Abschliessung des Kanals und damit die Expansion ein. Demnach wird durch das schraffirte Flächenstück $W_{III}\, W_{IV}\, W_V\, W_{VI}$ der Eröffnungsvorgang bei der rechtsseitigen Dampfeinströmung bildlich

[1]) Die Abtragung der auf ΦN senkrechten Projection $\Phi\,\delta_\varepsilon$ eines Radius ΦF_{IV} auf denselben nach ΦW_{IV}, und den Beweis, dass der geometrische Ort des Punktes W_{IV} aus den beiden Kreisen $\mathfrak{w}_e$, $\mathfrak{w}_a$ besteht, findet sich schon in Guido Grandi, *Flores geometrici.* 1728. p. 14.

dargestellt. Ebenso giebt das andere schraffirte Flächenstück $W_{VII} W_{II} W_{VIII} W_I$ ein übersichtliches Bild von dem Eröffnungsvorgange bei der rechtsseitigen Dampfausströmung. Da in dem betrachteten Falle der Punkt Φ innerhalb der Strecke $c_\varepsilon d_\varepsilon$ liegt, so ist hier zu beachten, dass dieses Flächenstück von dem mit Φd_ε beschriebenen kleinen Kreisbogen convex begrenzt wird. In gleicher Weise ist in Fig. **677**[a] auch das zugehörige Diagramm für die linksseitige Dampfbewegung construirt. Dieses wichtige polare Diagramm, auf welches Zech[1]) zuerst hingewiesen hat, wurde von Zeuner[2]) mit grossem Erfolge auf viele Steuerungen zuerst systematisch angewendet und es wird deshalb das Zeuner'sche Schieberdiagramm genannt. Wir erhalten also in Fig. **677**[b] dieses Zeuner'sche Schieberdiagramm, indem wir unter dem Voreilwinkel ϑ gegen ΦY den Kreisdurchmesser NO ziehen, auf welchem ΦN und ΦO gleich der Excentricität sind, über ΦN, ΦO als Durchmesser die Kreise $\mathfrak{w}_e$, $\mathfrak{w}_a$ beschreiben, welche auch Schieberkreise genannt werden. Wir zeichnen dann, wie in Fig. **677**[c] geschehen ist, den Schieber AB-$B'A'$ in seiner Schwingungsmitte, die hier unsymmetrisch auf dem Schieberspiegel $\Psi\Psi'$ liegt, oder bestimmen die Schwingungsmitten M, M' der Schieberpunkte A, A', übertragen vom Schieberspiegel die Strecken $M\Gamma$, $M\Delta$ nach $\Phi\gamma_\varepsilon$, $\Phi\delta_\varepsilon$ in Fig. **677**[b], machen ferner $\gamma_\varepsilon c_\varepsilon = \delta_\varepsilon d_\varepsilon = AB$, und beschreiben um Φ die durch γ_ε, δ_ε, c_ε, d_ε gehenden Kreisbögen. In gleicher Weise wird das Diagramm in Fig. **678**[a] für die linksseitige Dampfbewegung construirt, indem wir vom Schieberspiegel die Strecken $M'\Gamma'$, $M'\Delta'$ nach $\Phi'\gamma'_\varepsilon$, $\Phi'\delta'_\varepsilon$ übertragen und $\gamma'_\varepsilon c'_\varepsilon = \delta'_\varepsilon d'_\varepsilon = A'B'$ machen. Die Strecken $M\Gamma$, $M'\Gamma'$, welche auf den Stegen $\Psi\Gamma$, $\Psi'\Gamma'$ von den Schieberlappen bedeckt werden, wenn der Schieber sich in seiner Schwingungsmitte befindet, heissen die äusseren Deckungen; die Strecken $B\Delta$, $B'\Delta'$ dagegen werden innere Deckungen genannt. Da aber in Fig. **677**[c] die Schieberkante B über der Kanalöffnung steht, so muss in diesem Falle die innere Deckung $B\Delta$ als negativ betrachtet werden.

272. **Das ovale Schieberdiagramm oder das Schieberoval.** Um die Bewegung des Schiebers im engsten Zusammenhange mit der Bewegung des Kolbens zu überschauen, wollen wir noch dasjenige Diagramm der Schieberbewegung construiren, welches sich da-

---

[1]) *Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereines.* 1855. Jahrgang 7. S. 11 und 25.

[2]) Zeuner, *Schiebersteuerungen.* 1874. 4. Aufl.

durch ergiebt, dass wir die Kolbenwege als Abscissen und die von der Schwingungsmitte aus gemessenen, proportional vergrösserten Schieberwege als Ordinaten betrachten. Zu diesem Zwecke ist in Fig. **678** der Kurbelarm ΦF_3 und die Pleuelstange $F_3 L_3$, deren Endpunkt L_3 sich auf der Geraden λ bewegt, in dem Verhältnisse 1 : 3 gezeichnet; und der Maassstab ist so gewählt, dass der Kurbelkreis φ mit dem Kreise ε der vorhin betrachteten Diagramme übereinstimmt. Ist durch ΦE_3 der Excenterarm resp. die Excentricität gegeben, so denken wir uns diese derart vergrössert, dass sie durch ΦF_3 dargestellt wird, was dem Vergrösserungsverhältnisse $\Phi F_3 : \Phi E_3$ entspricht. Machen wir nun den Winkel $F_\tau \Phi N$ gleich dem Aufkeilwinkel $F_3 \Phi E_3$, für den dieselbe Grösse wie in Fig. **674** genommen wurde, und fällen wir von F_3 auf den Durchmesser NO die Senkrechte $F_3 P_3$, dann repräsentirt ΦP_3 die im genannten Verhältnisse vergrösserte, zu der Kurbellage ΦF_3 gehörende Wegstrecke eines Schieberpunktes von seiner Schwingungsmitte aus gemessen. Errichten wir nun in L_3 auf λ die Senkrechte $L_3 \Pi_3 = \Phi P_3$, und bestimmen wir so für alle Theilpunkte des in 24 gleiche Theile getheilten Kurbelkreises φ die zu den entsprechenden Lagen gehörenden Senkrechten oder Ordinaten, dann erhalten wir das ovale Schieberdiagramm p, welches auch das S c h i e b e r o v a l genannt wird. Dem Punkte F_{15}, der F_3 diametral gegenüber liegt, entspricht die Wegstrecke ΦP_{15} resp. die Ordinate $L_{15} \Pi_{15}$, die jener Ordinate $L_3 \Pi_3$ entgegengesetzt gleich ist. Demnach sind in diesem Diagramm die Ordinaten für je zwei Abscissenpunkte, die den diametralen Lagen des Kurbelzapfens entsprechen, entgegengesetzt gleich. Wir entnehmen, um die früheren Grössenverhältnisse zu benutzen, aus Fig. **674** die Strecke $\Phi \gamma_\varepsilon$, übertragen sie in Fig. **678** auf ΦN nach $\Phi \gamma_\varepsilon$, ziehen durch γ_ε auf ΦN die Senkrechte $F_{III} F_{VI}$ und bestimmen zu den Kurbellagen ΦF_{III}, ΦF_{VI} die zugehörigen Ordinaten $L_{III} \Pi_{III} = L_{VI} \Pi_{VI} = \Phi \gamma_\varepsilon$; dem zufolge repräsentirt $\Pi_{III} \Pi_{VI} = L_{III} L_{VI}$ die Wegstrecke, die der Kolben während der rechtsseitigen Dampfeinströmung durchschreitet. Wenn wir also auf einer zu λ senkrechten Geraden die Punktreihe $c \mu d \gamma \delta$ construiren, welche der in Fig. **674** gegebenen Punktreihe $c_\varepsilon \Phi d_\varepsilon \gamma_\varepsilon \delta_\varepsilon$ congruent ist, und durch die erhaltenen Punkte Parallele zu λ ziehen, dann repräsentirt die Strecke $\gamma \delta = cd$ die Weite des Dampfkanals und die Strecke $c \gamma = d \delta$ die Länge des Schieberlappens. Wir können auch direct vom Schieberspiegel in Fig. **677**c die Strecken $M\Gamma$, $M\Delta$ nach $\mu \gamma$, $\mu \delta$ übertragen und $\gamma c = \delta d = AB$ machen. Somit entsprechen die acht Schnittpunkte Π_I, Π_{II}, . . Π_{VIII}, welche diese vier Parallelen mit dem ovalen Schieberdiagramm p bilden, den oft genannten acht Phasen der rechtsseitigen Dampfbewegung. Der schraffirte Flächentheil $\Pi_{III}\Pi_{IV}\Pi_V\Pi_{VI}$ giebt uns im Bezug auf die Kolbenwege eine bildliche Darstellung des Eröffnungsvorganges bei der Dampfeinströmung, und ebenso stellt der andere schraffirte Flächentheil $\Pi_{VII}\Pi_{VIII}\Pi_I\Pi_{II}$ den Eröffnungsvorgang bei der Dampfausströmung dar. Für die linksseitige Dampfbewegung müssen in gleicher Weise die betreffenden vier Parallelen und ihre acht Schnittpunkte auf dem Diagramm p bestimmt werden. Wir erhalten somit durch dasselbe Schieberoval p das Diagramm für die linksseitige Dampfbewegung, wenn wir vom Schieberspiegel aus in Fig. **677**^{c} die Strecken $M'\Gamma'$, $M'\Delta'$ im entgegengesetzten Sinne senkrecht zu λ nach $\mu'\gamma'$, $\mu'\delta'$ übertragen, ferner $\gamma'c' = \delta'd' = A'B'$ machen und durch die erhaltenen Punkte Parallele zu λ ziehen.

Durch das Schieberoval, welches schon von Fauveau im Jahre 1834 angewandt wurde[1]), erhalten wir unmittelbar ein Bild von der Abhängigkeit der Wege des Kolbens und des Schiebers. Der Schieberkreis dagegen erfordert noch, um diese Abhängigkeit zu erkennen, die Construction des bogenförmigen Diagramms der Kolbenwege. Da aber der Schieberkreis leichter als das Schieberoval zu construiren ist, so erreichen wir durch den Schieberkreis, wenn auch nicht direct, doch bequemer unseren Zweck als bei der Anwendung des Schieberovals.

Bei allen nicht rotirenden Dampfmaschinen kann dem Mechanismus gemäss nur das Schieberoval in Anwendung kommen und bei einigen Steuerungen der Dampfhämmer wird die Veränderung der Bewegung des Hammers einfach durch die Verschiebung die Schwingungsmitte des Schiebers bewirkt. Es würde dann, wenn z. B. das Schieberoval p in Fig. **678** der Steuerung des in Art. 158 betrachteten Seller'schen Dampfhammers entspräche, nur eine entsprechende zu λ senkrechte Verschiebung der starren Punktreihe $cd\gamma\delta$ erforderlich sein, um die Dampfvertheilung bei jeder Veränderung der Hammerbewegung zu überschauen.

273. **Erörterung der allgemeinen Bedingungen bei den Schiebersteuerungen.** Durch die Anwendung der Diagramme wird der Entwurf einer Schiebersteuerung wesentlich erleichtert; aber es sind

---

[1]) Vergl. Reech, *Mémoire sur les Machines à vapeur*. 1844. p. 7. — Morin, *Leçons de Mécanique practique*. 1846.

noch die mannigfachen technischen, physikalischen Bedingungen zu beachten und zu erwägen, welche die Freiheit in der Gestaltung enger umgrenzen. Von allen bestimmenden Grössen ist meistens zunächst nur die Kanalweite gegeben; aber durch jene Bedingungen wird nach und nach jede Willkür in der Annahme der übrigen Grössen beschränkt. Die Theorie vermag hier nur die Wege zu ebenen; denn zur vollständigen, zweckmässigen Erfüllung aller, in jedem einzelnen Falle auftretenden Bedingungen ist der erfahrungsreiche Constructeur mit seinem praktischen Ermessen berufen. Um nur einige der bestimmenden Bedingungen hervorzuheben, betrachten wir beispielsweise in Fig. **672** die Bewegung des Schiebers, ungeachtet, ob seine Schwingungsmitte mit der Mitte der Bahn $\Psi\Psi'$ zusammenfällt oder nicht. Die Schieberkante A darf in ihrer äussersten Stellung nach rechts auf der Stegfläche $\Gamma\Psi'$ nicht vor Ψ' zurückkehren, weil sonst durch die abnutzende Schleifung auf der Stegfläche $\Gamma\Psi'$ ein nachtheiliger Ansatz entstehen würde. Dagegen muss aber die Stegfläche $\Gamma\Psi'$ so breit sein, dass die Kante B in dieser Stellung nicht über Ψ' schreitet und kein frischer Dampf durch die Grube BB' und die Höhlung $\Omega\Omega'$ ausströmen kann. Ferner darf in dieser Stellung die Oeffnung $\Omega B'$ nicht kleiner als $\Gamma\Delta$ sein, damit dem aus der Kanalöffnung kommenden Dampfe ein bequemer Ausweg durch die Höhlung geboten wird. Bei der äussersten Schieberstellung nach links muss die Kante B die Rippenfläche $\Delta\Omega$ vollständig überschreiten, so dass durch Abschleifung kein Ansatz auf derselben entsteht; ferner muss die nach α gelangte Kante A auf der Rippenfläche vor Ω zurückkehren, damit kein frischer Dampf direct durch die Höhlung ausströmen kann. Besonders sind auch die physikalischen Eigenschaften des Dampfes zu beachten, die bei der Strömung, Drosselung, Expansion und Compression desselben auftreten und die Dimensionirung beeinflussen. In einzelnen Fällen wird, um die Erfüllung der bestimmenden Bedingungen zu erzwingen, auch auf die symmetrische Gestaltung des Schiebers und des Schieberspiegels verzichtet, so dass die Kanäle ungleiche Weite oder die Schieberlappen ungleiche Längen erhalten[1]). Sehr oft sehen wir auch, um gewisse Vortheile zu erreichen, den Schieber in mannigfaltig verschiedenartiger Weise gestaltet[2]).

---

[1]) Vergl. Art. 284: Hackworth-Klug'sche Steuerung; ferner Fliegner, *Umsteuerungen der Locomotiven*. 1881. S. 25.

[2]) Blaha, *Steuerungen der Dampfmaschinen*. 2. Aufl. 1884. S. 16.

Steuerung mit zwei Schiebern.

274. **Allgemeine Betrachtungen.** Der Widerstand, den eine Dampfmaschine während ihres Ganges zu überwinden hat, tritt meist in sehr verschiedener Grösse auf; daher ist es zweckmässig, mit verschiedener Expansion resp. mit grösserer oder kleinerer Füllung zu arbeiten. Da dies aber vermittelst der bisher betrachteten einfachen Schiebersteuerung, der stets eine bestimmte Füllung entspricht, nicht erreichbar ist, so hat man, um die Füllung verändern zu können, besonders bei den stationären Dampfmaschinen zwei Schieber angewendet, welche durch ihre gegenseitige Verstellbarkeit und durch ihre gegenseitige Bewegung die erforderliche Dampfvertheilung bewirken. Damit wir nun auch in diesem complicirten Falle zur bildlichen Darstellung der Bewegungsvorgänge gelangen, müssen wir zunächst die Beziehungen zweier gleichzeitig durch Excenter bewegten Schieber vollständig überschauen. Hierbei gehen wir wieder von der Annahme aus, dass die Excenterarme gegen die Schubstangen verhältnissmässig klein sind, und dass jede dieser Schieberbewegungen sehr angenähert durch ein Kreuzkurbelgetriebe hervorgebracht werden kann.

In Fig. **679** sind zwei rechtwinkelige Kreuzkurbelgetriebe gezeichnet, deren Kurbelarme ΦE, ΦE^1 auf einer Welle Φ befestigt und deren Schubstangen a, a^1 der Geraden λ parallel sind. Die Bewegung, welche ein an der Stange a^1 befestigter Punkt A^1 auf der bewegten Stange a vollzieht, resp. die Bewegung eines Punktes A^1 des Systems a^1 in dem System a, kann leicht in folgender Weise veranschaulicht werden. Wir fällen auf die Schubrichtung λ die Senkrechten EP, E^1P^1, machen die Strecke A^1A gleich und gleichgerichtet P^1P und betrachten A als einen Punkt des bewegten Systems a; demnach wird der Abstand A^1A der beiden gleichzeitig bewegten Punkte A^1, A durch jene Projection P^1P der um Φ rotirenden Strecke E^1E dargestellt. Wir beschreiben um A mit EE^1 als Radius einen Kreis $\mathfrak{a}$ in dem bewegten System a und ziehen in gleichem Sinne gerichtet den Radius $A\mathfrak{A}$ parallel EE^1. Wenn nun der Punkt $\mathfrak{A}$ auf dem Kreise $\mathfrak{a}$ im bewegten System a ebenso wie das Dreieck ΦEE^1 um Φ rotirt, so ist die Bewegung der zu $\mathfrak{A}$ gehörenden Projection auf dem zu λ parallelen Durchmesser dieses Kreises identisch mit der Bewegung des Punktes A^1 in dem System a. Die Bewegung des Systems a^1 im Bezug auf das System a kann demnach auch durch eine rechtwinkelige Kreuzschubkurbel hervorgebracht werden, deren Kurbelarm $A\mathfrak{A} = EE^1$ um einen Punkt A im System a rotirt und stets zu EE^1 parallel ist, sich also ebenso wie das Dreieck ΦEE^1 dreht. Construiren wir nun das durch dieses Dreieck bestimmte Parallelogramm ΦEE^1E_r, dessen eine Diagonale ΦE^1 ist, so wird auch durch die Seite ΦE_r desselben jener Kurbelarm $A\mathfrak{A}$ nach Grösse und Richtung dargestellt. Betrachten wir dagegen die Bewegung, welche das System a im System a^1 vollzieht, die der eben veranschaulichten Bewegung von a^1 im Bezug auf a entgegengesetzt gleich ist, dann ergiebt sich durch die Symmetrie der Beziehung, dass in diesem Falle der betreffende Kurbelarm um einen Punkt des Systems a^1 rotirt und dass derselbe nach Grösse und Richtung durch die Seite ΦE_r^1 des zweiten Parallelogramms $\Phi E^1EE_r^1$ dargestellt wird, dessen eine Diagonale ΦE ist. Aus dieser Darlegung erhalten wir den Satz:

Werden durch zwei gleichartig rotirende Kreuzkurbelgetriebe, deren Kurbelarme durch ΦE, ΦE^1 gegeben sind, zwei Systeme a, a^1 parallel bewegt, so kann die hierdurch bestimmte Bewegung des einen Systems a^1 im Bezug auf das andere System a vermittelst eines dritten Kreuzkurbelgetriebes bewirkt werden, dessen Kurbelarm $A\mathfrak{A}$ um eine Axe A im System a ebenso gleichartig rotirt und nach Grösse und Richtung gleich der geometrischen Differenz jener Kurbelarme, also gleich $\overline{\Phi E_r} = \overline{\Phi E^1} - \overline{\Phi E}$ ist.

Wir haben die Bewegungen der beiden Systeme a, a^1 im Bezug auf das feste System $\Phi\Xi$, resp. auf den Steg, als gegeben betrachtet, und die Bewegung a^1 gegen a anschaulich dargestellt. Ist nun aber die Bewegung von a im Bezug auf den Steg $\Phi\Xi$ und ferner die Bewegung von a^1 gegen a gegeben, so ist hierdurch auch die Bewegung des Systems a^1 im Bezug auf den Steg $\Phi\Xi$ bestimmt; denn sie kann vermittelst des Kurbelgetriebes hervorgebracht werden, dessen Kurbelarm ΦE^1 die von Φ ausgehende Diagonale des aus ΦE, ΦE_r construirten Parallelogramms ist. Somit ergiebt sich der Satz:

Wird in einem festen System $\Phi\Xi$ durch ein Kreuzkurbelgetriebe mit dem Kurbelarme ΦE ein System a parallel bewegt und wird gleichzeitig durch ein in diesem bewegten System a befindliches Kreuzkurbelgetriebe mit dem gleichartig rotirenden Kurbelarme $A\mathfrak{A}$ ein anderes System a^1 parallel geführt, so kann die Bewegung von a^1 gegen das feste System $\Phi\Xi$ vermittelst eines dritten Kreuzkurbelgetriebes bewirkt werden, dessen ebenso gleichartig rotirender Kurbelarm ΦE^1 nach Grösse und Richtung gleich der geometrischen Summe jener Kurbelarme, also gleich $\overline{\Phi E} + \overline{A\mathfrak{A}}$ resp. $\overline{\Phi E} + \overline{\Phi E_r}$ ist.

275. **Meyer'sche Steuerung.** In Fig. **680** ist die aus zwei Schiebern bestehende, sehr sinnreiche Meyer'sche Steuerung schematisch dargestellt[1]). Der auf der Bahn $\Psi\Psi'$ schwingende Grundschieber SS' ist symmetrisch gestaltet mit zwei Durchlasskanälen $T\mathfrak{A}$, $T'\mathfrak{A}'$ versehen, durch welche der Dampf in die Cylinderkanäle $\Gamma\Delta$, $\Gamma'\Delta'$ geleitet wird. Auf dem Rücken $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ des Grundschiebers schwingt der Deckschieber ss'. Derselbe besteht aus zwei Platten s, s', die durch zwei auf der Stange l befindliche, entgegengesetzte Schraubengewinde von gleicher Ganghöhe vermittelst Drehung dieser Stange in grössere oder kleinere Entfernung von einander gestellt werden können. Infolge der hin- und hergehenden Bewegung des Deckschiebers auf dem Rücken des gleichzeitig bewegten Grundschiebers werden die Durchlasskanäle durch die Platten s, s' geschlossen und geöffnet. Die Bewegung beider Schieber wird durch zwei auf der Welle festgekeilte Excenter bewirkt, deren Excentricitäten gegen die Schubstangen verhältnissmässig klein sind. In Fig. **681** ist für den Grundschieber die Excentricität resp. der Excenterarm ΦE mit seinem Voreilwinkel ϑ, für den Deckschieber die Excentricität oder der Excenterarm ΦE^1 und dessen Voreilwinkel ϑ^1 gegeben. Demnach ist für die Bewegung, welche der Deckschieber auf dem bewegten Grundschieber vollzieht, die entsprechende Excentricität oder der relative Excenterarm ΦE_r durch das Parallelogramm $\Phi E E^1 E_r$ bestimmt. Behufs der Bestimmung der betreffenden Schieberkreise $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{q}$ können wir auch anstatt des Dreiecks $\Phi E E^1$ das zu diesem bezüglich ΦY symmetrische Dreieck $\Phi N N^1$ als gegeben annehmen und das Parallelogramm $\Phi N N^1 N_r$ construiren, dessen Seiten ΦN, ΦN_r resp. die Durchmesser der Schieberkreise $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{q}$ sind, von denen der letztere der relative Schieberkreis genannt wird. Durch die von der Todtlage ΦF_0 im Sinne des Pfeiles ausgehende Kurbeldrehung bewegen sich die beiden Schieber SS', ss' im Bezug auf $\Psi\Psi'$ ebenso wie die Fusspunkte P, P^1 der von E, E^1 gefällten Lothe auf ΦX nach links und vergrössern

[1]) *Description des machines.* 1858. T. 89. p. 405. Brevet 23 avril 1845. — *Bulletin de la société d'encouragement.* 1846. p. 165; 1849. p. 246.

somit ihre von der Mittellage aus gemessenen Weglängen oder linksseitigen Abweichungen ΦP, ΦP^1. Dagegen aber bewegt sich der Deckschieber ss' auf dem Grundschieber wie der zu E_r gehörende Fusspunkt P_r nach rechts und verkleinert dem gemäss seine linksseitige Abweichung $\Phi P_r = PP^1$ von seiner auf den Grundschieber bezogenen Schwingungsmitte. Diese Beziehungen werden durch die Schieberkreise veranschaulicht. Für die Todtlage ΦF_0 der Kurbel repräsentirt auf derselben die Sehne ΦW_0 im Schieberkreise $\mathfrak{w}$ die Grösse der Abweichung des Grundschiebers SS' von seiner Schwingungsmitte, und ebenso die Sehne ΦQ_0 im relativen Schieberkreise $\mathfrak{q}$ die Abweichung des Deckschiebers ss' von seiner Schwingungsmitte im Bezug auf den Grundschieber.

Um eine übersichtliche bildliche Darstellung der Bewegungsvorgänge zu erhalten, betrachten wir zunächst nur die Bewegung des Grundschiebers SS' und zeichnen zu diesem Zwecke der Deutlichkeit wegen in doppelter Grösse in Fig. **682** die Schieberkreise $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{w}'$. Dem gemäss denken wir uns bei der folgenden Darlegung die zugehörige Zeichnung in Fig. **680** in doppelter Grösse genommen. Der auf ΦN senkrechten Kurbelstellung ΦF^m im Diagramm entspricht die in Fig. **680** dargestellte Mittellage des Grundschiebers auf seiner Bahn $\Psi\Psi'$. Mit der äusseren Deckung $A\Gamma$ und ebenso mit der inneren Deckung $B\Delta$ als Radien beschreiben wir im Diagramm um Φ resp. den Kreisbogen $W_{III}\gamma W_{VI}$ und den Kreisbogen $W_{II} d W_{VII}$. Hierdurch werden die vier entsprechenden Kurbellagen ΦF_{III}, ΦF_{VI} und ΦF_{VII}, ΦF_{II} bestimmt. Mit den beiden ersten erfolgt an der rechten Kolbenseite das Beginnen und Aufhören der Einströmung, mit den beiden letzteren das Beginnen und Aufhören der Ausströmung. Damit aber die Ausströmung des Dampfes an einer Kolbenseite eher beginnt als die Einströmung an der anderen, muss $A\Gamma > B'\Delta'$ und $A'\Gamma' > B\Delta$ sein. Ferner ist zu beachten, dass, wenn die Schieberkante A nach links gehend über den Cylinderkanal $\Gamma\Delta$ hinweggeschritten ist und denselben geöffnet hat, der Dampfweg wieder durch die nachfolgende Schieberkante T verengt wird. Wäre diese Schieberkante T nicht vorhanden oder so weit von A entfernt, dass sie Γ nicht überschreitet, dann würde beim Uebergange von A über Δ, also bei der Kurbelstellung $\Phi F_{II'}$, welche durch den mit der Strecke ΔA um Φ beschriebenen Kreisbogen $W_{II'}\delta W_{V'}$ bestimmt wird, der Cylinderkanal $\Gamma\Delta$ vollständig geöffnet sein. Da aber die Schieberkante T nachfolgt und links in die äusserste Lage τ gelangt, welche sich ergiebt, indem wir $T\tau$ gleich der in Fig. 681 gegebenen Excentricität ΦE machen, so kann, falls der Durchlasskanal enger als der Cylinderkanal, $AT < \Gamma\Delta$ ist, die grösste Eröffnung nur gleich AT sein, die eintritt, wenn T über Γ steht. Die diesem Momente im Diagramm entsprechende Kurbellage ΦF_4 wird bestimmt, indem wir mit ΓT um Φ den Kreisbogen $W_4 W^{IV} W^V W_5$ beschreiben, der den Kreis $\mathfrak{w}$ in den Punkten W_4, W_5 und ferner ΦF_{IV}, ΦF_V in den Punkten W^{IV}, W^V schneidet. Diese grösste Eröffnung bleibt beim Weitergange des Grundschiebers nach links nur so lange bestehen, bis A nach Δ und die Kurbel nach ΦF_{IV} gelangt ist. Wenn die Kurbel weiterrotirend beispielsweise in die Lage ΦF^i gekommen ist, auf der die Kreise $\mathfrak{w}$ und $W_{IV}\,\delta\,W_V$ die Strecke tu abschneiden, dann repräsentirt tu die Weglänge, welche A linksseitig von Δ aus zurückgelegt hat, und zugleich die inzwischen entstandene Verengung des Kanals. Es wird demnach die vermittelst der Schieberkante T bewirkte Veränderung des Einströmquerschnittes durch das Bogenzweieck $W_{IV}\,\delta\,W_V N W_{IV}$ veranschaulicht. Wenn wir auf ΦF^i die Strecke tu nach hf verlegen, dann stellt die auf ΦF^i von f bis zum Kreise $W_{III} W_{VI}$ gehende Strecke fi die entsprechende Eröffnung des Kanals dar. Durch Bestimmung mehrerer derartiger Punkte f erhalten wir eine von ΦN symmetrisch getheilte Pascal'sche Curve $W^{IV} f f_n W^V$. Denn verlängern wir $F^i\Phi$ bis zum Schnitt t' des Kreises $\mathfrak{w}'$, so ist, weil $tu = hf$ gemacht wurde, die Strecke $t'f = \Phi t + \Phi f = \Phi h + \Phi u$, also constant. Das somit sehr leicht zu zeichnende Stück der Pascal'schen Curve vervollständigt die bildliche Darstellung von der Veränderung der Eröffnung des Dampfweges, wenn der Grundschieber allein in Thätigkeit wäre. Unter dieser Annahme ersehen wir aus dem Diagramm die folgenden Vorgänge. Die Eröffnung für den Dampfeintritt beginnt in ΦF_{III}, vergrössert sich während der Drehung bis ΦF_4, bleibt dann constant bis ΦF_{IV} und verkleinert sich wieder so lange, bis die Kurbel nach ΦF^n gekommen ist oder die Schieberkante T die äusserste Stellung τ nach links erreicht hat. Bei dieser Stellung ist der Einströmquerschnitt bis auf die Enge γf_n geschmälert, welche auch durch die Strecke $\tau\Delta$ dargestellt wird. Bei weiterer Drehung treten in umgekehrter Folge dieselben Vorgänge auf. Während der Drehung bis ΦF^V vergrössert sich wieder der Einströmquerschnitt, bleibt dann constant bis ΦF_5, verkleinert sich bis in der Lage ΦF_{VI}, der die Füllungsstrecke $Z_{VI} F_{VI}$ entspricht, und es erfolgt die Schliessung, mit der eine kurze Expansion beginnt. Das schraffirte Flächenstück

$W_{III}\, W_4\, W^{IV} f_n\, W^V\, W_5\, W_{VI}$ giebt dann eine bildliche Darstellung der Veränderung des Einströmquerschnittes. In ΦF_{VII} findet die Eröffnung des Cylinderkanals für die Ausströmung statt; dieselbe wächst, bleibt constant und verkleinert sich, bis die Kurbel resp. die Lagen ΦF_{VIII}, ΦF_I, ΦF_{II} erreicht. Schliesslich tritt noch eine kurze Compression ein, die von ΦF_{II} bis ΦF_{III} dauert. Die Veränderung des Ausströmquerschnittes wird somit durch das schraffirte Flächenstück $W_{VII}\, W_{VIII}\, W_I\, W_{II}$ bildlich dargestellt.

Nachdem wir die Bewegungsvorgänge des Grundschiebers in allen Einzelheiten erkannt haben, betrachten wir jetzt auch die gleichzeitige Bewegung, die der Deckschieber auf dem Grundschieber vollzieht. Hat die Kurbel im Diagramm Fig. **683** die auf ΦN senkrechte Lage ΦF^m, die im relativen Schieberkreise $\mathfrak{q}$ die Sehne ΦQ^m bestimmt, dann repräsentirt diese Sehne ΦQ^m die die linksseitige Abweichung des Deckschiebers von seiner auf den Grundschieber bezogenen Mittellage. Diese Sehne resp. Abweichung verkleinert sich beim Weitergange der Kurbel, und wird gleich Null, wenn die Kurbel in der Lage ΦF^k senkrecht auf ΦN_r steht. Demnach tritt mit dieser Phase der Deckschieber in seine Mittellage auf dem Grundschieber. In Fig. **684** ist die dieser Phase entsprechende Stellung des Grundschiebers SS' und auf ihm symmetrisch die Mittellage des Deckschiebers ss' gezeichnet, dessen Platten ab, $a'b'$ beispielsweise so gestellt sind, dass ihre äusseren Kanten a, a' über die Kanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ der Durchlasskanäle hinausragen. Die jetzt in ihrer Schwingungsmitte m befindliche Plattenkante a hat also die Kanalkante $\mathfrak{A}$ schon um die Strecke $\mathfrak{A} m$ überschritten, und die vollständige Schliessung des Durchlasskanals erfolgt, wenn die Plattenkante a nach rechts gehend bis $\mathfrak{T}$ gelangt ist. Um nun im Diagramm die diesem Momente entsprechende Kurbellage $\Phi F'$ zu erhalten, beschreiben wir mit $m\mathfrak{T}$ als Radius im Diagramm den Kreisbogen $Q' Q_\omega$, der den anderen relativen Schieberkreis $\mathfrak{q}'$ in den Punkten Q', Q_ω schneidet und dadurch ausser $\Phi F'$ auch die Kurbellage ΦF_ω bestimmt. Denn bei der Drehung der Kurbel von ΦF^k bis $\Phi F'$ repräsentiren die zugehörigen Sehnen im Kreise $\mathfrak{q}'$ die Wegstrecken, um welche die Plattenkante a ihre Schwingungsmitte m nach rechts überschritten hat, und da die Sehne $\Phi Q' = m\mathfrak{T}$ ist, so tritt mit der Kurbelstellung $\Phi F'$ die Schliessung des Durchlasskanals ein, die erst endet, wenn die Kurbel bis ΦF_ω gegangen ist.

Für die Kurbellage ΦF^m ist in Fig. **680** die Mittellage des Grundschiebers SS' und auf ihm die entsprechende, durch

$ma = \Phi Q^m$ bestimmte Stellung des Deckschiebers ss' gezeichnet. Aus dem Diagramm ersehen wir, dass durch die weitere Kurbeldrehung mit der Verkleinerung der Kreissehne ΦQ^m die Plattenkante a sich der Kanalkante $\mathfrak{A}$ nähert und mit der Kurbellage ΦF^i erreicht, welcher im relativen Schieberkreise $\mathfrak{q}$ die Sehne $\Phi Q^i = \mathfrak{A}m$ entspricht. Hiernach erhalten wir diese Kurbellage ΦF^i, indem wir mit der Strecke $\mathfrak{A}m$ als Radius im Diagramm um Φ einen Kreisbogen $Q^i k$ beschreiben, der den Kreis $\mathfrak{q}$ einerseits im Punkte Q^i schneidet und dadurch ΦF^i bestimmt. Von hier an beginnt also durch Weiterdrehung der Kurbel die Verengung des Durchlasskanals vermittelst der Platte ab; und die Strecke, welche auf der betreffenden Kurbellage von dem Kreise $\mathfrak{q}$ und dem Kreisbogen $Q^i k$ abgeschnitten wird, repräsentirt die Ueberschreitung von a über $\mathfrak{A}$. Dieselbe hat z. B. bei der auf ΦN_r senkrechten Kurbellage ΦF^k die Grösse $\Phi k = \Phi Q^i = \mathfrak{A}m$ erreicht. Verlegen wir in der zur besseren Uebersicht ein wenig verändert gezeichneten Fig. **685**, Taf. XLV, auf einer Kurbellage ΦF_x die Ueberschreitungsstrecke $Q_x \nu$ nach $\psi\eta$, oder machen wir $Q_x \psi$ gleich der constanten Strecke $\nu\eta$, so ergiebt sich durch Wiederholung dieser Construction eine von den Punkten ψ gebildete Pascal'sche Curve $h\psi\chi$, die im Punkte χ an den Kreis $W_{III}\,W_{VI}$ tritt, wo derselbe von $\Phi F'$ geschnitten wird. Demnach ist, wenn Q den Schnitt von $\Phi F'$ mit dem Kreise $\mathfrak{q}$ bezeichnet, jene constante Strecke $\nu\eta = Q\chi$. Vermittelst dieser Beziehung kann ohne Hülfe des Kreisbogens $Q^i k$ die Pascal'sche Curve $h\psi\chi$ leicht construirt werden, indem wir $Q_x\psi = Q\chi$ machen. Die von einem Punkte ψ dieser Curve bis zum Kreise $W_{III}\,W_{VI}$ auf ΦF^x gemessene Strecke repräsentirt die vermittelst der Platte ab bewirkte Verengung des Durchlasskanals $\mathfrak{A}\mathfrak{T}$. Die Verengung des Dampfweges geschieht also in zweifacher Weise; oberhalb des Durchlasskanals durch die Platte ab, und unterhalb durch die Rippe $\Delta\Omega$. Die obere Verengung wird im Diagramm Fig. **683** durch die Curve $hg\psi\chi$ und die untere durch die Curve $W^{IV} g f_n$ bildlich dargestellt. Aus dem Verlaufe dieser Curven ersehen wir, dass die später beginnende obere Verengung die untere im Schnittpunkte g dieser Curven erreicht, sie von da an übertrifft und im Punkte χ, dem die Kurbellage $\Phi F'$ entspricht, die Schliessung des Durchlasskanals und damit den Beginn der Expansion bewirkt. Das schraffirte Flächenstück $W_{III}\,W_4\,W^{IV} g\psi\chi$ giebt demnach eine klare bildliche Darstellung von der Veränderung des Einströmquerschnittes.

In Fig. **683** ist ferner nach bestimmtem Verhältnisse zum Kurbelradius das bogenförmige Diagramm ζ_0 des Kolbenweges gezeichnet. Beim Beginn der rechtsseitigen Einströmung steht der Kolben um die kleine Strecke $F_{III}\,Z_{III}$ vor der Todtlage; nachdem diese erreicht ist, entsprechen dem Beginn der vollen Einströmung, der Drosselung und der Expansion resp. die Kolbenwege $Z_4 F_4$, $Z_{IV} F_{IV}$, $Z' F'$.

Wir haben in Fig. **684** den Abstand $a\mathfrak{T}$ der Plattenkante a von der Kanalkante $\mathfrak{T}$, d. h. den Abstand der Schwingungsmitte m von $\mathfrak{T}$, beliebig angenommen, im Kreise q' (Fig. **683**) die Sehne $\Phi Q' = m\mathfrak{T}$ gemacht, und dadurch die Kurbellage $\Phi F'$, mit welcher die Expansion beginnt, sowie die zugehörige Füllungsstrecke $Z'F'$ bestimmt. Wir können aber auch umgekehrt die Füllungsstrecke $Z'F'$ z. B. wie in unserem Diagramm gleich $0{,}5\,.\,\overline{F_0 F_\tau}$ annehmen, die Strecke $m\mathfrak{T} = \Phi Q'$ machen und vermittelst Drehung der Schrauben die Plattenkante a auf m stellen.

Nachdem der Durchlasskanal AT wieder vollständig auf den Steg $\Gamma\Psi$ geschoben ist und die Ausströmung vom Cylinderkanal $\Gamma\Delta$ her durch die Höhlung $\Omega\Omega'$ begonnen hat, hört die vermittelst der Schieberplatte ab bewirkte Sperrung des Durchlasskanals mit der Kurbellage ΦF_ω auf. Wenn aber diese Sperrung aufhört, bevor die Kante A über Γ nach rechts hinweggegangen ist oder bevor die Kurbel die entsprechende Lage ΦF_{VI} überschritten hat, dann würde die Expansion durch eine nochmalige Einströmung frischen Dampfes unterbrochen. Um dies zu vermeiden, muss die Kurbellage ΦF_{VI} sich stets hinter jener Stellung ΦF_ω befinden. Wenn es aber ermöglicht werden soll, auch mit der grössten Füllung $Z_{VI} F_{VI}$ resp. mit der kleinsten Expansion zu arbeiten, welche durch den Grundschieber allein bewirkt wird und der Kurbelstellung ΦF_{IV} entspricht, so muss, wie es in Fig. **683** der Fall ist, diese Kurbelstellung die relativen Schieberkreise q, q' halbiren. Die relative Excentricität ΦN_r muss also, nachdem die Excentricität ΦN gegeben ist, der Richtung nach so gewählt werden, dass sie die Verlängerung von $F_{VI}\Phi$ bildet.

Soll nun die Schliessung des Durchlasskanals vermittelst des Deckschiebers erst erfolgen, wenn die Kurbel in Fig. **686**, Tafel XLV, die Lage ΦF_{VI} erreicht hat, welcher die Füllungsstrecke $Z_{VI} F_{VI}$ entspricht, so muss mit dieser Kurbellage die Schieberkante a in Fig. **684** (Taf. XLIV) nach $\mathfrak{T}$ gelangen; und folglich ergiebt sich, indem wir $\mathfrak{T}m_{VI} = \Phi N_r'$ machen, auf dem Grundschieber die entsprechende Schwingungsmitte m_{VI} der Kante a.

Demnach muss für diese Schliessung die Kante a durch Drehung der Stange l auf m_{VI} gestellt werden. Um in dem zugehörigen Diagramm die Pascal'sche Curve $g\psi\chi$ zu erhalten, welche in diesem Falle den Kreis $W_{III}W_{VI}$ in dem auch mit χ bezeichneten Punkte W_{VI} berührt, machen wir auf einer beliebigen Kurbelstellung ΦF_x, die den Kreis $\mathfrak{q}$ in Q_x schneidet, die Strecke $Q_x\psi$ gleich der constanten Strecke $N_r\chi$. Die auf ΦF_x von dem Kreise $\mathfrak{q}'$ und von dem mit $\Phi N_r'$ als Radius beschriebenen Kreisbogen $N_r' o$ begrenzte Strecke $Q_x' o$ repräsentirt auch die Verengung des Durchlasskanals, die durch den Deckschieber bewirkt wird; und es ist demnach $\chi_x\psi = Q_x' o$. Das schraffirte Flächenstück giebt eine bildliche Darstellung von der Veränderung des Einströmquerschnittes. Da aber die Schliessung, wie man aus dem Diagramm ersieht, sehr schleichend erfolgt, so ist es zweckmässig, wenn möglich die Schieberplatten noch vermittelst der Schrauben näher zusammen zu stellen. Dadurch wird dann die Curve $g\psi\chi$ mehr nach rechts verschoben und das schraffirte Flächenstück vergrössert.

Soll in Fig. **687** mit einer kleinen Füllung, z. B. von der Grösse $Z_\varkappa F_\varkappa$ gearbeitet werden, so dass also schon mit der Kurbelstellung $\Phi F_\varkappa$ die Expansion beginnt, dann ist die vom Kreise $\mathfrak{q}$ auf $\Phi F_\varkappa$ abgeschnittene Sehne $\Phi Q_\varkappa$ als negativ zu betrachten; und es muss dem gemäss in Fig. **684** (Taf. XLIV) zur Bestimmung der Schwingungsmitte $m_\varkappa$ der Schieberkante a jetzt rechts von $\mathfrak{T}$ die Strecke $\mathfrak{T}m_\varkappa = \Phi Q_\varkappa$ gemacht werden. Für die genannte Füllungsstrecke $Z_\varkappa F_\varkappa$ ist somit die Schieberkante a vermittelst Drehung der Stange l auf $m_\varkappa$ zu stellen. Um die zugehörige Pascal'sche Curve $g\psi\chi$ im Diagramm zu construiren, welche die Kreise $\mathfrak{w}$, $W_{III}W_{VI}$ in den Punkten g, χ trifft, machen wir auf einer beliebigen Kurbelstellung ΦF_x die Strecke $Q_x\psi$ gleich der constanten Strecke $Q_\varkappa\chi$, welche auf $\Phi F_\varkappa$ zwischen den Kreisen $\mathfrak{q}$, $W_{III}W_{VI}$ liegt, und demnach ist $\chi_x\psi$ gleich der Strecke $o\,Q_x$, die auf der Kurbelstellung ΦF_x von den Kreisen $Q_\varkappa Q_\omega$, $\mathfrak{q}$ abgeschnitten wird. Das schraffirte Flächenstück $W_{III}\,g\psi\chi$ liefert dann die bildliche Darstellung der Veränderung des Einströmquerschnittes. Die grösste Eröffnung des Kanals tritt bei g ein, und von diesem Punkte g an wird die Eröffnung, welche der Kurbelstellung ΦF_x entspricht, durch die Strecke $\chi_x\psi$ oder $o\,Q_x$ dargestellt.

Die Platte ab in Fig. **680** muss hinreichend lang sein, damit bei ihrer äussersten Stellung nach rechts die Kante b nicht über $\mathfrak{A}$

hinwegschreitet, weil sonst eine nochmalige Einströmung frischen Dampfes stattfinden würde. Machen wir nach rechts die Strecke $m_\varkappa \alpha_\varkappa$ gleich der relativen Excentricität ΦN_r, so ist $\alpha_\varkappa$ die äusserste Stellung, welche die Kante a nach rechts gehend erreicht, und demnach muss die Plattenlänge ab noch grösser als $\mathfrak{A}\alpha_\varkappa$ sein. In unserer Zeichnung ist diese Plattenlänge genügend gross, so dass selbst bei der Füllung Null, der die Kurbelstellung ΦF_0 entspricht, die Kante $\mathfrak{A}$ von der Kante b nicht überschritten wird. Die Plattenlänge ab wird in diesem Grenzfalle bestimmt, indem wir aus dem Diagramm Fig. **687** die auf $\Phi F_0'$ liegende Kreissehne ΦQ_0 nach $\mathfrak{T} m_0$ in Fig. **684** legen und $m_0 \alpha_0$ gleich der relativen Excentricität ΦN_r machen; dann ist α_0 die entsprechende äusserste rechtsseitige Stellung der Kante a, und die Plattenlänge ab muss etwas grösser als $\alpha_0 \mathfrak{A}$ sein. Wir haben aus diesen Darlegungen erkannt, dass man durch entsprechende Plattenstellungen bei der Meyer'schen Steuerung mit allen Füllungen von Null bis zu der in Fig. **686** gezeichneten Grösse $Z_{VI} F_{VI}$ arbeiten kann; und es wurde nur die rechtsseitig vom Kolben stattfindende Dampfbewegung betrachtet, weil die Bewegung der Schieber wegen der symmetrischen Gestaltung dieselben Vorgänge an der anderen Seite des Kolbens bewirkt. Dagegen muss aber hinsichtlich der Kolbenwege auch wie früher das entsprechende bogenförmige Kolbendiagramm gezeichnet werden; denn je kürzer die Pleuelstange ist, desto mehr werden die Füllungen für die rechts- und linksseitige Dampfeinströmung verschieden und die Expansionen ungleich sein.

Die Gleichförmigkeit im Gange der Maschine wird aber gefördert, wenn es ermöglicht werden kann, dass die Füllungen an beiden Kolbenseiten bei den verschiedenen Stellungen der Platten sehr nahe gleich sind. Um dies zu erreichen, wollen wir zunächst die Abhängigkeit, in welcher die Verstellungsstrecke zu der rechtsseitigen Platte und zu den rechtsseitigen Füllungen steht, graphisch darstellen. Zu diesem Zwecke sind in dem Diagramm Fig. **688** die rechtsseitigen Füllungsstrecken $Z_1 F_1$, $Z_2 F_2$, $Z_3 F_3$, .. $Z_7 F_7$, $Z_z F_z$, die beziehlich den Füllungsgraden $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, .. $\frac{7}{8}$ bis zu dem höchsten Füllungsgrad $\frac{15}{16}$ entsprechen, eingetragen, und ferner ist der relative Schieberkreis $\mathfrak{q}$ gezeichnet. Zur Todtlage ΦF_0 der Kurbel, also zur Füllung Null, gehört die im Kreise $\mathfrak{q}$ befindliche Sehne ΦQ_0; dieselbe ist gleich dem Abstande $\mathfrak{T} m_0$, um welchen in Fig. **684** (Taf. XLIV) die Schwingungsmitte m_0 der Plattenkante a von der Kanalkante $\mathfrak{T}$ entfernt ist. Ebenso liefert für die Kurbelstellung ΦF_1 die zugehörige Sehne ΦQ_1 bei dem

Füllungsgrad $\frac{1}{8}$ den entsprechenden Abstand der Schwingungsmitte von $\mathfrak{T}$. Es werden somit durch die Sehnen ΦQ_0, ΦQ_1, ΦQ_2, .. ΦQ_z, welche der Kreis $\mathfrak{q}$ auf den betreffenden Kurbellagen ΦF_0, ΦF_1, ΦF_2, .. ΦF_z bestimmt, die Verstellungsstrecken der Platte dargestellt. Wir tragen nun in Fig. **689** auf der Geraden $\mathfrak{T}_0 \mathfrak{T}_z$ jene Füllungsstrecken als Abscissen $\mathfrak{T}_0 \mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_0 \mathfrak{T}_2$, .. $\mathfrak{T}_0 \mathfrak{T}_z$ und senkrecht die entsprechenden Kreissehnen als Ordinaten ab, so dass $\mathfrak{T}_0 m_0 = \Phi Q_0$, $\mathfrak{T}_1 m_1 = \Phi Q_1$ u. s. w. Die Ordinaten nehmen den entgegengesetzten Sinn an, wenn die Kreissehnen in der über Φ hinausgehenden Verlängerung der Kurbel liegen. Die Ordinaten oberhalb und unterhalb der Abscissenaxe $\mathfrak{T}_0 \mathfrak{T}_z$ repräsentiren resp. die in Fig. **684** rechts oder links von der Kanalkante $\mathfrak{T}$ liegenden Abstände der Schwingungsmitten. Die so erhaltene Curve $m_0 m_4 m_z$ giebt eine bildliche Darstellung des Gesetzes der Abhängigkeit der Verstellungsstrecken von den Füllungsstrecken. Sie geht, wie man leicht nachweisen kann, in eine Ellipse über, wenn die Pleuelstange, die in unserem Beispiel sich zur Kurbel wie 3 : 1 verhält, unendlich lang ist. Demnach besteht zwischen Verstellungsstrecke der Schieberplatte und Füllungsstrecke keine Proportionalität. Werden aber nur die Füllungsgrade von $\frac{1}{8}$ bis $\frac{5}{8}$ gebraucht, dann können wir das Curvenstück $m_1 m_5$ angenähert durch eine Gerade e ersetzen und somit innerhalb dieser Grenzen annehmen, dass die Verstellungsstrecken den Füllungsstrecken angenähert proportional sind.

Ebenso sind in Fig. **689** für die linksseitigen Füllungsgrade $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, .. $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}$ die entsprechenden Füllungsstrecken Z^1F^1, Z^2F^2, Z^3F^3, .. Z^7F^7, Z^zF^z gezeichnet und als Abscissen $\mathfrak{T}_0\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_0\mathfrak{T}_2$, .. $\mathfrak{T}_0\mathfrak{T}_z$ genommen; ferner sind die zu den Kurbellagen ΦF^0, ΦF^1, ΦF^2, .. gehörenden Kreissehnen beziehlich als Ordinaten $\mathfrak{T}_0 m^0$, $\mathfrak{T}_1 m^1$, $\mathfrak{T}_2 m^2$, .. angetragen, und zwar so, dass jetzt die Sehnen, welche der Kreis $\mathfrak{q}$ auf den Verlängerungen von $F^0\Phi$, $F^1\Phi$, .. abschneidet, oberhalb der Abscissenaxe $\mathfrak{T}_0\mathfrak{T}_z$ liegen. Die erhaltene Curve $m^0 m^4 m^z$ weicht aber von der Curve $m_0 m_4 m_z$ beträchtlich ab. Diese Abweichung vermindert sich um so mehr, je grösser die Pleuelstange gegen die Kurbel ist; und beide Curven werden identisch, wenn die Pleuelstange unendlich lang ist. Diese Abweichung wird aber auch bei der gegebenen Anordnung bedeutend verkleinert, indem wir das Curvenstück $m^1 m^5$ in der Ordinatenrichtung um die Strecke $m^4 m_4$ parallel nach $m^I m^V$ verschieben und annehmen, dass nur die Füllungen von $\frac{1}{8}$ bis $\frac{5}{8}$ zur Verwendung kommen. Innerhalb dieser Grenzen ist dann die Abweichung der Curvenstücke $m_1 m_5$, $m^I m^V$ sehr gering, und dieselben können angenähert durch die Gerade $\mathfrak{e}$ ersetzt werden. Nach dieser Erkenntniss ist die in Fig. **684** gezeichnete symmetrische Stellung der Platten ab, $a'b'$ auf dem Grundschieber nicht zweckmässig, sondern es muss die linksseitige Platte $a'b'$ um jene Strecke $m^1 m_4$ näher an die rechtsseitige Platte ab gebracht werden; oder, wenn der Deckschieber sich in seiner Schwingungsmitte auf dem Grundschieber befindet, dessen Mitte mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet ist, so muss die Platte $a'b'$ um die Strecke $m^1 m_4$ näher an $\mathfrak{M}$ stehen als die Platte ab. Durch die beiden entgegengesetzten Schrauben, deren Ganghöhen gleich sein müssen, kann man dann die beiden Platten vermittelst Drehungen der Stange l so stellen, dass zwischen den Füllungsgraden $\frac{1}{8}$ und $\frac{5}{8}$ auch die betreffenden Füllungen an beiden Seiten des Kolbens angenähert gleich sind, und demnach einen gleichförmigeren Gang der Maschine bewirken. Es ist daher ein Irrthum, wenn man durch ungleiche Ganghöhen der Schrauben Gleichheit der Füllungen erreichen will[1]).

276. **Rider'sche Steuerung.** Die Verstellung der Platten bei der betrachteten Meyer'schen Steuerung geschieht oft durch die Hand an einem auf der Schieberstange befestigten Stellrade. Es sind aber auch mannigfache Anordnungen angegeben, durch welche die Verstellung vermittelst des Regulators der Maschine bewirkt wird. Eine sinnreiche Anordnung dieser Steuerung wurde von Rider[2]) ausgeführt. Bei derselben werden die Platten, wie in Fig. **690** schematisch gezeichnet ist, durch eine einzige mit schrägen Kanten versehene Platte $a\alpha a'\alpha'$ ersetzt, die wie jene Platten auf den Rücken des Grundschiebers TT' in der Schubrichtung l schwingt und senkrecht zu l verstellbar ist. Die oberen Querkanten der Durchlasskanäle des Grundschiebers sind resp. den schrägen Plattenkanten $a\alpha$, $a'\alpha'$ parallel, die unteren punktirt gezeichneten Querkanten aber zur Schubrichtung l senkrecht. Je mehr die zweckmässig gewählten, gleichen Winkel, welche die Plattenkanten $a\alpha$, $a'\alpha'$ mit l bilden, von einem rechten Winkel abweichen, desto wirksamer ist der Einfluss der zu l senkrechten

[1]) *Zeitschrift d. österreichischen Ingenieur-Vereines.* 1860. B. XII. S. 226. — Müller-Melchiors, „Die Dampfmaschinen-Steuerung auf der Wiener Weltausstellung 1873". *Polytechnisches Journal.* 1874. B. 212. S. 92.

[2]) Rider'sche Steuerung. *Engineering.* 1869. Vol. VIII. p. 434. — *Polytechnisches Journal.* 1870. B. 195. S. 486. — Wehage, „Dampfmaschinen-Steuerungen". *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen.* 1881. Jahrg. 60. S. 66.

Verstellung der Platte auf die Veränderung der Füllung. Damit aber auch innerhalb der durch obige Betrachtung als Grenzen erkannten Füllungsgrade $\frac{1}{8}$, $\frac{5}{8}$ beiderseits vom Kolben gleiche Füllungen auftreten, muss die Kante $a'\alpha'$, wenn sich die Platte auf dem Grundschieber in ihrer Schwingungsmitte befindet, der obigen Darlegung gemäss entsprechend näher an die Symmetrallinie $\mathfrak{MS}$ des Grundschiebers liegen als die Kante $a\alpha$.

Denken wir uns diese Platte cylindrisch gebogen, so dass wir die in Fig. **691** gezeichnete gebogene Platte $a\alpha a'\alpha'$ erhalten und lassen wir diese auf dem entsprechend cylindrisch ausgehöhlten Rücken des Grundschiebers TT' schwingen, dessen Durchlasskanäle an der cylindrischen Höhlung entsprechend gestaltete Oeffnungen besitzen, dann wird die Verstellung der cylindrisch gebogenen Platte vermittelst des Regulators durch theilweise Drehung ihrer Schieberstange bewirkt. Statt der halbcylindrisch gebogenen Platte kann auch ein vollständiger Cylinder angewendet werden, der von dem Grundschieber umschlossen wird [1]).

277. **Steuerung mit veränderlicher Excentricität für die Bewegung des Deckschiebers.** Anstatt durch die Verstellung der Platten des Deckschiebers wie bei der Meyer'schen Steuerung, hat man auch innerhalb gewisser Grenzen die Veränderung der Füllung oder der Expansion mit unverstellbaren Platten durch Variation der Excentricität für die Bewegung des Deckschiebers bewirkt, der sich auf dem Grundschieber bewegt. Zu diesem Zwecke wird in Fig. **692** der Deckschieber $a'b'$-ba, resp. die zugehörige Schieberstange σ nicht von dem Excenterarme ΦE^d mit dem Voreilwinkel ϑ' und von der Excenterstange E^dD direct bewegt, sondern vermittelst einer um die feste Axe C schwingenden bogenförmigen Coulisse CD. Die Excenterstange E^dD ist in D drehbar mit der Coulisse verbunden und versetzt dieselbe in schwingende Bewegung. Ein in der Coulisse befindlicher Gleitbacken ist in J an die Schubstange JK geschlossen, die anderseits in K mit der Schieberstange σ gelenkig verbunden ist. Die Schubstange JK ist an eine um die verstellbare Axe Σ schwingende Stange ΣS aufgehängt. Damit aber die Schieberstange σ oder der Deckschieber gegen die feste Hülse Ξ dieselbe Schwingungsmitte beibehält, muss die Coulisse nach einem Kreisbogen gekrümmt sein, dessen Radius gleich der Schubstange JK ist. Der mittlere Coulissenbogen $i_2 i_e$ wird also, wenn der Punkt D sich in seiner Mittellage befindet und der Punkt K fest liegt, von dem Punkte J be-

[1]) *Polytechnisches Journal.* 1874. B. 212. S. 184.

schrieben. Den festen Drehpunkt C der Coulisse nehmen wir auf einer senkrecht zu σ stehenden Geraden an, die von dem Bogenstück $i_2 i_e$ möglichst wenig abweicht oder mit der Bogensehne zusammenfällt. Bei dieser Anordnung bleibt die Schwingungsmitte des Punktes K unverändert, wenn wir die aufgehängte Schubstange JK durch Verstellung des auf einem Kreise geführten Gelenkes Σ heben oder senken, indem der Arm $\Sigma\Psi$ um die feste Axe Ψ gedreht wird. Durch eine zweckmässige Aufhängung, die in Art. 279 ausführlicher erörtert wird, erhält die Schubstange JK angenähert eine Parallelbewegung; und demnach stimmt die Bewegung des Punktes K sehr nahe überein mit der Bewegung, die der Punkt J parallel zur Schubrichtung σ vollzieht.

Bezeichnen wir die Abstände der Punkte D und J von C resp. mit c und u, den Excenterarm ΦE^d mit r, so verhalten sich die Bewegungen der Punkte J, D angenähert wie $u:c$; und folglich bewegt sich der Punkt K angenähert so, als wenn er von einem Excenterarme getrieben wird, dessen Länge

$$r_u = \frac{r}{c} u$$

ist und dessen Drehung mit ΦE^d übereinstimmt. Demnach ist dieser veränderliche Excenterarm dem Abstande u proportional und besitzt den constanten Voreilwinkel ϑ'. Dieser Mechanismus, durch welchen die Veränderung des Excenterarmes oder der Excentricität für die Bewegung des Deckschiebers bewirkt wird, stammt von Gonzenbach, der eine geradlinige Coulisse benutzt, aber den Deckschieber nicht direct auf dem Grundschieber, sondern auf einer mit entsprechenden Oeffnungen versehenen Scheidewand im Schieberkasten gleiten lässt[1]. Von Borsig wurde dieser Mechanismus verwendet, um den Deckschieber direct auf dem Grundschieber zu bewegen[2]. Bei dieser Anordnung kann die Verengung und Schliessung der Durchlasskanäle des Grundschiebers entweder durch die inneren Kanten b, b' der Platten ab, $b'a'$ oder auch, wie bei der Meyer'schen Steuerung, durch die äusseren Kanten a, a' bewirkt werden[3].

---

[1] *Description des machines.* 1848. T. 67. p. 233. Brevet 18 février 1843. — *Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens.* 1846. B. I. S. 218.

[2] *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen.* 1846. Jahrg. 25. S. 75. — *Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens.* 1858. B. XIII. S. 241.

[3] *Polytechnisches Journal.* 1874. B. 212. S. 187. — *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure.* 1879. B. 23. S. 191.

Um das zugehörige Diagramm bei Verwendung der äusseren Plattenkanten zu construiren, wollen wir den in Fig. **680** (Tafel XLIV) gegebenen Grundschieber benutzen und annehmen, dass derselbe von dem in Fig. **692** gezeichneten Excenterarme ΦE, der gleich ΦE^d ist und den Voreilwinkel ϑ besitzt, getrieben wird. Der Deutlichkeit wegen zeichnen wir im Verhältnisse 1 : 5 vergrössert in Fig. **693** das Diagramm, indem wir die beiden gleichen Excentricitäten ΦN, ΦN^d resp. unter den Winkeln ϑ, ϑ' gegen ΦY ziehen, dann auf ΦN^d den Punkt N^{III} so bestimmen, dass

$$\Phi N^{III} : \Phi N^d = u : c$$

ist, und das Parallelogramm $\Phi N N^{III} N_3$ construiren. Dem zufolge ist ΦN_3 der Durchmesser des relativen Schieberkreises $\mathfrak{q}_3$, welcher der in Fig. **692** gezeichneten Stellung des in der Coulisse befindlichen Gleitbackens entspricht. Wird aber der Gleitbacken in der Coulisse durch Verstellung der Aufhängeaxe Σ verschoben, dann wandert der Punkt N^{III} auf der Geraden ΦN^d, der Durchmesser ΦN_3 ändert seine Grösse und Richtung, aber der geometrische Ort seines Endpunktes N_3 ist eine zu ΦN^d parallele Gerade $N_0 N_e$. Die relativen Schieberkreise $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$, $\mathfrak{q}_4$, $\mathfrak{q}_5$, $\mathfrak{q}_e$ schneiden sich in einem zweiten gemeinsamen Punkte O, und ihre Mittelpunkte m_2, m_3, m_4, m_5, m_e liegen auf einer Geraden $m_0 m_e$, die zu ΦN^d parallel ist und durch den Mittelpunkt m_0 des zu dem Schieberkreise $\mathfrak{w}$ gehörenden zweiten Schieberkreises $\mathfrak{w}'$ geht. Es würde demnach, wenn der Gleitbacken in der Coulisse so weit gehoben werden könnte, dass die Schieberstange σ sich angenähert in Ruhe befindet, der Kreis $\mathfrak{w}'$ der entsprechende relative Schieberkreis sein.

Das auf diese Weise erhaltene theoretische Diagramm wird aber durch praktische Bedingungen beschränkt; denn vor Allem ist zu vermeiden, dass der Deckschieber während der Expansion keine nochmalige Einströmung frischen Dampfes zulässt. Wir müssen daher umgekehrt, wenn für den Grundschieber die Excentricität ΦN und der Voreilwinkel ϑ gegeben ist, durch das Diagramm den Voreilwinkel ϑ' für den Deckschieber bestimmen. Soll nun die Füllung zwischen $\frac{2}{8}$ und $\frac{11}{16}$ des Kolbenweges variiren, und nehmen wir beispielsweise an, es stehe bei der Mittellage des Deckschiebers auf dem Grundschieber (Fig. **684**) die Kante a über $\mathfrak{A}$ und die Kante a' über $\mathfrak{A}'$, so müssen wir mit der Strecke $\mathfrak{T}a$ oder mit der Kanalweite $\mathfrak{T}\mathfrak{A}$ als Radius, der in unserer vergrösserten Fig. **693** verdoppelt ist, um Φ den Kreis $\mathfrak{k}$ beschreiben. Dieser Kreis $\mathfrak{k}$ schneidet die verlängerte Kurbellage ΦF_2, welche dem

Füllungsgrad $\frac{2}{8}$ oder der Füllungsstrecke $Z_2 F_2$ entspricht, im Punkte Q_2 und ferner die verlängerte Kurbellage ΦF_e, mit welcher die Schliessung des Cylinderkanals durch den Grundschieber geschieht, im Punkte Q_e. Den durch $\Phi Q_2 Q_e$ gezogene Kreis $\mathfrak{q}_2$, dessen Mittelpunkt m_2 und dessen Durchmesser ΦN_2 ist, betrachten wir als den zum Füllungsgrad $\frac{2}{8}$ gehörenden relativen Schieberkreis. Denn, wenn die Kurbel nach ΦF_2 gelangt, hat jene Kante a sich um die Strecke ΦQ_2 nach rechts bewegt und somit den Durchlasskanal zugesperrt. Ist die Kurbel weiter bis ΦF_e gegangen, der Cylinderkanal also durch den Grundschieber geschlossen, dann wird der Durchlasskanal vom Deckschieber wieder geöffnet; aber es ist die Einströmung frischen Dampfes während der Expansion vermieden. Nachdem durch diese Bedingungen der Durchmesser ΦN_2 bestimmt ist, erhalten wir auch durch die Diagonale ΦN^{II} des Parallelogramms $N_2 \Phi N N^{II}$ die Richtung und Grösse der Excentricität für die Bewegung des Deckschiebers, welche den Füllungsgrad $\frac{2}{8}$ bewirkt. Diese Excentricität ergiebt sich auch, indem wir die Strecke ΦN^{II} parallel der Geraden $m_0 m_2$ ziehen, welche die Mittelpunkte der relativen Schieberkreise trägt, und gleich der Strecke $2 . \overline{m_0 m_2}$ machen. Dadurch ist auch der zugehörige Voreilwinkel $N^{II} \Phi Y = \vartheta'$ bestimmt, den der Excenterarm ΦE^d in Fig. **692** mit der Normalen ΦY der Kurbel ΦF bildet. Ziehen wir hierauf die zu den angenommenen Füllungsgraden $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{16}$ gehörenden Kurbellagen ΦF_3, ΦF_4, ΦF_5, ΦF_e, deren Verlängerungen auf dem Kreise $\mathfrak{k}$ die Schnittpunkte Q_3, Q_4, Q_5, Q_e liefern, so erhalten wir hiermit die entsprechenden relativen Schieberkreise $\mathfrak{q}_3$, $\mathfrak{q}_4$, $\mathfrak{q}_5$, $\mathfrak{q}_e$, welche durch diese Schnittpunkte gehen und deren Mittelpunkte m_3, m_4, m_5, m_e auf der Geraden $m_0 m_2$ liegen. Den relativen Schieberkreisen $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$, $\mathfrak{q}_4$, $\mathfrak{q}_5$, $\mathfrak{q}_e$ entsprechen auf ΦN^{II} die Excentricitäten ΦN^{II}, ΦN^{III}, ΦN^{IV}, ΦN^{V}, ΦN^{e} des Deckschiebers, und die Punktreihe $\Phi N^{II} N^{III} N^{IV} N^{V} N^{e}$ ist der Punktreihe $m_0 m_2 m_3 m_4 m_5 m_e$ ähnlich.

Da wir die Excenterarme ΦE, ΦE^d der Einfachheit wegen von gleicher Grösse nehmen, so ist, wenn wir $\Phi N^d = \Phi N$ machen und ΦN_d gleich und parallel $N N^d$ ziehen, die Strecke ΦN_d der Durchmesser des nicht gezeichneten relativen Schieberkreises für diejenige Lage des Gleitbackens, bei welcher der Punkt J in Fig. **692** auf der Geraden $\Phi \sigma$ liegt. Bezeichnet m_d den Mittelpunkt dieses Schieberkreises, ferner i_d in Fig. **692** den Schnitt von $C i_e$ mit $\Phi \sigma$, und construiren wir auf $C i_e$ die Punktreihe $C i_2 i_3 i_4 i_d i_5 i_e$, welche der Punktreihe $m_0 m_2 m_3 m_4 m_d m_5 m_e$ ähnlich ist, dann bestimmen die Punkte i_2, i_3, i_4, i_5, i_e die Abstände des Punktes J von der Axe C, resp. die Stellungen des Gleitbackens, welche den angenommenen Füllungsgraden $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{16}$ entsprechen. Wir ersehen aber hieraus, dass diese Abstände den Füllungsstrecken nicht proportional sind und dass, wenn die Schubstange JK durch den Regulator gehoben oder gesenkt wird, die Einwirkung desselben um so langsamer erfolgt, je grösser die Füllung ist. Ein anderer Nachtheil dieser Steuerung gegen die Meyer'sche besteht darin, dass man an beiden Kolbenseiten bei kurzer Schubstange, welche die Kolbenstange mit der Kurbel verbindet, keine Gleichheit der Füllungen erreichen kann.

Für die Füllungsgrade $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{11}{16}$ sind in Fig. **694** vermittelst der relativen Schieberkreise $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_4$, $\mathfrak{q}_e$ die zugehörigen Pascal'schen Curven $\chi_2 g_2$, $\chi_4 g_4$, $\chi_e g_e$ wie früher angegeben gezeichnet, indem wir, um z. B. einen Punkt ψ_x auf der Pascal'schen Curve $\chi_2 g_2$ zu erhalten, auf einer durch Φ gehenden Geraden $Q_x \psi_x$ die Strecke $Q_x \psi_x$ gleich der auf $Q_2 \Phi$ gegebenen Strecke $Q_2 \chi_2$ machen, die hier bei allen Pascal'schen Curven dieselbe ist. Demnach wird die Veränderung des Einströmquerschnittes bei den Füllungsgraden $\frac{2}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{11}{16}$ beziehlich durch die mit Schraffur begrenzten Flächen $W_{III} g_2 \chi_2$, $W_{III} W_{IV} g_4 \chi_4$, $W_{III} W_{IV} f g_e \chi_e$ graphisch dargestellt.

Umsteuerungen.

278. **Mechanismen zur Veranschaulichung der vereinfachten Schieberbewegung bei Umsteuerungen.** Die bisher betrachteten Steuerungen vermitteln nur in einer Richtung den Gang der Maschine; aber bei vielen Maschinen und besonders bei den Locomotiven wird ausser der veränderlichen Füllung der Vorwärts- und Rückwärtsgang erfordert. Der Mechanismus muss deshalb so eingerichtet sein, dass vermittelst desselben die Veränderung der Füllung und zugleich die Umsteuerung bewirkt werden kann. Derartige Mechanismen sind in vielen mannigfaltig gestalteten Anordnungen mit scharfsinniger Ueberlegung erdacht und ausgeführt[1]); wir können daher hier nur die wichtigsten Mechanis-

---

[1]) Eine reichhaltige Literaturangabe enthält Heusinger von Waldegg, *Handbuch für specielle Eisenbahn-Technik.* 1875. B. III. S. 483. — Eine erläuternde Literaturangabe giebt Zeuner in seinen *Schiebersteuerungen.* 4. Aufl. 1874. S. 247. — Eine geschichtliche Darstellung der Umsteuerungen befindet sich

men der Umsteuerungen, welche sich in der Praxis bewährt haben, näher betrachten. Die Bewegungsvorgänge dieser Mechanismen sind meist ausserordentlich complicirt, so dass nur durch vereinfachende Annäherung eine ergiebige Untersuchung ermöglicht wird. Wir wollen deshalb zunächst diejenigen Mechanismen betrachten, welche in einfacherer Weise angenähert dieselben Bewegungsvorgänge erzeugen; denn diese Mechanismen werden die Bewegungen des Schiebers leichter veranschaulichen und die Grundlage der Untersuchungen bilden.

Durch die beiden in Fig. **695**, Taf. XLVI, dargestellten Kreuzkurbelgetriebe, deren Kurbelarme ΦG, $\Phi G'$ auf der Welle Φ befestigt sind, werden die an den parallelen Schubstangen η, η' befindlichen Zapfen H, H' schwingend bewegt. Ueber diese Zapfen ist eine gerade Coulisse gehängt, in welche der Zapfen J einer in der festen Hülse Ξ parallel zu η, η' gleitenden Stange σ eingreift. Durch die schwingenden Zapfen H, H' wird vermittelst der Coulisse der Zapfen J nebst der Stange σ in hin- und hergehende Bewegung versetzt. Um diesen Bewegungsvorgang zu überschauen, ziehen wir von der Wegmitte H_m des Punktes H die Strecke $H_m \mathfrak{H} \# \Phi G$, ebenso von der Wegmitte H'_m des Punktes H' die Strecke $H'_m \mathfrak{H}' \# \Phi G'$, und wir nehmen an, dass diese Strecken beziehlich um H_m, H'_m sich in gleicher Weise wie die beiden Kurbeln ΦG, $\Phi G'$ drehen; dann ist die Bewegung der Projection von $\mathfrak{H}$ auf η identisch mit der Bewegung des Punktes H, und die Bewegung der Projection von $\mathfrak{H}'$ auf η' stimmt mit der des Punktes H' überein. Die Verbindungsgerade $H_m H'_m$ jener Wegmitten schneidet die Gerade σ in dem Punkte J_m, den wir nachher als Ausgangspunkt der Wegmessung für den Punkt J nehmen werden. Denken wir uns von dem bewegten Punkte H nach der festen Wegmitte H'_m eine Gerade $H H'_m$ gelegt, so wird ihr auf der Geraden σ gebildeter Schnittpunkt h eine Bewegung vollziehen, die der Bewegung des Punktes H in dem Verhältnisse $H'_m J_m : H'_m H_m$ ähnlich ist. Wird nun $J_m G_i \# \Phi G$ gezogen und auf $J_m G_i$ der Punkt $\mathfrak{h}$ so bestimmt, dass

$$J_m \mathfrak{h} : J_m G_i = H'_m J_m : H'_m H_m$$

ist, dann fällt die Projection des Punktes $\mathfrak{h}$ auf σ mit jenem Schnittpunkte h zusammen; und demnach ist, wenn der Punkt $\mathfrak{h}$ um J_m in gleicher Weise wie G um Φ rotirt, die Bewegung seiner

in Heusinger von Waldegg, *Locomotiv-Maschine.* 1858 und in Burgh, *Link-Motion and Expansion-Gear.* 1870.

Projection auf σ identisch mit der Bewegung des Schnittpunktes h. Nehmen wir nun an, dass der Zapfen H' in Ruhe sei und der andere Zapfen H allein schwinge, dann würde dem Punkte J vermittelst der Coulisse dieselbe Bewegung ertheilt, in welcher sich der Punkt h befindet. Dieselben Beziehungen ergeben sich auch anderseits. Wird also $J_m G_i' \# \Phi G'$ gezogen, auf $J_m G_i'$ der Punkt $\mathfrak{h}'$ derart bestimmt, dass

$$J_m \mathfrak{h}' : J_m G_i' = H_m J_m : H_m H_m'$$

ist; und rotirt $\mathfrak{h}'$ um J_m in derselben Weise wie G' oder G um Φ, so bewegt sich die zu $\mathfrak{h}'$ gehörende Projection h' auf σ ebenso wie der Punkt J vermittelst der Coulisse bewegt würde, wenn der Zapfen H in Ruhe wäre und der andere Zapfen H' allein schwinge. Da nun aber die beiden Zapfen H, H' gleichzeitig die Bewegung des Punktes J bewirken, so wird dieselbe aus den interferirenden Bewegungen der beiden Punkte h, h' zusammengesetzt, und die algebraische Summe der Strecken $J_m h$, $J_m h'$ ist gleich der Strecke $J_m J$; denn, weil h in der Geraden $H H_m'$ und h' in der Geraden $H' H_m$ liegt, ist

$$h J = J_m h',$$

und folglich

$$J_m J = J_m h + h J = J_m h + J_m h'.$$

Wenn wir das durch die Strecken $J_m \mathfrak{h}$, $J_m \mathfrak{h}'$ bestimmte Parallelogramm $J_m \mathfrak{h} R_i \mathfrak{h}'$ construiren, so fällt wegen der Gleichheit der Strecken $J_m h'$, $h J$ die Projection von der Ecke R_i auf σ mit dem Punkte J zusammen. Dem zufolge kann die Bewegung des Punktes J auch durch ein Kreuzkurbelgetriebe bewirkt werden, dessen Kurbelarm durch die Diagonale $J_m R_i$ gegeben ist, die in gleicher Weise wie die Welle Φ rotirt; und in der Folge wollen wir $J_m R_i$ den ideellen Kurbelarm nennen. Ferner ergiebt sich aus den beiden obigen Proportionen:

$$J_m \mathfrak{h} : J_m G_i = H_m' J_m : H_m' H_m,$$
$$J_m \mathfrak{h}' : J_m G_i' = H_m J_m : H_m H_m'$$

durch Addition

$$\frac{J_m \mathfrak{h}}{J_m G_i} + \frac{J_m \mathfrak{h}'}{J_m G_i'} = 1, \qquad \frac{J_m \mathfrak{h}}{J_m G_i} = \frac{J_m G_i' - J_m \mathfrak{h}'}{J_m G_i'}$$

oder

$$\frac{J_m \mathfrak{h}}{J_m G_i} = \frac{G_i' \mathfrak{h}'}{G_i' J_m}.$$

Hieraus folgt, dass der Endpunkt R_i der Diagonale $J_m R_i$, resp. der Endpunkt des ideellen Kurbelarmes, auf der Seite $G_i G_i'$ des

Dreiecks $J_m G_i G_i'$ liegt und dieselbe in gleichem Verhältnisse wie der Punkt J_m die Verbindungsstrecke $H_m H_m'$ theilt.

Bestimmen wir also auf der Geraden GG', welche die beiden Kurbelzapfen G, G' verbindet, den Punkt R so, dass

$$RG : RG' = J_m H_m : J_m H_m'$$

ist; und betrachten wir ferner ΦR als einen auf der Welle Φ befestigten Kurbelarm eines Kreuzkurbelgetriebes, zu welchem die Schubstange σ gehört, so ist die hierdurch erzeugte Bewegung dieser Schubstange dieselbe, welche durch die gleichzeitige Wirkung der beiden anderen gezeichneten Kreuzkurbelgetriebe hervorgebracht wird.

Nehmen wir an, dass die Hülse Ξ parallel bleibend höher oder tiefer gestellt werden kann, und nicht nur zwischen den Schubstangen η, η', sondern auch ausserhalb derselben, dann entspricht jeder solchen Stellung, resp. parallelen Verlegung der Schubstange σ ein ideeller Kurbelarm ΦR, dessen Endpunkt R auf der Geraden GG' so liegt, dass $GRG' \sim H_m J_m H_m'$ ist. Denken wir uns bei den verschiedenen Stellungen der Hülse Ξ die Schnittpunkte, welche die Gerade σ auf $H_m H_m'$ bestimmt, mit J_m^1, J_m^2, J_m^3 . . und die entsprechenden Endpunkte der zugehörigen ideellen Kurbelarme mit R^1, R^2, R^3 . . bezeichnet, so ist die Punktreihe $G R^1 R^2 R^3 \ldots G'$ ähnlich der Punktreihe $H_m J_m^1 J_m^2 J_m^3 \ldots H_m'$. Aus der Aehnlichkeit dieser Punktreihen folgt, wenn wir mit P_0 die Mitte von GG', mit i_m die Mitte von $H_m H_m'$ bezeichnen,

$$P_0 R : P_0 G = i_m J_m : i_m H_m;$$

und setzen wir zur Abkürzung

$$i_m J_m = u, \quad i_m H_m = c, \quad P_0 G = \lambda,$$

so ist:

$$P_0 R = \frac{\lambda}{c} u.$$

Es verändert sich also mit dem parallelen Höher- oder Tieferstellen der Schubstange σ die Grösse und Stellung des zugehörigen ideellen Kurbelarmes nach einem einfachen Gesetze, durch welches derselbe leicht bestimmt werden kann; und die Wegmitte des Endpunktes J der Schubstange liegt stets auf der Geraden $H_m H_m'$. Bei diesem Mechanismus kann man auch die Hülse Ξ als festliegend betrachten und dagegen den Träger der Hülsen Π, Π' senkrecht zur Geraden σ verschieben.

Die Beweglichkeit dieses Mechanismus wird nicht beeinträchtigt, wenn wir für ΦR einen wirklichen Kurbelarm einsetzen, ferner die Stange σ über ihren Zapfen J hinaus verlängern und an derselben einen über R gehängten rechtwinkeligen Kreuzschlitz befestigen. Der dadurch gebildete übergeschlossene Mechanismus besteht dann aus drei Kreuzkurbelgetrieben, deren drei an den Schubstangen η, η', σ befestigte Zapfen H, H', J gemeinsam die über sie gehängte Coulisse bewegen. Wir können jetzt auch eine von den beiden ersten Kreuzschubkurbeln ausser Thätigkeit setzen, z. B. den Kreuzschlitz von seiner Schubstange η' loslösen; dann wird die Coulisse den Zapfen H' in gleicher Weise bewegen, und es bleibt die Bewegung der Stange η' in der Hülse Π' auch nach dieser Loslösung bestehen.

Die Fig. **696** stellt den besonderen Fall des betrachteten Mechanismus dar, wenn die Kurbelarme ΦG, $\Phi G'$, sowie die Schubstangen η, η' von gleicher Länge sind, und dem gemäss die Verbindungsgerade $H_m H_m'$ auf diesen Schubstangen senkrecht steht. Stellen wir die gedachten Kreise, auf denen sich die Hülfspunkte $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ bewegen, durch Drehung um die Geraden η, η' senkrecht auf die Zeichnungsebene, so dass $\mathfrak{H}$ nach hinten, $\mathfrak{H}'$ nach vorn zu liegen kommt, und verbinden wir im Raume die Punkte $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ durch eine Gerade, dann ist HH' die Projection dieser Verbindungsgeraden $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$. Da die Punkte $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ ebenso wie die Punkte G, G' rotiren, so erzeugt ihre um $H_m H_m'$ als Axe rotirende Verbindungsgerade $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ ein Rotationshyperboloid. Demnach können wir, wie die Zeichnung in Fig. **697** zeigt, die verschiedenen Lagen der Geraden HH' als die Aufrissprojection, und die entsprechenden Lagen der um Φ rotirenden Geraden GG' als die Grundrissprojection der einen Schaar der Mantellinien dieses Rotationshyperboloids ansehen. Die Lagen der Geraden HH' umhüllen die Contourhyperbel $\psi_0 \psi_\tau$. Die halbe Hauptaxe $i_m i_0$ derselben ist gleich dem senkrechten Abstande ΦP_0 des Punktes Φ von der Geraden G, G', und ihre Asymptoten $H_2 H_2'$, $H_3 H_3'$ sind die Aufrissprojectionen der zur Aufrissebene parallelen Mantellinien, deren zugehörige Grundrissprojectionen die beziehlich mit $G_2 G_2'$, $G_3 G_3'$ bezeichneten Lagen der rotirenden Geraden GG' sind. Denken wir uns durch den Mittelpunkt i_m des Rotationshyperboloids zu der rotirenden Mantellinie desselben eine parallele Gerade gezogen und nehmen wir an, dass diese Gerade ebenso wie diese Mantellinie um $H_m H_m'$ rotirt, dann erzeugt dieselbe den zum Rotationshyperboloid gehörenden Asymptotenkegel, dessen Spitze i_m und dessen Oeffnungswinkel $H_2 i_m H_3$ ist. Die verschiedenen Winkel, welche die bewegte Gerade HH' mit der Hyperbelaxe

$i_0 i_\tau$ bildet, sind demnach gleich den Winkeln, welche die Aufrissprojectionen von den betreffenden Mantellinien des Asymptotenkegels mit $i_0 i_\tau$ einschliessen. Die Schwingungsweite $J_0 J_\tau$ des Punktes J jener Schubstange σ wird somit für ihre verschiedenen Stellungen durch die Strecke dargestellt, welche die beiden Hyperbeläste ψ_0, ψ_τ auf der Geraden σ abschneiden. Der Punkt R der rotirenden Geraden GG' beschreibt im Grundriss einen Kreis, dessen Aufrissprojection die Strecke $J_0 J_\tau$ ist; und den Lagen R, R_2, R_3 dieses Punktes entsprechen im Aufriss die Punkte J, J_2, J_3. Bezeichnet m_2 die Mitte von $G_2 G_2'$, so ist $m_2 R_2 = J_m J_2$. Wir erhalten demnach auch in Fig. 696 auf der Geraden GG' den Punkt R, indem wir von ihrer Mitte P_0 aus die Strecke $P_0 R = J_m J_2$ machen.

Nach der Erkenntniss dieser Beziehungen können wir die Bewegungen, welche die Stange σ bei verschiedenen Feststellungen ihrer Hülse Ξ vollzieht, auch durch den in Fig. 698 gezeichneten Mechanismus erzeugen. Derselbe besteht aus einem von dem Kurbelarme ΦE bewegten rechtwinkeligen Kreuzkurbelgetriebe, dessen Schubstange p einen Zapfen i trägt, und ferner aus einer auf diesen Zapfen i drehbar aufgesetzten Schleife is, in welcher der Kurbelzapfen E gleitet. An diese Schleife ist rechtwinkelig auf is eine zweite Schleife HH' befestigt, deren Mitte der Zapfen i ist. In diese Schleife HH' greift der Zapfen J einer Schubstange σ, die in einer verstellbaren Hülse Ξ parallel zu p gleitet. Damit die Schleife HH' dieselbe Bewegung vollzieht wie die gleichbezeichnete Coulisse in Fig. 696, muss der Kurbelarm ΦE gleich jener Strecke ΦP_0 oder gleich der halben Axe $i_m i_0$ jener Contourhyperbel $\psi_0 \psi_\tau$ sein; ferner müssen wir das bei Φ rechtwinkelige Dreieck $i_m \Phi E_m$, dessen Kathete $\Phi E_m = \Phi E$ ist, ähnlich dem Dreieck $i_m H_m H_2$ (Fig. 697) machen, resp. den Winkel $\Phi i_m E_m$ gleich dem halben Oeffnungswinkel des Asymptotenkegels jenes Rotationshyperboloids construiren und auf der Schubstange p die Entfernung Pi des Zapfens i von der Mittellinie EP der auf p rechtwinkeligen Schleife gleich der anderen Kathete Φi_m nehmen. Bezeichnen wir die Strecke, welche die in i_m beziehlich auf $i_m E_m$ und auf $i_m \Phi$ senkrechten Geraden $i_m H_2$, $i_m H_m$ auf der Geraden σ bestimmen, wie vorhin mit $J_2 J_m$, und machen wir die auf dem Kurbelarme ΦE errichtete Senkrechte $ER = J_m J_2$, dann kann die Bewegung der Schubstange σ auch durch die Kurbel ΦR bewirkt werden, wenn der Kurbelzapfen R in eine auf σ rechtwinkelige Schleife greift. Wegen der ähnlichen Dreiecke $i_m J_m J_2$ und $i_m \Phi E_m$ ist:

$$J_m J_2 : i_m J_m = \Phi E_m : i_m \Phi = \Phi E : Pi.$$

Hieraus folgt, wenn wir $i_m J_m = u$ setzen,

$$ER = J_m J_2 = \frac{\Phi E}{Pi} u.$$

Die Bewegungen, welche die Stange σ bei verschiedenen Feststellungen ihrer Hülse Ξ vollzieht, können noch in anderer Weise durch einen Mechanismus hervorgebracht werden, der schematisch in Fig. **699** dargestellt ist. Dieser Mechanismus besteht aus einer windschief gekröpften Welle $\Phi\Phi'$, deren Kröpfung $H_m \mathfrak{H} \mathfrak{H}' H'_m$ so gestaltet ist, dass durch die Drehung der Welle von der Geraden $\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ jenes Rotationshyperboloid erzeugt wird, und ferner aus einer in der Hülse Ξ verschiebbaren prismatischen Stange σ, die mit einem über die Kröpfung gehängten rechtwinkeligen Kreuzschlitze versehen ist. Vermittelst der Wellendrehung und des zur Wellenaxe normal stehenden Kreuzschlitzes wird die prismatische Stange σ in gleicher Weise wie vorhin bewegt. Denn durch die Anordnung, dass die an einer Stange ξ befestigte Hülse Ξ parallel zur Axe $\Phi\Phi'$ verstellbar ist, können wir dieselben verschiedenen Bewegungen der Stange σ hervorbringen, welche bei den Mechanismen in Fig. **696** und **698** auftreten.

279. **Gooch'sche Steuerung.** In Fig. **700** ist die nach Gooch benannte Coulissensteuerung schematisch dargestellt[1]. Auf der Welle Φ sind zwei Excenter festgekeilt, deren beide gleiche Excenterarme ΦE, $\Phi E'$ auch gleiche, aber entgegengesetzt gelegene Voreilwinkel ϑ mit der Normalen ΦY der Kurbel ΦF_τ bilden. Die gleich langen Excenterstangen EH, $E'H'$ sind gelenkig mit der kreisbogenförmigen Coulisse HH' verbunden, die an der um die feste Axe Θ schwingenden Hängestange ΘT im Anschlusspunkte T drehbar aufgehängt ist. In der Coulisse befindet sich ein Gleitbacken. Derselbe ist in J drehbar mit der Stange JK verbunden, die an eine um die festgehaltene Axe Σ schwingende Hängestange ΣS aufgehängt ist. Anderseits ist diese Schubstange mit ihrem Endpunkte K an die Schieberstange $K\sigma$ gelenkig angeschlossen, die den Schieber s trägt und dadurch die Dampfvertheilung bei der Locomotive bewirkt. Die Aufhängung der Coulisse ist, wie unten gezeigt wird, so angeordnet, dass die Mitte i der Coulissenspanne HH' sich auf einer Bahncurve bewegt, die möglichst wenig von der Geraden $\Phi\sigma$ abweicht, und dass bei den beiden auf der

[1]) *Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens.* 1854. S. 76. — Clark, *Railway machinery.* 1855. p. 49, 204.

Geraden $\Phi\sigma$ senkrechten Stellungen HH', H_1H_1' der Coulissenspanne HH' ihre Mitten i, i_1 in der Geraden $\Phi\sigma$ liegen. In diesen beiden Stellungen, die den Todtlagen ΦF_τ, ΦF_0 der Kurbel resp. den beiden Excenterstellungen $E\Phi E'$, $E_1\Phi E_1'$ entsprechen, sind auch i, i_1 auf der Geraden $\Phi\sigma$ die äussersten Punkte der Bahncurve, welche von der Spannenmitte i durchlaufen wird. Denn der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$, den die Gerade ΘT mit $\Phi\sigma$ bildet, ist der Pol der Coulisse für die Lage HH'; es schneidet demnach diese Bahncurve die Gerade $\Phi\sigma$ im Punkte i rechtwinkelig, und i ist zugleich ein Punkt der Curve, die von der Geraden HH' umhüllt wird. Da das Gleiche von dem Punkte i_1 gilt, so ist auch die Mitte i_m der Strecke ii_1 die Schwingungsmitte des Punktes i. Durch die Verstellung des Gleitbackens in der Coulisse wird die Schieberbewegung und damit die Füllung verändert. Je nachdem sich der Gleitbacken in der Nähe des Gelenkpunktes H oder H' befindet, wird die Bewegung des Schiebers s resp. durch den Excenterarm ΦE oder $\Phi E'$ bewirkt; dem gemäss erfolgt auch durch die entsprechende Dampfvertheilung die Drehung der Welle Φ in dem einen oder in dem anderen Sinne, und es tritt somit beziehlich Rückwärts- und Vorwärtsgang der Maschine ein. Die Umsteuerungen, bei denen vermittelst einer Coulisse der Bewegungssinn der Maschine verändert wird, werden auch Coulissensteuerungen genannt.

Die Bewegung der Coulisse, für deren Punkte H, H' die Bahncurven gestrichelt gezeichnet sind, ist bezüglich der Geraden $\Phi\sigma$ angenähert symmetrisch, aber sehr complicirt und kann, damit wir leicht ausführbare constructive Bestimmungen erlangen, nur annäherungsweise graphisch dargestellt werden. Zu diesem Zwecke setzen wir voraus, dass die Excenterstangen gegen die Excenterarme, sowie gegen die halbe Coulissenspanne verhältnissmässig lang sind, und dass demnach die Excenterstangen in allen Lagen mit der Geraden $\Phi\sigma$ nur kleine Winkel bilden. Dem zufolge können wir uns die Bewegung des auch mit H bezeichneten Schnittpunktes, den die bewegte Gerade HH' mit der durch HH_1 gehenden, zu $\Phi\sigma$ parallelen festen Geraden η bildet, durch ein excentrisches Kurbelgetriebe ΦEH angenähert erzeugt denken, bei welchem sich der Punkt H der Schubstange EH auf der Geraden η bewegt. Nach Art. 147 kann dann ferner die Bewegung des Punktes H, die das gedachte Kurbelgetriebe bewirkt, durch ein schräges Kreuzkurbelgetriebe und auch durch ein rechtwinkeliges Kreuzkurbelgetriebe sehr angenähert hervorgebracht werden, so dass bei den betrachteten beiden Excenterstellungen die zugehörigen Punktlagen H, H_1 mit jenen beiden Lagen H, H_1 des Gelenkpunktes H der Coulisse übereinstimmen. Wir construiren in Fig. **701** zunächst das schräge Kreuzkurbelgetriebe, dessen Kurbel der Excenterarm ΦE ist, und dessen Schlitzmittellinie EP nach Art. 147 durch die folgenden Beziehungen bestimmt wird. Für die Lage EH der Excenterstange ist ϑ der Winkel, den ΦE mit der auf ΦF_τ senkrechten Geraden ΦY bildet. Wird nun der Excenterarm aus der Stellung ΦE in die entgegengesetzte ΦE_1 gedreht, zu welcher die Lage $E_1 H_1$ der Excenterstange gehört, dann wird die Mittellinie EP des schrägen Schlitzes parallel bleibend in die Lage $E_1 P_1$ gelangen und die Schubstange Pp um die Strecke PP_1 verschoben, welche gleich HH_1 ist. Wir erhalten also die Schlitzmittellinie EP, indem wir jene Punkte H, H_1 auf der Geraden η bestimmen und $\Phi P = \frac{1}{2} HH_1$ machen.

Um noch auf andere Weise diese Schlitzrichtung durch Rechnung zu ermitteln und danach zu construiren, bezeichnen wir mit r, l resp. die Länge der gleichen Excenterarme und der gleichen Excenterstangen, ferner mit c die Hälfte der Coulissenspanne HH'. Behufs der Bestimmung jener Strecke HH_1 ziehen wir zu Φp die Parallelen EA, $E_1 A_1$ gleich der Länge l und bezeichnen mit B, B_1 ihre Schnittpunkte, in denen sie beziehlich die auf Φp senkrechten Geraden iH, $i_1 H_1$ treffen. Es ist dann:

$$AB = \frac{\overline{HA}^2}{2l}, \qquad A_1 B_1 = \frac{\overline{H_1 A_1}^2}{2l}.$$

Infolge der obigen Voraussetzung, dass die Excenterstangen nur kleine Winkel mit der Geraden Φp bilden, sind die Längenunterschiede der Strecken HA, HB und $H_1 A_1$, $H_1 B_1$ sehr klein, deshalb können wir angenähert

$$HA = HB = c - r\cos\vartheta, \qquad H_1 A_1 = H_1 B_1 = c + r\cos\vartheta$$

setzen, und erhalten

$$AB = \frac{(c - r\cos\vartheta)^2}{2l}, \qquad A_1 B_1 = \frac{(c + r\cos\vartheta)^2}{2l}.$$

Es ist nun die Strecke

$$HH_1 = EB - (E_1 B_1 - 2r\sin\vartheta) = l - AB - (l - A_1 B_1) + 2r\sin\vartheta,$$

demnach ergiebt sich

$$HH_1 = 2r\sin\vartheta + 2\frac{c}{l} r\cos\vartheta;$$

und ferner erhalten wir den Abstand der Schwingungsmitte i_m von der Axe Φ

$$\Phi i_m = \tfrac{1}{2}(\Phi i_1 + \Phi i) = \tfrac{1}{2}(2l - AB - A_1B_1) = l - \frac{c^2 + r^2 \cos^2 \vartheta}{2l}.$$

Bezeichnen wir mit D den Fusspunkt der von E auf Φp gefällten Senkrechten, so ist auch

$$2\,\overline{\Phi P} = 2\,\overline{\Phi D} + 2\,\overline{DP} = PP_1 = HH_1 = 2r \sin\vartheta + 2\frac{c}{l} r\cos\vartheta,$$

$$\Phi P = r\sin\vartheta + \frac{c}{l} r \cos\vartheta,$$

und folglich

$$DP = \frac{c}{l} r \cos\vartheta.$$

Hiernach ergiebt sich, wenn wir den Winkel DEP mit ν bezeichnen,

$$\tan\nu = \frac{DP}{ED} = \frac{c}{l}.$$

Errichten wir nun im Abstande $\Phi\psi = l$ auf p die Senkrechte $\psi\chi = c$ bis an HH_1, dann ist auch der Winkel $\psi\Phi\chi = \nu$ und die Schlitzrichtung EP ist senkrecht auf der erhaltenen Geraden $\Phi\chi$.[1])

Das so bestimmte schräge Kreuzkurbelgetriebe können wir nach Art. 146 in folgender Weise durch ein rechtwinkeliges Kreuzkurbelgetriebe ersetzen. Wir ziehen in Fig. **701** die Gerade $\Phi\chi$, welche den von E beschriebenen Kreis einerseits in E^0 schneidet, errichten in E^0 auf $\Phi\chi$ die Senkrechte E^0P^0 bis an die Gerade $\Phi\psi$ und ziehen ferner auf ΦE die Senkrechte $EG = E^0P^0$; dann ist ΦG der Kurbelarm und GP die auf $\Phi\psi$ senkrechte Mittellinie des Schlitzes des rechtwinkeligen Kreuzkurbelgetriebes, welches in Fig. **702** gezeichnet ist. Durch dasselbe wird der Punkt H der Schubstange angenähert wie jener Schnittpunkt H bewegt, den die bewegte Gerade HH' mit der festen Geraden η bildet, und wenn die Ecke E des um Φ rotirenden Dreiecks ΦEG in die diametralen Lagen E, E_1, resp. die Ecke G in die diametralen Lagen G, G_1 gelangt, coincidirt der Punkt H der Schubstange mit jenen beiden Lagen H, H_1 des Gelenkpunktes H der Coulisse.

Infolge dieser Construction erhalten wir, weil $\Phi\psi = l$, $\psi\chi = c$ und $\Phi E = r$ ist,

---

[1]) Fliegner befolgt in seinen *Umsteuerungen der Locomotiven*, 1881, S. 42, die in Art. 147 abgeleitete Annäherung $\sin\nu = c:l$. Da sich dieselbe hier aber nicht als zweckmässig erweist, so wendet sich Fliegner durch erschwerte Constructionen auf einem Umwege auch zu der Annäherung $\tan\nu = c:l$, welche sich durch die obige Ableitung direct ergiebt.

$$EG:\Phi E = E^0P^0:\Phi E^0 = c:l$$

und die Länge der auf ΦE senkrechten Strecke

$$EG = r\frac{c}{l} = r \tan \nu.$$

Es ist somit

$$\Phi P = r\left(\sin\vartheta + \frac{c}{l}\cos\vartheta\right) \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

und

$$PG = r\left(\cos\vartheta - \frac{c}{l}\sin\vartheta\right) \quad \ldots\ldots \quad 2).$$

Wegen der symmetrischen Gestalt des Mechanismus in Fig. **700** ist die Bewegung der Coulisse, weil sich die Spannenmitte i angenähert auf der Geraden $\Phi\sigma$ bewegt, angenähert symmetrisch zu dieser Geraden. Wenn wir daher auf den beiden Excenterarmen ΦE, $\Phi E'$ die gleichen Senkrechten EG, $E'G'$ errichten und ΦG, $\Phi G'$ als Kurbelarme zweier rechtwinkeliger Kreuzkurbelgetriebe betrachten, so erhalten wir bei entsprechender Anordnung den in Fig. **696** dargestellten Mechanismus, dessen geradlinige Coulisse angenähert dieselbe Bewegung wie die Coulissenspanne HH' in Fig. **700** vollzieht[1]). Sind allgemein die Excenterarme ΦE, $\Phi E'$ nebst ihren Voreilwinkeln nicht gleich, sind ferner auch die Schubstangen EH, $E'H'$ und die Abstände iH, iH' ungleich; dann erhalten wir in gleicher Weise zwei mit ungleichen Kurbelarmen versehene rechtwinkelige Kreuzkurbelgetriebe, die den in Fig. **695** dargestellten Mechanismus bilden.

Wir ziehen in Fig. **700** durch den Punkt J zu $\Phi\sigma$ die Parallele q, welche von der bewegten Coulissenspanne HH' im Punkte i_u geschnitten wird, und wir bestimmen auf der Verbindungsgeraden GG' den Punkt R, so dass $GRG' \backsim Hi_uH'$ ist, oder da P die Mitte von GG' bezeichnet, so dass $PRG' \backsim ii_uH'$ ist. Hiernach ergiebt sich, indem wir den Abstand der Parallelen q, $\Phi\sigma$ gleich u setzen und beachten, dass c gleich dem Abstande der Parallelen η', $\Phi\sigma$, ferner $PG' = PG$ ist, das Verhältniss

$$PR:PG' = u:c$$

und somit

---

[1]) Diese Vereinfachung wurde von Neubert aphoristisch erwähnt im *Pract. Maschinen-Constructeur*. 1872. B. 5. S. 40. Später auch von M. Herrmann in den *Technischen Blättern*. 1880. B. 12. S. 68 angegeben, aber mangelhaft und unvollständig begründet. Fliegner hat in seinen *Umsteuerungen der Locomotiven*, 1881, diese Vereinfachung auch angewendet.

$$PR = \frac{u\,r}{c}\left(\cos\vartheta - \frac{c}{l}\sin\vartheta\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3).$$

Gemäss der befolgten Annäherungsweise können wir somit die Bewegung der auf $\Phi\sigma$ senkrechten Projection des Punktes R als annähernd übereinstimmend betrachten mit der Bewegung des Schnittpunktes i_u auf der Parallelen q. Demnach können wir uns diese Bewegung des Punktes i_u angenähert durch ein rechtwinkeliges Kreuzkurbelgetriebe erzeugt denken, dessen Kurbel ΦR ist und dessen Schubstange sich parallel zur Geraden $\Phi\sigma$ verschiebt; und wir werden daher diese Kurbel ΦR auch den ideellen Excenterarm der Schieberbewegung nennen.

Um die Bewegung des Schnittpunktes i_u für verschiedene Lagen der Parallelen q derart auf die Schieberstange σ oder den Gelenkpunkt K zu übertragen, dass die Punktlagen K, K_1, welche den beiden Todtlagen ΦF_0, ΦF_τ der Kurbel, resp. den beiden Excenterstellungen $E\Phi E'$, $E_1\Phi E_1'$ entsprechen, unverändert bleiben und somit für beide Kolbenseiten stets gleiche lineare Voreilung eintritt, muss die Coulisse nach einem Kreisbogen geformt sein, dessen Radius gleich der Schubstange JK ist. Denn bei den beiden auf $\Phi\sigma$ senkrechten Coulissenlagen HH', H_1H_1', die jenen Todtlagen entsprechen, werden demnach durch verschiedene Feststellungen der Aufhängeaxe Σ die betreffenden Lagen der Schieberstange σ nicht verändert. Es tritt also mit den beiden Excenterstellungen $E\Phi E'$, $E_1\Phi E_1'$, wie auch die Aufhängeaxe Σ gestellt ist, der Gelenkpunkt der Schieberstange resp. in die Mittelpunkte K, K_1 der jenen Coulissenlagen angehörenden mittleren Kreisbögen. Zwar wird der Gelenkpunkt J, der mit i_u in gleichem Abstande von $\Phi\sigma$ liegt, beim Schwingen der Coulisse nicht genau dieselbe Bewegung wie der Schnittpunkt i_u auf der Parallelen q vollziehen; aber die von J nach K übertragene Bewegung wird sich nur sehr wenig von der Bewegung des Punktes i_u unterscheiden und um so mehr mit derselben übereinstimmen, je weniger bei der Coulisse der Kreisbogen beiderseits von der Geraden HH' abweicht und je besser die Schubstange JK durch die Aufhängung parallel geführt wird. Demnach können wir sagen, dass bei dem betreffenden Angriff der Coulisse im Punkte J die Schieberstange σ oder der Punkt K sich sehr angenähert so bewegt, wie die Projection von dem rotirenden Punkte R auf $\Phi\sigma$.

Für alle Lagen der Parallelen q wird, wenn der schwingende Punkt i_u die zwischen HH', H_1H_1' gezogene Mittellinie H_mH_m' überschreitet, gleichzeitig der Gelenkpunkt K die Mitte K_m der

Bahnstrecke KK_1 passiren. Die in der Mittellinie $H_m H'_m$ liegende Mitte der Bahnstrecke des Punktes i_u, die von denjenigen beiden Punktlagen begrenzt wird, welche den beiden Todtlagen der Kurbel oder den beiden Excenterstellungen $E\Phi E'$, $E_1\Phi E'_1$ entsprechen, wollen wir die Stellungsmitte des Punktes i_u nennen. Ebenso soll auch die Mitte K_m der Bahnstrecke KK_1 die Stellungsmitte des Punktes K heissen. Die wirkliche Schwingungsmitte des Punktes i_u weicht ein wenig nach rechts von seiner Stellungsmitte ab; aber diese Abweichung ist sehr klein bei den in der Praxis angewendeten Dimensionen, so dass sie vernachlässigt werden kann; und demnach können wir die Stellungsmitte K_m auch als die Schwingungsmitte des Punktes K betrachten. Bei der gezeichneten Aufhängung der Schubstange JK ist somit die grösste Entfernung des Punktes K von seiner Stellungsmitte K_m gleich dem ideellen Excenterarme ΦR. Errichten wir in der Mitte K_m auf KK_1 die Senkrechte $K_m k_m$ und machen wir auf der Parallelen q die Strecke $k_m k = k_m k_1 = \Phi R$, so erhalten wir durch Wiederholung dieser Construction für verschiedene Feststellungen der Aufhängeaxe Σ die Hyperbel $Kk K_1 k_1$, deren beide Aeste auf den betreffenden zu σ parallelen Geraden q annähernd die Schwingungsweiten des Punktes K bestimmen.

Der in die Todtlage ΦF_0 gedrehten Kurbel entspricht die Excenterstellung $E_1\Phi E'_1$ und die Lage ΦR_1 des ideellen Excenterarmes, der ΦR entgegengesetzt ist. Behufs der Construction der Schieberkreise, welche verschiedenen Stellungen des Gleitbackens in der Coulisse entsprechen, ist in Fig. **703** die Lage ΦR_1 der Deutlichkeit wegen dreifach vergrössert gezeichnet. Die Kurbel ΦF_0 rotirt dem Voreilwinkel $Y\Phi R_1$ gemäss im Sinne des Pfeiles φ, und diese Drehung bewirkt, weil der Cylinder und der Schieber bei der Locomotive nach vorn liegt, den Rückwärtsgang derselben. Der im Bezug auf ΦY zu ΦR_1 symmetrische Durchmesser ΦN^2 des zugehörigen Schieberkreises $\mathfrak{w}^2$ wird somit direct erhalten, indem wir an ΦY den Winkel $Y\Phi E = \vartheta$ antragen, ΦE gleich der Excentricität r machen, auf ΦE die Senkrechte

$$EG = r\frac{c}{l}$$

errichten, dann von G die Senkrechte GP auf ΦF_0 ziehen und auf derselben den Endpunkt N^2 dieses Durchmessers so bestimmen, dass der Punkt N^2 die Strecke PG in gleichem Verhältnisse theilt, wie der Punkt i_u in Fig. **700** die Hälfte iH' der auf $\Phi\sigma$ senkrechten Coulissenspanne, dass also $PN^2G \sim ii_uH'$ ist.

Durch diese Construction werden die obigen Formeln 1), 2), 3) erfüllt, und es ist:

$$\Phi P = r\left(\sin\vartheta + \frac{c}{l}\cos\vartheta\right), \quad \Phi G = r\left(\cos\vartheta - \frac{c}{l}\sin\vartheta\right),$$

$$PR^2 = \frac{ur}{c}\left(\cos\vartheta - \frac{c}{l}\sin\vartheta\right).$$

Bringen wir nun den Gelenkpunkt J in der Coulisse durch Hebung oder Senkung successive in verschiedene Abstände von der Geraden $\Phi\sigma$, die gleich 0, $\frac{1}{4}c$, $\frac{2}{4}c$, $\frac{3}{4}c$, c sind und theilen wir dem gemäss in Fig. **703** die Strecke PG in vier gleiche Theile, dann liefern die Theilpunkte P, N^1, N^2, N^3, G die Durchmesser der zugehörigen Schieberkreise $\mathfrak{w}^0$, $\mathfrak{w}^1$, $\mathfrak{w}^2$, $\mathfrak{w}^3$, $\mathfrak{w}^g$, die sich ausser in dem Punkte Φ noch in dem Punkte P auf der Geraden ΦF_0 schneiden. Etwas einfacher ist es jedoch, wenn wir anstatt der Durchmesser der Schieberkreise ihre Mittelpunkte m^0, m^1, m^2, m^3, g bestimmen, also in halber Grösse das zu ΦEGP ähnliche Viereck $\Phi e g m^0$ direct construiren und die Senkrechte $m^0 g$ in vier gleiche Theile theilen.

Um im Diagramm die Bewegungsvorgänge des Schiebers darzustellen, beschreiben wir um Φ mit der äusseren Deckung $\Phi\gamma$ als Radius den Kreis $W_{III}^0 W_{VI}^g$, welcher die Todtlage ΦF_0 der Kurbel im Punkte γ schneidet; dann bestimmen die Schnittpunkte W_{III}^0, W_{III}^1 . . und W_{VI}^0, W_{VI}^1, W_{VI}^2, W_{VI}^3, W_{VI}^g, welche derselbe mit den betreffenden Schieberkreisen bildet, beziehlich die zugehörigen Kurbellagen, mit denen die Eröffnung und Schliessung des Kanals eintritt. Für die Schliessung sind die zugehörigen Kurbelstellungen ΦF_{VI}^0, ΦF_{VI}^1, ΦF_{VI}^2, ΦF_{VI}^3, ΦF_{VI}^g, denen im bogenförmigen Kolbendiagramm die Füllungsstrecken $Z_{VI}^0 F_{VI}^0$, $Z_{VI}^1 F_{VI}^1$, $Z_{VI}^2 F_{VI}^2$, $Z_{VI}^3 F_{VI}^3$, $Z_{VI}^g F_{VI}^g$ entsprechen. In gleicher Weise ergeben sich durch einen zweiten um die Kanalweite grösseren concentrischen Kreis die Kurbelstellungen, mit denen resp. die grösste Eröffnung des Kanals beginnt und aufhört. Die lineare Voreilung γP ist, weil die Schieberkreise sich im Punkte P auf der Todtlage ΦF_0 schneiden, bei der Gooch'schen Steuerung constant. Wenn wir ebenso wie in der unteren Coulissenhälfte auch symmetrisch liegend in der oberen Coulissenhälfte verschiedene Stellungen des Gelenkpunktes J annehmen, so ist das zugehörige Diagramm dem gezeichneten bezüglich ΦF_0 symmetrisch. Dem zufolge ist die Drehung der Kurbel entgegengesetzt, und es wird somit der Vorwärtsgang der Locomotive bewirkt.

Werden in Fig. 700 die Punkte H, H' vertauscht, dann kreuzen sich die Excenterstangen bei der Excenterstellung $E\Phi E'$ zwischen Welle und Coulisse. In diesem Falle bleiben alle Ergebnisse unserer Entwickelung bestehen; und es ist nur zu beachten, dass bei gekreuzten Excenterstangen dieser Anordnung gemäss die Grösse c als negativ zu nehmen ist. Jener Winkel ν, der durch $\tan \nu = c : l$ bestimmt ist, muss demnach auch in entgegengesetztem Sinne genommen werden. Auf den Excenterarmen sind dann die beiden Senkrechten

$$EG = EG' = -\frac{rc}{l}$$

nach der anderen Seite hin zu errichten, und wir erhalten ferner die entsprechenden Formeln:

$$\Phi P = r\left(\sin\vartheta - \frac{c}{l}\cos\vartheta\right),$$

$$PG = r\left(\cos\vartheta + \frac{c}{l}\sin\vartheta\right),$$

$$PR = -\frac{ur}{c}\left(\cos\vartheta + \frac{c}{l}\cos\vartheta\right).$$

Wenn demnach das Diagramm für diesen Fall dargestellt werden soll, so brauchen wir nur die betreffende Senkrechte $EG_I = EG$ in Fig. 703 an die andere Seite von ΦE anzutragen, um die auf ΦF_0 senkrechte Gerade $G_I P_I$ zu erhalten, welche die Endpunkte der Durchmesser der entsprechenden Schieberkreise enthält.

Die Bewegung der Coulisse ist im Bezug auf die Gerade $\Phi\sigma$ symmetrisch, wenn die Spannenmitte i sich auf dieser Geraden bewegt, und dadurch wird beim Vorwärts- und Rückwärtsgang der Maschine dieselbe Dampfvertheilung bewirkt. Damit eine solche Symmetrie der Bewegung sehr angenähert vermittelst der Aufhängung erreicht wird, muss die Anordnung derart sein, dass die Bahn der Spannenmitte i möglichst wenig von der Geraden $\Phi\sigma$ abweicht. In Fig. 704 sind die beiden auf σ senkrechten Lagen HH', H_1H_1' der Coulissenspanne gezeichnet, deren Mitten i, i_1 in der Geraden σ liegen, und ferner sind die beiden Lagen H_2H_2', H_3H_3' construirt, bei denen die zugehörigen Mitten i_2, i_3 in der Mitte der Strecke ii_1 coincidiren. Diese vier Lagen sind im Bezug auf die Mittellinie ζ, die in der Mitte auf ii_1 senkrecht steht, symmetrisch. Um nun eine zweckmässige Aufhängung zu erlangen, nehmen wir auf den beiden Lagen HH', H_2H_2' die beiden homologen Punkte T, T_2 an, indem wir $iT = i_2 T_2$ machen, und errichten auf TT_2 in der Mitte t die Senkrechte $t\Theta$, welche die Gerade ζ in Θ trifft. Betrachten wir nun Θ als festen Aufhängepunkt der Hängestange ΘT und T als ihren Anschlusspunkt an der Coulisse, so wird, weil der um Θ mit ΘT beschriebene Kreis τ durch die vier homologen Punkte T, T_1, T_2, T_3 jener vier Lagen der Coulissenspanne geht, bei dieser Aufhängung die Spannenmitte i in die auf σ befindlichen vier Lagen i, i_1, i_2, i_3 gelangen, von denen i_2, i_3 coincidiren. Wiederholen wir diese Construction des betreffenden Punktes Θ, indem wir mehrere Paare homologer Punkte auf den beiden Lagen HH', H_2H_2' annehmen, so schneiden sich die entsprechenden Senkrechten $t\Theta$ in dem Pol P^{12} dieser beiden Lagen und die Mitten der Verbindungsgeraden der homologen Punkte liegen auf einer Geraden th. Wie nun hiernach jedem auf der Coulissenspanne befindlichen Anschlusspunkte T eindeutig ein Aufhängepunkt Θ auf ζ entspricht, so gehört auch umgekehrt zu jedem auf ζ angenommenen Aufhängepunkte eindeutig ein Anschlusspunkt auf der Coulissenspanne. Denn ziehen wir, wenn Θ gegeben ist, die Gerade ΘP^{12} bis zum Schnitt t, den sie mit th bildet, so bestimmt die auf Θt senkrechte Gerade tT den zugehörigen Punkt T auf HH'. Die zweckmässigste Aufhängung würde sein, wenn Θ im Unendlichen liegt, dann fällt der Anschlusspunkt T in die Spannenmitte i, und deren Bahncurve geht in die Gerade σ über. Daher wird man auch die Aufhängestange stets von so grosser Länge wählen, als es die praktische Anordnung gestattet.

Die Bewegung des Punktes K in Fig. **700** stimmt mit der des Punktes J überein, wenn dieser Punkt J sich in der zu σ parallelen Geraden q bewegt, und dem zufolge bewegen sich alle Punkte der Schubstange JK in Parallelen zu σ. Soll nun die Führung dieser Schubstange vermittelst einer Aufhängestange ΣS geschehen, so muss diese möglichst lang genommen werden; und es ist nur zu erreichen, dass zwei Lagen des Anschlusspunktes S sich in einer zu σ parallelen Geraden ξ befinden. Zu diesem Zwecke wählen wir die beiden Lagen JK, J_1K_1, ziehen durch den auf JK angenommenen Anschlusspunkt S zu σ die Parallele ξ, die J_1K_1 in dem homologen Punkte S_1 schneidet, errichten in der Mitte $\mathfrak{s}$ auf SS_1 die Senkrechte $\mathfrak{s}\Sigma$ und nehmen auf derselben den Aufhängepunkt Σ so an, dass die Stange ΣS so lang wird, als es die praktische Anordnung gestattet. Denken wir uns die Endpunkte S, S_1 der constanten zu σ parallelen Strecke SS_1 resp. auf den gleichen Kreisen bewegt, deren Mittelpunkte K, K_1 und deren Radien KS, K_1S_1 sind, dann beschreibt auch die Spitze Σ des gleichschenkeligen Dreiecks $S\Sigma S_1$ einen gleich grossen Kreis um den Mittelpunkt Ψ, der in der Geraden $K_m k_m$ liegt und von K_m um die Strecke $K_m\Psi = \mathfrak{s}\Sigma$ entfernt ist. Die verschiedenen Feststellungen des Aufhängepunktes Σ müssen demnach, wenn es praktisch zulässig ist, auf einem Kreise erfolgen, dessen Radius gleich KS und dessen Mittelpunkt die Spitze Ψ des zu $S\Sigma S_1$ congruenten gleichschenkeligen Dreiecks $K\Psi K_1$ ist[1]).

Die in der Praxis gewählten Maassverhältnisse einer Gooch'schen Steuerung sind für die gewonnene Annäherung viel günstiger als in unserer schematischen Darstellung. Wir wollen deshalb noch das Diagramm für die Schieberbewegung einer in Fig. **705** gezeichneten Gooch'schen Steuerung nach den aus der Praxis entnommenen Dimensionen in $\frac{1}{2}$ natürlicher Grösse ausführen. Es sind die Excenterarme $r = 0{,}06^m$, ihre Voreilwinkel $\vartheta = 20^0$, die Excenterstangen $l = 1{,}2^m$, und ferner ist die halbe Coulissenspanne $c = 0{,}15^m$. Wir tragen in Fig. **706** an die Gerade ΦY die Strecke $\Phi e = \frac{1}{2} r = 0{,}03^m$ unter dem Winkel $Y\Phi e = \vartheta = 20^0$ an, machen den Winkel $e\Phi g = \nu$, der durch $\tan \nu = c : l$ bestimmt ist, errichten auf Φe in e die Senkrechte eg bis an Φg, fällen von g auf ΦF_0 die Senkrechte gm^0 und theilen dieselbe in ebenso viel gleiche Theile als Füllungsgrade oder Expansionsgrade verlangt werden. Die erhaltenen Theilpunkte sind dann die Mittelpunkte m^0, m^1, m^2, m^3, g der durch Φ gezogenen Schieberkreise $\mathfrak{w}^0$, $\mathfrak{w}^1$, $\mathfrak{w}^2$, $\mathfrak{w}^3$, $\mathfrak{w}^g$; und die zugehörigen Abstände des Angriffspunktes J von der Geraden $\Phi\sigma$ ergeben sich durch Eintheilung der halben Coulissenspanne in dieselbe Anzahl gleicher Theile. Hierauf beschreiben wir um Φ den Kreis γ mit dem Radius $\Phi\gamma = 0{,}023^m$, der gleich der äusseren Deckung ist. Die Schnittpunkte, welche dieser Kreis γ mit den Schieberkreisen bildet, bestimmen bei den betreffenden Aufhängungen beziehlich die Kurbelstellungen für den Beginn der Dampfeinströmung und für den Beginn der Expansion. Die entsprechenden Füllungsstrecken erhalten wir dann ebenso wie vorhin angegeben wurde. Bei der Stellung des Punktes J in der Mittellinie $\Phi\sigma$ ist die Dampfvertheilung, wie man leicht erkennt, so unzweckmässig, dass die Maschine nicht in Bewegung versetzt wird. Wenn wir daher von dieser Stellung absehen, so liefert unser Diagramm wegen der beispiels-

---

[1]) Blaha, *Steuerungen der Dampfmaschinen.* 2. Aufl. 1884. S. 38.

weise gewählten Viertheilung vier Expansionsgrade. Wir können auch umgekehrt die verschiedenen Füllungsstrecken oder Kolbenwege annehmen, die entsprechenden Kurbelstellungen bestimmen, mit denen also die Expansion beginnen soll, darnach die Schieberkreise construiren und die zugehörigen Aufhängungen ermitteln. Die übrigen Vorgänge der Dampfbewegung ergeben sich aus dem Diagramm wie früher erörtert wurde.

280. **Fink'sche Steuerung.** In Fig. **707**, Taf. XLVII, ist die von Pius Fink ausgeführte Coulissensteuerung schematisch gezeichnet, bei welcher die Bewegung der Coulisse nur durch ein Excentrik bewirkt wird[1]). Die bogenförmige Coulisse wird von dem Excenterarme ΦE getrieben und ist auf eine in der Spannenmitte i drehbar angeschlossene Stange gestützt, die um die feste Axe Θ schwingt; und demnach ist $\Phi E i \Theta$ ein Schwingkurbelgetriebe. Die verstellbar aufgehängte Schubstange JK ist einerseits mit einem in der Coulisse befindlichen Gleitbacken drehbar verbunden, anderseits an die Schieberstange $K\sigma$ in K gelenkig angeschlossen. Diese Coulissensteuerung geht als Specialfall aus der Gooch'schen Steuerung hervor, wenn bei derselben die beiden entgegengesetzt gleichen Voreilwinkel $\vartheta = 90^\circ$ sind; dann fallen die beiden Excenterarme zusammen und die beiden Excenterstangen bilden mit der Coulisse ein einziges Glied, welches bei der Fink'schen Steuerung durch $EiHH'$ vertreten wird. Die Coulisse muss demnach behufs Erlangung constanter linearer Voreilung bei dieser Steuerung auch nach einem Kreisbogen gekrümmt sein, dessen Radius gleich der Schubstange JK ist; und für die Aufhängung dieser Schubstange gelten dieselben Beziehungen, welche wir vorhin erkannt haben. Die Spannenmitte i wird auf einem Kreisbogen geführt, der theils über, theils unter der Geraden $\Phi\sigma$ liegt, und somit nur wenig von dieser Geraden abweicht. Um aber zu erreichen, dass die Bahn der Spannenmitte i möglichst wenig von der Geraden $\Phi\sigma$ abweicht, muss der Anschlusspunkt der Coulisse an die Führungsstange und der feste Drehpunkt Θ ebenso, wie oben S. 710 angegeben wurde, bestimmt werden.

Nehmen wir nun an, es sei die Verbindungsstrecke $Ei = a$ gegen den Excenterarm $\Phi E = r$ verhältnissmässig lang und der

[1]) Die erste Mittheilung von P. Fink über diese Steuerung findet sich in der *Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins*. 1858. B. X. S. 81; und die erste Untersuchung derselben stammt von R. v. Grimburg, *daselbst*. 1862. B. XIV. S. 145.

Punkt i bewege sich angenähert in der Geraden $\Phi\sigma$, so dass das Kurbelgetriebe $\Phi E i \Theta$ angenähert durch ein rechtwinkeliges Kreuzkurbelgetriebe ersetzt werden kann; dann können wir uns die Bewegung der Coulissenspanne HH' auch angenähert durch den in Fig. **698** gezeichneten Mechanismus hervorgebracht denken, wenn bei demselben die Kurbel ΦE gleich dem Excenterarme ΦE und der Abstand Pi gleich der Verbindungsstrecke Ei genommen wird. Bezeichnen wir den veränderlichen Abstand des Punktes J von der Geraden $\Phi\sigma$ mit u, und machen wir nach der auf S. 702 abgeleiteten Formel, in welcher Ei für Pi gesetzt wird, die auf ΦE errichtete Senkrechte

$$ER = \frac{\Phi E}{Ei} u,$$

so stimmt die Bewegung des Punktes J angenähert überein mit der Bewegung der auf $\Phi\sigma$ senkrechten Projection des rotirenden Punktes R. Wir können demnach ΦR als die Kurbel eines rechtwinkeligen Kreuzkurbelgetriebes ansehen, dessen zu $\Phi\sigma$ parallele Schubstange den Punkt J trägt, und es ist also ΦR der ideelle Excenterarm für die Schieberbewegung.

Um den Schieberkreis für die gezeichnete Aufhängung der Stange JK zu construiren, machen wir in Fig. **708** der Deutlichkeit wegen in zweifacher Vergrösserung auf der Todtlage der Kurbel ΦF_0 die Strecke $\Phi P = \Phi E$, errichten auf ΦF_0 die Senkrechte

$$PN^3 = ER = \frac{\Phi E}{Ei} u,$$

dann ist ΦN^3 der Durchmesser des zugehörigen Schieberkreises $\mathfrak{w}^3$. Wenn mehrere Schieberkreise zu zeichnen sind, ist es zweckmässig, anstatt ihrer Durchmesser direct ihre Mittelpunkte zu bestimmen. Ist c der grösste Abstand des Punktes J von der Schubrichtung $\Phi\sigma$ und wird J durch verschiedene Aufhängungen successive in die Abstände u gleich 0, $\frac{1}{4}c$, $\frac{2}{4}c$, $\frac{3}{4}c$, c gebracht, so dass vier Expansionsgrade auftreten; dann construiren wir zunächst für den grössten Abstand resp. für die kleinste Expansion den Mittelpunkt m^4 des zugehörigen Schieberkreises $\mathfrak{w}^4$, indem wir in der Mitte m^0 auf ΦP die Senkrechte ziehen, auf derselben die Strecke

$$m^0 m^4 = \frac{\Phi E \,.\, c}{2\, Ei}$$

machen und diese in vier gleiche Theile theilen. Die so erhaltenen Punkte m^0, m^1, m^2, m^3, m^4 sind die Mittelpunkte der entsprechenden Schieberkreise $\mathfrak{w}^0$, $\mathfrak{w}^1$, $\mathfrak{w}^2$, $\mathfrak{w}^3$, $\mathfrak{w}^4$, welche durch den

Punkt Φ gehen und sich auf ΦF_0 in dem Punkte P schneiden; dem zufolge ist die lineare Voreilung bei den verschiedenen Stellungen des Gleitbackens constant. Mit der Verstellung des Gleitbackens in die eine oder die andere Hälfte der Coulisse wechselt der Sinn der Wellendrehung.

Wenn bei der Fink'schen Coulissensteuerung in dem Verhältnisse $\Phi E : Ei = 1 : n$ die Zahl $n \geqq 4$ ist, zeigt sich, dass die erhaltene Annäherung bei der in der Praxis angewendeten Coulissenlänge als genügend betrachtet werden kann. Ist aber $n < 4$, dann wird es zweckmässig sein, in Fig. **707** den vom Punkte E beschriebenen Kreis in eine Anzahl gleiche Theile zu theilen und die entsprechenden Lagen der Coulissenspanne HH' zu zeichnen, um aus diesen Lagen zu ersehen, wie sich der Schieber zu den Kanalöffnungen stellt. Denn durch die Schnittpunkte, welche eine zu $\Phi\sigma$ parallele Gerade mit den Lagen der Coulissenspanne bildet, werden die Lagen einer Schieberkante für die betreffende Aufhängung der Schubstange JK dargestellt[1]).

281. **Heusinger von Waldegg'sche Steuerung.** Die Fig. **709** stellt im Schema die Coulissensteuerung von Heusinger v. Waldegg dar, bei welcher die Bewegung des Schiebers durch einen Excenterarm und durch die Kurbel vermittelst der Kolbenstange bewirkt wird[2]). Die Kolbenstange $L\varkappa$, welche in der festen Hülse H geführt wird, treibt vermittelst der Pleuelstange LF die Kurbel ΦF. Auf der Welle Φ ist ein Excenter festgekeilt, das durch den auf ΦF senkrechten Excenterarm ΦE vertreten wird. Dieser Excenterarm setzt durch die Excenterstange ED die bogenförmige, um eine feste Axe C drehbare Coulisse in schwingende Bewegung. An die Schieberstange $J\sigma$, welche in einer festen Hülse Ξ parallel zur Kolbenstange $L\varkappa$ gleitet, ist in J eine Stange Js gelenkig angeschlossen. Diese Stange verschiebt sich in einer Hülse X, die seitlich an die Kolbenstange in H' drehbar befestigt ist, und trägt einen Zapfen H, welcher durch die Schubstange HT mit dem in der Coulisse befindlichen Gleitbacken gelenkig verbunden ist. Dieser Gleitbacken ist in T an eine Hängestange $T\Theta$ gehängt, die um eine verstellbare Axe Θ schwingt. Durch die Drehung der Welle Φ wird der Hülsenzapfen H', sowie die Coulisse CD in schwingende Bewegung versetzt, und infolge dessen wird die

---

[1]) Vergl. O. H. Müller, „Ueber Umsteuerungen, besonders für Schiffsmaschinen". *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure.* 1866. B. 10. S. 299.

[2]) *Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens.* 1854. S. 90 und ferner *daselbst.* 1866. S. 221.

Stange Js einerseits von der Hülse X, anderseits von der Schubstange HT getrieben. Da sich der Gelenkpunkt J ebenso wie der Hülsenzapfen H' parallel zur Kolbenstange $L\varkappa$ bewegt, so beschreibt der in der Nähe von J befindliche Punkt H der Stange Js eine Curve, die von einer zu $L\varkappa$ parallelen Geraden sehr wenig abweicht; und auf dieser Geraden wird der feste Axenpunkt C angenommen.

Durch die Schwingungsmitte H'_m von H' ziehen wir senkrecht zu $L\varkappa$ die Gerade $H'_m J_m$ bis an $J\sigma$ und bezeichnen ihren Schnittpunkt, den sie mit jener durch C gehenden zu $L\varkappa$ parallelen Geraden bildet, mit H_m. Wir nehmen nun an, dass, wenn die Kurbel ΦF sich in der Todtlage ΦF_0 befindet, die durch C gehende Coulissenspanne DD' senkrecht auf $L\varkappa$ steht und der Punkt H mit H_m coincidirt; dann ist der Punkt H_m die Schwingungsmitte von H. Damit aber diese Schwingungsmitte für alle Lagen des Gleitbackens in der Coulisse dieselbe bleibt, muss die Coulisse nach dem Kreisbogen gekrümmt sein, dessen Radius gleich der Schubstange HT ist. Wenn die Excenterstange ED gegen ΦE sehr lang ist, stimmt die kurze Schwingung des Punktes D sehr nahe überein mit der Bewegung der auf $\Phi\varkappa$ senkrechten Projection von E, und der Zapfen T vollzieht dann eine ähnliche verkleinerte Bewegung. Bezeichnet c die halbe Coulissenspanne CD, ferner u den Abstand des Punktes T von der in C auf DD' senkrechten Symmetrallinie der Coulisse, wenn die Coulisse sich in ihrer Mittellage befindet, und bestimmen wir, weil u nur sehr wenig von CT verschieden ist, auf ΦE den Punkt E_u so, dass

$$\Phi E_u : \Phi E = u : c$$

ist; dann ergiebt sich, indem wir $\Phi E = r$ setzen,

$$\Phi E_u = \frac{r}{c}\, u.$$

Hiernach stimmt die Bewegung des Punktes T angenähert mit der Bewegung der auf $\Phi\varkappa$ senkrechten Projection von E_u überein. Unter der Voraussetzung einer zweckmässig gewählten Aufhängung des Gleitbackens wird dieselbe Bewegung von T auf H übertragen; und demnach vollzieht der Punkt H angenähert dieselbe Bewegung, als wenn er von einem Kreuzkurbelgetriebe bewegt wird, dessen Kurbel ΦE_u ist. Nehmen wir nun an, dass auch die Bewegung des Punktes H' angenähert übereinstimme mit der Bewegung der auf $\Phi\varkappa$ senkrechten Projection von F; so können wir die Bewegung der Stange Js auch durch den in Fig. **696** gezeichneten, aber entsprechend veränderten Mechanismus hervorbringen. Bestimmen wir also auf der Geraden FE_u den Punkt R so, dass

$$FE_u R \backsim H'_m H_m J_m$$

ist, dann bewegt sich der Punkt J, dessen Schwingungsmitte J_m ist, angenähert so wie die Projection von dem mit der Welle Φ verbundenen Punkte R im Bezug auf die Gerade $\Phi\varkappa$. Demnach ist ΦR der ideelle Excenterarm für die Bewegung des Punktes J oder des Schiebers, die der betreffenden Aufhängung des Gleitbackens entspricht.

Mit der Verstellung der Aufhängeaxe Θ, also mit der Verschiebung des Gleitbackens in der Coulisse, verändert sich die Lage des Punktes E_u auf ΦE nach der abgeleiteten Gleichung

$$\Phi E_u = \frac{r}{c} u;$$

und es ist somit der geometrische Ort von R eine auf $F\Phi$ senkrechte Gerade, deren Fusspunkt mit P bezeichnet ist.

Setzen wir den Kurbelarm $\Phi F = \varrho$, ferner $H_m J_m = h$, $H_m H'_m = k$, dann ergiebt sich, weil

$$\Phi P : \Phi F = H_m J_m : H_m H'_m$$

oder

$$\Phi P : \varrho = h : k$$

ist, die Strecke

$$\Phi P = \frac{h \,.\, \varrho}{k}.$$

Ausserdem folgt aus der Proportion:

$$PR : \Phi E_u = PF : \Phi F$$

oder

$$PR : \frac{r}{c} u = \left(\varrho + \frac{h \,.\, \varrho}{k}\right) : \varrho$$

die Strecke

$$PR = \frac{(h + k) r}{c \,.\, k} u.$$

Bei der Stellung des Gleitbackens in der Coulissenmitte ruht der Punkt H im Punkte H_m, und die Bewegung von J ist der von H' verkleinert ähnlich. Die dieser Stellung entsprechende, durch den Schieber bewirkte Dampfvertheilung kann keine Bewegung der Maschine hervorbringen. Je mehr aber der Gleitbacken von der Coulissenmitte entfernt wird, desto mehr macht sich die Einwirkung der Bewegung von H auf die von J geltend, und dem gemäss verringert sich die Unregelmässigkeit, welche bei verhältnissmässig kurzer Pleuelstange FL von der Bewegung des Punktes H' nach J übertragen wird.

Um die Schieberkreise für die verschiedenen Stellungen des Gleitbackens, die den Abständen u gleich 0, $\frac{1}{5}c$, $\frac{2}{5}c$, $\frac{3}{5}c$, $\frac{4}{5}c$ entsprechen, zu construiren, zeichnen wir in Fig. **710** der Deutlichkeit wegen beispielsweise im Verhältnisse 1 : 3 vergrössert das rechtwinkelige Dreieck $\Gamma\Phi E_y$, dessen Katheten $\Phi\Gamma$, ΦE_y resp. gleich ΦF, ΦE oder gleich ϱ, r sind. Wir bestimmen ferner den Punkt P, so dass $\Gamma\Phi P \backsim H'_m H_m J_m$ oder $\Phi P : \Phi\Gamma = h : k$ ist. Hierauf ziehen wir durch P auf $\Gamma\Phi$ die Senkrechte PN^5, die von ΓE_y in N^5 geschnitten wird, und theilen PN^5 in fünf gleiche Theile, dann liefern die Theilpunkte P, N^1, N^2, N^3, N^4 mit Φ verbunden die Durchmesser der entsprechenden Schieberkreise. Ist es aber erwünscht, die Mittelpunkte m^0, m^1, m^2, m^3, m^4 dieser Kreise direct zu erhalten, dann führen wir dieselbe Construction in halber Grösse aus. Die durch Φ gehenden Schieberkreise, welche den verschiedenen Stellungen des Gleitbackens entsprechen, schneiden sich in dem Punkte P, und folglich ist die lineare Voreilung bei dieser Steuerung constant. Je nachdem nun der Gleitbacken sich in der unteren oder oberen Coulissenhälfte befindet, erfolgt die Bewegung der Maschine in dem einen oder dem anderen Sinne.

282. **Stephenson'sche Steuerung.** In Fig. **711** ist die älteste bewährte Coulissensteuerung schematisch dargestellt, durch welche Robert Stephenson die Locomotive in bewunderungswürdiger Weise vervollkommnete[1]). Die bogenförmige Coulisse HH', welche in ihrer Spannenmitte i an die mit einer verstellbaren Axe Θ versehene Hängestange Θi aufgehängt ist, wird durch zwei gleiche Excenterarme ΦE, $\Phi E'$ vermittelst zweier gleich langer Excenterstangen EH, $E'H'$ bewegt. In der Coulisse befindet sich ein Gleitbacken, der in J drehbar mit der in der festen Hülse Ξ gleitenden Schieberstange $J\sigma$ verbunden ist. Wir setzen wieder voraus, dass die Excenterstangen gegen die Excenterarme, sowie gegen die halbe Coulissenspanne verhältnissmässig gross sind, dass also die Excenterstangen in allen Lagen mit der Geraden $\Phi\sigma$ nur kleine Winkel bilden. Unter dieser Voraussetzung gelten auch die betreffenden in Art. 279 abgeleiteten Beziehungen, und wir können uns daher die Bewegung dieser Coulisse annähernd ver-

---

[1]) *Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens.* 1846. B. 1. S. 11. — Clark, *Railway machinery.* 1855. p. 26. — Heusinger v. Waldegg, *Locomotive-Maschine.* 1858. S. XXIX.

mittelst zweier Kreuzkurbelgetriebe erzeugt denken, wie sie in Fig. **695** dargestellt sind. Behufs der Bestimmung ihrer Kurbelarme ΦG_u, $\Phi G'_u$ in Fig. **711**, bezeichnen wir wieder die Länge der Excenterarme und der Excenterstangen resp. mit r, l, ferner die halbe Länge der Coulissenspanne HH' mit c und den senkrechten Abstand ihrer Mitte i von der Geraden $\Phi\sigma$ mit u. Hierbei nehmen wir an, dass infolge einer zweckmässigen Aufhängung der Coulisse der Abstand u während der Bewegung derselben annähernd als constant betrachtet werden kann. Demnach sind $c-u$ und $c+u$ auch angenähert die Abstände der Punkte H, H' von der Geraden $\Phi\sigma$; und gemäss der Darlegung S. 706 errichten wir auf ΦE die Senkrechte

$$EG_u = r\,\frac{c-u}{l}$$

und auf $\Phi E'$ die Senkrechte

$$E'G'_u = r\,\frac{c+u}{l}.$$

Ziehen wir zu $\Phi\sigma$ beiderseits in den Abständen $c-u$, $c+u$ die Parallelen η, η'; dann wird der Schnittpunkt, den die bewegte Gerade HH' mit η bildet, sich auf dieser Parallelen η angenähert so bewegen, als wenn seine Bewegung durch ein rechtwinkeliges Kreuzkurbelgetriebe bewirkt wird, dessen Kurbelarm ΦG_u ist. Ebenso wird die Bewegung des Schnittpunktes von HH' und η' auf der Parallelen η' mit der Bewegung eines rechtwinkeligen Kreuzkurbelgetriebes angenähert übereinstimmen, dessen Kurbelarm $\Phi G'_u$ ist.

Um zu erkennen, wie sich der Schnittpunkt i_u, den die Coulissenspanne HH' mit $\Phi\sigma$ bildet, auf der Geraden $\Phi\sigma$ bewegt, bestimmen wir auf der Verbindungsgeraden $G_u G'_u$, deren Mitte mit P_u bezeichnet ist, den Punkt R so, dass

$$P_u R : R G_u = u : c-u$$

ist. Dann stimmt die Bewegung der auf $\Phi\sigma$ senkrechten Projection von dem rotirenden Punkte R annähernd mit der des Punktes i_u überein, und es ist ΦR der entsprechende ideelle Excenterarm für die Bewegung des Punktes i_u oder des Schiebers s. Durch verschiedene Feststellungen der Aufhängeaxe Θ, also durch Senkung und Hebung der Coulisse, wird mit dem Abstande u auch die Lage der Geraden $G_u G'_u$ und des auf ihr liegenden Punktes R gegen EE' verändert.

Zur Erlangung einer einfacheren Bestimmung des Punktes R und zur Ermittelung des geometrischen Ortes desselben, wenn u

verschiedene Werthe erhält, haben wir der besseren Uebersicht wegen die angegebene Construction dreifach vergrössert in Fig. 712 ausgeführt. Für die Aufhängung, bei welcher die Spannenmitte i in der Geraden $\Phi\sigma$ schwingt, sind die entsprechenden Punkte G, G' auf jenen beiden Senkrechten EG_u, $E'G'_u$ so construirt, dass

$$EG = E'G' = r\frac{c}{l}$$

ist. Die in $\Phi\sigma$ liegende Mitte P der auf $\Phi\sigma$ senkrechten Geraden GG' liefert dann den entsprechenden ideellen Excenterarm ΦP für die Bewegung des Punktes i in der Geraden $\Phi\sigma$.

Nehmen wir noch an, die Coulisse sei soweit gesenkt, dass der Punkt H annähernd in $\Phi\sigma$ schwingt, dann wird dieser Punkt annähernd so bewegt, als wenn es durch ein rechtwinkeliges Kreuzkurbelgetriebe geschehe, dessen Kurbel ΦE ist. Das Analoge gilt, wenn bei gehobener Coulisse der Punkt H' sich angenähert in der Geraden $\Phi\sigma$ bewegt. Demnach gehören die drei Punkte E, P, E' zu dem geometrischen Orte des Punktes R, dessen rechtwinkelige Coordinaten PR_x, R_xR sind. Nach unserer Bestimmung ist

$$GG_u = EG - EG_u = r\frac{c}{l} - r\frac{c-u}{l} = \frac{ru}{l},$$

$$G'G'_u = E'G'_u - E'G' = r\frac{c+u}{l} - r\frac{c}{l} = \frac{ru}{l},$$

und folglich

$$GG_u = G'G'_u.$$

Infolge der Gleichheit dieser Strecken erzeugen bei den verschiedenen Aufhängungen der Coulisse die entsprechenden Punkte G_u, G'_u auf den Geraden EG, $E'G'$ congruente Punktreihen, und ihre Verbindungsgerade $G_uG'_u$ umhüllt demnach eine Parabel. Da ferner wegen der beiden gleichen mit ϑ bezeichneten Voreilwinkel die Geraden EG, $E'G'$ denselben Winkel mit der Geraden $\Phi\sigma$ bilden, so liegt die Mitte P_u von $G_uG'_u$ auf GG'; und es ist, wenn wir zu $\Phi\sigma$ die Parallele $G'_u\Delta'$ bis an GG' ziehen,

$$PP_u = G'\Delta' = G'G'_u \sin\vartheta = \frac{ru\sin\vartheta}{l}.$$

Bezeichnen wir mit Q, Q_u die Schnittpunkte, welche die zu $\Phi\sigma$ Parallele EQ resp. mit den auf $\Phi\sigma$ Senkrechten PG, G_uQ_u bildet, so ergiebt sich

$$G_uQ_u = EG_u \,.\, \sin\vartheta = r\frac{c-u}{l}\sin\vartheta$$

und

$$PP_u : G_u Q_u = u : (c - u).$$

Da ferner auch

$$P_u R : R G_u = u : (c - u)$$

ist, so folgt hieraus, dass die Punkte P, R, Q_u auf einer Geraden liegen und

$$PR : R Q_u = u : (c - u)$$

oder

$$PR : PQ_u = u : c$$

ist. Wenn wir nun mit R_y den Schnitt bezeichnen, welchen die zu $\Phi\sigma$ Parallele $R R_y$ mit PG bildet, und für die rechtwinkeligen Coordinaten PR_x, $R_x R$ resp. x, y setzen, so ist

$$PR_y : PQ = u : c,$$

$$y : r \cos\vartheta = u : c,$$

$$y = \frac{u\, r \cos\vartheta}{c},$$

ferner

$$R_y R : Q Q_u = u : c,$$

$$x : G G_u \cos\vartheta = u : c$$

und durch Einsetzung

$$G G_u = \frac{r u}{l},$$

$$x = \frac{u^2 r \cos\vartheta}{c\, l}.$$

Demnach erhalten wir für den geometrischen Ort des Punktes R die Gleichung

$$y^2 = \frac{l\, r \cos\vartheta}{c} \cdot x,$$

welche eine Parabel repräsentirt, deren Scheitel P und deren Axe $\Phi\sigma$ ist.

Es ist ferner

$$Q Q_u : QE = G G_u : GE = u : c$$

und demnach erhalten wir die Proportion:

$$PR_y : PQ = Q Q_u : QE.$$

Wird von E auf $\Phi\sigma$ die Senkrechte ED gezogen und bezeichnet U ihren mit $R_y R$ gebildeten Schnittpunkt, so ist $U Q_u$ parallel DQ. Aus dieser Beziehung ergiebt sich die folgende einfachere Bestimmung des Punktes R. Wir construiren in Fig. **713** auf DE den Punkt U so, dass

$$DU : DE = u : c$$

ist, ziehen UR parallel $\Phi\sigma$, ferner UQ_u parallel DQ, dann bestimmt die Gerade PQ_u auf UR den Punkt R. Wegen der beiden ähnlichen Punktreihen, welche die Punkte U auf ED, die Punkte Q_u auf EQ erzeugen, ist das durch die Parallelen UR entstehende Parallelstrahlenbüschel dem durch die Geraden PQ_u gebildeten Strahlenbüschel projectiv; demnach folgt auch hieraus, dass der geometrische Ort der Punkte R als Erzeugniss dieser beiden Strahlenbüschel eine Parabel ist. Verändern wir in Fig. 711 durch verschiedene Feststellungen der Aufhängeaxe Θ die Aufhängung der Coulisse resp. den Abstand u des Punktes i von der Geraden $\Phi\sigma$, dann bilden die zugehörigen Punkte R die Parabel EPE' in Fig. 713. Von dieser Parabel kommt die oberhalb $\Phi\sigma$ liegende Hälfte zur Geltung, wenn die Spannenmitte i sich unter $\Phi\sigma$ befindet; dagegen die untere Hälfte, wenn i über $\Phi\sigma$ liegt. Diesen beiden Fällen entspricht die Drehung der Welle Φ in dem einen und anderen Sinne.

Bei gekreuzten Excenterstangen gelten die analogen Beziehungen; denn in den Formeln ist dann die Grösse c mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen, und es sind in Fig. 713, ebenso wie die Punkte G, G', an der anderen Seite von jedem Excenterarme die Punkte G_I, G_I' zu bestimmen. Die Verbindungsgerade $G_I G_I'$ schneidet $\Phi\sigma$ senkrecht in dem Scheitel P_I der ebenfalls durch E, E' gehenden Parabel EP_IE', die unter Voraussetzung derselben Dimensionen der Steuerung jener Parabel EPE' congruent ist, aber entgegengesetzte Lage hat.

Wird bei der in Fig. 711 gezeichneten Aufhängung der Coulisse die Kurbel aus der Todtlage ΦF_τ in die andere Todtlage ΦF_0 gebracht, dann gelangt der ideelle Excenterarm nach ΦR_1 in die entgegengesetzte Lage von ΦR. Da nun im Diagramm der Durchmesser des entsprechenden Schieberkreises symmetrisch liegt zu ΦR_1 bezüglich der auf $\Phi\sigma$ Senkrechten ΦY, so befinden sich die Endpunkte der Durchmesser aller Schieberkreise auf der unteren Parabelhälfte, wenn der Punkt i unterhalb der Geraden $\Phi\sigma$ schwingt. Die von diesen Durchmesserendpunkten gebildete Curve, welche im betrachteten Falle eine Parabel ist, ist demnach auch im allgemeinen Falle dem geometrischen Orte der Endpunkte aller ideeller Excenterarme bezüglich der Geraden $\Phi\sigma$ symmetrisch congruent und wird im Diagramm die Scheitelcurve genannt.

Um das zugehörige Diagramm, welches in Fig. 714 vierfach vergrössert dargestellt ist, zu construiren, geben wir dem Abstande u beispielsweise successive die Werthe 0, $\frac{1}{4}c$, $\frac{2}{4}c$, $\frac{3}{4}c$, c; dem gemäss theilen wir die auf ΦF_0 senkrechte Strecke DE' in vier gleiche Theile und construiren in der angegebenen Weise zu den Theilpunkten U^1, U^2, U^3 die entsprechenden Parabelpunkte N^1, N^2, N^3, indem wir z. B. zu DQ' die Parallele $U^2Q'_2$, ferner die Gerade PQ'_2 ziehen, die den Punkt N^2 auf der zu ΦP Parallelen U^2N^2 bestimmt. Somit erhalten wir die Durchmesser ΦP, ΦN^1, ΦN^2, ΦN^3, $\Phi E'$ der entsprechenden Schieberkreise $\mathfrak{w}^0$, $\mathfrak{w}^1$, $\mathfrak{w}^2$, $\mathfrak{w}^3$, $\mathfrak{w}^4$. Anstatt der Endpunkte der Durchmesser kann man auch in gleicher Weise direct die Mittelpunkte m^0, m^1, m^2, m^3, m^4 dieser Schieberkreise construiren; und die durch diese Mittelpunkte gebildete Curve, die auch die Centralcurve genannt wird, ist der Scheitelcurve im Verhältnisse 1 : 2 ähnlich. Die Schieberkreise schneiden die Gerade $\Phi\sigma$ in verschiedenen Abständen von P; demnach variirt die lineare Voreilung mit der Aufhängung der Coulisse innerhalb der Strecke DP und ist hier nicht constant. Der Schieber wird also bei den verschiedenen Aufhängungen der Coulisse für die Excenterstellung $EF_\tau E'$ in der gezeichneten Todtlage ΦF_τ der Kurbel verschiedene Lagen einnehmen; und dasselbe gilt für die Excenterstellung, welche der anderen Todtlage ΦF_0 der Kurbel entspricht.

Um aber die Einrichtung so zu treffen, dass doch bei je einer der Aufhängungen die Voröffnungen zu beiden Seiten des Kolbens unter sich angenähert gleich sind, bestimmen wir in Fig. 715 für die mittlere Aufhängung, bei welcher die Spannenmitte i in der Geraden $\Phi\sigma$ schwingt, die Schwingungsmitte i_m, indem wir die beiden auf $\Phi\sigma$ senkrechten Stellungen HH', $H_1H'_1$ der Coulissenspanne construiren, welche den beiden Todtlagen ΦF_τ, ΦF_0 der Kurbel entsprechen. Für diese beiden Stellungen sind nach S. 703 die Lagen i, i_1 der Spannenmitte i die äussersten Bahnpunkte, und die Mitte i_m der Strecke ii_1 ist die Schwingungsmitte von i. Dieselbe kann aber auch durch die auf S. 705 abgeleitete Annäherungsformel

$$\Phi i_m = l - \frac{c^2 + r^2 \cos^2 \vartheta}{2l}$$

bestimmt werden. Wird die Coulisse in Fig. 711 soweit gesenkt, dass der Abstand $u = c$ ist, der Punkt H also annähernd in der Geraden $\Phi\sigma$ schwingt, dann erhalten wir, hinblickend auf jene Ableitung dieser Formel, wenn wir in derselben $c = 0$ setzen, für die Bewegung des fast mit H coincidirenden Punktes J die Stellungsmitte h_m, d. h. die Mitte der Bahnstrecke, welche von den

Lagen des Punktes J begrenzt wird, die den Todtlagen der Kurbel in Fig. 715 entsprechen. Wir erhalten demnach den Abstand

$$\Phi h_m = l - \frac{r^2 \cos^2 \vartheta}{2l}.$$

Damit nun der Punkt h_m, die Stellungsmitte des Punktes J, für alle Aufhängungen bleibt, muss die Coulisse nach einer symmetrischen Curve HkH' gekrümmt sein, deren Scheitel k um die Strecke

$$ik = i_m h_m = \Phi h_m - \Phi i_m = \frac{c^2}{2l}$$

von HH' entfernt ist, so dass bei der mittleren Aufhängung der Punkt J mit k coincidirt, und die Wegstrecke $kk_1 = ii_1$ durchläuft, deren Mitte h_m ist. Die Bestimmung anderer Punkte dieser Curve ist nicht nöthig, weil dieselbe in der Praxis durch einen Kreisbogen ersetzt wird, der durch die drei Curvenpunkte HkH' geht.

Bezeichnet ϱ den Radius dieses Kreisbogens und beachten wir, dass die Strecke ik klein, also kH nur sehr wenig grösser als iH ist, so dass wir annähernd $iH = kH = c$ setzen können, dann ist auch

$$ik = \frac{\overline{kH}^2}{2\varrho} = \frac{c^2}{2\varrho},$$

und folglich $\varrho = l$. Die Coulisse muss also nach einem Kreisbogen gekrümmt sein, dessen Radius ϱ gleich der Länge l der Excenterstange ist.

Damit dieser Kreisbogen möglichst wenig von der Spanne HH' abweicht und die Bewegung eines jeden seiner Punkte auf der Geraden $\Phi\sigma$ besser mit den betreffenden in HH' liegenden Punkten übereinstimmt, sind in Fig. 716 die Anschlusspunkte HH' der Coulisse so gewählt, dass die Spanne HH' die Pfeilhöhe ik des Bogens halbirt und die Bogenpunkte zu beiden Seiten der Spanne sich befinden.

Für eine in Fig. 717 gezeichnete Stephenson'sche Coulissensteuerung mit offenen Excenterstangen und mit den aus der Praxis entnommenen Dimensionen $r = 0{,}060^m$, $l = 1{,}400^m$, $c = 0{,}150^m$ und $\vartheta = 30^0$ sind in Fig. 718 vergrössert die Schieberkreise $\mathfrak{w}^0$, $\mathfrak{w}^1$, $\mathfrak{w}^2$, $\mathfrak{w}^3$, $\mathfrak{w}^4$ construirt, die zu jenen gewählten Füllungsgraden oder Expansionsgraden gehören. Ihre Mittelpunkte liegen auf einer Parabel $m^0 e$ und werden erhalten, indem wir gegen ΦY unter dem Winkel $\vartheta = 30^0$ die Strecke $\Phi e = \frac{1}{2} r$ ziehen, auf Φe die Senkrechte eg errichten, deren Länge durch die Proportion

$$eg : \Phi e = c : l$$

bestimmt ist. Hierauf theilen wir die durch g auf $\Phi\sigma$ senkrecht gezogene Gerade $m^0 q$, die anderseits durch die zu $\Phi\sigma$ Parallele eq begrenzt wird, in vier gleiche Theile, ebenso die Strecke eq in vier gleiche Theile und construiren wie vorhin die auf der Parabel $m^0 e$ liegenden Mittelpunkte m^1, m^2, m^3 der betreffenden Schieberkreise. Der mit der äusseren Deckung $0{,}024^m$ um Φ beschriebene Kreis $W^0_{III}\, W^4_{VI}$ bestimmt durch seine Schnittpunkte W^0_{III}, W^1_{III} . . W^4_{III} resp. W^0_{VI}, W^1_{VI} . . W^4_{VI} mit den Schieberkreisen die Kurbelstellungen für die Füllungsgrade beim Beginn der Eröffnung des Einströmkanals und beim Beginn der Expansion, wenn die Kurbel ΦF_0 sich in der eingezeichneten Pfeilrichtung dreht, welche in unserem Beispiele dem Rückwärtsgange der Locomotive entspricht, weil wir die obere Hälfte der Centralcurve verwendet haben. Die Füllungsstrecken ergeben sich in bekannter Weise vermittelst des bogenförmigen Kolbendiagramms.

Die Erlangung einer zweckmässigen Aufhängung der Coulisse, so dass diese bei allen Feststellungen des Aufhängepunktes sehr wenig am Gleitbacken gleitet, ist nicht möglich; denn, wenn die Aufhängung für eine Feststellung günstig eingerichtet ist, so ist sie es für eine andere nicht. Oft wird, wie in Fig. 719, die Mitte i der Spanne HH' als Anschlusspunkt der Hängestange $i\Theta_6$ genommen. Um bei dieser Anordnung den geometrischen Ort $\Theta_6\Theta_0\Theta^6$ des Aufhängepunktes zu construiren, werden zu den beiden Excenterstellungen $E\Phi E'$, $E_1\Phi E_1'$, welche den Todtlagen der Kurbel entsprechen, z. B. für die tiefste Aufhängung, bei welcher der Punkt H angenähert in der Geraden $\Phi\sigma$ schwingen soll, die entsprechenden Coulissenlagen HH', H_1H_1' derart gezeichnet, dass die Punkte H, H_1 in $\Phi\sigma$ liegen. Ferner wird in der Geraden $\Theta_6 z$, welche auf der Verbindungsgeraden ii_1 in der Mitte z senkrecht steht, der zugehörige Aufhängepunkt Θ_6 so bestimmt, dass $i\Theta_6$ gleich der möglichst lang angenommenen Hängestange ist. Behufs der Bestimmung mehrerer Aufhängepunkte theilen wir die Coulissenspanne HH' beispielsweise in zwölf gleiche Theile und denken uns die Coulisse successive entsprechend gehoben, damit jeder dieser Theilpunkte bei jenen beiden Excenterstellungen sich in der Geraden $\Phi\sigma$ befindet. Der jedem dieser Theilpunkte entsprechende Aufhängepunkt wird in der oben angegebenen Weise construirt, und somit erhalten wir die Curve $\Theta_6\Theta_0\Theta^6$, die bei den in der Praxis vorkommenden Dimensionen der Coulissensteuerung sich mehr einer Geraden nähert, und der einfacheren praktischen Ausführung wegen durch einen Kreisbogen, so gut es geht, annähernd ersetzt wird; doch ist auch die Führung des Aufhängepunktes Θ auf einer Geraden in Anwendung gekommen [1]). Die mit Θ_6, Θ_0, Θ^6 bezeichneten Aufhängepunkte geben beziehlich die tiefste, mittlere und höchste Aufhängung der Coulisse. Es zeigt sich aber, dass diese Aufhängung, wenn die untere Coulissenhälfte sich in Thätigkeit befindet, also bei dem Rückwärtsgange der Locomotive, viel günstiger ist als beim Vorwärtsgange, der die Thätigkeit der oberen Coulissenhälfte erfordert. Denn für die in Fig. **719** gezeichnete tiefste Aufhängung weicht die von H beschriebene Curve η_6 viel mehr von der Geraden $\Phi\sigma$ ab als die Curve, welche H' bei der höchsten Aufhängung durchläuft.

Wir wollen zeigen, dass es vortheilhafter ist, die Coulisse, anstatt an einer Stange aufzuhängen, auf eine Stange zu stützen, also den festgehaltenen Drehpunkt dieser Stange nach unten zu verlegen; damit der Gleitbacken beim Vorwärtsgange der Locomotive möglichst kleine Schwankungen in der Coulisse vollzieht. In Fig. **720** sind in $\frac{1}{5}$ natürlicher Grösse nach den obigen aus der Praxis entnommenen Maassen die schleifenförmigen Bahncurven η, η' der Gelenkpunkte H_5, H_5' der Coulisse H_5H_5' vermittelst eines Dreispitzzirkels construirt, wenn der Coulissenpunkt J_5 auf der Geraden σ geführt wird. Während dieser Bewegung nimmt die Coulisse zwei Lagen $H_1'J_1$, $H_3'J_3$ an, bei denen die entsprechenden Punkte J_1, J_3 auf der Geraden σ in der Mitte P^{13} des Weges liegen, den der Coulissenpunkt J_5 schwingend durchläuft. Ferner sind die beiden Lagen $H_2'J_2$, $H_4'J_4$ der Coulisse gezeichnet, bei welchen $H_2'J_2$ parallel $H_1'J_1$ und $H_4'J_4$ parallel $H_3'J_3$ ist; und hierbei zeigt sich, dass für die gewählte Lage der Geraden σ die Wegmitte P^{13} auch zufällig die Mitte der Strecke J_2J_4 ist. Dem zufolge liegen die Pole P^{14}, P^{23}, welche beziehlich den Lagenpaaren $H_1'J_1$, $H_4'J_4$ und $H_2'J_2$, $H_3'J_3$ angehören, auf einer zu σ parallelen Geraden χ in gleichen Abständen von der in P^{13} auf σ senkrechten Geraden ζ, auf der auch der Pol P^{24} sich befindet.

Hiernach besteht die Mittelpunktcurve der durch die vier Lagen $H_1'J_1$, $H_2'J_2$, $H_3'J_3$, $H_4'J_4$ bestimmten vier ebenen Systeme aus den beiden senkrechten Geraden ζ, χ; und zu den beiden in dem Pol P^{23} coincidirenden Punkten T_2, T_3 sind die beiden im Pol P^{14} coincidirenden Punkte T_1, T_4 homologe Punkte. Bestimmen wir nun auch in jener fünften Lage $H_5'J_5$ den homologen

---

[1]) Burgh, *Link-Motion and Expansion-Gear*. 1870. p. 88.

Punkt T_5, und construiren wir den in der Geraden ζ liegenden Mittelpunkt Θ des durch T_5, P^{14} gehenden Kreises τ, so enthält dieser Kreis die fünf homologen Punkte T_1, T_2, T_3, T_4, T_5.

Wird nun die Coulisse $H_5 H'_5$ im Punkte T_5 gelenkig mit der Stange $T_5\Theta$ verbunden, die um die festgehaltene Axe Θ schwingt, und durch die Excenter vermittelst der Excenterstangen lH_5, $l'H'_5$ in Bewegung gesetzt, dann beschreibt der Coulissenpunkt J_5 eine Bahncurve, welche die jenen fünf Lagen entsprechenden fünf homologen Punkte J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 mit der Geraden σ gemein hat und sich nahe an dieselbe anschmiegt. Construiren wir z. B. an dem Punkte J_5 dieser Bahncurve die Normale $J_5\mathfrak{P}_5$ vermittelst des Pols $\mathfrak{P}_5$ der Coulissenlage $H_5 H'_5$, indem wir nach Art. 190 durch den Schnittpunkt der beiden Geraden lH_5, $l'H'_5$ und den Wellenmittelpunkt die Gerade g ziehen, welche auf der Geraden ΘT_5 den Pol $\mathfrak{P}_5$ bestimmt; dann zeigt sich, dass diese Normale $J_5\mathfrak{P}_5$ sehr angenähert senkrecht auf der Geraden σ ist. Und dasselbe findet statt, wenn wir die beiden Normalen an dem Doppelpunkte $J_1 J_3$ dieser Bahncurve construiren.

Im Allgemeinen fällt jene Wegmitte P^{13} nicht mit der Mitte von $J_2 J_4$ zusammen, aber sie liegen stets sehr nahe. Die Mittelpunktcurve jener vier ebenen Systeme ist dann eine gleichseitige Hyperbel, die von ihren rechtwinkeligen Asymptoten sehr wenig abweicht. Es ist daher zweckmässig, wenn die verstellbare Axe Θ beim Heben und Senken der Coulisse möglichst nahe längs der Geraden ζ geführt wird. Für die angenommene Feststellung der Axe Θ wird die Coulisse so günstig geführt, dass der Gleitbacken in der Coulisse fast in Ruhe ist; und die constructive Prüfung zeigt, dass bei dieser Anordnung die Bewegung des Gleitbackens in der Coulisse auch sehr gering ist für alle Lagen des Gleitbackens in der oberen Coulissenhälfte, die beim Vorwärtsgehen der Locomotive thätig ist [1]).

Die Geschwindigkeit des Schiebers bei den betrachteten Steuerungen ergiebt sich, wenn wir die Drehgeschwindigkeit der Kurbel resp. der Welle Φ als Einheit nehmen und den Pol $\mathfrak{P}$ der Schieberstange σ gegen die Welle Φ bestimmen, gleich dem Abstande $\Phi\mathfrak{P}$ dieses Pols von der Wellenaxe Φ. Aus der annäherungsweisen Bestimmung der Schieberbewegung, bei welcher in Fig. **721** der Schieberkreis $\mathfrak{w}$ das polare Wegdiagramm ist, folgt aber nach Art. 145,

---

[1]) Vergleiche **Burmester**, „Ueber die Geradführung durch das Kurbelgetriebe". *Civilingenieur*. 1877. B. 23. S. 331.

dass unter der Annahme einer gleich der Einheit gesetzten constanten Drehgeschwindigkeit der Welle das zeitliche polare Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_z$ ein durch Φ gehender Kreis ist, der dem Schieberkreise $\mathfrak{w}$ congruent ist und denselben rechtwinkelig schneidet. Wie für eine Kurbellage ΦF durch die Sehne ΦW, welche dieselbe im Kreise $\mathfrak{w}$ bestimmt, die Abweichung des Schiebers von seiner Schwingungsmitte dargestellt wird, so wird auch durch die Sehne ΦV, welche diese Kurbellage im Kreise $\mathfrak{v}_z$ bestimmt, die Geschwindigkeit des Schiebers dargestellt.

283. **Allan'sche Steuerung.** Bei der in Fig. 722, Taf. XLVIII, schematisch gezeichneten Allan'schen Steuerung ist die Coulisse HH' geradlinig[1]). Dieselbe wird, wie bei der Stephenson-schen Steuerung, durch zwei gleiche Excenterarme ΦE, $\Phi E'$ vermittelst zweier gleich langer Excenterstangen EH, $E'H'$ getrieben, die aber gekreuzt sind. Der um die feste Axe Ψ verstellbare zweiarmige Hebel $\Theta\Psi\Sigma$ trägt an einem Arme die Hängestange Θi, die mit der Coulissenmitte i drehbar verbunden ist, und an dem anderen die Hängestange ΣS, welche in S an die Schubstange JK geschlossen ist. Diese Schubstange ist in K mit der Schieberstange $K\sigma$ und in J mit dem Gleitbacken gelenkig verbunden, der sich in der Coulisse verschiebt. Die Anordnung ist derart, dass, wenn der Hebel $\Theta\Sigma$ zur Schubrichtung $\Phi\sigma$ parallel in die Lage $\Theta_0\Sigma_0$ gestellt wird, die Gelenkpunkte i und S sich angenähert in der Geraden $\Phi\sigma$ bewegen. Eine durch Drehung des Hebels bewirkte Senkung der Coulisse entspricht einer Hebung der Schubstange nebst Gleitbacken und umgekehrt.

Um das Verhältniss dieser Senkung und Hebung zu bestimmen, fällen wir von S auf $\Phi\sigma$ die Senkrechte SS_σ und bezeichnen die senkrechten Abstände der Punkte i, J von $\Phi\sigma$ resp. mit u, z. Dann ist

$$z : SS_\sigma = KJ : KS.$$

Nehmen wir ferner an, dass bei der Verstellung des Hebels jede der Hängestangen annähernd parallel zu sich selbst verlegt wird, so ergiebt sich auch angenähert

$$u : SS_\sigma = \Psi\Theta : \Psi\Sigma.$$

Hieraus folgt, wenn wir abkürzend $\Psi\Theta = a$, $\Psi\Sigma = b$, $KJ = \lambda$, $KS = \lambda_1$ setzen,

---

[1]) Reuleaux, „Die Allan'sche Coulissensteuerung". *Civilingenieur.* 1857. B. 3. S. 92. — Clark and Colburn, *Recent Practice in the locomotive engine.* 1860. p. 44.

$$\frac{z}{u} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_1};$$

und die constante Zahl

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_1} = \mu$$

gesetzt, erhalten wir

$$z = \mu \, . \, u.$$

Demnach ändert sich der Abstand z proportional dem Abstande u.

Um nun die Zahl μ durch gegebene Grössen annäherungsweise rechnerisch zu bestimmen und damit auch das Verhältniss $b:a$ der Hebelarme zu erhalten, wollen wir für veränderte Hebelstellungen die Gleichung des geometrischen Ortes der Stellungsmitte J_m des Punktes J ableiten. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir wieder die Länge der beiden gleichen Excenterarme mit ΦE, $\Phi E'$ mit r, die beiden gleichen Voreilwinkel mit ϑ, die gleichen Längen der beiden Excenterstangen EH, $E'H'$ mit l und ferner die halbe Länge der Coulisse HH' mit c. Nehmen wir an, es befinde sich in Fig. **723** der Endpunkt H' der Excenterstange $E'H'$ bei den beiden in Fig. **722** gezeichneten Todtlagen ΦF_0, ΦF_π der Kurbel in der Geraden η_c, die zu $\Phi\sigma$ in der Entfernung c parallel ist, so ist die Abscisse ξ_c seiner Stellungsmitte h_m, gemessen von der Ordinatenaxe ΦY, gleich der Abscisse Φi_m der Schwingungsmitte i_m des dann in $\Phi\sigma$ bewegten Punktes i; und folglich ist nach der auf S. 705 gegebenen Annäherungsformel

$$\xi_c = \Phi i_m = l - \frac{c^2 + r^2 \cos^2 \vartheta}{2l}.$$

Da bei der mittleren Aufhängung der Coulisse die Punkte i, J annähernd gemeinsam in der Geraden $\Phi\sigma$ schwingen, so ist i_m auch die Schwingungsmitte von J und somit der Scheitel jenes geometrischen Ortes. Diese Formel gilt aber allgemein und liefert auch die Abscisse ξ' der Stellungsmitte H'_m des Punktes H', wenn derselbe bei den beiden Todtlagen der Kurbel auf einer beliebigen im Abstande $c-u$ zu $\Phi\sigma$ Parallelen η' sich befindet. Es ist dann, indem wir anstatt c den Werth $c-u$ setzen,

$$\xi' = l - \frac{(c-u)^2 + r^2 \cos^2 \vartheta}{2l}.$$

Hierbei ist immer vorausgesetzt, dass die Excenterstangen nur kleine Winkel mit $\Phi\sigma$ bilden; und ferner wird noch die Voraussetzung gemacht, dass auch die beiden Coulissenstellungen HH', $H_1H'_1$, welche den beiden Todtlagen der Kurbel entsprechen, bei allen Abständen u sehr wenig von der zu $\Phi\sigma$ senkrechten Stellung abweichen. Demnach ist auch, wenn ξ die Abscisse der Stellungsmitte H_m des Punktes H bezeichnet, weil dieser Punkt bei jenen beiden Stellungen annähernd auf der im Abstande $c+u$ zu $\Phi\sigma$ Parallelen η liegt,

$$\xi = l - \frac{(c+u)^2 + r^2 \cos^2\vartheta}{2l}$$

und hiernach

$$\xi' - \xi = \frac{2cu}{l}.$$

Bezeichnet χ die Abscisse der Stellungsmitte J_m des Punktes J, die von $\Phi\sigma$ um $J_m J_\sigma = z$ entfernt ist, so gilt, weil J_m auf der Geraden $H_m H'_m$ liegt, angenähert die Gleichung

$$\frac{\chi - \xi}{\xi' - \xi} = \frac{c+u+z}{2c}.$$

Hieraus folgt durch Einsetzung der Werthe für ξ und $\xi' - \xi$

$$\chi = l - \frac{c^2 + r^2 \cos^2\vartheta}{2l} + \frac{u^2}{2l} + \frac{uz}{l};$$

und da $z = \mu \,.\, u$ ist, so erhalten wir mit Einführung der constanten Strecke Φi_m die Gleichung des geometrischen Ortes der Stellungsmitte J_m

$$\chi = \Phi i_m + \frac{1+2\mu}{2\mu^2 l} \cdot z^2,$$

welche eine Parabel darstellt, deren Scheitel i_m ist. Den in Betracht kommenden Parabelbogen denken wir uns durch einen Kreisbogen ersetzt, der durch die Punkte i_m, J_m geht und dessen Mittelpunkt K_m auf $\Phi\sigma$ liegt. Der Radius dieses Kreisbogens liefert dann die Länge λ der Schubstange $J_m K_m$. Wir erhalten demnach

$$i_m J_\sigma = \frac{\overline{i_m J_m}^2}{2\lambda} = \frac{z^2}{2\lambda};$$

denn, da die Parabel sehr flach ist, können wir anstatt der Sehne $i_m J_m$ die Ordinate z setzen und somit ergiebt sich, indem wir für die Strecke $i_m J_\sigma$ ihren aus obiger Gleichung hervorgehenden Werth setzen,

$$\frac{1+2\mu}{2\mu^2 l} = \frac{1}{2\lambda};$$

und hieraus folgt die Zahl

$$\mu = \frac{\lambda}{l}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{l}{\lambda}}\right).$$

Von den beiden Werthen für μ kommt jedoch nur der eine Werth zur Geltung, dem das positive Vorzeichen entspricht; denn der andere Werth von μ würde erfordern, dass mit der Veränderung des Hebels eine Bewegung der Punkte i, J in gleichem Sinne erfolge und dass die beiden Hängestangen an einen einarmigen Hebel gehängt werden, was in praktischer Hinsicht nicht zweckmässig ist. Für diejenige Aufhängung der Coulisse, bei welcher J mit H' coincidirt, sind die Coordinaten der Stellungsmitte J_m leicht zu bestimmen; daher kann man auch jenen Kreisbogen durch diese Stellungsmitte und durch i_m ziehen, und man wird dann die Formel für μ in einfacherer Weise erhalten, aber nicht zur Kenntniss des geometrischen Ortes von J_m gelangen.

Nachdem die Zahl μ gefunden ist, muss noch in Fig. **722** der Anschlusspunkt S auf der Schubstange JK zweckmässig gewählt werden; denn damit ist die Länge $KS = \lambda_1$ und durch die Gleichung

$$\mu = \frac{\lambda}{\lambda_1} \cdot \frac{b}{a}$$

auch das Verhältniss der Hebelarme a, b gegeben.

Behufs der Bestimmung des Hebels machen wir, wenn S auf JK gewählt ist, in der Geraden $\Phi\sigma$ die Strecke $i_m s_m = JS$, errichten in den Punkten i_m, s_m, welche bei der mittleren Aufhängung die Schwingungsmitten von i und S sind, Senkrechte auf $\Phi\sigma$ und bestimmen bei einer Aufhängung, die J in die Nähe von H' bringt, auf diesen Senkrechten die Punkte Θ, Σ so, dass die Strecken $i\Theta = S\Sigma$ die möglichst lang genommenen gleichen Hängestangen darstellen. Hierauf construiren wir in der Verbindungsgeraden $\Theta\Sigma$ den festen Drehpunkt Ψ des Hebels nach dem Verhältnisse

$$\Psi\Theta : \Psi\Sigma = a : b.$$

Je näher der Anschlusspunkt S an J gelegt wird, desto grösser wird der Ausschlag des Hebels werden und desto mehr werden die Kreisbögen, welche die Punkte Θ, Σ beschreiben, von jenen Senkrechten $i_m\Theta$, $s_m\Sigma$ abweichen. Deshalb ist es zweckmässig, den Punkt S nicht zu nahe an J zu legen; dagegen darf S auch nicht zu weit von J entfernt sein, weil dann die Sicherheit der Bewegung beim Senken und Heben beeinträchtigt wird.

Nachdem wir zur vollständigen Kenntniss des Mechanismus der Allan'schen Steuerung gelangt sind, ist noch die Construction des Diagramms derselben auszuführen. Für die Bewegung der geradlinigen Coulisse gelten dieselben Beziehungen wie bei der Stephenson'schen Steuerung. Behufs der Begründung der Constructionen zeichnen wir der besseren Uebersicht wegen in der abgeänderten Fig. **724** an die Excenterarme ΦE, $\Phi E'$ die Senkrechten

$$EG = E'G' = r\frac{c}{l},$$

so dass, weil die Excenterstangen gekreuzt sind, die Gerade GG', welche $\Phi\sigma$ in P senkrecht schneidet, links von EE' liegt. Auf diesen Senkrechten machen wir

$$EG_u = r\frac{c+u}{l}, \qquad E'G'_u = r\frac{c-u}{l}$$

und bestimmen auf der Geraden $G_u G'_u$, deren Mitte P_u in GG' liegt, den Punkt R nach dem Verhältnisse

$$P_u R : P_u G'_u = u : c;$$

dann ist ΦR, wie bei der Stephenson'schen Steuerung bewiesen wurde, der ideelle Excenterarm für die Bewegung des Schnittpunktes i_u in der Geraden $\Phi\sigma$, den diese Gerade in Fig. **722** mit HH' bildet.

Damit wir aber den ideellen Excenterarm $\Phi\mathfrak{R}$ für die Bewegung des Punktes J erhalten, construiren wir auf $G_u G'_u$ den Punkt $\mathfrak{R}$ nach dem Verhältnisse

$$P_u\mathfrak{R} : P_u G'_u = (u + z) : c;$$

oder, weil $z = \mu \,.\, u$ ist, nach

$$P_u\mathfrak{R} : P_u G'_u = (\mu + 1)\, u : c.$$

Bei der Stephenson'schen Steuerung sind auf S. 721 für die Coordinaten des Punktes R die Werthe

$$R_y R = x = \frac{u^2 r \cos\vartheta}{cl}, \quad PR_y = y = \frac{ur\cos\vartheta}{c}$$

gefunden. Hier bei der Allan'schen Steuerung wollen wir für die Coordinaten des Punktes $\mathfrak{R}$ zur Unterscheidung

$$\mathfrak{R}_y\mathfrak{R} = \mathfrak{x}, \quad P\mathfrak{R}_y = \mathfrak{y}$$

setzen.

Es ist dann

$$\mathfrak{x} : x = P_u\mathfrak{R} : P_u R = (u + z) : u = (\mu + 1) : 1,$$
$$\mathfrak{x} = (\mu + 1)\, x,$$

oder

$$\mathfrak{x} = \frac{(\mu + 1)\, r\cos\vartheta}{cl}\, u^2.$$

Ferner erhalten wir

$$(\mathfrak{y} + PP_u) : (y + PP_u) = P_u\mathfrak{R} : P_u R = (\mu + 1) : 1,$$

und hiernach ist

$$\mathfrak{y} = (\mu + 1)\, y + \mu\,.\, PP_u.$$

Da nach Seite 720 die Strecke

$$PP_u = \frac{u\,r\,\sin\vartheta}{l}, \quad \text{und ferner} \quad y = \frac{u\,r\cos\vartheta}{c}$$

ist, so ergiebt sich

$$PP_u = \frac{y\,c\tan\vartheta}{l};$$

und durch Einsetzung erhalten wir

$$\mathfrak{y} = \left(\mu + 1 + \frac{\mu\,c}{l}\tan\vartheta\right) y,$$

oder

$$\mathfrak{y} = \left[(\mu + 1)\cos\vartheta + \frac{\mu\,c}{l}\sin\vartheta\right]\frac{r}{c}\cdot u.$$

Denken wir uns die Variabele u aus den beiden Gleichungen für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eliminirt, dann folgt, dass der geometrische Ort des Punktes $\mathfrak{N}$ eine Parabel ist, deren Scheitel in P liegt und deren Axe $\Phi\sigma$ ist.

Wird in Fig. 722 der Abstand der beiden Parallelen ii_1, JJ_1 mit u_i bezeichnet, so erhalten wir

$$u_i = u + z = u + \mu u = (\mu + 1)\, u.$$

Dem gemäss ist die Ordinate $\mathfrak{y}$ auch dem Abstande u_i proportional. Wenn insbesondere J mit H' coincidirt, können wir annähernd auch

$$u + z = c$$

setzen; und es ist

$$\frac{z}{\mu} + z = c, \qquad z = \frac{\mu\,c}{\mu + 1}.$$

Bei dieser Aufhängung der Coulisse stimmt die Bewegung von J sehr annähernd mit der von H' überein, und dem zufolge muss der entsprechende Punkt $\mathfrak{N}_c$ auf der Geraden $E'G'$ liegen. Sein Abstand von E' ist

$$E'\mathfrak{N}_c = r\,\frac{z}{l} = r\,\frac{c}{l}\cdot\frac{\mu}{\mu + 1},$$

$$E'\mathfrak{N}_c = E'G'\cdot\frac{\mu}{\mu + 1}.$$

Wir brauchen hiernach nur den Punkt $\mathfrak{N}_c$ der Parabel auf $E'G'$ zu bestimmen und dann in der bekannten bequemen Weise andere Punkte derselben zu construiren. Um also den Punkt $\mathfrak{N}$, dessen Ordinate $\mathfrak{y} = \mathfrak{D}\mathfrak{U}$ ist, zu erhalten, zeichnen wir das Rechteck

$P\mathfrak{D}\mathfrak{R}_c\mathfrak{Q}$, ziehen zu $\Phi\sigma$ die Parallele $\mathfrak{U}\mathfrak{R}_y$, zu $\mathfrak{D}\mathfrak{Q}$ die Parallele $\mathfrak{U}\mathfrak{q}$ bis an $\mathfrak{R}_c\mathfrak{Q}$ und ferner die Gerade $\mathfrak{q}P$, welche auf $\mathfrak{U}\mathfrak{R}_y$ den Punkt $\mathfrak{R}$ bestimmt. Ist also die Coulissenmitte i um die Strecke u gesenkt, welche die Ordinate $\mathfrak{y}$ liefert, dann bewegt sich der entsprechende Punkt J oder der Gelenkpunkt K angenähert wie die auf $\Phi\sigma$ senkrechte Projection des rotirenden Punktes $\mathfrak{R}$; und demnach ist $\Phi\mathfrak{R}$ der entsprechende ideelle Excenterarm für die Schieberbewegung.

Um in Fig. **725** für das gezeichnete Schema der Allan'schen Steuerung die betreffenden Schieberkreise zu construiren, welche den Abständen

$$u_i = 0, \quad \tfrac{1}{4}c, \quad \tfrac{2}{4}c, \quad \tfrac{3}{4}c, \quad c$$

entsprechen, ziehen wir unter dem Voreilwinkel gegen ΦY den Excenterarm $\Phi E = r$ der Deutlichkeit wegen fünffach vergrössert, errichten in E auf ΦE die Senkrechte

$$EG = r\frac{c}{l}.$$

Auf dieser Senkrechten machen wir

$$EN^4 = \frac{\mu}{\mu+1}EG,$$

und wenn beispielsweise die Zahl $\mu = 3$ ist, $EN^4 = \frac{3}{4}EG$. Hierauf zeichnen wir das Rechteck $P\mathfrak{D}N^4\mathfrak{Q}$, theilen $\mathfrak{D}N^4$ in vier gleiche Theile und construiren zu den Theilpunkten $\mathfrak{U}^1, \mathfrak{U}^2, \mathfrak{U}^3$ in der vorhin angegebenen einfachen Weise die entsprechenden Punkte N^1, N^2, N^3 der Parabel, welche die Scheitelcurve im Diagramm ist. Wir erhalten somit für jene fünf Werthe von u_i die Durchmesser ΦP, ΦN^1, ΦN^2, ΦN^3, ΦN^4 der zugehörigen Schieberkreise $\mathfrak{w}^0$, $\mathfrak{w}^1$, $\mathfrak{w}^2$, $\mathfrak{w}^3$, $\mathfrak{w}^4$, deren Mittelpunkte m^0, m^1, m^2, m^3, m^4 auf einer ähnlichen Parabel liegen, welche die Centralcurve bildet. Diese Mittelpunkte können wir aber auch wie jene Durchmesserendpunkte construiren, wenn die Halbirung der Durchmesser vermieden werden soll. Die Parabel ist hier flacher als bei der Stephenson'schen Steuerung, und die lineare Voreilung variirt dem zufolge bei der Allan'schen Steuerung innerhalb der bedeutend kleineren Strecke $P\mathfrak{D}$, die um so kleiner wird, je grösser die Zahl μ ist.

Wenn die Allan'sche Steuerung offene Excenterstangen besitzt, müssen wir der Grösse c in den Formeln das entgegengesetzte Vorzeichen geben, und bei der Construction der Schieberkreise die auf ΦE Senkrechte EG, sowie die Strecke EN^4 im entgegengesetzten Sinne nehmen. Die entsprechende Parabel ist dann mit ihrer concaven Seite nach dem Punkte Φ gewendet; aber sie ist nicht, wie bei der Stephenson'schen Steuerung, der Parabel für gekreuzte Excenterstangen congruent.

Aus der Allan'schen Steuerung geht als Specialfall die Hunäus'sche Steuerung[1]) mit geradliniger Coulisse hervor, wenn die gleichen Voreilwinkel $\vartheta = 90^\circ$ genommen werden. Die Punkte E, E' fallen dann zusammen, und die beiden Excenterstangen bilden mit der Coulisse ein starres Glied; daher ist nur ein Excenter und eine Excenterstange nöthig, welche in der Coulissenmitte mit der Coulisse zu einem Gliede verbunden ist.

Wir haben bei allen bisher betrachteten Steuerungen die Schieberwege nur annäherungsweise bestimmt. Um die Schieberwege genau zu erhalten, müsste man die Welle Φ als ruhendes System betrachten und den Steuerungsmechanismus in demselben bewegen; dann wird die Gerade $\Phi\sigma$ um den festen Punkt Φ rotiren, der Punkt K auf $\Phi\sigma$ gleitend eine Curve beschreiben, die auf dem Fahrstrahl $\Phi\sigma$ die Schieberwege bestimmt und somit ein genaues Diagramm derselben liefert[2]). Da aber die Construction dieser Curve für jede Aufhängung wiederholt werden muss und auch andere constructive Schwierigkeiten wegen der Dimensionen der Mechanismen auftreten, so ist die Zeichnung dieses Diagramms praktisch nicht durchführbar. Zeuner hat bei den Schiebersteuerungen eine Annäherungsformel für den genaueren Schieberweg abgeleitet[3]), und es können danach die angenäherten Abweichungen von der bisher betrachteten vereinfachten Schieberbewegung berechnet werden. Wenn aber diese Abweichungen so gross sind, dass sie beachtet werden müssen, dann hat man stets die Berechnung vermieden und genauere Schieberovale, wie bei der folgenden Steuerung, construirt, um ein richtiges Bild von der Dampfvertheilung zu erhalten.

284. **Hackworth-Klug'sche Steuerung.** Die in Fig. **726** in natürlicher Grösse dargestellte Steuerung wurde in verschiedenen Gestaltungen zuerst von Hackworth[4]) und später auch von mehreren

---

[1]) *Civilingenieur.* 1873. B. 19. S. 222.

[2]) Gray, „Geometry of the Slide Valve". *The Artizan.* 1860. Vol. 18. p. 242 und 265. — *Civilingenieur.* 1861. B. 7. S. 359.

[3]) Zeuner, *Die Schiebersteuerungen.* 4. Aufl. 1874.

[4]) Hackworth, *Specification* No. 2448 vom 26. October 1859, No. 3237 vom 10. November 1869, No. 4246 vom 2. November 1876.

Anderen[1]) construirt; aber infolge einer von Klug[2]) ausgeführten unwesentlichen Abänderung hat diese Steuerung, welche sich durch besondere Einfachheit auszeichnet und keine Coulisse erfordert, rasche Verbreitung gefunden. Diese vermittelst eines Excenters getriebene Steuerung, deren Dimensionen beispielsweise einer ausgeführten kleinen Schiffsdampfmaschine entnommen sind[3]), erfordert die genaue Bestimmung des Schieberweges, weil die bisher befolgte angenäherte Bestimmung desselben sich hier nicht als zweckmässig erweist. Der in Fig. **726** nicht gezeichnete Dampfkolben bewegt sich in der verlängerten Geraden ΦF_0, der Excenterarm ΦE liegt in der Kurbel ΦF, die verkürzt in $\frac{1}{3}$ natürlicher Grösse gezeichnet ist; die Excenterstange EL ist in L drehbar mit der Hängestange oder Schwinge $L\Lambda$ verbunden, die um eine feststellbare Axe Λ schwingt; und an die verlängerte Excenterstange EL ist im Punkte J die Schubstange JK angeschlossen, durch welche die Schieberstange $K\sigma$ in einer zu ΦF_0 Parallelen $O\sigma$ schwingend bewegt wird. Die weitere Anordnung ist derart, dass bei den Todtlagen ΦF_0, ΦF_6 der Kurbel ΦF oder der beiden entsprechenden Excenterstellungen ΦE_0, ΦE_6 der Gelenkpunkt L sich in einem Punkte C der auf ΦF_0 senkrechten Geraden ΦO befindet. In diesem Punkte C ist die feste Axe eines verstellbaren Hebelarmes Ch angebracht, der die Axe Λ der Schwinge ΛL trägt. Bei der gezeichneten Hebelstellung schwingt L auf einem Kreisbogen λ[4]). Mit der Verstellung des Hebelarmes Ch nebst der Axe Λ wird der Schwingbogen des Punktes L verlegt; jeder Feststellung von Ch entspricht ein von J beschriebenes Oval und somit eine veränderte Schieberbewegung. Auf diese Weise wird die Verschiedenheit der Füllung und die Umsteuerung

---

[1]) Marshall, *Specification* No. 2138 vom 29. Mai 1879, No. 4185 vom 14. Oct. 1880. — Joy, *Specification* No. 929 vom 8. März 1879. — Bremme, *Specification* No. 2037 vom 22. Mai 1879. — Collmann, *Deutsches Reichspatent* Nr. 14437 vom 3. Oct. 1880. Fig. 19.

[2]) Klug, *Deutsches Reichspatent* Nr. 6646 vom 31. Dec. 1878.

[3]) Lewicki, Schraubendampfer „Marie" im *Civilingenieur*. 1881. B. 27. S. 492.

[4]) Die Anordnung, bei welcher der Punkt L anstatt auf einem Kreisbogen in einer geradlinigen verstellbaren Coulisse geführt wird, wurde von Müller-Melchiors angenähert untersucht im *Polytechnischen Journal*. 1876. B. 219. S. 3 und auch von Brauer behandelt in den *Abhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen*. 1877. Jahrg. 56. S. 345. Die verschiedenen Anordnungen dieser Steuerung erörtert Ebbs in der *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*. 1885. B. 29. S. 949.

bewirkt. Diese von Klug ausgeführte Anordnung unterscheidet sich von der ursprünglichen Gestaltung, in welcher Hackworth diese Steuerung angegeben hat, nur allein dadurch, dass Hackworth den Anschlusspunkt J an der Excenterstange nicht ausserhalb, sondern innerhalb der Strecke EL wählte. Wie auch die Axe Λ durch den Hebel gestellt wird, bei den Todtlagen ΦE_0, ΦE_6 coincidirt dieser Anordnung gemäss der Punkt L stets mit C. Den beiden Todtlagen entsprechen also bei allen Hebelstellungen resp. dieselben in der Geraden $O\sigma$ befindlichen Lagen J_0, J_6 des Punktes J, und dem zufolge ist die lineare Voreilung constant. Da die Schubstange JK verhältnissmässig lang genommen wird, so stimmt die Schieberbewegung angenähert überein mit der Bewegung der auf $O\sigma$ senkrechten Projection des Punktes J, und die Mitte O der Strecke J_0J_6 ist die Stellungsmitte für diese Projection.

Um die Schieberwege zu erhalten, construiren wir z. B. für die Hebelstellung Ch, die mit der auf ΦO senkrechten Mittellage Ch^0 nach links den Winkel von 25° bildet, das betreffende Bahnoval $J_0J_1J_2$ . . des Punktes J, indem wir den von E beschriebenen Kreis etwa in 12 gleiche Theile theilen und zu den beziehlichen 12 Excenterstellungen die entsprechenden Lagen J_0, J_1, J_2, . . des Punktes J zeichnen. Dem zweiten Kreistheilpunkte E_2, mit welchem in unserer Zeichnung E zusammenfällt, entspricht der Punkt J_2, und dem diametralen achten Kreistheilpunkte E_8 entspricht der Punkt J_8. Diese beiden Punkte J_2, J_8 befinden sich fast in den grössten Abständen von der Geraden ΦO. Die von J_2 auf ΦO gezogene Senkrechte J_2O_2 stellt die Abweichung des Schiebers von seiner Stellungsmitte resp. den Schieberweg dar, wenn E sich im zweiten Kreistheilpunkte befindet. Damit wir ein Diagramm des Schieberweges und zugleich ein Bild von der Dampfvertheilung gewinnen, wollen wir, wie in Art. 272, die Kolbenwege als Abscissen, die Schieberwege als Ordinaten betrachten. Es ist deshalb in $\frac{1}{8}$ natürlicher Grösse das bogenförmige Kolbendiagramm gezeichnet, welches aus dem Kurbelkreise φ und den beiden mit der Pleuelstangenlänge als Radius beschriebenen Kreisbögen ζ_0, ζ_6 besteht.

Wir übertragen nun die Kolbenwege, die den Kreistheilpunkten entsprechen, in Fig. 727 als Abscissen auf x_0x_6 von x_0 aus nach links, machen also $x_0x_1 = Z_1F_1$, $x_0x_2 = Z_2F_2$, . .; setzen dann die entsprechenden Schieberwege von der Stellungsmitte aus gemessen als Ordinaten an, machen also $x_0\pi_0 = OJ_0$, $x_1\pi_1 = O_1J_1$,

$x_2\pi_2 = O_2J_2$, . . $x_8\pi_8 = O_8J_8$ u. s. w., und erhalten somit das Schieberoval p, welches der Hebelstellung Ch entspricht.

Da der Kolben bei dieser Dampfmaschine sich in verticaler Schubrichtung bewegt, so wirkt die Schwere der Getriebetheile beim Niedergange des Kolbens in gleichem, beim Aufgange in entgegengesetztem Sinne. Um die Ungleichheit dieses Einflusses zu mildern, ist der durch Fig. **728** in natürlicher Grösse gegebene Schieber unsymmetrisch gestaltet und in seiner Stellungsmitte AB-$B'A'$ gegen die Kanäle so gestellt, dass die äusseren Deckungen $M\Gamma$, $M'\Gamma'$ symmetrisch gleich, die inneren Deckungen ΔB, $\Delta' B'$ aber unsymmetrisch gleich sind. Der obere Schieberlappen AB ist also kürzer als der untere $A'B'$. Der Todtlage ΦF_0 der Kurbel entspricht die durch Gestrichelung gekennzeichnete Lage des Schiebers, die von der Stellungsmitte um die Strecke gleich OJ_0 entfernt ist.

Damit wir nun zunächst ein Bild von der Dampfströmung oberhalb des Kolbens erhalten, übertragen wir die Strecken $M\Gamma$, $M\Delta$ resp. nach $\mu\gamma$, $\mu\delta$ in Fig. **727**, machen ferner $c\gamma = d\delta = AB$, d. h. gleich der Länge des oberen Schieberlappens, und ziehen durch γ, δ, c, d Parallele zu x_0x_6. Das im Diagramm schraffirte Flächenstück $\pi_0\pi_1\pi_2\pi_{VI}$, welches die Dampfeinströmung darstellt, zeigt, dass bei der Todtlage ΦF_0, welcher der Schieberweg $x_0\pi_0$ entspricht, der Kanal $\gamma\delta$ schon ein wenig geöffnet ist, auch nur theilweise geöffnet wird, und dass bei π_{VI} die Expansion beginnt, die bis π_{VII} dauert. Die Dampfausströmung, welche durch das schraffirte Flächenstück $\pi_{VII}\pi_{VIII}\pi_I\pi_{II}$ dargestellt wird, fängt bei π_{VII} an, erweitert sich bis π_{VIII}, wird gedrosselt von π_I bis π_{II}; und bei π_{II} tritt eine kurze Compression ein. In gleicher Weise empfangen wir eine Uebersicht über die Dampfströmung unterhalb des Kolbens, indem wir die Strecken $M'\Gamma'$, $M'\Delta'$ nach $\mu'\gamma'$, $\mu'\delta'$ abtragen, $c'\gamma' = d'\delta' = A'B'$ machen, und durch γ', δ', c', d' Parallele zu x_0x_6 ziehen.

Für eine andere Hebelstellung Ch^v unter 36° gegen Ch^0 nach links, bei welcher der Punkt J das Bahnoval $J_0J_1^vJ_2^v$ . . beschreibt, ist im Diagramm das entsprechende Schieberoval p^v gezeichnet. Wird der Hebel Ch nach rechts in die Lage Ch^r unter den Winkel — 36° gegen Ch^0 gestellt und soll der Schieber sich in gleichem Sinne wie vorhin bewegen, so muss die von ΦF_0 ausgehende Kurbel entgegengesetzt rotiren, damit der Punkt J von J_0 aus abwärts geht und das Bahnoval $J_0J_{11}^rJ_{10}^r$ . . beschreibt. Uebertragen wir nun ebenso wie vorhin die Abstände der Punkte J_{11}^r, J_{10}^r, . . von

ΦO in das Diagramm als Ordinaten nach $x_{11}\pi^r_{11}$, $x_{10}\pi^r_{10}$, . ., so erhalten wir das entsprechende Schieberoval p^r, welches zur besseren Unterscheidung von den anderen gestrichelt gezeichnet ist.

Jener ersten Drehrichtung der Kurbel entspricht der Vorwärtsgang, dieser letzteren der Rückwärtsgang des Schiffes. Diese Verschiedenheit des Drehungssinnes überträgt sich aber nicht in das Diagramm; denn in demselben kommt nur die Bewegung des Kolbens, nicht die Bewegung der Kurbel in Betracht, welche in beiden Fällen den Schieber in gleichem Sinne treibt. Die beiden Schieberovale p^v, p^r für die Hebelstellungen Ch^v und Ch^r, welche resp. den Vorwärts- und Rückwärtsgang bedingen, verlaufen also in gleicher Weise; und die geringe Abweichung dieser beiden Schieberovale von einander zeigt die geringe Verschiedenheit der Dampfvertheilungen beim Vorwärts- und Rückwärtsgange, wenn der Hebel beziehlich in die Lagen Ch^v, Ch^r gelegt wird. Wir haben auch noch für die mittlere Hebelstellung Ch^0 das Bahnoval des Punktes J strichpunktirt gezeichnet, aber unterlassen das entsprechende Schieberoval, welches sehr schmal ausfällt, zu construiren; denn es ist leicht zu erkennen, dass bei dieser Hebelstellung fast gar keine Dampfvertheilung eintreten kann und die Maschine in Ruhe bleibt.

Um in Fig. **729** die Geschwindigkeit der Schieberstange $K\sigma$ resp. des Schiebers zu bestimmen, wenn der Punkt E mit der lothrechten Geschwindigkeit $E\Phi$ rotirt, ziehen wir, weil der Mechanismus dieser Steuerung ein specieller Stephenson'scher Mechanismus gemäss der in Art. 190 gegebenen Polbestimmung, durch den Pol $\mathfrak{P}$ der Excenterstange EJ die Gerade $\mathfrak{P}\mathfrak{X}$ senkrecht auf $K\sigma$, resp. parallel zu ΦO bis an die Schubstange JK, die in der Zeichnung vier mal kürzer genommen ist als dem natürlichen Maassverhältnisse entspricht. Demnach bestimmt die Gerade $\mathfrak{X}E$ auf ΦO den Pol V der Schieberstange $K\sigma$ gegen die Welle Φ, und die Strecke ΦV repräsentirt die lothrechte Geschwindigkeit des Schiebers. Bei ungünstigen Lagen kann man diese Strecke ΦV auch durch die Proportion $\Phi V : \Phi E = \mathfrak{P}\mathfrak{X} : E\mathfrak{P}$ in anderer Weise construiren. Eine zweite Bestimmung dieser Geschwindigkeit ergiebt sich, indem wir die Normale $\mathfrak{P}J$ an die vom Punkte J beschriebene Curve ziehen, dann zu EJ die Parallele $\Phi J_\mathfrak{v}$ legen, welche $\mathfrak{P}J$ in $J_\mathfrak{v}$ schneidet, und ferner $J_\mathfrak{v}J'_\mathfrak{v}$ parallel ΦO bis an JK ziehen. Demnach repräsentirt $JJ_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit von J und $J'_\mathfrak{v}J_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Schiebers. Ist die Schubstange JK verhältnissmässig lang, so dass sie als unendlich lang betrachtet werden kann, dann wird diese Schubstange durch die zu $O\sigma$ Parallele $J\sigma'$ vertreten. Für diesen Fall ist in Fig. **729**[a] das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ des Schiebers in doppelter resp. natürlicher Grösse construirt, und den 12 Theilpunkten 0, 1, 2, .. des vom Punkte E beschriebenen Kreises entsprechen die gleichbezeichneten Punkte dieses Geschwindigkeitsdiagramms.

Der rastlose Erfindungstrieb und das eifrige Streben nach Patenten hat eine unsägliche Fülle der mannigfaltig gestalteten, oft unwesentlich variirenden Steuerungsmechanismen in rascher Folge hervorgebracht, von denen viele keine Anwendung erlangen, viele nur vorübergehend Bestand haben und wenige dauernd sich bewähren. Erst durch die fördernde Hülfe der kinematischen Forschung, die uns zur tieferen klaren Erkenntniss führt, wird diesen Mechanismen ein höherer praktischer Werth verliehen und dem Erfinder der Weg zu seinen Resultaten geebnet.

ELFTER ABSCHNITT.

Die Lehre von der Beschleunigung und ihre Anwendung auf die Mechanismen.

Begriff der Beschleunigung.

285. **Beschleunigung bei krummliniger Bewegung.** Die Erkenntniss der Beziehungen der Beschleunigung erfordert die Betrachtung der Geschwindigkeiten eines bewegten Punktes in zwei auf einander folgenden gleichen Zeitelementen und ferner die in Art. 2 dargelegte Ersetzung eines ungleichförmig bewegten Punktes durch einen fingirten Punkt, der sich in den gleichen Zeitelementen auf den Bahnelementen gleichförmig bewegt, aber dieselben mit dem ungleichförmig bewegten Punkte gleichzeitig durchläuft. Wir nehmen an, dass in Fig. **730**, Taf. XLIX, ein stetig bewegter materieller Punkt A auf seiner Bahncurve α während zweier auf einander folgender gleicher Zeitelemente, deren unendlich kleine Grösse wir mit dt bezeichnen, beziehlich die Curvenelemente A_1A_2, A_2A_3 durchläuft. Es sei $A_2A'_v$ in der Verlängerung von A_1A_2 die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit des bewegten Punktes A auf dem Curvenelemente A_1A_2 und ferner $A_2A''_v$ in der Verlängerung von A_2A_3 die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit dieses Punktes auf dem Curvenelemente A_2A_3; folglich ist für eine kinematische Zeiteinheit, die nach Art. 2 durch die angenommene Einheit des Längenmaasses dargestellt wird:

$$A_2A'_v = \frac{A_1A_2}{dt}, \qquad A_2A''_v = \frac{A_2A_3}{dt}.$$

Damit wir durch unsere Ableitung zu Beziehungen gelangen, welche die Berechtigung der Anwendbarkeit in sich tragen, stützen wir uns auf den aus der Erfahrung abstrahirten Grundsatz: „Ein materieller Punkt beharrt in seinem Zustande der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch äussere Einwirkungen gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern“ [1]). Demnach würde der bewegte Punkt A im zweiten folgenden Zeitelemente ohne äussere Einwirkung mit der Geschwindigkeit $A_2 A'_v$ auf der geradlinigen Verlängerung von $A_1 A_2$ die unendlich kleine Strecke $A_2 A'_3$ durchlaufen, welche gleich $A_1 A_2$ ist. Thatsächlich gelangt aber der bewegte Punkt im zweiten Zeitelemente auf der Bahncurve α nach dem Punkte A_3, und seine Geschwindigkeit wird in diesem zweiten Zeitelemente durch die Strecke $A_2 A''_v$ dargestellt; demnach muss seine Geschwindigkeit $A_2 A''_v$ als die Resultante aus der Geschwindigkeit $A_2 A'_v$ und einer hinzugekommenen unendlich kleinen Geschwindigkeit $A_2 A^I_v$, die gleich und parallel $A'_v A''_v$ ist, hervorgehen. Diese unendlich kleine Geschwindigkeitscomponente $A_2 A^I_v$ oder $A'_v A''_v$, welche in der unendlich kleinen Zeit dt wirkt und die geometrische Aenderung $A'_v A''_v$ der Geschwindigkeit des Punktes A erzeugt, wird die Elementarbeschleunigung genannt.

Die Strecke $A_2 A_j$, welche durch gleichförmiges Wachsen aus der Elementarbeschleunigung $A_2 A^I_v$ auf der Verlängerung derselben in der gewählten kinematischeu Zeiteinheit entsteht, heisst die Beschleunigung des bewegten Punktes A in dem betreffenden Zeitmomente, und auch dann, wenn die Geschwindigkeit $A_2 A''_v$ kleiner als $A_2 A'_v$ ist, also eine Verzögerung der Bewegung des Punktes A eintritt. In physikalischer Auffassung wird, wenn in dem bewegten Punkte die Masseneinheit concentrirt ist, durch die Beschleunigung die Kraft dargestellt, welche die Bewegung verändert. Die Beschleunigung ist der Ableitung gemäss die geometrische Aenderung der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit. Der Begriff der Beschleunigung stimmt also nach dieser Definition mit dem Begriff der Geschwindigkeit überein; denn die Beschleunigung ist die Geschwindigkeit, mit welcher die Strecke $A'_v A''_v$ oder $A_2 A^I_v$ bei gleichförmiger Erzeugung entsteht. Bezeichnen wir die Beschleunigung mit j, dann ist hiernach:

$$j = A_2 A_j = \frac{A_2 A^I_v}{dt} = \frac{A'_v A''_v}{dt}.$$

Da die unendlich kleinen Strecken $A_1 A_2$, $A_2 A'_3$ gleich sind, so ergiebt sich gemäss den obigen Gleichungen

[1]) Die erkenntnisstheoretische Schwierigkeit dieses Grundsatzes ist in Streintz, *Die physikalischen Grundlagen der Mechanik.* 1883. ausführlich erörtert.

$$\frac{A_2 A'_v}{A_2 A''_v} = \frac{A_1 A_2}{A_2 A_3} = \frac{A_2 A'_3}{A_2 A_3};$$

folglich ist $A'_3 A_3$ parallel $A'_v A''_v$ und das Dreieck $A_2 A'_3 A_3$ dem Dreieck $A_2 A'_v A''_v$ ähnlich. Hiernach erhalten wir

$$\frac{A'_v A''_v}{A'_3 A_3} = \frac{A_2 A'_v}{A_2 A'_3} = \frac{A_1 A_2}{A_2 A'_3 \,.\, dt} = \frac{1}{dt},$$

und es ergiebt sich die Beschleunigung

$$j = \frac{A'_3 A_3}{dt^2}.$$

Denken wir uns auf der Geraden $A_2 A_j$, die zu $A'_v A''_v$ oder $A'_3 A_3$ parallel ist, die Strecke $A_2 A_{II} = A'_3 A_3$ gemacht, so ist der Punkt A_{II} der vierte Eckpunkt des durch $A_1 A_2 A_3$ bestimmten unendlich kleinen Parallelogramms $A_1 A_2 A_3 A_{II}$ und die Beschleunigung

$$j = \frac{A_2 A_{II}}{dt^2}.$$

Die Grösse der Beschleunigung j des Punktes A ist durch dieses Verhältniss, und die Richtung derselben ist durch die Diagonale $A_2 A_{II}$ des unendlich kleinen Parallelogramms $A_1 A_2 A_3 A_{II}$ bestimmt.

Die Strecke $A'_3 A_3$ repräsentirt die im zweiten Zeitelemente auftretende Abweichung des auf der Curve α bewegten Punktes A von jener gedachten geradlinigen Bewegung auf der Verlängerung des Bahnelementes $A_1 A_2$. Da die Diagonale $A_2 A_{II}$ des unendlich kleinen Parallelogramms $A_1 A_2 A_3 A_{II}$ gleich und parallel der Strecke $A'_3 A_3$ ist, so wollen wir diese Diagonale $A_2 A_{II}$ die **Deviation** des bewegten Punktes A nennen. Wenn insbesondere, wie bei der geradlinigen Bewegung, die Strecke $A'_3 A_3$ in der Geraden $A_2 A'_v$ sich befindet, das genannte Parallelogramm also mit dieser Geraden zusammenfällt, dann liegt auch die Deviation $A_2 A_{II}$ in derselben. Die Beschleunigung eines bewegten Punktes ist demnach seiner Deviation proportional und gleichgerichtet.

Bei der bisher üblichen Ableitung der Beschleunigung eines krummlinig bewegten Punktes wird, ohne strenge Beachtung jener als Grundlage dienenden fingirten gleichförmigen Bewegung, die durch den Punkt A_2 und die Mitte von $A'_3 A_3$ gehende Gerade als Tangente an der Bahncurve α betrachtet und die Strecke $\frac{1}{2} A'_3 A_3$ als Deviation bezeichnet; und ferner wird angenommen, dass diese Strecke durch eine hier noch nicht definirte gleichmässig beschleunigte Bewegung erzeugt werde, die in jedem Zeitelemente neu beginnt. Demnach erfordert diese Betrachtungsweise ausser der gleichförmigen Bewegung auch die gleichmässig beschleunigte Bewegung und die Annahme, dass dieselbe mit jedem Zeitelemente neu beginne [1]).

Bei stetiger Bewegung des betrachteten Punktes A kann die im zweiten Zeitelemente wirkende Geschwindigkeitscomponente $A'_v A''_v$ nur eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung sein; demnach ist die Strecke $A'_3 A_3$ oder die ihr gleiche Deviation $A_2 A_{II}$, die zur Strecke $A'_v A''_v$ im Verhältnisse $dt:1$ steht, eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung. Nehmen wir an, die Bewegung des Punktes A sei eine unstetige, das Bahnelement $A_2 A_3$, welches der Punkt A im zweiten Zeitelemente durchläuft, weiche um einen endlichen Winkel von dem im ersten Zeitelemente zurückgelegten Bahnelemente $A_1 A_2$ ab, dann müsste auch die Geschwindigkeitscomponente oder Elementarbeschleunigung $A'_v A''_v$ eine endliche Grösse und folglich die Beschleunigung unendlich gross sein.

Bei diesen Erörterungen sind wir von der Annahme ausgegangen, dass der Punkt A im ersten Zeitelemente eine Geschwindigkeit besitzt; ist aber dieser Punkt im ersten Zeitelemente in Ruhe, so ist auch die betrachtete Strecke $A_1 A_2$ im Gebiete des Unendlich-Kleinen gleich Null, und die Deviation $A_2 A_{II}$ als die Diagonale des durch $A_1 A_2 A_3$ bestimmten Parallelogramms ist dann mit der im zweiten Zeitelemente durchschrittenen Bahnstrecke $A_2 A_3$ identisch. Diese Strecke ist aber in diesem Falle eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung; denn bei der stetigen Bewegung kann die Geschwindigkeit, welche hier im ersten Zeitelemente gleich Null ist, im zweiten nur eine mit der entsprechenden Elementarbeschleunigung $A_2 A''_v$ identische unendlich kleine Grösse erster Ordnung sein, und da

$$A_2 A''_v = \frac{A_2 A_3}{dt}$$

ist, so folgt die Beschleunigung

$$j = \frac{A_2 A''_v}{dt} = \frac{A_2 A_3}{dt^2},$$

deren Richtung bei dem Beginn der Bewegung des Punktes A mit der geradlinigen Verlängerung von $A_2^* A_3$, also mit der Tangente an der Bahncurve desselben zusammenfällt.

---

[1]) Vergl. D'Alembert, *Traité de dynamique*. 1743. p. 20. — Duhamel, *Lehrbuch der analytischen Mechanik*, deutsch von Schlömilch. 1861. B. I. S. 237. — Resal, *Traité de cinématique pure*. 1862. p. 24. — Bour, *Cours de mécanique et machines*. Fas. I. Cinématique. 1865. p. 65.

Denken wir uns durch die drei unendlich nahen Punkte A_1, A_2, A_3 der Bahncurve α den Krümmungskreis beschrieben, dessen Mittelpunkt wir mit A und dessen Radius wir mit ϱ bezeichnen, und beachten wir, dass bei der stetigen Bewegung des Punktes A die in den beiden gleichen Zeitelementen durchschrittenen Curvenelemente A_1A_2, A_2A_3 in ihrer Länge nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung d^2s verschieden sind, weil die endlichen Strecken $A_2A'_v$, $A_2A''_v$ um eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung differiren: so sind auch die Winkel $A_1\mathsf{A}A_2$ und $A_2\mathsf{A}A_3$ als unendlich kleine Grössen erster Ordnung nur um eine gegen diese verschwindend kleine Grösse zweiter Ordnung verschieden. Diese Winkel können demnach als gleich angesehen werden und sind somit auch gleich dem Winkel $A'_vA_2A''_v$. Denken wir uns ferner durch den Endpunkt A^I_v der Elementarbeschleunigung $A_2A^I_v$ zur Geraden $A_2A''_v$ die Parallele gezogen, die $\mathsf{A}A_2$ in A^I_n und die Verlängerung von A_2A_1 in Q trifft, so ist das Dreieck $QA_2A^I_v$ dem Dreieck $A_2A'_vA''_v$ congruent und das Dreieck $QA_2A^I_n$ mit Rücksicht auf jene genannten gleichen Winkel dem gleichschenkeligen Dreieck $\mathsf{A}A_1A_2$ oder $\mathsf{A}A_2A_3$ ähnlich. Hiernach ergiebt sich

$$\frac{A_2A^I_n}{A_1A_2} = \frac{QA_2}{\mathsf{A}A_1}.$$

Bezeichnen wir mit v_1 die Geschwindigkeit $A_2A'_v$, die gleich QA_2 ist, mit v_2 die Geschwindigkeit $A_2A''_v$, welche gleich QA^I_v ist, und ziehen wir von A^I_v zu $\mathsf{A}A_2$ die Parallele $A^I_vA^I_t$ bis an die Gerade $A_2A''_v$, so folgt

$$A_2A^I_n = \frac{v_1}{\varrho}A_1A_2,$$

$$A_2A^I_t = A^I_nA^I_v = v_2 - v_1 = \frac{A_2A_3 - A_1A_2}{dt} = \frac{d^2s}{dt}.$$

Da der Winkel bei A in dem gleichschenkeligen Dreieck $A_2\mathsf{A}A_3$ unendlich klein ist, so können wir in demselben den Winkel bei A_2 als einen Rechten betrachten und das unendlich kleine Parallelogramm $A_2A^I_nA^I_vA^I_t$ als ein Rechteck ansehen. Denken wir uns zu diesem Rechteck durch Verlängerung der unendlich kleinen Seiten $A_2A^I_n$, $A_2A^I_t$, welche im Bezug auf die Geraden $A_2\mathsf{A}$, $A_2A''_v$ die senkrechten Projectionen der Elementarbeschleunigung $A_2A^I_v$ sind, das ähnliche Rechteck $A_2A_nA_jA_t$ so bestimmt, dass die homologen Seiten sich wie $dt:1$ verhalten, und bezeichnen wir die Seiten A_2A_n, A_2A_t, welche die senkrechten Projectionen von A_2A_j auf $A_2\mathsf{A}$ und $A_2A''_v$ sind, resp. mit j_n, j_t, dann ergiebt sich, weil

$$v_1 = \frac{A_1 A_2}{dt}$$

ist,

$$j_n = A_2 A_n = \frac{A_2 A_n^I}{dt} = \frac{v_1}{\varrho} \cdot \frac{A_1 A_2}{dt} = \frac{v_1^2}{\varrho},$$

$$j_t = A_2 A_t = \frac{A_2 A_t^I}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2};$$

und ferner ist nach der obigen Ableitung die Beschleunigung

$$j = A_2 A_j = \frac{A_2 A_v^I}{dt} = \frac{A_2 A_{II}}{dt^2}.$$

Im Vergleich mit endlichen Strecken verschwinden die unendlich kleinen Curvenelemente $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, und wir können somit die Stelle auf der Bahncurve α, wo die drei unendlich nahen Punkte A_1, A_2, A_3 sich befinden, mit einem einzigen Punkte A_x bezeichnen; demnach nennen wir auch die Strecke j die Beschleunigung des momentan in A_x befindlichen bewegten Punktes A. Da ferner die Strecken j_n, j_t die senkrechten Projectionen von der Beschleunigung j auf die Normale und die Tangente der Bahncurve am Punkte A_x sind, so wird die Strecke j_n die Normalbeschleunigung und die Strecke j_t die Tangentialbeschleunigung des momentan in A_x befindlichen bewegten Punktes A genannt.

Die Normalbeschleunigung ist hiernach durch das Verhältniss $v^2 : \varrho$, also durch die momentane Geschwindigkeit v des bewegten Punktes und durch den betreffenden Krümmungsradius ϱ seiner Bahncurve bestimmt, und sie wird durch die Aenderung der Geschwindigkeitsrichtung bedingt. Die Tangentialbeschleunigung ergiebt sich durch das Verhältniss $d^2 s : dt^2$, und sie ist nur von der Längendifferenz $d^2 s$ der Bahnelemente abhängig, welche der bewegte Punkt in zwei auf einander folgenden gleichen Zeitelementen durchschreitet. Wenn ein Punkt sich mit constanter Geschwindigkeit v auf einem Kreise bewegt, dessen Radius ϱ sein möge, erhalten wir die einfachste krummlinige Bewegung, welche eine gleichförmige Kreisbewegung genannt wird. Wegen der constanten Geschwindigkeit v ist in diesem besonderen Fall die Tangentialbeschleunigung j_t gleich Null, und die Beschleunigung j ist identisch mit der nach dem Kreismittelpunkte gerichteten constanten Normalbeschleunigung $j_n = v^2 : \varrho$.

286. **Beschleunigung bei geradliniger Bewegung.** Betrachten wir in Fig. 731 die Bewegung eines Punktes A auf einer Geraden α,

dann liegen jene Bahnelemente $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, welche der Punkt in zwei auf einander folgenden gleichen Zeitelementen dt durchläuft, in dieser Geraden; dem zufolge befinden sich auch die zugehörigen Geschwindigkeiten $A_2 A'_v = v_1$, $A_2 A''_v = v_2$, die Elementarbeschleunigung $A'_v A''_v$, die Deviation $A_2 A_{II}$ und die Beschleunigung $A_2 A_j = j$ in der Geraden α. Bei der geradlinigen Bewegung ist die Normalbeschleunigung j_n wegen des unendlich grossen Krümmungsradius der geradlinigen Bahn gleich Null, und die Beschleunigung j ist identisch mit der Tangentialbeschleunigung j_t. Wenn wir in diesem besonderen Falle die Differenz der Geschwindigkeiten v_2, v_1 mit dv bezeichnen und beachten, dass die Deviation $A_2 A_{II}$ gleich der Differenz $d^2 s$ der Bahnelemente $A_2 A_3$, $A_1 A_2$ ist, erhalten wir

$$A'_v A''_v = dv = v_2 - v_1 = \frac{A_2 A_3 - A_1 A_2}{dt} = \frac{A_2 A_{II}}{dt} = \frac{d^2 s}{dt};$$

demnach ist die Beschleunigung bei der geradlinigen Bewegung

$$j = \frac{A'_v A''_v}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

und ferner

$$j = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Es sei für die Bewegung des Punktes A auf der Geraden α das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ gegeben, bei welchem die auf der Geraden α senkrechten Ordinaten $A_2 V_2$, $A_3 V_3$ die Geschwindigkeiten v_1, v_2 darstellen, dann ist die auf $A_3 V_3$ senkrechte Strecke $V_2 D = A_2 A_3 = v_2\, dt$ und $D V_3 = dv$. Ferner sei an den Punkt V_2 die Normale $V_2 S$ des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ gezogen, die auf der Geraden α die Subnormale $A_2 S = \sigma$ bestimmt, dann ist wegen der ähnlichen Dreiecke $V_2 D V_3$, $V_2 A_2 S$

$$\frac{dv}{v_2\, dt} = \frac{\sigma}{v_1}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{v_2}{v_1}\sigma;$$

und weil die Geschwindigkeiten v_1, v_2 nur um eine gegen endliche Grössen verschwindende, unendlich kleine Grösse differiren, ergiebt sich die Beschleunigung

$$j = \sigma.$$

Demnach erhalten wir den Satz:

Bei einer geradlinigen Bewegung eines Punktes ist die Beschleunigung desselben gleich der entsprechenden Subnormale des zugehörigen, örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms.

Betrachten wir in Fig. **732** das zu einer geradlinigen Bewegung eines Punktes A gehörende, zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}_3$, bei welchem die auf der Zeitaxe $T_0\tau$ senkrechten Ordinaten die Geschwindigkeiten des bewegten Punktes A in den entsprechenden Zeitmomenten darstellen, so ergiebt sich durch die unendlich nahen Ordinaten T_1V_1, T_2V_2, deren Abstand $V_2D = T_1T_2 = dt$ und deren Differenz $DV_2 = dv$ ist, wenn ν den Winkel bezeichnet, den die betreffende Tangente an dem zeitlichen orthogonalen Geschwindigkeitsdiagramm mit der Zeitaxe bildet, die Beschleunigung des Punktes A

$$j = \frac{dv}{dt} = \tan \nu.$$

Hieraus folgt der Satz:

Bei einer geradlinigen Bewegung eines Punktes ist die Beschleunigung desselben gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels, welchen die Tangente an dem zugehörigen, zeitlichen orthogonalen Geschwindigkeitsdiagramm mit der Zeitaxe bildet.

Wenn wir bei einer geradlinigen Bewegung eines Punktes die Bahn desselben als Abscissenaxe betrachten und an diese in den verschiedenen Lagen des bewegten Punktes die zugehörigen Beschleunigungen als rechtwinkelige Ordinaten antragen, erhalten wir eine Curve, die das örtliche Beschleunigungsdiagramm genannt wird. Wenn wir ferner die Zeitaxe als Abscissenaxe und an diese in den entsprechenden Zeitpunkten die zugehörigen Beschleunigungen als rechtwinkelige Ordinaten zeichnen, erhalten wir eine Curve, die das zeitliche orthogonale Beschleunigungsdiagramm genannt wird. Wird die Zeit durch den Drehungswinkel eines um einen festen Punkt gleichförmig rotirenden Fahrstrahles dargestellt und tragen wir auf die betreffenden Lagen desselben vom Drehpunkte aus die zugehörigen Beschleunigungen jenes geradlinig bewegten Punktes ab, so entsteht eine Curve, welche wir das zeitliche polare Beschleunigungsdiagramm nennen.

287. **Die Hodographen der Bewegung eines Punktes und Beschleunigungen höherer Ordnungen.** Betrachten wir in Fig. **733** die Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3, . . als gegeben, die ein bewegter Punkt A auf seiner Bahncurve α in den Punkten A_1, A_2, A_3, . . besitzt, und tragen wir von einem beliebig angenommenen Punkte $\mathfrak{O}_1$ aus diese Geschwindigkeiten nach Grösse und Richtung ab, so dass die Strecke $\mathfrak{O}_1\mathfrak{H}_1 \# v_1$, $\mathfrak{O}_1\mathfrak{H}_2 \# v_2$, $\mathfrak{O}_1\mathfrak{H}_3 \# v_3$, . . ist, dann

bilden die Streckenendpunkte $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3, \ldots$ eine Curve $\mathfrak{h}$, welche der **Hodograph** der Bewegung des Punktes A genannt wird[1]), und den Punkt $\mathfrak{O}_1$ bezeichnen wir als den **Tragpunkt** des Hodographen $\mathfrak{h}$. Wenn wir insbesondere annehmen, dass der bewegte Punkt A auf seiner Bahncurve α in auf einander folgenden gleichen Zeitelementen in die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots$ gelange, die unendlich nahe liegen, so entsprechen diesen Punkten der Bahncurve α die unendlich nahen Punkte $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3, \ldots$ als gleichzeitige Lagen des auf dem Hodographen $\mathfrak{h}$ bewegten Streckenendpunktes $\mathfrak{H}$; und es sind die Bahnelemente $\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_2\mathfrak{H}_3, \ldots$ nach Grösse und Richtung gleich den betreffenden Elementarbeschleunigungen des bewegten Punktes A. Demnach repräsentiren die Geschwindigkeiten, welche der Streckenendpunkt $\mathfrak{H}$ in verschiedenen Punkten auf dem Hodographen $\mathfrak{h}$ besitzt, nach Grösse und Richtung die Beschleunigungen des Punktes A auf seiner Bahncurve α in den entsprechenden Punkten. Wiederholen wir dieses Verfahren, indem wir die Geschwindigkeiten $v_1', v_2', v_3', \ldots$ des Streckenendpunktes $\mathfrak{H}$ von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}_2$ aus nach Grösse und Richtung antragen, so dass die Strecke $\mathfrak{O}_2\mathfrak{J}_1 \# v_1'$, $\mathfrak{O}_2\mathfrak{J}_2 \# v_2'$, $\mathfrak{O}_2\mathfrak{J}_3 \# v_3', \ldots$ ist; dann bilden die Streckenendpunkte $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3, \ldots$ den Hodographen $\mathfrak{i}$ für die Bewegung des Punktes $\mathfrak{H}$ auf seiner Bahncurve $\mathfrak{h}$. Dieses Verfahren können wir beliebig oft, also n-mal wiederholen. Wir erhalten dadurch die Curven $\mathfrak{h}, \mathfrak{i}, \ldots$, welche resp. Hodographen 1^{ter}, 2^{ter}, .. n^{ter} Ordnung heissen, und die Geschwindigkeiten auf denselben werden beziehlich die **Beschleunigungen** 1^{ter}, 2^{ter}, .. n^{ter} **Ordnung** der Bewegung des Punktes A genannt. Dem gemäss ist folgerichtig die Geschwindigkeit des Punktes A auf seiner Bahncurve α als die Beschleunigung 0^{ter} Ordnung zu bezeichnen.

Bewegung eines Punktes durch gesetzmässig wirkende Beschleunigung.

288. **Bestimmtheit der Bewegung eines Punktes.** Durchläuft in Fig. **734** ein Punkt A in einem Zeitelemente dt das Bahnelement A_1A_2 und wirkt auf denselben im zweiten folgenden gleichen Zeitelemente die Beschleunigung A_2A_3'', zu welcher die Deviation

---

[1]) Der Hodograph stammt von Hamilton, *Proceedings of the Royal Irish Academy.* 1846—47. Vol. III. p. 345. — Hamilton, *Elemente der Quaternionen,* deutsch von P. Glan. 1882. B. I. S. 129. B. II. S. 363.

$A_2 A_{II} = A_2 A_j'' : dt^2$ gehört, dann legt der Punkt das entsprechende Bahnelement $A_2 A_3$ zurück, welches sich als eine Seite des durch $A_{II} A_1 A_2$ bestimmten unendlich kleinen Parallelogramms $A_1 A_2 A_3 A_{II}$ ergiebt. Wirkt hierauf im dritten folgenden gleichen Zeitelemente die Beschleunigung $A_3 A_j'''$, zu welcher die Deviation $A_3 A_{III}$ gehört, dann durchschreitet der Punkt A das entsprechende Bahnelement $A_3 A_4$, welches als Seite des durch $A_{III} A_2 A_3$ gegebenen unendlich kleinen Parallelogramms $A_2 A_3 A_4 A_{III}$ bestimmt wird. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir die Bahncurve α des Punktes A. Da nun durch eine Lage A_1 des bewegten Punktes A und durch die zugehörige Geschwindigkeit $A_1 A_v = A_1 A_2 : dt$ das Bahnelement $A_1 A_2 = A_2 A_v . dt$ gegeben ist, so folgt:

Die Bewegung eines Punktes ist durch eine Lage desselben, durch die momentane zugehörige Geschwindigkeit und durch die stetig wirkende Beschleunigung bestimmt. Wenn die Beschleunigung mit dieser Geschwindigkeit in einer festen Ebene liegt, so befindet sich auch die Bahn des Punktes in dieser Ebene; und wenn die Beschleunigung beständig in einer festen Geraden liegt, so ist diese Gerade die Bahn des Punktes.

Ist in Fig. 735 für die Lage A eines bewegten Punktes auf seiner Bahncurve α der Krümmungsmittelpunkt A und ferner die Beschleunigung $A A_j$ gegeben; dann können wir, wenn der Sinn der Bewegung bekannt ist, die auf $A\mathsf{A}$ senkrechte, momentane Geschwindigkeit $A A_v$ durch den Krümmungsradius $A\mathsf{A}$ und die zugehörige Normalbeschleunigung $A A_n$ leicht nach der Formel

$$A A_v = \sqrt{A\mathsf{A} . A A_n}$$

construiren. Wir machen auf der Verlängerung von $\mathsf{A}A$ die Strecke $A\mathfrak{N} = A_n A$ und beschreiben über $\mathsf{A}\mathfrak{N}$ nach der Seite der Bewegungsrichtung den Halbkreis k, welcher auf der Tangente die Geschwindigkeit $A A_v$ bestimmt. Hieraus ergiebt sich:

Die im bekannten Sinne stattfindende Bewegung eines Punktes ist durch eine Lage desselben, durch den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt der Bahncurve und durch die stetig wirkende Beschleunigung bestimmt.

Wenn die Geschwindigkeit $A A_v$, sowie der Krümmungsmittelpunkt A gegeben ist, dann liefert die in A_v auf $\mathsf{A} A_v$ errichtete Senkrechte $A_v \mathfrak{N}$ die Strecke $A \mathfrak{N}$, welche der Normalbeschleunigung $A A_n$ entgegengesetzt gleich ist; und der Endpunkt A_j der

Beschleunigung AA_j kann in der auf $\mathsf{A}A$ errichteten Senkrechten $A_n U$ noch beliebig gewählt werden. Wenn ferner die Normalbeschleunigung AA_n beziehlich die Strecke $A\mathfrak{N}$ nebst der Geschwindigkeit AA_v bekannt ist, dann wird durch die auf $\mathfrak{N}A_v$ errichtete Senkrechte der Krümmungsmittelpunkt A auf der Normalen der Bahncurve α bestimmt. Beschreiben wir über $\mathsf{A}A$ als Durchmesser einen Halbkreis $\varkappa$, der die in A_n auf $\mathsf{A}A$ errichtete Senkrechte $A_n U$ im Punkte U schneidet, so ist auch die Geschwindigkeit $AA_v = AU$. Ist diese Geschwindigkeit und der Krümmungsmittelpunkt A bekannt, dann ergiebt sich umgekehrt auch die Normalbeschleunigung AA_n, indem wir $AU = AA_v$ machen und auf $\mathsf{A}A$ die Senkrechte UA_n fällen. Diese beiden letzten Constructionen sind aber nur dann anwendbar, wenn die Normalbeschleunigung AA_n kleiner als der Krümmungsradius $A\mathsf{A}$ ist. Ferner erhalten wir, wenn AA_v, AA_n gegeben sind und AA_v grösser als AA_n ist, hiernach den Krümmungsmittelpunkt A durch die auf AU errichtete Senkrechte $U\mathsf{A}$. Ist die Bahncurve α eines bewegten Punktes gegeben, so können wir über die stetig wirkende Beschleunigung, welche sich an der concaven Seite der Bahncurve befindet, noch frei verfügen.

289. **Parallelprojection der Bewegung eines Punktes.** Wir bilden in Fig. **736** die Parallelprojection von der Bewegung eines Punktes A auf eine beliebige Ebene E und bezeichnen die Projection von A mit B. Zu den Bahnelementen A_1A_2, A_2A_3, die der Punkt A in zwei auf einander folgenden gleichen Zeitelementen auf seiner Bahncurve α durchläuft, gehören als Projectionen die Bahnelemente B_1B_2, B_2B_3, die der Punkt B gleichzeitig auf seiner Bahncurve β, also auf der Projection von α durchschreitet. Den Geschwindigkeiten A_2A_v', A_2A_v'', welche der Punkt A in den beiden Zeitelementen besitzt, entsprechen als Projectionen die Geschwindigkeiten B_2B_v', B_2B_v'', mit denen sich der Punkt B bewegt. Zu dem durch die Curvenelemente A_1A_2, A_2A_3 bestimmten Parallelogramm $A_1A_2A_3A_{II}$ gehört als Projection das durch die Curvenelemente B_1B_2, B_2B_3 bestimmte Parallelogramm $B_1B_2B_3B_{II}$ und der Deviation A_2A_{II} entspricht als Projection die Deviation B_2B_{II}. Demnach ist auch die zur Beschleunigung A_2A_j des Punktes A gehörende Projection B_2B_j die Beschleunigung des Punktes B, und hieraus folgt der Satz:

Wird von der Bewegung eines Punktes eine Parallelprojection auf eine Ebene gebildet, so repräsentirt die Projection von seiner Geschwindigkeit und seiner

Beschleunigung beziehlich die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Projection des bewegten Punktes.

Wenn insbesondere die Bahncurve α eine ebene Curve ist, so können wir auch umgekehrt die Bewegung von A als die Parallelprojection von der Bewegung des Punktes B betrachten, und in diesem Falle werden die beiden Bewegungen auch als ebene affine Bewegungen bezeichnet.

290. **Gleichmässig geänderte geradlinige Bewegung eines Punktes. Verticale Fall- und Wurfbewegung.** Wirkt auf einen Punkt eine constante Beschleunigung, die sich in einer festen Geraden befindet, so bewegt sich derselbe auf dieser Geraden; und diese Bewegung des Punktes wird eine gleichmässig geänderte geradlinige Bewegung genannt. Je nachdem die Beschleunigung mit der Geschwindigkeit gleiche oder entgegengesetzte Richtung hat, heisst die Bewegung eine gleichmässig beschleunigte geradlinige Bewegung oder eine gleichmässig verzögerte geradlinige Bewegung; denn im ersten Falle nimmt die Geschwindigkeit proportional der Zeit zu, im zweiten Falle nimmt sie proportional der Zeit ab.

Betrachten wir in Fig. **737** einen Punkt A, der sich in der Ruhelage A_0 befindet und auf den die in der festen Geraden α liegende constante Beschleunigung $A_0 A_j = j$ wirkt, dann vollzieht der Punkt A eine in A_0 beginnende, gleichmässig beschleunigte Bewegung auf der Geraden α. Behufs der Untersuchung dieser Bewegung ziehen wir in A_0 auf α die senkrechte Gerade $A_0\tau$, die wir als Zeitaxe betrachten, und ziehen ferner durch A_0 die Gerade $\mathfrak{v}_3$, deren mit $A_0\tau$ gebildeter Winkel ν durch $\tan \nu = j$ bestimmt ist; demnach ist diese Gerade $\mathfrak{v}_3$ das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm für die Bewegung des Punktes A. Die als Einheit des Längenmaasses gewählte Strecke $T_0 T_1$, die von A_0 aus auf die Zeitaxe abgetragen ist, repräsentirt diejenige Zeiteinheit, welche bei der Bestimmung der gegebenen Beschleunigung j zu Grunde gelegt wurde. Wenn auf der Zeitaxe durch die positive Abscisse $T_0 T_3$ die verfliessende Zeit t und durch die zugehörige Ordinate $T_3 V_3$ die entsprechende Geschwindigkeit v als positiv in der Richtung der Beschleunigung $A_0 A_j$ dargestellt wird, so ist

$$v = j \, . \, t \qquad \qquad 1)$$

die Gleichung der Geraden $\mathfrak{v}_3$. Ferner ergiebt sich, da nach Art. 2 gemäss der gewählten Zeiteinheit die Weglänge s gleich dem Inhalte des Dreiecks $T_0 T V$ ist,

$$s = \frac{v \cdot t}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2);$$

und aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$v = \sqrt{2js} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3),$$

$$s = \tfrac{1}{2} j t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 4).$$

Die Gleichung 4) repräsentirt, wenn wir auf der Zeitaxe $T_0 T_3$ die Zeit t als Abscisse und die Weglänge s als senkrechte Ordinate betrachten, das orthogonale Wegdiagramm $\mathfrak{w}$, welches eine Parabel ist, deren Axe in α und deren Scheitel in A_0 liegt. Für die Abscisse $T_0 T_1 = t = 1$ ist die Weglänge $s = A_0 A_1 = T_1 W_1 = \frac{1}{2} j = \frac{1}{2} T_1 V_1$. Der Brennpunkt $\mathfrak{F}$ für die Parabel $\mathfrak{w}$, deren Halbparameter gleich dem reciproken Werthe von j ist, wird erhalten, wenn wir auf $A_j T_1$ die Senkrechte $T_1 R$ bis an α ziehen, denn dann ist $A_0 R = 1 : j$ und die Strecke $A_0 \mathfrak{F} = \frac{1}{2} A_0 R$.

Den Zeiten $T_0 T_1 = 1$, $T_0 T_2 = 2$, $T_0 T_3 = 3$, .. entsprechen die Weglängen $T_1 W_1$, $T_2 W_2$, $T_3 W_3$, .. und die Lagen A_1, A_2, A_3, .. des auf der Geraden α bewegten Punktes A, dessen Bewegung in A_0 beginnt. Für eine beliebige Zeit $t = T_0 T_2$ ergiebt sich auch gemäss der Gleichung 4) die entsprechende Lage A_2 des Punktes A, wenn wir auf α die Strecke $A_0 \Theta$ gleich dem Parameter $2 . A_0 R$ machen und auf ΘT_2 die Senkrechte $T_2 A_2$ ziehen.

Die Gleichung 3) repräsentirt, wenn wir auf der Geraden α von A_0 aus die Weglängen s als Abscissen und die Geschwindigkeiten v als senkrechte Ordinaten betrachten, z. B. $A_1 \mathfrak{B}_1 = T_1 V_1$ machen, das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$, welches eine Parabel ist, deren Axe in α und deren Scheitel in A_0 liegt. Die constante Subnormale dieser Parabel ist nach dem Satze auf S. 747 gleich der Beschleunigung j; der Punkt A_1 ist demnach der Brennpunkt und der Halbparameter $A_1 \mathfrak{B}$ ist somit auch gleich j.

Nehmen wir an, der bewegte Punkt A besitze eine mit der Beschleunigung gleichgerichtete Geschwindigkeit v_0, die wir als Anfangsgeschwindigkeit bezeichnen und beispielsweise gleich $T_2 V_2$ sei, so ist A_2 die entsprechende Lage dieses Punktes. Der Bewegungsvorgang wird veranschaulicht, wenn wir den Punkt T_2 als Anfangspunkt der Zeit t betrachten. Demnach ist in diesem Falle

$$v = v_0 + jt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathrm{I})$$

die Gleichung der Geraden $\mathfrak{v}_3$, die das zeitliche orthogonale Geschwindigkeitsdiagramm ist. Da die von der Geraden $A_2 \tau'$ aus gemessene Weglänge $T_3' W_3$ für eine Zeit $t = T_2 T_3$ gleich dem

Inhalte des Trapezes $T_2 V_2 V_3 T_3$ ist, dessen parallele Seiten $T_2 V_2$, $T_3 V_3$ gleich den Geschwindigkeiten v_0, v sind, so folgt:

$$s = \frac{v_0 + v}{2} t \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{II}).$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$v = \sqrt{2js + v_0^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{III}),$$

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2} j t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{IV}).$$

Die Gleichung IV) repräsentirt die Parabel 𝔴 im Bezug auf die Coordinatenaxen $W_2 \sigma'$, $W_2 \tau'$. Die Gleichung III) repräsentirt die Parabel 𝔳 im Bezug auf die Coordinatenaxen $A_2 \tau'$, $A_2 \alpha$.

Nehmen wir an, der bewegte Punkt A besitze eine der Beschleunigung entgegengerichtete Anfangsgeschwindigkeit v_0, die beispielsweise gleich $T_{II} V_{II}$ sei und das negative Vorzeichen erhalten muss, so ist A_2 die entsprechende Lage des Punktes A, der nun in der Richtung $A_2 A_0$ eine gleichmässig verzögerte Bewegung auf der Geraden α vollzieht; und ferner ist T_{II} der Anfangspunkt der auf der Zeitaxe $T_{II} \tau$ dargestellten Zeit t. Demnach ergeben sich die Formeln:

$$v = -v_0 + jt \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{I}'),$$

$$s = \frac{-v_0 + v}{2} t \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{II}'),$$

$$v = \sqrt{2js + v_0^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{III}').$$

$$s = -v_0 t + \tfrac{1}{2} j t^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{IV}').$$

Während der Zeit $T_{II} T_0$ bewegt sich der Punkt A in der Richtung $A_2 A_0$ gleichmässig verzögert aufwärts bis A_0, wo die Geschwindigkeit v gleich Null ist, und von A_0 an bewegt sich dieser Punkt in der folgenden Zeit gleichmässig beschleunigt abwärts. In der Zeit $T_{II} T_I$ hat der Punkt A die Weglänge von der Grösse $T_I' W_I$ nach aufwärts zurückgelegt, und in der Zeit $T_{II} T_2$ ist er wieder in seine Anfangslage A_2 zurückgekehrt.

Wirkt auf den in einer verticalen Geraden bewegten Punkt die Beschleunigung der Schwerkraft der Erde, so pflegt man diese Beschleunigung, welche wegen der ellipsoidischen Gestalt der Erde und wegen der Verschiedenheit der Centrifugalkraft auf derselben mit dem Breitengrade sich verändert, mit g zu bezeichnen, und es ist für eine Zeitsecunde unter dem 45ten Breitengrade $g = 9{,}806$ Meter. Wird bei unseren obigen Darlegungen für j diese Grösse und als Zeiteinheit die Secunde eingeführt, dann erhalten wir die verticale Fallbewegung, wenn die Anfangsgeschwindigkeit mit der

Beschleunigung gleichgerichtet oder gleich Null ist, und die verticale, in eine Fallbewegung übergehende Wurfbewegung, wenn die Anfangsgeschwindigkeit der Beschleunigung entgegengerichtet ist.

291. **Parabolische Bewegung eines Punktes. Schräge Wurfbewegung.** Wir nehmen an, es bewege sich in Fig. **738** ein Punkt A so auf einer Parabel α, dass die Beschleunigung desselben beständig der Parabelaxe KY parallel ist. Es seien A, A_1 zwei unendlich nahe Lagen des bewegten Punktes, denen die unendlich kleine Zeit dt entpricht; ferner seien B, B_1 die senkrechten Projectionen von den Punkten A, A_1 auf die Leitlinie β der Parabel α. Auf die Tangenten an den Punkten A, A_1 der Parabel fällen wir vom Brennpunkte F Senkrechte, die bekanntlich die Leitlinie beziehlich in den Punkten B, B_1 treffen, und machen auf diesen Senkrechten FB, FB_1 die Strecken $F\mathfrak{H}$, $F\mathfrak{H}_1$ beziehlich gleich den Geschwindigkeiten AA_v, A_1A_v', die der bewegte Punkt A an den Bahnstellen A, A_1 besitzt; dann ist die unendlich kleine Strecke $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1$ gleich der Elementarbeschleunigung und steht senkrecht auf der Parabelaxe, weil die Beschleunigung zu derselben parallel ist. Die so bestimmten Punkte $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, . . bilden den um einen rechten Winkel gedrehten Hodographen, der also eine zur Parabelaxe senkrechte Gerade $\mathfrak{H}_h\mathfrak{h}$ ist, deren Abstand $F\mathfrak{H}_h$ von dem Brennpunkte F wir mit v_h bezeichnen. Hiernach ist die senkrechte Projection der Geschwindigkeit des bewegten Punktes A im Bezug auf eine zur Parabelaxe rechtwinkelige Gerade gleich der constanten Grösse v_h; und folglich bewegt sich die Projection B des Punktes A gleichförmig mit der Geschwindigkeit v_h auf der Leitlinie β. Ziehen wir auf die Parabelaxe KY die Senkrechte AD und auf diese die Senkrechte A_vE, so ist von den beiden rechtwinkeligen Componenten der Geschwindigkeit AA_v des Punktes A die zur Parabelaxe senkrechte Componente $AE = v_h$ constant.

Bezeichnen wir den Abstand FL der Leitlinie β von dem Brennpunkte F, also den Halbparameter der Parabel α, mit p und die Geschwindigkeit AA_v mit v, so ist

$$\frac{BB_1}{AA_1} = \frac{v_h}{v}, \quad \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1}{BB_1} = \frac{v_h}{p}$$

und folglich

$$\frac{\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1}{AA_1} = \frac{v_h^2}{pv}.$$

Ferner erhalten wir, weil

$$v = \frac{AA_1}{dt}, \quad j = \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1}{dt}$$

ist, die Beschleunigung

$$j = \frac{v_h^2}{p}$$

und somit ergiebt sich der Satz:

Wenn die Beschleunigung eines auf einer Parabel bewegten Punktes beständig der Parabelaxe parallel ist, so ist diese Beschleunigung constant und gleich dem Quadrate der constanten zur Parabelaxe senkrechten Geschwindigkeitscomponente v_h dividirt durch den Halbparameter p der Parabel.

Die constructive Bestimmung dieser constanten Beschleunigung $j = AA_j$ kann, wenn in Fig. **738** die Geschwindigkeit AA_v und die Lage der Parabelaxe KY bekannt ist, leicht in folgender Weise ausgeführt werden. Wir ziehen vom Punkte D auf AA_v die Senkrechte DG, welche die zur Parabelaxe parallele Gerade AA_j in G trifft, bilden die auf AD senkrechte Projection E des Punktes A_v und errichten auf GE die Senkrechte EA_j, welche die Beschleunigung AA_j bestimmt; denn weil $AG = FL = p$ und $AE = v_h$ ist, folgt aus dieser Construction $AA_j = v_h^2 : p$. Ist dagegen die Beschleunigung AA_j, ferner die Lage der Parabelaxe KY und die Parabeltangente AA_v am Punkte A gegeben, dann wird durch die auf AA_v Senkrechte DG der Punkt G erhalten, durch einen über GA_j als Durchmesser beschriebenen Halbkreis der Punkt E bestimmt, und durch die zur Parabelaxe parallele Gerade EA_v ergiebt sich die Geschwindigkeit AA_v.

Um zu beweisen, dass jener abgeleitete Satz auch umgekehrt gilt, nehmen wir an, es wirke in Fig. **738** auf einen bewegten Punkt A, dessen momentane Geschwindigkeit $AA_v = v$ ist, eine Beschleunigung $AA_j = j$ von constanter Grösse und Richtung, und es sei $AE = v_h$ die senkrechte Projection von AA_v auf die zur Beschleunigung senkrechte Gerade AD. Betrachten wir nun $p = v_h^2 : j$ als Halbparameter einer die Gerade AA_v im Punkte A berührenden Parabel α, deren Axe der Beschleunigung AA_j parallel ist, dann ist diese Parabel bestimmt. Um dieselbe zu construiren, errichten wir auf A_jE die Senkrechte EG, welche AA_j in G schneidet, und ziehen auf AA_v die Senkrechte GD, die AE in D trifft; dann ist die zu AA_j parallele Gerade DY die Axe der Parabel α, und die Mitte K der Strecke DJ, welche die Geraden AE, AA_v auf dieser Axe zwischen sich fassen, ist bekanntlich der Parabelscheitel. Nehmen wir nun an, es bewege sich auf der so bestimmten Parabel α ein mit der Geschwindigkeit AA_v

von A ausgehender gedachter Punkt, dessen Beschleunigung der Parabelaxe parallel ist, so besitzt dieser Punkt an der Stelle A auch die constante Beschleunigung AA_j, welche nach der obigen Darlegung gleich $\overline{AE}^2 : p$ ist. Da nun dieser gedachte bewegte Punkt an der Stelle A dieselben Bedingungen erfüllt, wie der betrachtete Punkt A, dessen ganze Bewegung nach dem ersten Satze S. 570 bestimmt ist, so muss demnach die Bewegung des gedachten Punktes mit der Bewegung des Punktes A identisch sein, und folglich erhalten wir den Satz:

Wirkt auf einen Punkt eine constante Beschleunigung in unveränderlicher Richtung, die nicht mit der Geraden der Bewegungsrichtung zusammenfällt, so bewegt sich dieser Punkt auf einer Parabel, deren Axe der Beschleunigung parallel ist.

Diese Bewegung vollzieht, wenn der Luftwiderstand nicht vorhanden wäre, ein schräg geworfener Körper, auf den die constante Beschleunigung der Schwere vertical abwärts gerichtet wirkt, und sie wird deshalb auch die schräge Wurfbewegung genannt.

Da der Punkt D als senkrechte Projection von A auf KY gemäss dem Satze auf S. 751 dieselbe constante Beschleunigung j besitzt, so ist die Bewegung dieser Projection eine gleichmässig beschleunigte, sie stimmt also mit der verticalen Wurf- und Fallbewegung überein, und es gelten für sie die in Art. 290 abgeleiteten Formeln.

Die horizontale Wurfstrecke AP ergiebt sich aus den ähnlichen Dreiecken GAD, AEA_v; denn es ist, wenn wir die verticale Componente EA_v der Anfangsgeschwindigkeit AA_v mit v_0 bezeichnen,

$$AD : p = v_0 : v_h,$$

und hieraus folgt, weil $v_h^2 = j \cdot p$ ist,

$$AP = 2AD = 2\frac{v_0 \cdot v_h}{j}.$$

Wird ein Punkt in Fig. 738 von A aus mit verschiedenen Geschwindigkeiten in der constanten Richtung AJ geworfen, so ist, weil der zugehörige Parabelscheitel K in der Mitte der entsprechenden Strecke DJ liegt und diese Strecke sich parallel verlegt, der geometrische Ort des Parabelscheitels eine Gerade AK.

Aus der Gleichung

$$DA = \sqrt{2p \cdot KD}$$

der Parabel α ergiebt sich die Scheitelhöhe

$$DK = \frac{\overline{AD}^2}{2p},$$

und weil

$$AD = \frac{v_0 \cdot v_h}{j}, \quad p = \frac{v_h^2}{j}$$

ist, erhalten wir

$$DK = \frac{v_0^2}{2j}.$$

Da ferner der Abstand KL der Leitlinie β vom Scheitel K gleich $\frac{1}{2}p$ ist, so ergiebt sich die Höhe der Leitlinie

$$DL = DK + KL = \frac{v_0^2}{2j} + \frac{p}{2} = \frac{v_0^2 + v_h^2}{2j} = \frac{v^2}{2j},$$

und auch der Abstand des Brennpunktes F von dem Ausgangspunkte A, also

$$AF = DL = \frac{v^2}{2j}.$$

Demnach erhalten wir den Satz:

Alle Parabeln, die von demselben Ausgangspunkte aus durch einen mit gleicher, aber verschieden gerichteter Geschwindigkeit v geworfenen Punkt beschrieben werden, haben eine gemeinsame Leitlinie, und ihre Brennpunkte liegen auf einem um den Ausgangspunkt beschriebenen Kreise, dessen Radius gleich $v^2 : 2j$ ist und der die Leitlinie berührt.

Beschreiben wir in Fig. **739** um den Ausgangspunkt A mit dem Radius $v^2 : 2j$ den Kreis k, der die Leitlinie β in F_0 berührt, und nehmen wir an, es sei ein Punkt Z gegeben, der von dem mit der Geschwindigkeit v von A aus geworfenen Punkte A getroffen werden soll, so ziehen wir um Z den die Leitlinie β berührenden Kreis $\varkappa$; dann sind die beiden Schnittpunkte F_I, F_{II}, welche derselbe mit dem Kreise k bildet, die Brennpunkte zweier Parabeln α_I, α_{II}, die durch A und Z gehen. Die Geschwindigkeit $v = AA_v^I$ als Tangente an der Parabel α_I halbirt den Winkel F_0AF_I; und ebenso halbirt die Geschwindigkeit $v = AA_v^{II}$ als Tangente an der Parabel α_{II} den Winkel F_0AF_{II}.

Um auf der Geraden AZ bei gegebener Geschwindigkeit v die grösste Wurfstrecke und die entsprechende Richtung der Geschwindigkeit zu bestimmen, suchen wir auf AZ den Mittelpunkt Z_m des Kreises $\varkappa_m$, der die Leitlinie β in Ξ und den Kreis k in F_m berührt, dann ist AZ_m die grösste Wurfstrecke auf AZ und F_m der Brennpunkt der Parabel α_m, die den Punkt Z_m trifft; und die Halbirungsgerade AA_v^m des Winkels F_0AF_m liefert als Tangente an dieser Parabel die entsprechende Richtung der Geschwindigkeit $v = AA_v^m$. Verlängern wir die auf der Leitlinie senkrechte Gerade $Z_m\Xi$, so dass $\Xi\Psi = AF_m$ ist, und ziehen wir die Gerade $\Psi\psi$ parallel der Leitlinie β; dann hat Z_m von A und der Geraden $\Psi\psi$ gleichen Abstand, und daraus folgt, wenn wir uns die Gerade AZ_m um A gedreht denken, dass die entsprechenden Endpunkte Z_m der grössten Wurfstrecken auf einer Parabel ξ liegen, deren Brennpunkt der Ausgangspunkt A und deren Leitlinie ψ ist. Die Tangente in Z_m an dieser Parabel ξ, sowie die Tangente in Z_m an jener Parabel α_m halbirt den Winkel $F_mZ_m\Psi$; folglich berühren sich diese beiden Parabeln im Punkte Z_m. Hiernach werden alle Parabeln, welche ein unter verschiedenen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit v von A aus geworfener Punkt durchfliegt, von der Parabel ξ umhüllt und in je zwei Punkten berührt, welche auf der durch A und den entsprechenden Brennpunkt gehenden Geraden liegen [1]).

Für die Parabel, durch welche auf der horizontalen Geraden AZ'_m die grösste Entfernung AZ'_m erreicht wird, ist der in dieser Geraden liegende Brennpunkt mit F'_m bezeichnet. Demnach ist die grösste horizontale Entfernung $AZ'_m = 2AF'_m = v^2 : j$, und die Richtung der zugehörigen Geschwindigkeit v liegt in der Halbirungsgeraden des rechten Winkels $F_0AF'_m$. Wenn insbesondere die Geschwindigkeit v vertical aufwärts gerichtet ist, geht die entsprechende Parabel in die Gerade AF_0 über, und der geworfene Punkt steigt bis F_0. Diese Ergebnisse haben nur theoretisches Interesse; denn die erhaltenen parabolischen Bahnen, welche nur für die Bewegung im luftleeren Raume gelten, weichen von den Bahnen der Geschosse im lufterfüllten Raume durch die Einwirkung des Luftwiderstandes sehr bedeutend ab [2]).

292. **Allgemeine Beziehungen bei der Centralbewegung.** Die Bewegung eines Punktes wird eine Centralbewegung genannt, wenn die Gerade, welche die Beschleunigung des Punktes enthält, beständig durch einen festen Centralpunkt geht; dabei kann die Beschleunigung entweder nach dem Centralpunkte hin gerichtet

---

[1]) Siehe Schell, *Theorie der Bewegungen und der Kräfte.* 1879. B. 1. S. 366.

[2]) Vergl. E. E. Kummer, „Ueber die Wirkung des Luftwiderstandes". *Abhandlungen der königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin.* 1875. S. 1 und 1876. S. 1. — Haupt, *Mathematische Theorie der Flugbahnen gezogener Geschosse.* 1876. — Mieg, *Theoretische äussere Ballistik.* 1884.

oder von demselben weg gerichtet sein. Wird von einer solchen Bewegung die Parallelprojection auf eine beliebige Ebene gebildet, so folgt nach Art. 289, dass auch die Bewegung der Projection des Punktes eine Centralbewegung ist.

Betrachten wir in Fig. **740** einen in Centralbewegung befindlichen Punkt A, nehmen wir an, derselbe durchschreite auf seiner Bahncurve α in einem Zeitelemente das Bahnelement $A_1 A_2$ und im folgenden gleichen Zeitelemente das Bahnelement $A_2 A_3$, dann liegt die Deviation $A_2 A_{II}$ in der durch den Centralpunkt C gehenden Geraden $A_2 C$. Demnach befindet sich der vierte Eckpunkt A_{II} des durch $A_1 A_2 A_3$ bestimmten Parallelogramms auf der Geraden $A_2 C$, und die Bahncurve α liegt in einer durch den Centralpunkt C gehenden Ebene. Da also $A_1 A_2$ gleich und parallel $A_{II} A_3$ ist, so sind auch die Höhen der beiden Dreiecke $A_1 A_2 C$, $A_3 A_2 C$, welche die gemeinsame Basis $A_2 C$ besitzen, gleich, und folglich haben diese beiden Dreiecke gleichen Inhalt. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Bei der Centralbewegung eines Punktes liegt die Bahncurve in einer den Centralpunkt enthaltenden Ebene, und der vom Centralpunkte nach dem bewegten Punkte gehende Fahrstrahl beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

Bewegt sich in Fig. **740** ein Punkt A auf einer ebenen Curve α, so dass die in der Curvenebene liegenden unendlich schmalen Dreiecke CA_1A_2, CA_2A_3, . ., die gleichen Zeitelementen entsprechen, gleichen Inhalt haben, und denken wir uns das Parallelogramm $A_1 A_2 A_3 A_{II}$ construirt, so liegt der vierte Eckpunkt A_{II} desselben auf der Geraden CA_2. Demnach erhalten wir den Satz:

Bewegt sich ein Punkt auf einer ebenen Curve, so dass der von einem in der Curvenebene liegenden festen Punkte nach dem bewegten Punkte gehende Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibt; dann liegt die Beschleunigung in dem betreffenden Fahrstrahle, und diese Bewegung ist eine Centralbewegung.

Wenn der Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibt, die beschriebene Sectorfläche also proportional der Zeit wächst, so ist die Sectorgeschwindigkeit, die wir mit c bezeichnen, constant. Fällen wir in Fig. **740** von dem Centralpunkte C auf die Richtung der Geschwindigkeit $A_2 A_v = v$ die Senkrechte $CH = \eta$, dann erhalten wir den Flächeninhalt des unendlich schmalen Dreiecks oder Sectors, der in einem Zeitelemente dt entsteht,

$$CA_1A_2 = \frac{\eta \,.\, A_1A_2}{2};$$

demnach ergiebt sich die constante Sectorgeschwindigkeit

$$c = \frac{CA_1A_2}{dt} = \frac{\eta}{2} \cdot \frac{A_1A_2}{dt} = \frac{\eta \,.\, v}{2},$$

und die Geschwindigkeit

$$v = \frac{2c}{\eta}.$$

Hieraus folgt:

Bei der Centralbewegung eines Punktes ist die Geschwindigkeit desselben der vom Centralpunkte auf die Geschwindigkeitsrichtung gefällten Senkrechten umgekehrt proportional.

Errichten wir auf CH die Senkrechte $CJ = \sqrt{2c}$ und auf HJ die Senkrechte $J\mathfrak{H}$, die HC im Punkte $\mathfrak{H}$ trifft, so ist $C\mathfrak{H} = v$. Wenn wir so für verschiedene Lagen des bewegten Punktes die zugehörige Geschwindigkeit construiren, dann bilden die Punkte $\mathfrak{H}$ den um einen rechten Winkel gedrehten Hodographen $\mathfrak{h}$, dessen Tragpunkt C ist, und die Punkte H die Fusspunktencurve h der Bahncurve α im Bezug auf C als Lothpunkt. Dem zufolge ist der Hodograph $\mathfrak{h}$ die inverse Curve von der Fusspunktencurve h, und die Tangente im Punkte $\mathfrak{H}$ an dem Hodographen steht auf dem Fahrstrahle CA_1 senkrecht. Wenn insbesondere die Geschwindigkeit in der durch den Centralpunkt gehenden Geraden liegt, ist die Centralbewegung geradlinig, und demnach ist der Hodograph eine Gerade.

Bezeichnet ω die Drehgeschwindigkeit des Fahrstrahles CA_1, dessen Länge r ist, und denken wir uns auf CA_1 die unendlich kleine Senkrechte A_2E gefällt, dann ist wegen der ähnlichen Dreiecke A_1A_2E, A_1CH

$$\frac{A_2E}{A_1A_2} = \frac{\eta}{r}.$$

Da $A_2E = CE \,.\, \omega\, dt$ und $CA_1 = r$ von CE nur um eine verschwindende unendlich kleine Grösse verschieden ist, so folgt

$$\frac{r \,.\, \omega\, dt}{A_1A_2} = \frac{\eta}{r}, \qquad \omega = \frac{\eta v}{r^2} = \frac{2c}{r^2};$$

und demnach ergiebt sich der Satz:

Bei der Centralbewegung ist die Drehgeschwindigkeit des Fahrstrahles dem Quadrate seiner Länge umgekehrt proportional.

293. **Newton'sche Centralbewegung. Planetenbewegung.** Bewegt sich in Fig. **741** ein Punkt A so auf einem Kegelschnitt α, dass die Beschleunigung beständig nach dem einen Brennpunkte C desselben gerichtet ist, dann beschreibt bei dieser Centralbewegung der von diesem Brennpunkte aus gehende Fahrstrahl des bewegten Punktes in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume, und die Sectorgeschwindigkeit c ist constant. Wir nehmen an, der Punkt A bewege sich in der unendlich kleinen Zeit dt von A bis A_1, es seien v, v_1 die entsprechenden Geschwindigkeiten. Fällen wir nun vom Centralpunkte C auf die Bahntangenten AH, A_1H_1 die Senkrechten CH, CH_1, welche wir mit η, η_1 bezeichnen, dann ist:

$$v = \frac{2c}{\eta}, \quad v_1 = \frac{2c}{\eta_1}.$$

Machen wir auf den Senkrechten in der oben angegebenen Weise

$$C\mathfrak{H} = \frac{2c}{\eta}, \quad C\mathfrak{H}_1 = \frac{2c}{\eta_1},$$

so bilden die Punkte $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$ den um einen rechten Winkel gedrehten Hodographen $\mathfrak{h}$, dessen Tragpunkt C ist; und die unendlich kleine Strecke $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1$, welche die Elementarbeschleunigung darstellt, steht senkrecht auf dem Fahrstrahle CA, weil die Beschleunigung nach dem Centralpunkte C gerichtet ist. Da bei einem Kegelschnitt die Fusspunkte H, H_1 nach S. 129 auf dem über der Hauptaxe desselben als Durchmesser beschriebenen Kreise h liegen, so ist der Hodograph $\mathfrak{h}$ als die zu diesem Kreise gehörende inverse Curve nach S. 566 ein Kreis, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ auf der Hauptaxe des Kegelschnitts α liegt, und der Radius $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ ist dem entsprechenden Fahrstrahle CA parallel.

Wir bezeichnen die halbe Hauptaxe des Kegelschnitts α, dessen Mittelpunkt M ist, mit a, die halbe Nebenaxe mit b und den halben Parameter, der gleich dem Verhältnisse $b^2 : a$ ist, mit p. Befindet sich nun der bewegte Punkt A auf der in Fig. **741** dargestellten Ellipse α im Scheitel A_b der Nebenaxe, dann ist die auf die entsprechende Tangente A_bH_b gefällte Senkrechte $CH_b = b$, der Fahrstrahl $CA_b = a$ und die zugehörige Geschwindigkeit $v_h = C\mathfrak{H}_b = 2c : b$. Da der Hodographenradius $\mathfrak{M}\mathfrak{H}_b$, den wir mit $\mathfrak{r}$ bezeichnen, parallel A_bC ist, so sind die rechtwinkeligen Dreiecke $C\mathfrak{H}_b\mathfrak{M}$, H_bCA_b ähnlich, und es ist:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{H}_b : C\mathfrak{H}_b = A_bC : CH_b;$$

also

$$\mathfrak{r} : \frac{2c}{b} = a : b,$$

$$\mathfrak{r} = \frac{2ca}{b^2} = \frac{2c}{p}.$$

Ferner erhalten wir, wenn wir den Abstand $\mathfrak{M}C$ des Mittelpunktes $\mathfrak{M}$ von dem Centralpunkte C mit $\mathfrak{m}$ und das Verhältniss $CM : CA_b$, welches gleich der numerischen Excentricität des Kegelschnitts α ist, mit ε bezeichnen:

$$\mathfrak{m} : \mathfrak{r} = CM : CA_b = \varepsilon;$$

und demnach ist der Abstand

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{r}\varepsilon = \frac{2c\varepsilon}{p}.$$

Ist der betrachtete Kegelschnitt eine Hyperbel, dann ergiebt sich, wenn wir den bewegten Punkt A auf einem Hyperbelast im Unendlichen annehmen, in analoger Weise dasselbe Resultat. Ist dagegen der Kegelschnitt eine Parabel, dann liegen die Fusspunkte $H, H_1, \ldots$ auf der Scheiteltangente und der entsprechende Kreishodograph $\mathfrak{h}$ geht durch den Brennpunkt der Parabel; denn für die Parabel ist $\varepsilon = 1$, und folglich $\mathfrak{r} = \mathfrak{m} = \mathfrak{M}C$.

Mit Hülfe des Kreishodographen $\mathfrak{h}$ kann die Geschwindigkeit des bewegten Punktes A an jeder beliebigen Stelle des Kegelschnitts α leicht bestimmt werden; denn ziehen wir z. B. den Radius $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ parallel zu dem Fahrstrahle AC, so ist die Strecke $C\mathfrak{H}$ gleich der Geschwindigkeit v des Punktes A und senkrecht zu derselben. Ferner ersieht man, dass in dem Endpunkte A_a der Hauptaxe, der in der Nähe des Centralpunktes C liegt, die Geschwindigkeit am grössten und in dem anderen Endpunkte A_a' am kleinsten ist.

Nach den allgemeinen Darlegungen in Art. 292 ist, wenn wir mit r den veränderlichen Fahrstrahl CA bezeichnen, die Drehgeschwindigkeit desselben

$$\omega = \frac{2c}{r^2};$$

und da der parallele Radius $\mathfrak{M}\mathfrak{H}$ des Kreishodographen $\mathfrak{h}$ dieselbe Drehgeschwindigkeit besitzt, so ist die Elementarbeschleunigung

$$\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{r}\,\omega\, dt.$$

Demnach ist die Beschleunigung des Punktes A

$$j = \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1}{dt} = \frac{4c^2}{pr^2}.$$

Hieraus ergiebt sich der wichtige Satz:

Ist die Beschleunigung eines Punktes, der sich auf einem Kegelschnitt bewegt, beständig nach dem einen

Brennpunkte desselben gerichtet, so ist diese Beschleunigung dem Quadrate des Abstandes des bewegten Punktes von diesem Brennpunkte umgekehrt proportional.

Um auch ferner zu beweisen, dass umgekehrt, wenn in Fig. **742** auf einen bewegten Punkt A eine nach dem Centralpunkte C gerichtete Beschleunigung AA_j wirkt, die dem Quadrate seines Abstandes AC von C umgekehrt proportional ist, der Punkt A sich auf einem Kegelschnitt α bewegt, für welchen C ein Brennpunkt ist, verfahren wir in folgender Weise. Wir betrachten die Geschwindigkeit AA_v des Punktes A, welche die Tangente in A an der zu bestimmenden Bahncurve α ist, als gegeben, ziehen AA_n senkrecht und A_jA_n parallel zu AA_v; dann stellt AA_n die Normalbeschleunigung des Punktes A dar. Construiren wir nun, wie S. 751 angegeben wurde, auf der Normalen AA_n der Bahncurve die Strecke $A\mathsf{A} = \overline{AA_v}^2 : AA_n$, dann ist A der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt A der zu bestimmenden Bahncurve α. Betrachten wir C als einen Brennpunkt eines durch A gehenden Kegelschnitts, für welchen A der zu A gehörende Krümmungsmittelpunkt ist, so ist dieser Kegelschnitt bestimmt; denn der zweite Brennpunkt Γ desselben ergiebt sich nach den S. 129 (Fig. **147**) abgeleiteten Beziehungen. Zu dem Zwecke ziehen wir die Gerade $A\Gamma$, so dass der Winkel $\mathsf{A}A\Gamma = CA\mathsf{A}$ ist, fällen auf CA die Senkrechte AB und auf $\mathsf{A}A$ die Senkrechte $\mathsf{B}\Delta$; dann ist der Schnittpunkt Γ, den die Geraden $C\Delta$, $A\Gamma$ bilden, der zweite Brennpunkt.

Nehmen wir nun an, es bewege sich auf dem so bestimmten Kegelschnitt ein mit der Geschwindigkeit AA_v von A aus gehender gedachter Punkt, dessen Beschleunigung beständig nach dem Brennpunkte C gerichtet ist, so besitzt dieser Punkt an der Stelle A auch die Beschleunigung AA_j, welche auf CA durch die Geschwindigkeit AA_v und den Krümmungsradius $A\mathsf{A}$ bestimmt wird; und es ist nach dem vorhin abgeleiteten Satze die nach dem Brennpunkte C gerichtete Beschleunigung dem Quadrate des Abstandes des gedachten Punktes von C umgekehrt proportional. Da nun dieser gedachte bewegte Punkt auch an der betrachteten Stelle A dieselben Bedingungen erfüllt, wie der bewegte Punkt A, dessen Bewegung vollkommen bestimmt ist, so muss hiernach die Bewegung des gedachten Punktes auf jenem Kegelschnitt mit der Bewegung des Punktes A identisch sein, und wir erhalten den fundamentalen Satz:

Wirkt auf einen Punkt eine Beschleunigung, die nach einem festen Centralpunkte gerichtet und dem Quadrate des Abstandes dieser Punkte umgekehrt proportional ist, so bewegt sich der Punkt auf einem Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt der Centralpunkt ist.

Keppler[1]) hat aus den Beobachtungen von Tycho Brahe die Gesetze erkannt: 1) „Jeder Planet bewegt sich in einer Ellipse, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht". 2) „Die von den Fahrstrahlen in gleichen Zeiten beschriebenen Flächen sind gleich". Und Newton hat aus diesen Gesetzen die oben erhaltenen ergebnissreichen Resultate abgeleitet, durch welche er in seinem berühmten Werke[2]) der Welt das Gravitationsgesetz übergab.

Der Kegelschnitt α, den der bewegte Punkt durchläuft, ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem in Fig. 742 der Punkt Δ innerhalb oder ausserhalb der Strecke $C\Gamma$ liegt, oder die Geraden $C\Delta$, $A\Gamma$ parallel sind. Ziehen wir durch C zu $A\Gamma$ die Parallele $C\Theta$, die $A\mathsf{A}$ in Θ trifft, dann treten diese Fälle auch ein, je nachdem

$$A\Delta \lesseqgtr A\Theta$$

ist. Bezeichnen wir den Winkel $CA\Delta$ mit χ, so ist nach der Construction des Punktes Δ die Strecke

$$A\Delta = A\mathsf{A} \cos^2\chi;$$

und da

$$A\mathsf{A} = \frac{\overline{AA_v}^2}{AA_n}, \qquad \cos\chi = \frac{AA_n}{AA_j}$$

ist, erhalten wir

$$A\Delta = \frac{\overline{AA_v}^2}{AA_n}\cos^2\chi = \frac{\overline{AA_v}^2}{AA_j}\cos\chi.$$

In dem Dreiecke $AC\Theta$ ist auch der Winkel an der Ecke Θ gleich χ, und demnach ist

$$A\Theta = 2AC.\cos\chi.$$

Durch Einsetzung der erhaltenen Werthe für $A\Delta$ und $A\Theta$ ergiebt sich

$$\overline{AA_v}^2 \lesseqgtr 2AC.AA_j.$$

Die Bahn des Punktes A ist also eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem das Quadrat der Geschwindigkeit AA_v des-

---

[1]) Keppler, *Astronomia nova de motibus stellae Martis ex observationibus Tychonis Brahe.* Pragae 1609.

[2]) Newton, *Philosophiae naturalis principia mathem.* 1886. Lib. I. § 37.

selben kleiner, grösser oder ebenso gross ist als der doppelte Inhalt des Rechtecks, welches aus dem Abstande AC und der Beschleunigung AA_j gebildet wird.

294. **Harmonische Bewegung eines Punktes.** Bewegt sich in Fig. **743** ein Punkt A' mit constanter Geschwindigkeit v' auf einem Kreise α', dessen Mittelpunkt C' und dessen Radius r' ist, so folgt, weil in gleichen Zeiten von dem Radius gleiche Sectoren beschrieben werden, dass die Beschleunigung j' stets nach dem Mittelpunkte C' gerichtet und die Tangentialbeschleunigung gleich Null ist. Demnach ergiebt sich, da die Beschleunigung mit der Normalbeschleunigung zusammenfällt, nach S. 746

$$j' = \frac{v'^2}{r'}.$$

Bezeichnen wir mit ω die Drehgeschwindigkeit des Radius, dann folgt, weil $v' = r'\omega$ ist,

$$j' = r'\omega^2.$$

Ist insbesondere die Drehgeschwindigkeit $\omega = 1$ oder die Geschwindigkeit $v' = r'$, also gleich dem Radius des Kreises, so ist auch die Beschleunigung j' gleich diesem Radius.

Stellen wir die Grösse ω nicht durch eine gerade Strecke, sondern auf dem Kreise vom Radius 1 durch den Bogen ω dar, den der Endpunkt dieses mit $C'A'$ gleichbewegten Radius in der Zeiteinheit durchläuft, und bezeichnen wir mit t_u die Zeit, in welcher dieser Endpunkt oder der Punkt A' einen Umlauf vollendet, so ist:

$$\omega = \frac{2\pi}{t_u},$$

und

$$j' = \frac{4\pi^2}{t_u^2} r'.$$

Diese Beschleunigung ist also dem Kreisradius direct und dem Quadrate der Umlaufszeit umgekehrt proportional.

Der Hodograph für die gleichförmige Bewegung des Punktes A' auf dem Kreise α' ist ein mit der constanten Geschwindigkeit v' als Radius beschriebener Kreis, dessen Mittelpunkt der zugehörige Tragpunkt ist.

Bilden wir in Fig. **743** von der Bewegung des Punktes A', der sich gleichförmig auf dem Kreise α' bewegt und dessen nach dem Kreismittelpunkte C' gerichtete constante Beschleunigung j' ist, eine Parallelprojection auf eine Ebene E; dann wird die Bewegung der Projection A von A' eine harmonische Bewegung genannt, und die Bahn α des Punktes A ist als Parallelprojection vom Kreise α' eine Ellipse, nach deren Mittelpunkt C die Beschleunigung j des Punktes A als Projection von j' gerichtet ist.

Bezeichnen wir wie vorhin mit r' den Radius des Kreises α' und ferner mit r den Abstand des Punktes A von dem Ellipsenmittelpunkte C, so ergiebt sich die Beschleunigung j des Punktes A auf der Ellipse α aus der Proportion

$$j : j' = r : r',$$

$$j = \frac{j'}{r'} \cdot r.$$

Demnach erhalten wir den Satz:

Bei der harmonischen Bewegung eines Punktes ist die Bahn desselben eine Ellipse; die Beschleunigung dieses Punktes ist nach dem Ellipsenmittelpunkte gerichtet und seinem Abstande von demselben proportional.

Da die Umlaufszeit t_u für die Kreisbewegung und für die entsprechende Projectionsbewegung dieselbe ist, so folgt für die harmonische Bewegung durch Einsetzung des obigen Werthes von j' die Beschleunigung

$$j = \frac{4\pi^2}{t_u^2} \cdot r.$$

Bei der harmonischen Bewegung, die also eine Centralbewegung ist, beschreibt der von dem Ellipsenmittelpunkte C aus gehende Fahrstrahl CA in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume, und bezeichnen wir mit c die constante Sectorgeschwindigkeit, mit a, b die Halbaxen der Ellipse α; dann ist der Inhalt derselben

$$ab\pi = c \,.\, t_u$$

und folglich

$$j = \frac{4c^2}{a^2 b^2} \cdot r.$$

Wenn $a = b$ ist, geht die harmonische Bewegung in die gleichförmige Kreisbewegung über.

Denken wir uns den Hodographen erster Ordnung der gleichförmigen Kreisbewegung, deren Projection diese harmonische Bewegung ist, in gleicher Weise projicirt, dann erhalten wir, da derselbe ein Kreis ist, als Projection eine Ellipse; somit folgt, dass der Hodograph erster Ordnung der harmonischen Bewegung eine der Ellipse α ähnliche und ähnlich gelegene Ellipse ist, in deren Mittelpunkte der zugehörige Tragpunkt liegt, und dass sich der entsprechende Punkt auf dem Hodographen auch harmonisch bewegt. Demnach sind bei der harmonischen Bewegung die Hodographen aller Ordnungen Ellipsen, welche der Ellipse α ähnlich sind und mit derselben ähnliche Lage haben.

Ist insbesondere die Beschleunigung des harmonisch bewegten Punktes A in Fig. **743** gleich dem Abstande desselben von dem Mittelpunkte C seiner elliptischen Bahn α, dann ist für den Punkt A', der sich auf dem Kreise α' gleichförmig bewegt, die Beschleunigung und die Geschwindigkeit gleich dem Radius dieses Kreises. Demnach sind die Hodographen aller Ordnungen bei dieser Kreisbewegung dem Kreise α' congruent; folglich sind auch die Hodographen aller Ordnungen bei dieser harmonischen Bewegung der Ellipse α congruent. In diesem besonderen Falle repräsentirt also in Fig. **744** bei der harmonischen Bewegung des Punktes A auf der Ellipse α der zu CA gehörende conjugirte Halbmesser $C\mathfrak{H}$ die Geschwindigkeit AV des Punktes A. Hieraus ergiebt sich eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunktes A für einen Punkt A der Ellipse α, deren conjugirte Halbmesser CA, $C\mathfrak{H}$ gegeben sind. Wir ziehen auf $C\mathfrak{H}$ die Senkrechte AP, machen auf dieser $A\Pi = PA$ und auf der zu $C\mathfrak{H}$ parallelen Ellipsentangente $AV = C\mathfrak{H}$, dann trifft die in V auf $V\Pi$ errichtete Senkrechte $V\mathsf{A}$ die Ellipsennormale AP in dem Krümmungsmittelpunkte A; denn weil AP die Normalbeschleunigung und AV die Geschwindigkeit des Punktes A ist, ergiebt sich nach dieser Construction der Krümmungsradius $A\mathsf{A} = \overline{AV}^2 : AP$. Umgekehrt können wir hiernach, wenn der Mittelpunkt C der Ellipse α, der Punkt A derselben und der entsprechende Krümmungsmittelpunkt A gegeben ist, auch den zu CA gehörenden conjugirten Halbmesser $C\mathfrak{H} = AV$ leicht vermittelst des über $\mathsf{A}\Pi$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreises bestimmen, und demnach die Ellipse α construiren.

Wenn sich ein Punkt so auf einer Ellipse bewegt, dass die Beschleunigung desselben nach dem Ellipsenmittelpunkte gerichtet ist, dann beschreibt der vom Ellipsenmittelpunkte aus gehende Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume. Denken wir uns diese Bewegung so auf eine Ebene projicirt, dass die Projection der Ellipse ein Kreis wird, dann erhalten wir, weil die Projectionen von gleichen Flächenräumen wieder gleich sind, in der Projectionsebene eine gleichförmige Kreisbewegung, und folglich ergiebt sich der Satz:

Ist die Beschleunigung eines Punktes, der sich auf einer Ellipse bewegt, beständig nach dem Mittelpunkte derselben gerichtet, so ist die Beschleunigung dem Abstande des bewegten Punktes von dem

Ellipsenmittelpunkte proportional, und die Bewegung ist harmonisch.

Um hiernach auch zu beweisen, dass umgekehrt, wenn in Fig. 744 auf einen bewegten Punkt A eine nach dem Centralpunkte C gerichtete Beschleunigung AA_j wirkt, die dem Abstande AC proportional ist, der Punkt A sich auf einer Ellipse α mit dem Mittelpunkte C bewegt und somit eine harmonische Bewegung vollzieht, verfahren wir in folgender Weise. Wir betrachten die Geschwindigkeit AA_v des Punktes A, welche die Tangente in A an der zu bestimmenden Bahncurve α ist, als gegeben, ziehen AA_n senkrecht und A_jA_n parallel AA_v; dann repräsentirt AA_n die Normalbeschleunigung des Punktes A. Construiren wir nun, wie S. 750 angegeben wurde, auf der Normalen AA_n der Bahncurve α die Strecke $A\mathsf{A} = \overline{AA_v}^2 : AA_n$, indem wir auf dieser Normalen $AN = A_nA$ machen und $A_v\mathsf{A}$ senkrecht A_vN ziehen, dann ist A der Krümmungsmittelpunkt für den Punkt A der zu bestimmenden Bahncurve. Betrachten wir nun C als Mittelpunkt einer durch A gehenden Ellipse, für welche A der zu A gehörende Krümmungsmittelpunkt ist, so ist die Ellipse bestimmt; denn der zu CA gehörende conjugirte Halbmesser $C\mathfrak{H}$, der zu AA_v parallel ist und AA_n in P trifft, wird nach der obigen Darlegung construirt. Wir machen auf $A\mathsf{A}$ die Strecke $A\Pi = PA$ und beschreiben über $\mathsf{A}\Pi$ einen Halbkreis, der mit AA_v den Schnittpunkt V liefert, dann ist AV die Grösse des zu CA gehörenden conjugirten Halbmessers $C\mathfrak{H}$; und vermittelst dieser beiden conjugirten Halbmesser kann man die Ellipse leicht in bekannter Weise construiren.

Nehmen wir nun an, es bewege sich auf dieser Ellipse ein mit der Geschwindigkeit AA_v von A aus gehender gedachter Punkt, dessen Beschleunigung beständig nach dem Ellipsenmittelpunkte C gerichtet ist: so besitzt dieser Punkt an der Stelle A auch die Beschleunigung AA_j, welche auf CA durch die Geschwindigkeit AA_v und den Krümmungsradius $A\mathsf{A}$ bestimmt wird; und es ist nach dem vorhergehenden Satze die nach C gerichtete Beschleunigung dem Abstande des gedachten Punktes von dem Ellipsenmittelpunkte C proportional. Da nun dieser gedachte bewegte Punkt auch an der betrachteten Stelle A dieselben Bedingungen erfüllt, wie der bewegte Punkt A, dessen Bewegung vollkommen bestimmt ist, so muss hiernach die Bewegung des gedachten Punktes auf jener Ellipse mit der Bewegung des Punktes A identisch sein, und es folgt der Satz:

Wirkt auf einen Punkt eine Beschleunigung, die nach einem festen Centralpunkte gerichtet und dem Abstande dieser Punkte proportional ist, so bewegt sich der Punkt harmonisch auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt der Centralpunkt ist.

Diese Ellipse α kann also, wenn in Fig. **744** für die Ausgangslage des bewegten Punktes A die Geschwindigkeit AA_v und die Beschleunignng AA_j desselben gegeben ist, wie wir gezeigt haben, leicht construirt werden. Ist insbesondere die Beschleunigung gleich dem Abstande CA, dann ist der zu CA gehörende conjugirte Halbmesser $C\mathfrak{H}$ der Ellipse α nach Richtung und Grösse gleich der Geschwindigkeit AV des bewegten Punktes.

Bezeichnen wir die Beschleunigung, welche im Abstande gleich der Längeneinheit auf den Punkt A wirkt, mit k, so ergiebt sich, weil die Beschleunigung

$$AA_j = \frac{4\pi^2}{t_u^2} \cdot CA$$

ist,

$$\frac{AA_j}{CA} = k = \frac{4\pi^2}{t_u^2}$$

und die Umlaufszeit

$$t_u = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}.$$

Liegt die Geschwindigkeit AA_v des Punktes A insbesondere in der Geraden CA, dann geht die Ellipse α in eine gerade Strecke mit der Mitte C und die elliptische harmonische Bewegung des Punktes A in eine geradlinige harmonische Bewegung über. Und diese wird, wie schon in Art. 144 erörtert wurde, auch erhalten, wenn wir von einem gleichförmig auf einem Kreise bewegten Punkte die Parallelprojection auf eine in der Ebene dieses Kreises liegende Gerade bilden. In diesem besonderen Falle ist jene Umlaufszeit t_u die Schwingungszeit, in welcher der Punkt auf seiner geraden Bahnstrecke einen Hin- und Hergang, d. h. eine ganze Schwingung vollendet. Die Beschleunigung, welche dem Abstande des bewegten Punktes von der Mitte seiner Bahn proportional ist, wird gleich Null im Momente des Durchganges des Punktes durch diese Mitte.

Zusammensetzung und Zerlegung der Beschleunigungen.

295. **Parallelogramm der Beschleunigungen.** Wir betrachten in Fig. **745** zwei gleichzeitige Bewegungen eines Punktes A, die wir der Unterscheidung wegen mit g, h bezeichnen, in zwei auf einander folgenden gleichen Zeitelementen dt und nehmen an, der Punkt A durchschreite im ersten Zeitelemente infolge der Bewegung g die Strecke $A_1^I A_2^I$ und infolge der Bewegung h die Strecke $A_1^I A_1^{II}$, so wird der Punkt A nach Art. 4 durch beide gleichzeitige Bewegungen während des ersten Zeitelementes längs der Diagonale $A_1^I A_2^{II}$ des durch $A_2^I A_1^I A_1^{II}$ bestimmten Parallelogramms bewegt. Im zweiten Zeitelemente wird der Punkt A durch die Bewegung g die Strecke $A_2^{II} A_3^{II}$ und durch die Bewegung h die Strecke $A_2^{II} A_2^{III}$ zurücklegen, also infolge der beiden gleichzeitigen Bewegungen im zweiten Zeitelemente die Diagonale $A_2^{II} A_3^{III}$ des durch $A_3^{II} A_2^{II} A_2^{III}$ bestimmten Parallelogramms durchlaufen. Sind A_3^I und A_1^{III} resp. die vierten Eckpunkte der durch $A_2^I A_2^{II} A_3^{II}$ und durch $A_1^{II} A_2^{II} A_2^{III}$ bestimmten Parallelogramme, dann durchschreitet der Punkt A infolge der einzelnen Bewegung g während der beiden Zeitelemente die Bahnelemente $A_1^I A_2^I$, $A_2^I A_3^I$, welche beziehlich gleich und parallel $A_1^{II} A_2^{II}$, $A_2^{II} A_3^{II}$ sind, und infolge der einzelnen Bewegung h die Bahnelemente $A_1^I A_1^{II}$, $A_1^{II} A_1^{III}$, welche resp. gleich und parallel $A_2^I A_2^{II}$, $A_2^{II} A_2^{III}$ sind. Repräsentiren $A_2^{II} A_v^I$, $A_2^{II} A_v^{II}$ die Geschwindigkeiten, welche der Bewegung g in den beiden Zeitelementen angehören, ferner $A_2^{II} A_v^1$, $A_2^{II} A_v^2$ die der Bewegung h entsprechenden Geschwindigkeiten, so stellen die Diagonalen $A_2^{II} A_v'$, $A_2^{II} A_v''$ der beiden beziehlich aus $A_2^{II} A_v^I$, $A_2^{II} A_v^1$ sowie aus $A_2^{II} A_v^{II}$, $A_2^{II} A_v^2$ gebildeten Parallelogramme die Geschwindigkeiten dar, welche der resultirenden Bewegung des Punktes A in den beiden Zeitelementen angehören. Demnach repräsentiren die Strecken $A_v^I A_v^{II}$ und $A_v^1 A_v^2$ resp. die Elementarbeschleunigungen der Bewegung g und h, und die Strecke $A_v' A_v''$ stellt die Elementarbeschleunigung der resultirenden Bewegung dar. Ziehen wir $A_v' A_v^0 \# A_v^1 A_v^2$, dann ist auch die Strecke $A_v^0 A_v'' \# A_v^I A_v^{II}$; folglich ist die Elementarbeschleunigung $A_v' A_v''$ der resultirenden Bewegung gleich der geometrischen Summe der Elementarbeschleunigungen $A_v^I A_v^{II}$, $A_v^1 A_v^2$ der Bewegungen g und h. Da die Beschleunigung eines bewegten Punktes der Elementarbeschleunigung parallel ist und sich zu derselben wie $1 : dt$ verhält, so ergiebt sich aus dieser Darlegung, dass die Beschleunigung $A_2^{II} A_j^{G}$ der resultirenden Bewegung, welche der

Punkt A auf einer Bahncurve α vollzieht, gleich ist der geometrischen Summe der Beschleunigungen $A_2^{II} A_j^{I}$, $A_2^{II} A_j^{1}$ der beiden Bewegungen g und h, oder gleich ist der Diagonale $A_2^{II} A_j^{\alpha}$ des aus $A_2^{II} A_j^{I}$, $A_2^{II} A_j^{1}$ gebildeten Parallelogramms.

Nehmen wir nun an, es wirken auf den betrachteten Punkt A die gegebenen Beschleunigungen $A_2^{II} A_j^{I}$, $A_2^{II} A_j^{1}$, so sind damit auch die zugehörigen Elementarbeschleunigungen $A_v^{I} A_v^{II}$, $A_v^{1} A_v^{2}$ nach Grösse und Richtung gegeben; aber wir können diesen beiden Elementarbeschleunigungen, die beziehlich den gegebenen Beschleunigungen parallel sind, noch eine beliebige Lage im Raume oder auch in der durch jene Beschleunigungen gelegten Ebene zuweisen. Denken wir uns dann den Punkt A_2^{II}, in welchem sich der bewegte Punkt A am Ende des betrachteten ersten Zeitelementes befindet, mit den Punkten A_v^{I}, A_v^{II} und A_v^{1}, A_v^{2} verbunden, so repräsentiren $A_2^{II} A_v^{I}$, $A_2^{II} A_v^{II}$ die Geschwindigkeiten einer Bewegung g und $A_2^{II} A_v^{1}$, $A_2^{II} A_v^{2}$ die Geschwindigkeiten einer Bewegung h in zwei auf einander folgenden Zeitelementen. Wirken also auf einen Punkt zwei Beschleunigungen, so können wir die dadurch entstehende Bewegung desselben als eine resultirende Bewegung betrachten, welche infolge zweier in mannigfacher Weise auftretenden gleichzeitigen Bewegungen g und h erzeugt wird. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Werden einem Punkte A_2^{II} gleichzeitig zwei Beschleunigungen von der Grösse und Richtung der Strecken $A_2^{II} A_j^{I}$, $A_2^{II} A_j^{1}$ ertheilt, so repräsentirt die Diagonale $A_2^{II} A_j^{\alpha}$ des durch $A_j^{I} A_2^{II} A_j^{1}$ bestimmten Parallelogramms die resultirende Beschleunigung des bewegten Punktes nach Grösse und Richtung.

Wir können hiernach, wenn einem Punkte zwei oder mehrere Beschleunigungen ertheilt werden, dieselben ebenso wie die Geschwindigkeiten zu einer resultirenden Beschleunigung zusammensetzen, die gleich der geometrischen Summe jener Beschleunigungen ist; oder wir können auch eine gegebene Beschleunigung in zwei oder mehrere Beschleunigungen zerlegen, die der gegebenen gleichwirkend sind. Das in dem abgeleiteten Satze enthaltene Gesetz wird das Parallelogramm der Zusammensetzung und Zerlegung der Beschleunigungen oder kurz das Parallelogramm der Beschleunigungen genannt.

Die in Fig. **745** erhaltene resultirende Bewegung des Punktes A wird auch erzeugt, wenn der Punkt A in zwei auf einander folgenden gleichen Zeitelementen die Elemente $A_1^{I} A_2^{I}$, $A_2^{I} A_3^{I}$ einer

Curve g durchläuft, welche gleichzeitig eine Parallelbewegung in einem festen System Σ vollzieht, so dass diese Curvenelemente parallel zu sich selbst im ersten Zeitelemente nach $A_1^{II}A_2^{II}$, $A_2^{II}A_3^{II}$ und im zweiten Zeitelemente nach $A_1^{III}A_2^{III}$, $A_2^{III}A_3^{III}$ gelangen; dann durchschreitet der Punkt A infolge der beiden gleichzeitigen Bewegungen in den beiden Zeitelementen die Elemente $A_1^{I}A_2^{II}$, $A_2^{II}A_3^{III}$ einer Bahncurve α und besitzt auf derselben die Beschleunigung $A_2^{II}A_j^{\alpha}$. Alle Punkte der parallel bewegten Curve g beschreiben im festen System Σ mit gleicher Beschleunigung $A_2^{II}A_j^{1}$ congruente Bahncurven; der Punkt A_1^{I} der Curve g legt demnach in den beiden Zeitelementen die Elemente $A_1^{I}A_1^{II}$, $A_1^{II}A_1^{III}$ einer Bahncurve h zurück und hat auf derselben die Beschleunigung $A_2^{II}A_j^{1}$, während gleichzeitig der Punkt A auf der parallel bewegten Curve g die Beschleunigung $A_2^{II}A_j^{I}$ besitzt. In analoger Weise kann die resultirende Bewegung auch hervorgebracht werden, indem der Punkt A auf der parallel bewegten Curve h fortschreitet, deren Punkt A_1^{I} sich auf der Curve g bewegt. Demnach erhalten wir die Sätze:

Die resultirende Beschleunigung, die durch zwei auf einen Punkt wirkende Beschleunigungen erzeugt wird, kann auch dadurch hervorgebracht werden, dass der Punkt sich mit der einen dieser Beschleunigungen auf einer parallel bewegten Curve bewegt, deren Punkte die andere dieser Beschleunigungen besitzen.

Bewegt sich ein Punkt mit einer Beschleunigung $A_2^{II}A_j^{I}$ auf einer parallel bewegten Curve g, deren Punkte eine Beschleunigung $A_2^{II}A_j^{1}$ besitzen, so repräsentirt die Diagonale $A_2^{II}A_j^{\alpha}$ des durch $A_j^{I}A_2^{II}A_j^{1}$ bestimmten Parallelogramms die resultirende Beschleunigung des Punktes auf seiner durch die beiden gleichzeitigen Bewegungen erzeugten Bahncurve α.

Ist in der Fig. **745** die Geschwindigkeit $A_2^{II}A_v^{I}$ und die Beschleunigung $A_2^{II}A_j^{\alpha}$ eines Punktes A gegeben, der sich in der Lage A_2^{II} befindet, so ist die Bewegung desselben während zweier auf einander folgender gleicher Zeitelemente dt bestimmt. Denn denken wir uns die Elementarbeschleunigung $A_v^{I}A_v^{II} = A_2^{II}A_j^{\alpha}\,dt$ parallel $A_2^{II}A_j^{\alpha}$ construirt, und auf die Geraden der Geschwindigkeiten $A_2^{II}A_v^{I}$, $A_2^{II}A_v^{II}$ resp. die unendlich kleinen Strecken $A_1^{I}A_2^{II} = A_2^{II}A_v^{I}\,dt$, $A_2^{II}A_3^{III} = A_2^{II}A_v^{II}\,dt$ aufgetragen, dann erhalten wir dadurch die Elemente $A_1^{I}A_2^{II}$, $A_2^{II}A_3^{III}$, die der bewegte Punkt A in den beiden Zeitelementen auf der Curve α zurücklegt. Zerlegen wir nun die Geschwindigkeit $A_2^{II}A_v^{I}$ in zwei beliebige Componenten $A_2^{II}A_v^{I}$, $A_2^{II}A_v^{1}$

und ebenso die Beschleunigung $A_2^{II} A_j^{\alpha}$ in zwei beliebige Componenten $A_2^{II} A_j^{I}$, $A_2^{II} A_j^{1}$, oder nehmen wir an, es wirken auf den Punkt A zwei gegebene Geschwindigkeiten $A_2^{II} A_v^{I}$, $A_2^{II} A_v^{1}$ und zwei gegebene Beschleunigungen $A_2^{II} A_j^{I}$, $A_2^{II} A_j^{1}$; dann können wir die Bewegung des Punktes A auf der Curve α während der beiden Zeitelemente als eine resultirende Bewegung betrachten, die dadurch erzeugt wird, dass der Punkt A sich auf einer parallel bewegten Curve g bewegt. Wir denken uns die Elementarbeschleunigung $A_v^{I} A_v^{II} = A_2^{II} A_j^{I}\, dt$ parallel $A_2^{II} A_j^{I}$ und die Elementarbeschleunigung $A_v^{1} A_v^{2} = A_2^{II} A_j^{1}\, dt$ parallel $A_2^{II} A_j^{1}$ construirt; dann sind auf den Geraden der Geschwindigkeiten $A_2^{II} A_v^{I}$, $A_2^{II} A_v^{II}$ die unendlich kleinen Strecken $A_1^{II} A_2^{II} = A_2^{II} A_v^{I}\, dt$, $A_2^{II} A_3^{II} = A_2^{II} A_v^{II}\, dt$ die benachbarten Elemente der Curve g, die auf derselben der Punkt A in den beiden Zeitelementen durchschreitet, und ferner sind auf den Geraden der Geschwindigkeiten $A_2^{II} A_v^{1}$, $A_2^{II} A_v^{2}$ die unendlich kleinen Strecken $A_2^{I} A_2^{II} = A_2^{II} A_v^{1}\, dt$, $A_2^{II} A_2^{III} = A_2^{II} A_v^{2}\, dt$ die benachbarten Elemente der Curve h, die der mit A_2^{II} coincidirende Punkt der parallel bewegten Curve g zurücklegt. Demnach ist die Bewegung des Punktes A auf g sowie die Bewegung der parallel bewegten Curve g während zweier Zeitelemente und damit auch die resultirende Bewegung nebst der Geschwindigkeit und Beschleunigung auf der Bahncurve α bestimmt.

Wird insbesondere in Fig. **746** die Geschwindigkeit $A_v^{II} A_v^{I}$ und die Beschleunigung $A_2^{II} A_j^{\alpha}$ eines Punktes A, der sich in der Lage A_2^{II} befindet, derart in zwei Componenten zerlegt, dass je eine Geschwindigkeits- und Beschleunigungscomponente in einer Geraden zusammenfallen, oder wirken auf einen Punkt A zwei Geschwindigkeiten und zwei Beschleunigungen, so dass eine Geschwindigkeit und eine Beschleunigung in je einer der Geraden g und h liegen; dann erhalten wir den besonderen Fall der Zerlegung und Zusammensetzung, der vorzugsweise bei der analytischen Behandlung angewendet wird und in welchem die Elementarbeschleunigungen $A_v^{I} A_v^{II}$, $A_v^{1} A_v^{2}$ resp. in den Geraden g, h liegen. Auf der Geraden g werden in der angegebenen Weise die Elemente $A_1^{II} A_2^{II}$, $A_2^{II} A_3^{II}$ und auf der Geraden h die Elemente $A_2^{I} A_2^{II}$, $A_2^{II} A_2^{III}$ bestimmt. Demnach wird in diesem Falle die Bewegung des Punktes A auf der Bahncurve α auch als resultirende Bewegung dadurch erzeugt, dass dieser Punkt die erstgenannten Elemente auf der parallel bewegten Geraden g durchschreitet, während gleichzeitig ein Punkt dieser Geraden die letztgenannten Elemente auf der Geraden h zurücklegt.

Zerlegen wir insbesondere in Fig. **747** nur die gegebene Beschleunigung $A_2^{II} A_j^{\alpha}$ eines in A_2^{II} befindlichen Punktes A, so dass die eine Componente $A_2^{II} A_j^{I}$ in der gegebenen Geschwindigkeit $A_2^{II} A_v^{I}$ dieses Punktes, also in der Tangente seiner Bahncurve α liegt, und die andere Componente $A_2^{II} A_j^{1}$ auf $A_2^{II} A_u^{I}$ senkrecht steht, oder nehmen wir an, es sei ausser der Geschwindigkeit $A_2^{II} A_v^{I}$ die in ihrer Richtung liegende Beschleunigung $A_2^{II} A_j^{I}$ und die auf ihr senkrechte Beschleunigung $A_2^{II} A_j^{1}$ gegeben; dann erhalten wir den wichtigen speciellen Fall, in welchem die beiden Componenten der Beschleunigung $A_2^{II} A_j^{I}$, $A_2^{II} A_j^{1}$ resp. mit der Tangente und Normalen der Bahncurve α zusammenfallen und die, wie schon S. 746 erwähnt, beziehlich Tangential- und Normalbeschleunigung genannt werden. Es liegt die Elementarbeschleunigung $A_v^{I} A_u^{II}$, bei welcher die Punkte A_v^{I}, A_u^{I} coincidiren, in der Tangente oder in der Geraden g, auf der die Elemente $A_1^{II} A_2^{II}$, $A_2^{II} A_3^{II}$ wie vorhin bestimmt sind; ferner folgt, da in der Normalen der Bahncurve α oder in der Geraden h nur die Beschleunigung $A_2^{II} A_j^{1}$ wirkt und jene Geschwindigkeitscomponente $A_2^{II} A_v^{1}$ gleich Null ist, dass die Gerade g sich während des ersten Zeitelementes in Ruhe befindet. Dagegen erhält im zweiten Zeitelemente jeder Punkt dieser Geraden eine unendlich kleine Geschwindigkeit $A_2^{II} A_v^{2}$, welche mit der in der Normalen liegenden Elementarbeschleunigung $A_2^{II} A_v^{2}$ identisch ist. Demnach wird der Punkt A_2^{II} der parallel bewegten Geraden g im zweiten Zeitelemente nur um eine unendlich kleine Strecke $A_2^{II} A_2^{III}$ zweiter Ordnung in der Normalen bewegt. Die Bewegung des Punktes A auf der Bahncurve α wird also in diesem speciellen Falle auch als resultirende Bewegung dadurch erzeugt, dass dieser Punkt in den beiden Zeitelementen auf der Geraden g die Elemente $A_1^{II} A_2^{II}$, $A_2^{II} A_3^{II}$ durchschreitet, während diese Gerade im ersten Zeitelemente ruht und im zweiten Zeitelemente senkrecht zu sich selbst eine Parallelbewegung vollzieht, bei welcher ihr Punkt A_2^{II} auf der Geraden h nach A_2^{III} gelangt. Die Tangentialbeschleunigung $A_2^{II} A_j^{I}$ und die Normalbeschleunigung $A_2^{II} A_j^{1}$, welche wir S. 746 resp. als die senkrechten Projectionen der Beschleunigung $A_2^{II} A_j^{\alpha}$ auf die Tangente und auf die Normale der Bahncurve des bewegten Punktes definirten, bringen, wie hierdurch bewiesen ist, vereint die resultirende Beschleunigung $A_2^{II} A_j^{\alpha}$ hervor, deren Projectionen sie sind.

In Fig. **748** wollen wir schliesslich noch den speciellen Fall betrachten, bei welchem wir nur die Geschwindigkeit $A_2^{II} A_v^{I}$ des sich in A_2^{II} befindenden Punktes A zerlegen, so dass die eine

Componente $A_2^{II}A_v^I$ in einer Geraden g und die andere Componente $A^{II}A_v^1$ in der Geraden h liegt, welche die Beschleunigung $A_2^{II}A_j^\alpha$ des Punktes A enthält; oder wir nehmen an, es wirken auf den Punkt A die beiden Geschwindigkeiten $A_2^{II}A_v^I$, $A_2^{II}A_v^1$ und die Beschleunigung $A_2^{II}A_j^\alpha$ in der Richtung $A_2^{II}A_v^1$. In diesem speciellen Falle wird die Bewegung des Punktes A auf der Bahncurve α dadurch als resultirende erzeugt, dass dieser Punkt sich gleichförmig auf der Geraden g bewegt und diese Gerade eine Parallelbewegung vollzieht, bei welcher ein Punkt derselben sich auf der Geraden h mit der Beschleunigung $A_2^{II}A_j^\alpha$ bewegt. Dieser Beschleunigung entspricht in der Geraden h die Aenderung $A_v^1A_v^2$ der Geschwindigkeit $A_2^{II}A_v^1$; demnach ergiebt sich aus der Geschwindigkeit $A_2^{II}A_v^{II}$, die mit $A_v^{II}A_v^I$ identisch ist, und aus der Geschwindigkeit $A_2^{II}A_v^2$ die resultirende Geschwindigkeit $A_2^{II}A_v^{\prime\prime}$ des Punktes A auf der Bahncurve α im zweiten Zeitelemente.

296. **Coriolis'sche Zusammensetzung der Beschleunigungen.** Um zu den allgemeinsten Beziehungen der Zusammensetzung der Beschleunigungen zu gelangen, betrachten wir die resultirende Bewegung eines Punktes, welche entsteht, wenn dieser Punkt sich auf einer beliebig bewegten Curve bewegt. Zu diesem Zwecke stützen wir uns auf das Parallelogramm der Beschleunigungen und auf die Beziehungen der Deviationen. Wir nehmen daher in Fig. **749** zunächst an, ein Punkt A durchschreite auf einer in einem festen System Σ parallel bewegten Curve g die beiden Elemente $A_1^IA_2^I$, $A_2^IA_3^I$ in zwei auf einander folgenden gleichen Zeitelementen dt, und es seien diese Elemente in diesen Zeitelementen also parallel zu sich selbst beziehlich nach $A_1^{II}A_2^{II}$, $A_2^{II}A_3^{II}$ und nach $A_1^{III}A_2^{III}$, $A_2^{III}A_3^{III}$ gelangt; dann hat der Punkt A_2^I der Curve g die Elemente $A_2^IA_2^{II}$, $A_2^{II}A_2^{III}$ einer Curve h im System Σ zurückgelegt und der Punkt A hat infolge der beiden gleichzeitigen Bewegungen die Elemente $A_1^IA_2^{II}$, $A_2^{II}A_3^{III}$ seiner Bahncurve a im System Σ durchschritten. Demnach repräsentiren die Diagonalen $A_2^{II}A^g$, $A_2^{II}A^h$, $A_2^{II}A^a$, welche den durch $A_1^{II}A_2^{II}A_3^{II}$, $A_2^IA_2^{II}A_2^{III}$, $A_1^IA_2^{II}A_3^{III}$ bestimmten Parallelogrammen angehören, beziehlich die Deviation des auf g bewegten Punktes A, die Deviation des auf h bewegten Punktes A_2^I der Curve g und die Deviation des auf der resultirenden Bahncurve a bewegten Punktes A. Da die Deviation der entsprechenden Beschleunigung gleichgerichtet ist und sich zu derselben wie $dt^2:1$ verhält, so muss nach dem Parallelogramm der Beschleunigungen die Deviation $A_2^{II}A^a$ auch die Diagonale des durch $A^gA^{II}A^h$ bestimmten Parallelogramms bilden und gleich der geometrischen

Summe der beiden Deviationen $A_2^{II}A^g$, $A_2^{II}A^h$ sein. Dieses Resultat lässt sich auch leicht direct ableiten.

Durchschreitet in Fig. **750** ein Punkt A auf einer in einem festen System Σ beliebig bewegten Curve g in zwei auf einander folgenden gleichen Zeitelementen dt die Elemente $A_1^I A_2^I$, $A_2^I A_3^I$, und gelangen diese Elemente im ersten Zeitelemente nach $A_1^{II} A_2^{II}$, $A_2^{II} A_3^{II}$, im zweiten Zeitelemente nach $A_1^{III} A_2^{III}$, $A_2^{III} A_3^{III}$; dann hat der Curvenpunkt A_2^I die Elemente $A_2^I A_2^{II}$, $A_2^{II} A_2^{III}$ seiner Bahncurve h im System Σ durchlaufen und der Punkt A hat infolge der beiden gleichzeitigen Bewegungen die Elemente $A_1^I A_2^{II}$, $A_2^{II} A_3^{III}$ der resultirenden Bahncurve α im System Σ zurückgelegt. Die Diagonale $A_2^{II} A^\alpha$ des durch $A_1^I A_2^{II} A_3^{III}$ bestimmten Parallelogramms ist dann die Deviation des auf der resultirenden Bahncurve α bewegten Punktes A. Machen wir die Strecke $A_2^{III} A_3^{\prime\prime\prime} \# A_2^I A_3^I$ und beachten wir, dass die Richtung der Deviation $A_2^{II} A^g$ des auf der Curve g bewegten Punktes A sich mit der Drehung dieser Curve nur um einen unendlich kleinen Winkel dreht, der gegen endliche Winkelgrössen verschwindet, so ist die Diagonale $A_2^{II} A^\alpha$ des Parallelogramms $A_1^I A_2^{II} A_3^{\prime\prime\prime} A^\alpha$ nach der vorhergehenden Ableitung gleich der geometrischen Summe der Deviation $A_2^{II} A^g$ des auf g bewegten Punktes A und der Deviation $A_2^{II} A^h$ des auf h bewegten Curvenpunktes A_2^I. Ferner ist wegen der congruenten und parallel gelegenen Dreiecke $A_1^I A^a A^\alpha$, $A_2^{II} A_3^{\prime\prime\prime} A_3^{III}$ die Strecke $A^a A^\alpha \# A_3^{\prime\prime\prime} A_3^{III}$, und folglich ergiebt sich die geometrische Summe

$$\overline{A_2^{II} A^\alpha} = \overline{A_2^{II} A^g} + \overline{A_2^{II} A^h} + \overline{A^a A^\alpha}.$$

Die bewegte Curve g hat sich in den beiden gleichen Zeitelementen um zwei unendlich kleine Winkel gedreht, deren Summe bei der Bewegung in der Ebene gleich dem unendlich kleinen Winkel $A_3^{\prime\prime\prime} A_2^{III} A_3^{III}$ ist, und bei der Bewegung im Raume von diesem Winkel um eine verschwindende unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung abweicht; demnach hat die Curve g während der Zeit $2\,dt$ eine unendlich kleine Drehung gleich dem unendlich kleinen Winkel $A_3^{\prime\prime\prime} A_2^{III} A_3^{III}$ vollzogen. Bezeichnen wir die Drehgeschwindigkeit, welche die Curve g im ersten Zeitelemente besitzt, mit ω, und beachten wir, dass die Aenderung, welche die endliche Grösse ω im zweiten Zeitelemente erleidet, unendlich klein ist, also gegen ω verschwindet, so ist, da wir für den um A_2^{III} beschriebenen unendlich kleinen Kreisbogen $A_3^{\prime\prime\prime} A_3^{III}$ die Sehne $A_3^{\prime\prime\prime} A_3^{III}$ setzen können,

$$A_3^{\prime\prime\prime} A_3^{III} = 2 \,.\, A_2^{III} A_3^{III} \,.\, \omega\, dt.$$

Die Geschwindigkeit $A_2^I A_v^g = v_g$, welche der Punkt A auf der Curve g im ersten Zeitelemente besitzt, ändert sich im zweiten Zeitelemente nur um eine gegen v_g verschwindende unendlich kleine Grösse, daher können wir auch v_g als die Geschwindigkeit betrachten, mit welcher der Punkt A das nach $A_2^{III} A_3^{III}$ gelangte Curvenelement durchläuft; demnach ist

$$A_2^{III} A_3^{III} = v_g dt,$$

und

$$A^a A^\alpha = A_3^{\prime\prime\prime} A_3^{III} = 2 v_g \omega \, dt^2.$$

Um die Richtung der unendlich kleinen Strecke $A^a A^\alpha$ zweiter Ordnung zu bestimmen, denken wir uns die Geschwindigkeit $A_2^I A_v^g$, welche der Punkt A auf g besitzt, um den momentanen Ort des Punktes A im System Σ der Bewegung der Curve g entsprechend gedreht, dann ist die Strecke $A^a A^\alpha$ gleichgerichtet mit der momentanen Bewegung des Endpunktes A_v^g der Geschwindigkeit $A_2^I A_v^g$.

Bezeichnen wir die resultirende Beschleunigung $A_2^{II} A_j^\alpha$ des Punktes A auf der entstandenen Bahncurve α mit j_α, die Beschleunigung $A_2^{II} A_j^g$ des Punktes A auf der bewegten Curve g mit j_g und die Beschleunigung desjenigen Punktes der bewegten Curve g, der mit A momentan coincidirt und sich auf der Bahncurve h bewegt, mit j_h, so ist:

$$A_2^{II} A_j^\alpha = j_\alpha = \frac{A_2^{II} A^\alpha}{dt^2},$$

$$A_2^{II} A_j^g = j_g = \frac{A_2^{II} A^g}{dt^2},$$

$$A_2^{II} A_j^h = j_h = \frac{A_2^{II} A^h}{dt^2}.$$

Wenn wir nun in die vorhin erhaltene Gleichung der geometrischen Summe den Werth $2 . v_g \omega \, dt^2$ für $A^a A^\alpha$ setzen und diese Gleichung durch dt^2 dividiren, oder wenn wir nun in Fig. **750** das Punktgebilde $A_2^{II} A^g A^h A^\alpha$ im Verhältnisse $dt^2 : 1$ ähnlich vergrössern, so dass das Punktgebilde $A_2^{II} A_j^g A_j^h A_j^\alpha$ entsteht; dann ergiebt sich die geometrische Summe

$$\frac{\overline{A_2^{II} A^\alpha}}{dt^2} = \frac{\overline{A_2^{II} A^g}}{dt^2} + \frac{\overline{A_2^{II} A^h}}{dt^2} + \overline{2 v_g \omega},$$

und hieraus folgt

$$\overline{A_2^{II} A_j^\alpha} = \overline{A_2^{II} A_j^g} + \overline{A_2^{II} A_j^h} + \overline{2 v_g \omega},$$

oder

$$\overline{j_\alpha} = \overline{j_g} + \overline{j_h} + \overline{2 v_g \omega}.$$

Demnach erhalten wir den folgenden fundamentalen Satz, welchen

Coriolis[1]) in sehr umständlicher Weise zuerst analytisch abgeleitet hat:

Bewegt sich ein Punkt A mit der Geschwindigkeit v_g und der Beschleunigung j_g auf einer in einem festen System beliebig bewegten Curve g, deren mit A coincidirender Punkt auf seiner Bahncurve h die Beschleunigung j_h besitzt, und ist ω die momentane Drehgeschwindigkeit der bewegten Curve g, so ist die resultirende Beschleunigung j_a des Punktes A auf der durch beide gleichzeitigen Bewegungen entstehenden Bahncurve a gleich der geometrischen Summe aus den beiden Beschleunigungen j_g, j_h und aus der durch das Product $2v_g\omega$ repräsentirten Strecke, die senkrecht auf der Geschwindigkeit v_g steht und mit der um den Ort von A im Sinne von ω gedachten momentanen Drehung derselben gleichgerichtet ist.

Die resultirende Beschleunigung j_α, mit welcher der Punkt A sich auf der Bahncurve α im festen System Σ bewegt, heisst auch die absolute Beschleunigung dieses Punktes; die Beschleunigung j_g des Punktes A auf der bewegten Curve g wird die relative Beschleunigung genannt; und die Beschleunigung j_h, welche der mit dem Punkte A momentan coincidirende Punkt der im festen System bewegten oder geführten Curve g auf seiner Bahncurve h besitzt, nennen wir die Führungsbeschleunigung. Bei einer Parallelbewegung der Curve g ist die Drehgeschwindigkeit $\omega = 0$, und es verschwindet das Product $2v_g\omega$. Für diesen speciellen Fall, der sich durch die Anwendbarkeit des Parallelogramms der Beschleunigungen auszeichnet, ist also die absolute Beschleunigung gleich der geometrischen Summe der relativen Beschleunigung und der Führungsbeschleunigung. Bei der allgemeinen Bewegung der Curve g ist aber noch die Zusetzung der Strecke $2v_g\omega$ zu dieser geometrischen Summe erforderlich, und deshalb wollen wir die Strecke $2v_g\omega$ die Zusatzbeschleunigung nennen; denn die bisher gebräuchliche Benennung „zusammengesetzte Centripetalbeschleunigung" für diese Strecke ist sehr unpassend und daher verwerflich. Analog heisst auch die

---

[1]) Coriolis, „Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps". *Journal l'École polytechnique.* 1825. Cah. 24. p. 142. — Ferner in Coriolis, *Traité de la mécanique.* 1849. 2e éd. § 29. — Einen kurzen analytischen Beweis des Coriolis'schen Satzes gab Grübler. *Zeitschrift der Mathematik und Physik.* 1884. B. 29. S. 313.

Geschwindigkeit $A_2^{II}A_v^\alpha = v_\alpha$, mit welcher der Punkt A sich auf der Bahncurve α im festen System bewegt, die absolute Geschwindigkeit dieses Punktes; ferner wird die Geschwindigkeit $A_2^{II}A_v^g = v_g$ dieses Punktes A auf der bewegten Curve g die relative Geschwindigkeit genannt; und die Geschwindigkeit $A_2^{II}A_v^h = v_h$, die der mit dem Punkte A momentan coincidirende Punkt der im festen System geführten Curve g auf seiner Bahncurve h besitzt, nennen wir die Führungsgeschwindigkeit. Diese adjectivischen Bezeichnungen „absolute" und „relative" sind jedoch entbehrlich, wenn wir des bestimmteren Ausdruckes wegen stets hinzufügen, auf welche Bahn oder auf welches System die Beschleunigung und die Geschwindigkeit sich bezieht. Wir werden den erhaltenen Coriolis'schen Satz, aus dem viele wichtige Beziehungen der Beschleunigungen bei zusammengesetzten Bewegungen hervorgehen, im Folgenden auf mannigfache interessante Beispiele anwenden.

Construction der Beschleunigung zusammengesetzter Bewegungen.

297. **Tilgung einer Bewegung durch eine andere Bewegung.** Wir betrachten in Fig. 751, Taf. L, einen Punkt A, der sich im Sinne AA_v^g mit der Beschleunigung $AA_j^g = j_g$ auf einer zu einem System S gehörenden Curve g bewegt, für welche ΦA der betreffende Krümmungsradius ist. Die entsprechende Geschwindigkeit $AA_v^g = v_g$ wird erhalten, indem wir auf ΦA die Strecke $A\Xi$ gleich der Normalbeschleunigung AA_n machen und über $\Phi\Xi$ als Durchmesser einen Kreis beschreiben, der die Geschwindigkeit AA_v^g auf der Curventangente bestimmt. Um diese Bewegung zu tilgen, ertheilen wir dem ebenen System S mit der Curve g eine unendlich kleine entgegengesetzte Drehung um den Krümmungsmittelpunkt Φ im Bezug auf ein festes System Σ, so dass der momentan mit dem bewegten Punkte A coincidirende Punkt der Curve g oder des Systems S eine Beschleunigung $AA_j^h = j_h$ erhält, die gleich der Beschleunigung AA_j^g ist und zu dieser bezüglich der Geraden ΦA symmetrisch liegt; dann ist, weil dieser Beschleunigung AA_j^h dieselbe Normalbeschleunigung AA_n entspricht, die zugehörige Geschwindigkeit AA_v^h der Geschwindigkeit AA_v^g entgegengesetzt gleich. Demnach ergiebt sich im Bezug auf das feste System Σ die Drehgeschwindigkeit ω des um Φ mit der Curve g momentan rotirenden Systems S durch das Verhältniss

$$\omega = \frac{AA^h_v}{\Phi A} = \frac{v_g}{\Phi A}$$

und die Zusatzbeschleunigung

$$2 v_g \omega = 2 \frac{v_g^2}{\Phi A}.$$

Dieselbe ist also gleich der doppelten Normalbeschleunigung AA_n des auf g bewegten Punktes A oder des mit A coincidirenden um Φ in Drehung versetzten Punktes. Nach dem Coriolis'schen Satze machen wir die Strecke $A^g_j A_a \# AA^h_j$, ferner die Strecke $A_a A^a_j$, welche hier in der Geraden ΦA liegt und dem Sinne der Drehung von A^g_v gemäss nach A gerichtet ist, gleich $2 . AA_n$, und folglich erhalten wir für die resultirende Beschleunigung AA^a_j oder j_a des Punktes A im Bezug auf das feste System Σ die geometrische Summe

$$\overline{j_a} = \overline{j_g} + \overline{j_h} + \overline{2 v_g \omega} = \overline{AA^g_j} + \overline{A^g_j A^h_j} + \overline{A_a A} = 0.$$

Hiernach ist in diesem Falle die resultirende Beschleunigung j_a, sowie die resultirende Geschwindigkeit v_a des Punktes A im Bezug auf das feste System Σ gleich Null. Gemäss unserer Auffassung der Bewegung folgt hieraus, dass die Bewegung des Punktes A auf der Curve g durch jene hinzugefügte Drehung während zweier gleicher Zeitelemente getilgt ist und der Punkt A sich also im Bezug auf das feste System Σ in Ruhe befindet. Denn, wenn nur die resultirende Geschwindigkeit v_a gleich Null ist und noch eine resultirende Beschleunigung j_a vorhanden ist, so befindet sich der Punkt A im ersten Zeitelemente in Ruhe, aber im zweiten Zeitelemente beginnt er eine Bewegung infolge der wirkenden Beschleunigung j_a.

In anderer Weise wird die Bewegung des Punktes A auch getilgt, wenn wir dem System S mit der Curve g im festen System Σ eine Parallelbewegung ertheilen, so dass die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Punkte desselben resp. der Geschwindigkeit und der Beschleunigung des Punktes A auf der Curve g entgegengesetzt gleich sind.

298. **Zusammensetzung einer bestimmten Bewegung eines Punktes auf einer Curve und einer gleichförmigen Drehung derselben.** In Fig. 752 bewegt sich ein Punkt A im Sinne AA^g_v auf einer zu einem ebenen System S gehörenden Curve g mit der Beschleunigung $AA^g_j = j_g$, und gleichzeitig dreht sich das System S mit der Curve g gleichförmig um den festen Punkt Φ in einem festen System Σ. Wir nehmen an, es sei $AA^h_v = v_h$ die auf ΦA senkrechte Geschwindigkeit des mit A momentan coincidirenden Punktes

der Curve g oder des Systems S im Bezug auf das feste System Σ, die wir auch die Führungsgeschwindigkeit genannt haben; dann bestimmt die auf ΦA_v^h errichtete Senkrechte $A_v^h \Xi$ in der Geraden ΦA die Strecke ΞA, welche die nach Φ gerichtete Beschleunigung $\dot{j}_h$ dieses gleichförmig um Φ rotirenden Systempunktes, also die Führungsbeschleunigung darstellt. Denn gemäss dieser Construction ist

$$\Xi A = \dot{j}_h = \frac{\overline{AA_v^h}^2}{\Phi A}.$$

Bezeichnen wir mit F den zu A gehörenden Krümmungsmittelpunkt der Curve g und mit A_n^g den Fusspunkt der von A_j^g auf FA gefällten Senkrechten, dann erhalten wir in bekannter Weise die auf FA senkrechte Geschwindigkeit $AA_v^g = v_g$ des Punktes A auf g, indem wir über FA als Durchmesser einen Halbkreis beschreiben, der $A_n^g A_j^g$ in U trifft, und $AA_v^g = AU$ machen. Die Diagonale AA_v^α des aus AA_v^h, AA_v^g gebildeten Parallelogramms repräsentirt die Geschwindigkeit v_α, mit welcher sich der Punkt A auf der resultirenden Bahncurve α im festen System bewegt.

Behufs der Construction der Zusatzbeschleunigung machen wir auf ΦA die Strecke $AD = AA_v^g$ und ziehen zu ΦA_v^h die Parallele $D\Delta$ bis an AA_v^h; so folgt, weil die constante Drehgeschwindigkeit ω des Systems S durch

$$\omega = \frac{AA_v^h}{\Phi A} = \frac{A\Delta}{DA} = \frac{A\Delta}{v_g}$$

bestimmt wird, dass die Zusatzbeschleunigung

$$2 v_g \omega = 2 \,.\, A\Delta$$

ist. Wenn wir nun nach dem Coriolis'schen Satze $A_j^g A_a \# \Xi A$ machen, und ferner $A_a A_j^\alpha = 2 . A\Delta$ gleichgerichtet mit der um A im Sinne ω gedachten Drehung von AA_v^g senkrecht auf AA_v^g ziehen, so repräsentirt AA_j^α die Beschleunigung von A auf der resultirenden Bahncurve α im Bezug auf das feste System. Vermittelst der Geschwindigkeit AA_v^α und der Beschleunigung AA_j^α kann man auch leicht in bekannter Weise den Krümmungsmittelpunkt A dieser Bahncurve α bestimmen. Wir fällen von A_j^α auf die Normale $\mathsf{A}A$ der Bahncurve α die Senkrechte $A_j^\alpha A_n^\alpha$, machen auf $\mathsf{A}A$ die Strecke $A\Pi = A_n^\alpha A$ und errichten in A_v^α auf $A_v^\alpha \Pi$ die Senkrechte $A_v^\alpha \mathsf{A}$, welche $\mathsf{A}A$ im Krümmungsmittelpunkte A trifft.

In Fig. **753** ist die Construction der Beschleunigung AA_j^α für den besonderen Fall ausgeführt, wenn der Punkt A sich auf einem Kreise g mit der constanten Geschwindigkeit AA_v^g bewegt, die gleich dem Radius FA dieses Kreises ist, und dieser Kreis gleichförmig um einen festen Punkt Φ rotirt. Der Radius AF repräsentirt hier die Beschleunigung AA^g_j; und demnach ergiebt sich, indem wir auf den verlängerten Radius die Strecke $A^g_j A_a = 2 . A\Delta$ und $A_a A^\alpha_j \# \Xi A$ ziehen, die Beschleunigung AA^α_j.

Wenn, wie in Fig. **754**, der Punkt A sich auf einer gleichförmig um den festen Punkt Φ rotirenden Geraden g bewegt, liegt die Geschwindigkeit AA^g_v und die Beschleunigung AA^g_j in dieser Geraden. Die Beschleunigung AA^α_j wird in der angegebenen Weise bestimmt, indem wir $A^g_j A_a \# \Xi A$ machen und $A_a A^\alpha_j = 2 . A\Delta$ senkrecht auf g im Drehungssinne von A^g_v ziehen. Ebenso ist in Fig. **755**, wenn insbesondere der feste Drehpunkt Φ in der Geraden g liegt, die Beschleunigung AA^α_j construirt.

299. **Die trochoidische Bewegung eines Punktes als Erzeugniss zweier gleichförmiger Drehungen.** Wenn in Fig. **756** ein Punkt A sich auf einem Kreise g gleichförmig bewegt und dieser Kreis in einem festen ebenen System Σ gleichförmig um den festen Punkt Φ rotirt, so ist die resultirende Bahncurve α dieses Punktes A nach Art. 57 und 58 eine Trochoide. Nehmen wir an, dass während einer Umdrehung des Kreises g um Φ der Punkt A den Kreis g, dessen Mittelpunkt F ist, n-mal in gleichem oder entgegensetztem Sinne durchläuft, wobei n eine beliebige Zahl mit resp. positiven oder negativen Vorzeichen sein kann, und dass die Drehgeschwindigkeit ω, mit welcher der Kreis g um Φ im festen System rotirt, gleich der Einheit sei; dann ist die auf ΦA senkrechte Geschwindigkeit AA^h_v für den mit A coincidirenden Punkt des Kreises g gleich $A\Phi$ und die Geschwindigkeit AA^g_v des Punktes A auf g gleich $n . AF$. Die Diagonale AA^α_v des aus AA^h_v, AA^g_v gebildeten Parallelogramms stellt die Geschwindigkeit dar, welche der Punkt A auf der Trochoide α besitzt. Construiren wir das Parallelogramm $\Phi FAF'$, dessen Seiten ΦF, $\Phi F'$ von der auf AA^α_v senkrechten Normalen $A\mathfrak{P}$ der Trochoide α in den Punkten $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ getroffen werden, und beschreiben wir um Φ, F die sich in $\mathfrak{P}$ berührenden Kreise π, p, ferner um Φ, F' die sich in $\mathfrak{P}'$ berührenden Kreise π', p'; dann sind dies die beiden Rollkreispaare für die durch zweifache Rollung entstehende Trochoide α. Denn der mit dem auf π rollenden Kreise p verbundene Punkt A beschreibt die Trochoide α, und ebenso erzeugt der auf π' rollende Kreis p' durch den mit ihm verbundenen Punkt A dieselbe Trochoide α. Diese Trochoide ist für $n = -2$ eine Ellipse, für $n = 1$ eine Pascal-sche Curve.

Die Dreiecke $A\Phi\mathfrak{P}'$, $AA_v^hA_v^\alpha$ sind congruent, weil $A\Phi = AA_v^h$ ist, und die entsprechenden Seiten senkrecht auf einander stehen; folglich repräsentirt $A\mathfrak{P}'$ die lothrechte Geschwindigkeit des auf der Trochoide α bewegten Punktes A, und der mit dem Radius $\Phi\mathfrak{P}' = AA_v^g$ um Φ beschriebene Polbahnkreis π' ist der geometrische Ort des mit dem Pol $\mathfrak{P}'$ coincidirenden Endpunktes dieser lothrechten Geschwindigkeit. Die constante Beschleunigung AA_j^g, mit welcher sich der Punkt A auf dem Kreise g bewegt, liegt in AF und ergiebt sich, indem wir auf FA die Strecke $A\Psi = FA$ machen und auf ΨA_v^g die Senkrechte $A_v^gA_j^g$ bis an FA ziehen; denn nach dieser Construction ist

$$AA_j^g = \frac{\overline{AA_v^g}^2}{FA}.$$

Um nun die Beschleunigung AA_j^α des auf α bewegten Punktes A zu erhalten, machen wir, weil die Drehgeschwindigkeit $\omega = 1$ genommen wurde und demnach die Beschleunigung AA_j^h mit $A\Phi$ identisch ist, in der auf AA_v^g senkrechten Geraden $\Phi\mathfrak{P}'$ gleichgerichtet mit der um A im Sinne ω gedachten Drehung von AA_v^g die Strecke $\Phi A_a = 2 \,.\, AA_v^g = 2 \,.\, \Phi\mathfrak{P}'$, und ferner $A_aA_j^\alpha = AA_j^g$. Hiernach ist, da diese beiden Strecken constant sind, der geometrische Ort des Endpunktes A_j^α der Beschleunigung AA_j^α ein um Φ mit dem Radius ΦA_j^α beschriebener Kreis.

Durch das aus starren Seiten gebildete Gelenkparallelogramm $\Phi FAF'$, dessen Eckpunkt A die Trochoide α beschreibt, ist die Bewegung eines affin-veränderlichen ebenen Systems bestimmt; und alle Punkte desselben beschreiben nach Art. 69 Trochoiden, welche für die auf den Systemgeraden ΦF, $\Phi F'$ liegenden Punkte in concentrische Kreise übergehen. Ziehen wir $\Phi\mathfrak{H} \# A\mathfrak{P}'$, $\Phi\mathfrak{J} \# AA_j^\alpha$, dann sind auch $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{J}$ Punkte dieses affin-veränderlichen Systems; folglich ist die vom Punkte $\mathfrak{H}$ beschriebene Trochoide $\mathfrak{h}$ der um einen rechten Winkel gedrehte auf Φ als Tragpunkt bezogene Hodograph erster Ordnung und die vom Punkte $\mathfrak{J}$ erzeugte Trochoide $\mathfrak{i}$ der auf Φ als Tragpunkt bezogene Hodograph zweiter Ordnung für die Bewegung des Punktes A auf der Trochoide α.

Wird die Drehgeschwindigkeit ω nicht gleich der Einheit genommen, dann ist für die Bewegung von A auf α die entsprechende lothrechte Geschwindigkeit gleich $\omega \,.\, \Phi\mathfrak{H}$ und die zugehörige Beschleunigung gleich $\omega^2 \,.\, \Phi\mathfrak{J}$. Demnach sind für diesen allgemeinen Fall, weil die Richtungen unverändert bleiben, die betreffenden Hodographen beziehlich jenen Hodographen $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$ ähnlich;

und da diese Hodographen in gleicher Weise wie die Trochoide α durch Punkte jenes affin-veränderlichen Systems erzeugt werden, so erhalten wir den Satz:

Bei der Erzeugung einer Trochoide durch zwei gleichförmige Drehungen sind für die Bewegung des erzeugenden Punktes die auf den Mittelpunkt dieser Trochoide als Tragpunkt bezogenen Hodographen aller Ordnungen solche Trochoiden, die durch Punkte eines entsprechenden affin-veränderlichen ebenen Systems beschrieben werden.

Denken wir uns vom Punkte A aus auf $A\mathfrak{P}'$ die entsprechende lothrechte Geschwindigkeit gleich $\omega . A\mathfrak{P}'$, und auf AA_j^α die entsprechende Beschleunigung $\omega^2 . AA_j^\alpha$ des auf α bewegten Punktes A abgetragen, so sind die betreffenden Endpunkte, welche beziehlich die Strecken $A\mathfrak{P}'$, AA_j^α in constanten Verhältnissen theilen, Punkte jenes affin-veränderlichen Systems. Hieraus folgt, dass für diesen allgemeinen Fall bei der betrachteten Bewegung des Punktes A auf der Trochoide α der geometrische Ort des Endpunktes der lothrechten Geschwindigkeit, sowie der geometrische Ort des Endpunktes der Beschleunigung Trochoiden sind, die durch Punkte jenes affin-veränderlichen Systems erzeugt werden.

300. **Die Bewegung eines Punktes auf einer allgemeinen Kreisevolvente als Erzeugniss einer gleichförmigen Bewegung auf einer Geraden und einer gleichförmigen Drehung derselben.** Durchläuft in Fig. 757 ein Punkt A mit constanter Geschwindigkeit und demnach mit der Beschleunigung Null eine Strecke A_0A_z auf der um Φ im festen System gleichförmig rotirenden Geraden g während einer Umdrehung derselben, dann ist die Bahncurve α des Punktes A eine allgemeine Kreisevolvente, deren Polbahn der um Φ mit dem Radius $\Phi\mathfrak{P} = A_0A_z : 2 . 3{,}141 ..$ beschriebene Kreis π ist. Denn rollt auf diesem Kreise die zu g parallele Tangente $\mathfrak{P}p$, so beschreibt der an derselben befestigte Punkt A die Bahncurve α. Wenn wir die Drehgeschwindigkeit ω der um Φ rotirenden Geraden g gleich der Einheit annehmen, so ist die Geschwindigkeit AA_v^g des Punktes A auf der Geraden g gleich jenem Radius $\Phi\mathfrak{P}$ und die Geschwindigkeit AA_v^h, welche der mit A coincidirende Punkt der Geraden g im festem System besitzt, gleich $A\Phi$; und dem gemäss wird die entsprechende Beschleunigung AA_j^h desselben durch $A\Phi$ dargestellt. Machen wir senkrecht auf g gleichgerichtet mit der um A im Sinne ω gedachten Drehung von AA_v^g die Strecke

$\Phi A_j^\alpha = 2 . A A_v^g$, dann repräsentirt $A A_j^\alpha$ die Beschleunigung des Punktes A auf der allgemeinen Kreisevolvente α, und der geometrische Ort des Endpunktes A_j^α dieser Beschleunigung ist ein um Φ mit dem Radius $2 . A A_v^g = 2 . \Phi \mathfrak{P}$ beschriebener Kreis. Die zugehörige Geschwindigkeit $A A_v^\alpha$ ist die Resultante aus den beiden Geschwindigkeiten $A A_v^g$, $A A_v^h$. Wegen der congruenten Dreiecke $A \Phi \mathfrak{P}$, $A A_v^h A_v^\alpha$ repräsentirt $A \mathfrak{P}$ die lothrechte Geschwindigkeit des auf α bewegten Punktes A, und folglich ist der Polbahnkreis π der geometrische Ort des mit dem Pol $\mathfrak{P}$ coincidirenden Endpunktes dieser lothrechten Geschwindigkeit. Wir ziehen $\Phi \mathfrak{H} \# A \mathfrak{P}$, $\Phi \mathfrak{J} \# A A_j^\alpha$, ferner an den Kreis π die zweite zu g parallele Tangente q und denken uns mit derselben die Punkte $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{J}$ fest verbunden. Lassen wir diese Tangente q auf dem Kreise π rollen, dann beschreibt der Punkt $\mathfrak{H}$ den um einen rechten Winkel gedrehten Hodographen $\mathfrak{h}$ erster Ordnung und der Punkt $\mathfrak{J}$ den Hodographen $\mathfrak{i}$ zweiter Ordnung, und diese auf Φ als Tragpunkt bezogenen Hodographen sind demnach allgemeine Kreisevolventen.

Wird die constante Drehgeschwindigkeit ω der um Φ rotirenden Geraden g nicht gleich der Einheit genommen, dann ist für die Bewegung des Punktes A auf der allgemeinen Kreisevolvente α die Geschwindigkeit $\omega . A A_v^\alpha$, die Beschleunigung $\omega^2 . A A_j^\alpha$; da die Richtungen sich nicht ändern, so sind die entsprechenden Hodographen beziehlich jenen Hodographen $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{i}$ ähnlich, und die betreffenden Punkte bewegen sich auf dem Hodographen in analoger Weise wie der Punkt A auf der allgemeinen Kreisevolvente α. Demnach erhalten wir den Satz:

Bei der Erzeugung einer allgemeinen Kreisevolvente durch eine gleichförmige geradlinige Bewegung und eine gleichförmige Drehung sind für die Bewegung des erzeugenden Punktes die Hodographen aller Ordnungen allgemeine Kreisevolventen.

Wenn insbesondere die Gerade g mit der rollenden Tangente p zusammenfällt, dann bewegt sich der Punkt A auf einer gespitzten Kreisevolvente. In Fig. **758** geht die Gerade g durch den festen Drehpunkt Φ, und in diesem besonderen Falle ist die Bahncurve α des Punktes A nach S. 156 eine Archimedische Spirale.

301. **Die cycloidische Bewegung eines Punktes als Erzeugniss einer gleichförmigen Drehung und einer gleichförmigen geradlinigen Parallelbewegung.** Bewegt sich in Fig. **759** ein Punkt A gleichförmig auf einem Kreise g, der eine gleichförmige geradlinige

Parallelbewegung in einem festen System vollzieht, so ist die resultirende Bahncurve α dieses Punktes A nach Art. 64 eine allgemeine Cycloide. Nehmen wir an, dass während eines Umlaufes des Punktes A auf dem Kreise g der Mittelpunkt F desselben die Strecke F_0F_z zurückgelegt hat, dann ist der um F mit dem Radius $F\mathfrak{P} = F_0F_z : 2 . 3{,}141 ..$ beschriebene Kreis p der Rollkreis; denn indem dieser Kreis p auf der zu F_0F_z parallelen festen Tangente π rollt, erzeugt der mit ihm verbundene Punkt A die allgemeine Cycloide α. Wenn wir zunächst der Einfachheit wegen die Geschwindigkeit AA^g_v, welche der Punkt A auf dem Kreise g besitzt, gleich dem Radius AF desselben annehmen, so ist AF die zugehörige Beschleunigung AA^g_j und die Geschwindigkeit AA^h_v der Parallelbewegung gleich dem Radius $F\mathfrak{P}$ des Kreises p.

Die aus AA^g_v, AA^h_v resultirende Geschwindigkeit AA^α_v des Punktes A auf der allgemeinen Cycloide α ist gleich der Normale $A\mathfrak{P}$ derselben, weil die Dreiecke $AA^g_vA^\alpha_v$, $AF\mathfrak{P}$ congruent sind. Der Endpunkt der entsprechenden lothrechten Geschwindigkeit des auf α bewegten Punktes A coincidirt also mit dem jeweiligen Pol $\mathfrak{P}$, und der geometrische Ort dieses Endpunktes ist demnach die geradlinige Polbahn π. Verlegen wir das Dreieck $AA^\alpha_vA^h_v$ in paralleler Lage nach $\mathfrak{O}\mathfrak{H}\mathfrak{C}$ und beschreiben wir um $\mathfrak{C}$ mit dem Radius $\mathfrak{C}\mathfrak{H}$ den Kreis $\mathfrak{h}$, so ist dieser Kreis der auf den Tragpunkt $\mathfrak{O}$ bezogene Hodograph erster Ordnung für die Bewegung des Punktes A auf α; und dieser Hodograph ist dem Kreise g congruent.

Wegen der gleichförmigen geradlinigen Parallelbewegung ist die Führungsbeschleunigung und die Zusatzbeschleunigung gleich Null; demnach ist die constante Beschleunigung AA^g_j, welche der Punkt A auf dem Kreise g besitzt, auch zugleich die Beschleunigung AA^α_j, mit welcher derselbe sich auf der allgemeinen Cycloide α bewegt. Der geometrische Ort des mit F coincidirenden Endpunktes A^α_j dieser Beschleunigung ist die zu π parallele Gerade F_0F_z, auf der sich der Kreismittelpunkt F bewegt, und der Hodograph zweiter Ordnung für den auf α bewegten Punkt A ist ein mit dem Radius von der Grösse FA beschriebener Kreis, dessen Mittelpunkt der zugehörige Tragpunkt ist.

Wird die Geschwindigkeit des Punktes A auf dem Kreise g nicht speciell gleich dem Radius desselben genommen, so ist diese Geschwindigkeit, wenn ω die constante Drehgeschwindigkeit des auf g bewegten Punktes A bezeichnet, gleich $\omega . A\mathfrak{P}$ und die zugehörige constante Beschleunigung gleich $\omega^2 . AF$. Der Endpunkt der zugehörigen lothrechten Geschwindigkeit theilt also die Strecke $A\mathfrak{P}$ im constanten Verhältnisse und befindet sich demnach auf einem mit der Parallelbewegung fortschreitenden Kreise, der im Bezug auf $\mathfrak{P}$ als Aehnlichkeitspunkt zum Kreise g ähnlich liegt. Dem zufolge ist in diesem allgemeinen Falle der geometrische Ort des Endpunktes dieser lothrechten Geschwindigkeit eine allgemeine Cycloide und der entsprechende Hodograph erster Ordnung ist ein mit dem Radius $\omega \,.\, AF$ beschriebener Kreis, dessen Mittelpunkt vom zugehörigen Tragpunkte um die Geschwindigkeit $\omega \,.\, F\mathfrak{P}$ der Parallelbewegung entfernt ist. Der Endpunkt der Beschleunigung des Punktes A auf α liegt auf AF in constanter Entfernung von A; demnach ist der geometrische Ort dieses Endpunktes eine allgemeine Cycloide und der Hodograph zweiter Ordnung ein mit dem Radius $\omega^2 \,.\, AF$ beschriebener Kreis, dessen Mittelpunkt der Tragpunkt ist; und ebenso sind alle Hodographen höherer Ordnung Kreise mit zugehörigem concentrischem Tragpunkte. Ist insbesondere die Strecke $F_0 F_z$ gleich dem Umfange des parallelbewegten Kreises g, dann beschreibt der Punkt A eine gespitzte Cycloide.

302. **Die Bewegung eines Punktes auf einer sternförmigen Trochoide als Erzeugniss einer harmonischen Bewegung auf einem gleichförmig um seinen Mittelpunkt rotirenden Kreisdurchmesser.** Wir nehmen an, es bewege sich in Fig. **760** ein Punkt A harmonisch auf dem gleichförmig um seinen Mittelpunkt Φ rotirenden Durchmesser GG' des Kreises ε, so dass dieser Punkt während eines n^{ten} Theiles der ganzen Umdrehung den Durchmesser hin- und hergehend zurücklegt, also eine ganze Schwingung vollendet; und wir denken uns auf dem Kreise ε, der mit dem Durchmesser GG' rotirt, zugleich einen Punkt E gleichförmig bewegt, dessen auf diesen Durchmesser bezogene senkrechte Projection die harmonische Bewegung vollzieht. Hiernach können wir die Bahncurve α des von der Anfangslage G_0 aus gehenden Punktes A, bei dessen Bewegung beispielsweise die Zahl $n = 4$ ist, in folgender Weise construiren. Wir machen für eine beliebige Lage GG' des rotirenden Durchmessers auf dem Kreise ε den Bogen $\widehat{GE} = n \,.\, \widehat{G_0 G}$ und fällen von E auf ΦG die Senkrechte EA, so ist A ein Punkt der resultirenden Bahncurve α; denn es ist GA der Weg, welchen der harmonisch bewegte Punkt A auf dem Durchmesser GG' während der Drehung von ΦG_0 nach ΦG zurückgelegt hat. Beschreiben wir über ΦG_0 als Durchmesser einen Kreis $\varkappa$, machen wir ferner auf ε den Bogen $\widehat{G_0 K} = n \,.\, \widehat{G_0 G}$

und ziehen wir den Radius ΦK, der $\varkappa$ in k trifft, so ist bekanntlich auch die Strecke Kk gleich jener Wegstrecke GA, und wir erhalten die Lage von A, indem wir auf ΦG die Strecke $\Phi A = \Phi k$ machen.

Bezeichnen wir den Radius des Kreises ε mit a, die Strecke ΦA mit R und den Winkel $G_0 \Phi G$ mit ψ, so ergiebt sich für die Bahncurve α die Polargleichung

$$R = a \cos n \psi,$$

die nach Art. 62 eine sternförmige Trochoide liefert. Hiernach erhalten wir den Satz:

B e w e g t s i c h e i n P u n k t h a r m o n i s c h a u f e i n e m g l e i c h f ö r m i g u m s e i n e n M i t t e l p u n k t r o t i r e n d e n K r e i s d u r c h m e s s e r, s o b e s c h r e i b t d e r b e w e g t e P u n k t e i n e s t e r n f ö r m i g e T r o c h o i d e.

In dem besonderen Falle, wenn $n = 1$ ist, geht diese Curve in den Kreis $\varkappa$ über.

Um die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zu bestimmen, welche der Punkt A auf der sternförmigen Trochoide α besitzt, nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass jener Punkt E auf dem mit GG' rotirenden Kreise ε sich mit der Geschwindigkeit gleich dem Radius dieses Kreises bewegt; dann ist die Geschwindigkeit AA^g_v des Punktes A auf GG' gleich jener auf ΦG gefällten Senkrechten AE, und die Geschwindigkeit AA^h_v des mit A coincidirenden Punktes des rotirenden Durchmessers GG' gleich dem n^{ten} Theil von ΦA. Hiernach ist die Resultirende aus diesen beiden Geschwindigkeiten AA^g_v, AA^h_v die Geschwindigkeit AA^α_v des Punktes A auf der sternförmigen Trochoide α.

Die zugehörige Beschleunigung des harmonisch auf dem rotirenden Durchmesser bewegten Punktes A ist gleich $A\Phi$. Die auf ΦA^h_v senkrechte Gerade $A^h_v \Xi$ bestimmt auf ΦA die Strecke ΞA, welche die Beschleunigung des mit A zusammenliegenden Punktes des rotirenden Durchmessers darstellt, und auf diesem nach ΦA_α gelegt ist. Ziehen wir dann zu ΦA^h_v die Parallele $A^g_v \Delta$ bis an AA^h_v und machen wir senkrecht auf ΦA die Strecke $A_\alpha A_j = 2 . \Delta A$ gleichgerichtet mit der um A im Drehungssinne gedachten Drehung von AA^g_v, so ist AA^α_j die Beschleunigung des Punktes A auf der sternförmigen Trochoide α.

Bewegt sich ein Punkt A innerhalb einer bestimmten Strecke von der Grösse $2a$ harmonisch hin- und herschwingend auf einer Geraden, die gleichförmig um einen festen Punkt Φ rotirt, und bezeichnen wir mit b den Abstand der Mitte dieser Strecke von Φ, so ist, wenn A einen Hin- und Hergang während eines n^{ten} Theiles der Umdrehung der Geraden vollendet, die Polargleichung der Bahncurve von A in Hinsicht auf die Gleichung für den obigen besonderen Fall

$$R = b + a \cos n \psi.$$

Die Geschwindigkeit und Beschleunigung, mit denen sich A auf seiner Bahncurve bewegt, kann in diesem allgemeinen Falle in gleicher Weise, wie oben gezeigt wurde, bestimmt werden.

303. **Zusammensetzung einer geradlinigen harmonischen Bewegung eines Punktes und einer gleichmässig beschleunigten geradlinigen Parallelbewegung.** Wir nehmen in Fig. **761** an, es bewege sich ein Punkt A harmonisch auf einer Strecke GG', welche in der auf ihr senkrechten Richtung $M_0 M_z$ eine gleichmässig beschleunigte geradlinige Parallelbewegung vollzieht; und es sei diese Strecke von $G_0 G'_0$ aus gehend während einer ganzen in G_0 beginnenden Schwingung des harmonisch bewegten Punktes A bis $G_1 G'_1$, die Streckenmitte M von M_0 bis M_1 gelangt. Um die resultirende Bahncurve α des Punktes A zu construiren, müssen wir die gleichzeitigen Lagen des Punktes A und der Strecke GG' bestimmen. Ueber einer beliebigen Lage $G_z G'_z$ der parallel bewegten Strecke GG' beschreiben wir als Durchmesser einen Kreis ε und denken uns auf diesem einen Punkt E gleichförmig bewegt, dessen auf $G_z G'_z$ senkrechte Projection die harmonische Bewegung des Punktes A bildet, und theilen diesen Kreis in eine Anzahl gleicher Theile. Ferner theilen wir eine auf $G_0 G'_0$ beliebig angenommene Strecke $M_0 T_1$ in dieselbe Anzahl gleicher Theile, und setzen diese Theilung über T_1 hinaus fort. Auf $M_1 T_1$ ziehen wir, wie S. 753 (Fig. **737**) dargelegt wurde, die Senkrechte $T_1 \Theta$ bis an $M_0 M_1$, und ferner errichten wir auf den von Θ nach den Theilpunkten gehenden Geraden in diesen Theilpunkten Senkrechte, welche auf $M_0 M_z$ die entsprechenden Lagen von M bestimmen. Betrachten wir nun $M_0 M_z$ als Abscissenaxe, so bilden diese Lagen die Abscissenpunkte, zu denen die entsprechenden Abstände des harmonisch bewegten Punktes A von $M_0 M_z$ die senkrechten Ordinaten der Bahncurve α sind. Zum Punkte M gehört z. B. die Ordinate $MA = M_z A_1$, welche der Lage E_1 des Punktes E entspricht, der nach zweimaligem Umlauf auf dem Kreise ε in Fortsetzung den Bogen $G_z E_1$ zurückgelegt hat.

Um die Beschleunigung AA_j^α und die Geschwindigkeit AA_v^α zu bestimmen, mit denen sich der Punkt A auf der Bahncurve α bewegt, nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass der Punkt E

sich auf dem Kreise ε mit der Geschwindigkeit gleich dem Radius $M_\varepsilon G_\varepsilon$ desselben bewegt; demnach ist die Beschleunigung j_g des Punktes A auf GG' gleich dem Abstande AM und die Geschwindigkeit v_g gleich der Strecke A_1E_1. Bezeichnen wir mit t_u die Zeit einer ganzen harmonischen Schwingung des Punktes A resp. eines Umlaufes des Punktes E, dann ergiebt sich nach S. 767 die Beschleunigung

$$j_g = \frac{4\pi^2}{t_u^2} AM,$$

und es ist also bei jener besonderen Annahme hier $t_u = 2\pi$. Ferner folgt nach S. 753, wenn wir die constante Beschleunigung der Parallelbewegung mit j_h und die Geschwindigkeit derselben mit v_h bezeichnen

$$j_h = \frac{2 \,.\, M_0M_1}{t_u^2} = \frac{M_0M_1}{2\pi^2},$$

$$v_h = \sqrt{2j_h \,.\, M_0M} = \frac{1}{\pi}\sqrt{M_0M_1 \,.\, M_0M}.$$

Aus der Beschleunigung $j_h = AA_j^h$ die im betrachteten Falle verhältnissmässig klein ist, und der Beschleunigung $j_g = AA_j^g = AM$, ergiebt sich die resultirende Beschleunigung AA_j^a des Punktes A auf seiner Bahncurve α. Ebenso erhalten wir aus der Geschwindigkeit $v_g = A_1E_1 = AA_v^g$ und der Geschwindigkeit $v_h = AA_v^h$, die nach obiger Formel leicht construirt werden kann, die resultirende Geschwindigkeit AA_v^α des Punktes A auf α.

Auf der Zusammensetzung dieser beiden betrachteten Bewegungen beruht der bekannte Fallapparat, welcher von Laborde[1]) zuerst angegeben, von Lippich[2]) und Anderen[3]) in verschiedener Weise ausgeführt wurde.

304. **Die sinoidische Wellenbewegung eines Punktes als Erzeugniss einer geradlinigen harmonischen Bewegung und einer gleichförmigen geradlinigen Parallelbewegung.** In Fig. 762 bewegt sich ein Punkt A harmonisch auf einer Strecke GG', die eine gleichförmige geradlinige Parallelbewegung vollzieht, so dass der Mittelpunkt M dieser von G_0G_0' aus gehenden Strecke während einer

---

[1]) *Cosmos, Revue encyclopédique hebdomadaire des progrès des sciences.* 1860. T. 17. p. 156.

[2]) *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien.* 1866. B. LII. Abth. II. S. 549.

[3]) Müller-Pouillet's *Lehrbuch der Physik und Meteorologie.* 9. Aufl. 1886. B. I. S. 117.

ganzen harmonischen Schwingung des Punktes A die Strecke $M_0 M_z$ durchläuft, die mit GG' einen bestimmten Winkel bildet. Um die resultirende Bahncurve α des Punktes A zu construiren und die Geschwindigkeit sowie die Beschleunigung dieses Punktes auf derselben zu bestimmen, nehmen wir an, es bewege sich auf dem über $G_0 G_0'$ als Durchmesser beschriebenen Kreise ε ein Punkt E_2 gleichförmig mit der Geschwindigkeit gleich dem Radius dieses Kreises, und es sei die Bewegung der auf $G_0 G_0'$ senkrechten Projection A_2 von E_2 übereinstimmend mit der harmonischen Bewegung des Punktes A. Wir theilen den Kreis ε und die Strecke $M_0 M_z$ in dieselbe Anzahl gleicher Theile, fällen von einem Kreistheilpunkte E_2 auf $G_0 G_0'$ die Senkrechte $E_2 A_2$ und construiren auf der zum entsprechenden Theilpunkte M der Strecke $M_0 M_z$ gehörenden Lage GG' der parallel bewegten Strecke den Punkt A der Bahncurve α, so dass $MA = M_0 A_2$ ist. Diese Bahncurve α ist, wenn insbesondere, wie in Fig. **763**, die Gerade GG' auf $M_0 M_z$ senkrecht steht, nach Art. 144 und 145 eine Sinoide. In dem allgemeinen Falle in Fig. **762** können wir die Bahncurve α als die affine Curve dieser Sinoide betrachten, wobei die schiefwinkeligen Ordinaten den rechtwinkeligen entsprechen; und wir nennen daher diese allgemeinere Bahncurve eine schiefe Sinoide. Der Punkt A vollzieht demnach eine sinoidische Wellenbewegung, die sich in fortschreitenden congruenten Wellenzügen wiederholt.

Da der Punkt E_2 sich auf dem Kreise ε mit der Geschwindigkeit gleich dem Radius r desselben bewegt, so ergiebt sich die Geschwindigkeit AA_v^h der Parallelbewegung aus der Proportion

$$AA_v^h : r = M_0 M_z : 2r\pi,$$

$$AA_v^h = \frac{M_0 M_z}{2\pi}.$$

Ferner ist die Geschwindigkeit AA_v^g des Punktes A auf GG' gleich $A_2 E_2$, und wir erhalten demnach durch Zusammensetzung der Geschwindigkeiten AA_v^h, AA_v^g die resultirende Geschwindigkeit AA_v^α, mit welcher der Punkt A sich auf der Bahncurve α bewegt. Fällen wir von dem Kreistheilpunkte E_8, der dem Punkte E_2 um einen Viertelkreis vorausschreitet, auf $G_0 G_0'$ die Senkrechte $E_8 \mathfrak{H}$, und machen wir auf $M_0 M_z$ die Strecke $\mathfrak{O} M_0 = AA_v^h$; dann ist $\mathfrak{O}\mathfrak{H} \# AA_v^\alpha$, und die Strecke $G_0 G_0'$ bildet für $\mathfrak{O}$ als Tragpunkt den Hodographen erster Ordnung der Bewegung des Punktes A auf der schiefen Sinoide α. Da bei der gleichförmigen geradlinigen Parallelbewegung die Beschleunigung gleich Null ist, so ist die in der Geraden GG' liegende Beschleunigung AA_j^α des Punktes A auf α gleich der Strecke A_2M_0, und der Endpunkt A_j^α dieser Beschleunigung befindet sich stets in der Geraden M_0M_z. Dieselben Beziehungen gelten bei dem in Fig. **763** dargestellten speciellen Falle, der in der Physik für die Lehre von der Wellenbewegung die Grundlage bildet.

305. **Die interferirende Wellenbewegung eines Punktes als Erzeugniss zweier harmonischer Bewegungen in einer Geraden und einer gleichförmigen geradlinigen Parallelbewegung.** Bewegt sich in Fig. **764**, Taf. LI, ein Punkt A in einer Geraden g harmonisch auf der Strecke GG', deren Mitte M ist, und nehmen wir an, auch diese Strecke werde in der Geraden g harmonisch bewegt, so dass die Mitte M auf der Strecke $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ harmonisch schwingt und in der betrachteten Lage mit der Mitte Φ von $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ coincidirt; dann können wir die resultirende Bewegung des Punktes A in folgender Weise bestimmen. Der ersten harmonischen Bewegung entspricht eine gleichförmige Bewegung eines Punktes F auf dem über GG' als Durchmesser beschriebenen Kreise φ und der zweiten eine gleichförmige Bewegung eines Punktes F' auf dem über $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ als Durchmesser beschriebenen Kreise φ'. Wir nehmen nun an, dass während eines Umlaufes von F auf φ der Punkt F' eine Anzahl n Umläufe auf φ' vollendet, die in gleichem oder entgegengesetztem Sinne mit F erfolgen, je nachdem n positiv oder negativ ist. Ferner setzen wir voraus, dass in dem Momente, wenn der Punkt A auf g den Punkt Φ überschreitet, die Punkte F, F' sich beziehlich in den Lagen F_0, F_0' befinden, deren Verbindungsgerade F_0F_0' in Φ auf der Geraden g senkrecht steht. Hat der Punkt F auf dem Kreise φ den Bogen $\widehat{F_0F_I}$ durchlaufen, und bezeichnen wir mit K den Schnitt von ΦF_I und φ', dann ist der gleichzeitig vom Punkte F' auf φ' zurückgelegte Bogen $\widehat{F_0'F_I'} = n \,.\, \widehat{F_0'K}$; und hier haben wir beispielsweise $n = +\frac{1}{2}$ genommen. Wir construiren alsdann das durch die rotirenden Radien ΦF_I, $\Phi F_I'$ bestimmte Gelenkparallelogramm $\Phi F_I E_I F_I'$ und bezeichnen auf der Geraden g die senkrechten Projectionen von den Ecken E_I, F_I, F_I' desselben beziehlich mit A_I, B_I, B_I'. Demnach ist $\Phi A_I = \Phi B_I + \Phi B_I'$ der entsprechende Weg, den der Punkt A auf der Geraden g von Φ aus zurückgelegt hat. Denn durch die eine harmonische Bewegung allein wird der Punkt A von Φ nach B_I und durch die andere allein von Φ nach B_I' getrieben. Der Eckpunkt E_I des Gelenkparallelogramms, dessen Seiten ΦF_I, $\Phi F_I'$ sich gleichförmig um den festen Punkt Φ drehen, beschreibt nach Art. 57 und 58

eine Trochoide. Somit ist die aus den beiden harmonischen Bewegungen auf der Geraden g resultirende Bewegung des Punktes A identisch mit der Bewegung der auf g senkrechten Projection A_I von dem auf dieser Trochoide bewegten Punkte E_I.

Dieselbe resultirende Bewegung des Punktes A wird auch erhalten, wenn in Fig. 765 die Punkte F, F' entgegengesetzt rotirend resp. von den Punkten F_0, F'_0 aus gehen, welche zu beiden Seiten von Φ in jener auf g senkrechten Geraden liegen. Denn wird auf dem Kreise φ' der Bogen, der dem Winkel $F_0 \Phi F_I$ angehört, mit $\widehat{K_0 K}$ bezeichnet, ferner für $n = -\frac{1}{2}$ auf diesem Kreise der Bogen $F'_0 F'_I = n \,.\, \widehat{K_0 K}$ gemacht und der vierte Eckpunkt E_I des durch ΦF_I, $\Phi F'_I$ bestimmten Gelenkparallelogramms $\Phi F_I E_I F'_I$ senkrecht auf die Gerade g projicirt, so vollzieht auch in diesem Falle die Projection A_I die Bewegung des Punktes A, welche aus jenen beiden harmonischen Bewegungen resultirt. Der Eckpunkt E_I des Gelenkparallelogramms, dessen Seiten ΦF_I, $\Phi F'_I$ entgegengesetzt gleichförmig um Φ rotiren, erzeugt hier eine andere Trochoide als die, welche bei den gleichsinnigen Drehungen auftritt.

Wenn wir in Fig. 764 der Einfachheit wegen annehmen, dass die Geschwindigkeit des Punktes F_I auf dem Kreise φ gleich dem Radius $F_I \Phi$ desselben ist, dann repräsentirt $B_I F_I$ die Geschwindigkeit von B_I und die Strecke $B_I \Phi$ die Beschleunigung von B_I. Ferner ergiebt sich hiernach die Geschwindigkeit des Punktes B'_I gleich $n \,.\, B'_I F'_I$ und die zugehörige Beschleunigung gleich $n^2 \,.\, B'_I \Phi$. Dem zufolge bewegt sich der Punkt A_I auf der Geraden g mit der Geschwindigkeit $A_I A^g_v = B_I F_I + n \,.\, B'_I F'_I$ und mit der Beschleunigung $A_I A^g_j = B_I \Phi + n^2 \,.\, B'_I \Phi$.

Wenn wir nun in Fig. 766 der Geraden g mit den auf ihr bewegten Punkten B_I, B'_I, A_I eine gleichförmige Parallelbewegung ertheilen, so dass der Punkt Φ während zweier Umläufe des von F_0 aus gehenden Punktes F_I die auf g senkrechte Strecke $\Phi_0 \Phi_z$ durchschreitet, so entsprechen den beiden auf g harmonisch bewegten Punkten B_I, B'_I als resultirende Bahncurven resp. die Sinoiden β, β'; und dem auf g bewegten Punkte A_I entspricht die Bahncurve oder Schwingungscurve α, die durch Interferenz aus den beiden Sinoiden β, β' hervorgeht. Den gezeichneten Lagen F_I, F'_I entspricht auf der Strecke $\Phi_0 \Phi_z$ der Theilpunkt Φ_1 mit der Ordinaten $\Phi_1 A_1 = \Phi A_I$ der Schwingungscurve α; und diese Ordinate ist gleich der algebraischen Summe der zugehörigen Ordinaten $\Phi_1 B_1$, $\Phi_1 B'_1$ jener Sinoiden.

Die constante Geschwindigkeit $A_1 A_v^h$ der Parallelbewegung ergiebt sich, weil die Geschwindigkeit von F_l gleich dem Radius ΦF_l angenommen ist, aus der Proportion

$$A_1 A_v^h : \Phi F_1 = \Phi_0 \Phi_z : 2 \,.\, 2\pi \,.\, \Phi F_1,$$

$$A_1 A_v^h = \frac{\Phi_0 \Phi_z}{4\pi}.$$

Ferner ist die Geschwindigkeit $A_1 A_v^g$, welche der Punkt A_1 in senkrechter Richtung zu $\Phi_0 \Phi_z$ besitzt, gleich der aus den beiden harmonischen Bewegungen resultirenden Geschwindigkeit $A_l A_v^g$. Somit erhalten wir durch Zusammensetzung der Gechwindigkeiten $A_1 A_v^h$, $A_1 A_v^g$ die resultirende Geschwindigkeit $A_1 A_v^\alpha$, mit welcher sich der Punkt A_1 auf der Schwingungscurve α bewegt. Da die Parallelbewegung keine Beschleunigung besitzt, so ist die Beschleunigung $A_1 A_j^\alpha$ von A_1 auf α stets senkrecht auf $\Phi_0 \Phi_z$ gerichtet und gleich der algebraischen Summe aus den Beschleunigungen der harmonisch bewegten Punkte B_l, B_l'.

Da die Strecke $\Phi_0 \Phi_z$ zwei Wellenzüge der Sinoide β enthält und $n = \frac{1}{2}$ genommen wurde, so enthält diese Strecke einen Wellenzug von der Sinoide β', und hieraus resultirt demnach ein von den Punkten Φ_0, Φ_z begrenzter Wellenzug der Schwingungscurve α, die in Art. 225 (Fig. 560) auch durch den dort behandelten Interferenzmechanismus erzeugt wird. Der resultirende Wellenzug schneidet die Gerade Φ_0, Φ_z, wenn der Ausgangspunkt Φ_0 nicht gerechnet wird, in eben so vielen Punkten als diese Gerade mit der Trochoide ε gemeinsam hat; und die Anzahl seiner höchsten und tiefsten Punkte ist gleich der Anzahl der Tangenten, die parallel zu $\Phi_0 \Phi_z$ an die Trochoide ε gelegt werden können.

Die Trochoide ε wird nach Art. 57 auf zweierlei Weise durch Rollung erzeugt; und weil im betrachteten Falle die Drehgeschwindigkeiten von ΦF_l, $\Phi F_l'$ beziehlich gleich 1 und n sind, so ist der Pol $\mathfrak{P}$ auf ΦF_l durch das Verhältniss $F_l \mathfrak{P} : F_l \Phi = 1 : n$, ferner der Pol $\mathfrak{P}'$ auf $\Phi F_l'$ durch das Verhältniss $F_l' \mathfrak{P}' : F_l' \Phi = n : 1$ bestimmt. Die beziehlich um Φ, F_l' beschriebenen Kreise π', p', welche sich im Pol $\mathfrak{P}'$ berühren, sind in Fig. 766 gleich, weil $n = \frac{1}{2}$ ist; demnach ist die Trochoide ε, welche von dem am rollenden Kreise p' befestigten Punkte E_l erzeugt wird, eine Pascal'sche Curve. Beschreiben wir anderseits resp. um Φ, F_l die sich in $\mathfrak{P}$ berührenden Kreise π, p, dann fällt, weil $n = \frac{1}{2}$ ist, der feste Kreis π mit dem Kreise φ zusammen. Der grössere umschliessende Kreis p rollt auf π, und der mit p verbunden gedachte Punkt E_I erzeugt dieselbe Trochoide oder Pascal'sche Curve ε.

Die analogen Beziehungen ergeben sich, wenn wir in Fig. **766**[a] den Punkt A_I auf der Geraden g als die Projection des auf der Trochoide ε bewegten Eckpunktes E_I des Gelenkparallelogramms $\Phi F_I E_I F_I'$ betrachten, bei welchem die Seiten ΦF_I, $\Phi F_I'$ sich im entgegengesetzten Sinne drehen und $n = -\frac{1}{2}$ ist. Den Projectionen B_I, B_I' der Punkte F_I, F_I' entsprechen wieder in Fig. **766** die Sinoiden β, β' und dem Punkte A_I entspricht die resultirende Schwingungscurve α. Die Pole $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ werden auf den Geraden ΦF_I, $\Phi F_I'$ resp. durch die Verhältnisse $F_I\mathfrak{P} : F_I\Phi = 1 : n$ und $F_I'\mathfrak{P}' : F_I'\Phi = n : 1$ bestimmt. Die Trochoide ε wird in zweierlei Weise durch den Punkt E_I erzeugt: erstens durch die Rollung des Kreises p in dem Kreise π und zweitens durch die Rollung des Kreises p' in dem Kreise π'.

Befindet sich in Fig. **767**, wenn jener Punkt F' auf der Geraden $\Phi_0\Phi_z$ in F_0' liegt, bei gleichsinnigen Drehungen jener andere Punkt F in F_0, und bezeichnen wir den Winkel $F_0'\Phi F_0$ mit λ, dann ist die Trochoide ε hinsichtlich der in Fig. **766** gezeichneten congruenten Trochoide um den Winkel

$$\theta = -\frac{n}{1-n}\lambda$$

gedreht; und für $n = \frac{1}{2}$ ist $\theta = -\lambda$. Bei entgegengesetzter Drehung in Fig. **767**[a] und den Lagen F_0, F_0' ergiebt sich, wenn wir mit λ' den Winkel $F_0\Phi F_0'$ bezeichnen, für den Winkel θ', um welchen die Trochoide ε gegen die congruente Trochoide ε in Fig. **766**[a] gedreht ist

$$\theta' = \frac{n}{n+1}(180^0 - \lambda').$$

Damit aber in beiden Fällen dieselben entsprechenden Sinoiden β, β' und dieselbe resultirende Schwingungscurve α in Fig. **767** bei der Parallelbewegung der Geraden g erzeugt werden, muss $\lambda = 180^0 - \lambda'$ sein; demnach folgt

$$\theta' = \frac{n}{n+1}\lambda,$$

und für $n = \frac{1}{2}$ ist $\theta' = \frac{1}{3}\lambda$. Wenn wir für den Winkel λ verschiedene Werthe annehmen, erhalten wir die zugehörigen Drehungswinkel θ, θ' jener beiden Trochoiden und die entsprechenden verschiedenen Phasendifferenzen der beiden sinoidischen Wellenbewegungen, aus denen, wie auch in Art. 225 erörtert wurde, durch Interferenz die mannigfach gestaltete Schwingungscurve α hervorgeht.

In Fig. **768** ist im Schema ein auf den abgeleiteten Beziehungen gegründeter Interferenzmechanismus dargestellt, der für die Annahme verschiedener Werthe von n und λ durch einen Schreibstift A die entsprechende Bahncurve oder Schwingungscurve α aufzeichnet. Auf die Axe Φ eines im Gliede S festen Zahnrades R_1 ist ein rotirender Arm $\Phi F'$ gesetzt, der die Axe F' eines anderen Zahnrades R_2 trägt, und in diese beiden Zahnräder greift ein Zwischenrad Z, dessen Axe J in einem bogenförmigen Schlitze an den rotirenden Arm $\Phi F'$ festgeschraubt ist. An dem Rade R_2 ist der Arm $F'E$ befestigt, dessen Zapfen E in dem Querschlitze e der im Gliede S verschiebbaren Stange s gleitet. Wenn der Arm $\Phi F'$ rotirt, beschreibt der Zapfen E eine Trochoide in dem Gliede S, und bei gleichförmiger Drehung vollzieht ein an der Stange s befestigter Schreibstift A, sowie jeder mit der Stange s verbundene Punkt eine geradlinige Bewegung, die als die resultirende Bewegung zweier geradliniger harmonischer Bewegungen betrachtet werden kann.

Da die Axe J des Zwischenrades Z in dem Bogenschlitze, dessen Mittelpunkt in F' liegt, verstellbar ist, so kann das Rad R_1 durch andere Räder ersetzt werden, die verschiedenen Werthen von n entsprechen. Einer Verstellung des Armes $F'E$ oder des Rades R_2 gegen das Rad Z entspricht ein bestimmter Winkel θ', um welchen die vom Zapfen E beschriebene Trochoide gedreht ist. Bei dem dargestellten Mechanismus erzeugt der Punkt E die in Fig. **766**ᵃ gezeichnete Trochoide ε, für welche $n = -\frac{1}{2}$, $\theta' = 0$ ist; und demnach ist das Verhältniss der Zähnezahlen der beiden Räder R_1, R_2 gleich dem Verhältnisse 3 : 1 der Radien jener Rollkreise π', p'. Um nun dieselbe Schwingungscurve α, welche in Fig. **766** durch Interferenz aus den beiden sinoidischen Wellenbewegungen hervorgeht, durch den Schreibstift A aufzuzeichnen, ist auf die Axe Φ ein mit dem Arme $\Phi F'$ verbundenes Zahnrad U gesetzt, welches in eine feste zu $\Phi\Phi_z$ parallele Zahnstange Σ eingreift; und der Umfang des Rollkreises dieses Zahnrades ist gleich jener Strecke $\Phi_0\Phi_z$. Die Zahnstange Σ enthält in ihrer Längsrichtung einen Schlitz, in welchem ein Knaggen c des Gliedes S gleitet. Wenn dieser Knaggen c in dem Schlitze verschoben wird, zeichnet der Schreibstift A die Schwingungscurve α.

306. **Zusammensetzung zweier geradliniger harmonischer Bewegungen. Erzeugung der Lissajous'schen Curven.** Bewegt sich in

Fig. 769 ein Punkt A harmonisch auf einer parallel bewegten Strecke GG', deren Mitte M harmonisch auf der Strecke M_0M_z schwingt, so können wir die aus diesen beiden harmonischen Bewegungen hervorgehende Bewegung des Punktes A in folgender Weise bestimmen. Wir beschreiben um die Mitte Φ von M_0M_z die Kreise φ, φ', welche resp. die zu M_0M_z parallelen Geraden G_0G_z, $G'_0G'_z$ und die parallelen Grenzlagen $G_0G'_0$, $G_zG'_z$ der bewegten Strecke GG' berühren, und nehmen an, dass die Punkte F, F' der zu M_0M_z, $G_0G'_0$ parallelen Geraden FA, $F'A$ auf diesen Kreisen φ, φ' beziehlich die constanten Geschwindigkeiten FF_v, $F'F'_v$ besitzen. Wir construiren auf den Kreisen φ, φ' die Bögen FF_1, $F'F'_1$, so dass sie sich wie die Geschwindigkeiten FF_v, $F'F'_v$ verhalten und im Richtungssinne mit denselben übereinstimmen; ferner ziehen wir zu FA, $F'A$ die Parallelen F_1A_1, F'_1A_1, dann ist ihr Schnitt A_1 ein Punkt der resultirenden Bahncurve α, die der Punkt A beschreibt. In gleicher Weise können wir beliebig viele Punkte dieser Bahncurve α construiren, welche eine Lissajous'sche Curve genannt wird, weil Lissajous die durch zwei geradlinige harmonische Bewegungen erzeugten Curven bei der Untersuchung der Schwingungen der Stimmgabeln behandelt hat[1]).

Nehmen wir an, der Punkt F habe den ν^{ten} Theil des Kreises φ durchlaufen, während der Punkt A auf $G_0G'_0$ von G_0 bis zu einer betrachteten Ausgangslage gelangt, und jetzt beginne die Parallelbewegung der Strecke GG' von $G_0G'_0$ ausgehend, so wird jener ν^{te} Theil die Phasendifferenz genannt. Die Lissajous'schen Curven, welche einem bestimmten Verhältnisse $FF_v : F'F'_v$ der Geschwindigkeiten der Punkte F, F' oder deren Umlaufszeiten entsprechen, wollen wir als gleichartig bezeichnen, wenn auch für die verschiedenen Phasendifferenzen die mannigfaltigsten Gestaltungen dieser Curven auftreten.

Ziehen wir resp. zu FA, $F'A$ die Parallelen $F_vA_v^g$, $F'_vA_v^h$, die sich in A_v^α treffen, so ist AA_v^α die Geschwindigkeit von A auf der Bahncurve α, nämlich die Resultante aus den beiden Geschwindigkeiten AA_v^g, AA_v^h, welche den beiden geradlinigen harmonischen Bewegungen entsprechen. Die Punkte F_v, F'_v bewegen sich gleichförmig auf Kreisen, deren Radien ΦF_v, $\Phi F'_v$ sind, und das Verhältniss der Geschwindigkeiten auf diesen Kreisen ist gleich $FF_v : F'F'_v$; folglich ist nach dieser constructiven Bestimmung der geometrische

---

1) Lissajous, „Sur l'étude optique des mouvements vibratoires". *Annales de chémie et physique.* 1857. Sér. III. T. 51. p. 147. — Sehr ausführlich sind diese Curven behandelt in Melde, *Lehre von den Schwingungscurven.* 1864.

Ort des Endpunktes A_v^α der Geschwindigkeit AA_v^α eine mit der Bahncurve α gleichartige Lissajous'sche Curve.

Construiren wir auf den Radien ΦF, $\Phi F'$ für die Punkte F, F' die entsprechenden Beschleunigungen

$$FF_j = \frac{\overline{FF_v}^2}{\Phi F}, \qquad F'F'_j = \frac{\overline{F'F'_v}^2}{\Phi F'},$$

und ziehen wir resp. zu FA, $F'A$ die Parallelen $F_jA_j^g$, $F'_jA_j^h$, welche sich in A_j^α schneiden, so ist AA_j^α die Beschleunigung von A auf der Bahncurve α, als Resultante aus den beiden Beschleunigungen AA_j^g, AA_j^h, die beziehlich den beiden geradlinigen harmonischen Bewegungen angehören. Die Punkte F_j, F'_j bewegen sich gleichförmig auf Kreisen, deren Radien ΦF_j, $\Phi F'_j$ sind, und ihre Geschwindigkeiten stehen in dem Verhältnisse $FF_v : F'F'_v$; demnach folgt aus dieser constructiven Bestimmung, dass auch der geometrische Ort des Endpunktes A_j^α der Beschleunigung AA_j^α eine mit der Bahncurve α gleichartige Lissajous'sche Curve ist.

Machen wir in Fig. **769ª** die Strecke $\mathfrak{O}\mathfrak{H} \# FF_v$, ferner die Strecke $\mathfrak{O}\mathfrak{H}' \# F'F'_v$, und ziehen wir die Geraden $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{H}'\mathfrak{H}_\alpha$ resp. parallel zu jenen Geraden M_0M_z, $G_0G'_0$, dann repräsentirt die Strecke $\mathfrak{O}\mathfrak{H}_\alpha$ nach Grösse und Richtung die Geschwindigkeit des Punktes A auf der Bahncurve α in Fig. **769**. Da die Punkte $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ gemäss der Bewegung jener Punkte F, F' sich gleichförmig auf den um $\mathfrak{O}$ beschriebenen Kreisen $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$ bewegen, deren Radien $\mathfrak{O}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{H}'$ sind und die Geschwindigkeiten sich wie FF_v, $F'F'_v$ verhalten, so folgt, dass der geometrische Ort $\mathfrak{h}_\alpha$ des Punktes $\mathfrak{H}_\alpha$ oder der Hodograph erster Ordnung für die Bewegung des Punktes A auf der Bahncurve α eine mit dieser gleichartige Lissajous'sche Curve ist. In gleicher Weise ergiebt sich, dass auch der Hodograph zweiter Ordnung und jeder höheren Ordnung eine der Bahncurve α gleichartige Lissajous'sche Curve ist.

Wenn in Fig. **769** die beiden Punkte F, F' die Kreise φ, φ' in gleichen Zeiten durchlaufen, dann können wir die Geschwindigkeiten FF_v, $F'F'_v$ resp. gleich den Radien ΦF, $\Phi F'$ annehmen; dem zufolge liegen die Endpunkte F_j, F'_j, A_j^α der betreffenden Beschleunigungen in dem Punkte Φ, und $A\Phi$ repräsentirt die Beschleunigung von A auf α. In diesem speciellen Falle vollzieht der Punkt A nach Art. 292 eine harmonische Bewegung auf einer Ellipse, die auch insbesondere zweimal in gerade Strecken übergehen kann; und die Hodographen im Bezug auf den Punkt Φ als Tragpunkt sind mit dieser Ellipse identisch.

Um eine Vorstellung von den mannigfaltigen Gestalten der Lissajous'schen Curven zu gewinnen, ist es zweckmässig, von der folgenden speciellen Bewegungsart auszugehen. Wir nehmen an, es sei in Fig. **770** die geradlinig parallel bewegte Strecke $G_0 G'_0$, auf der sich ein Punkt A harmonisch bewegt, gleich und senkrecht der Strecke $M_0 M_z$, auf der die Mitte von $G_0 G'_0$ harmonisch schwingt. Ueber $M_0 M_z$ beschreiben wir als Durchmesser einen Kreis α_2, theilen denselben in eine Anzahl, z. B. 24 gleicher Theile und ziehen durch diese Theilpunkte Parallele zu $G_0 G'_0$ und $M_0 M_z$; dann erhalten wir durch das so entstandene getheilte Quadrat $G_0 G'_0 G'_z G_z$ ein Constructionsmittel für die typischen Gestalten der Lissajous'schen Curven. Vollenden beide harmonischen Bewegungen eine Schwingung in gleicher Zeit und befindet sich der bewegte Punkt A beim Beginn der Parallelbewegung der Geraden $G_0 G'_0$ in dem Punkte G_0, der auch mit *0* bezeichnet ist, dann bewegt sich der Punkt A harmonisch auf der Diagonale α_0, welche die Schnittpunkte der durch *0, 1, 2, 3* .. und *0, I, II, III* .. gehenden Parallelen enthält. Liegt dagegen der Punkt A beim Beginn jener Parallelbewegung im Punkte *3* auf $G_0 G'_0$, so bewegt sich der Punkt A harmonisch auf der Ellipse α_1, welche durch die betreffenden Schnittpunkte der von *3* nach *4, 5* .. und der von *0* nach *I, II* .. auf einander folgenden Parallelen bestimmt wird.

Der harmonischen Bewegung auf der Geraden von *0* bis *3* entspricht auf dem Kreise α_2 ein Bogenstück, welches gleich dem 8ten Theil dieses Kreises ist; daher sagt man, dass in diesem Falle die Phasendifferenz der beiden harmonischen Bewegungen gleich $\frac{1}{8}$ sei. Befindet sich A im Punkte *6*, also in der Mitte der Geraden $G_0 G'_0$, wenn ihre Parallelbewegung beginnt, dann ist die Phasendifferenz gleich $\frac{2}{8}$, und der Punkt A beschreibt den Kreis α_2; denn dieser trägt die Schnittpunkte der beziehlich durch *6, 7, 8* .. und *0, I, II* .. gehenden Parallelen. Beim Ausgange vom Punkte *9* ist die Phasendifferenz $\frac{3}{8}$ und die entsprechende Bahn eine Ellipse α_3, die zu der vorher betrachteten Ellipse α_1 im Bezug auf $M_0 M_z$ symmetrisch ist. Bei dem Ausgange vom Punkte *12* und der Phasendifferenz $\frac{4}{8}$ geht die Bahn in die zweite Diagonale α_4 über. Betrachten wir nun auf der Geraden $G_0 G'_0$ zurückkehrend dieselben Punkte *9, 6, 3, 0* als Ausgangspunkte der Bewegung, dann entsprechen diesen resp. die Phasendifferenzen $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{8}$ und beziehlich dieselben Bahnen; aber von diesen werden die in *9* berührende Ellipse α_3, der Kreis α_2, sowie die in *3* berührende Ellipse α_1 entgegengesetzt durchlaufen. Die Beschleunigung für die resultirende

Bewegung des Punktes A ist im betrachteten Falle seinem Abstande von dem Mittelpunkte des Quadrats proportional und nach diesem Mittelpunkte gerichtet.

Diese Bewegungsvorgänge werden verallgemeinert, wenn wir zu dem Gebilde in Fig. **770** das gleichbezeichnete affine Gebilde in Fig. **771** construiren. Den beiden geradlinigen Bahnen für die Phasendifferenzen 0, $\frac{4}{8}$, den Diagonalen jenes Quadrats, entsprechen in diesem allgemeineren Falle die Diagonalen des Parallelogramms $G_0 G'_0 G'_z G_z$; jenen Ellipsen für die Phasendifferenzen $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$ entsprechen wieder Ellipsen und jenem dem Quadrate eingeschriebenen Kreise entspricht eine Ellipse, welche die Seiten des Parallelogramms in den Mitten berührt.

Wir betrachten wieder in Fig. **772** jenes getheilte Quadrat; aber wir wollen annehmen, dass die Zeiten der harmonischen Schwingungen von A auf $G_0 G'_0$ und von M_0 auf $M_0 M_z$ nicht gleich sind, sondern sich z. B. wie 2 : 1 verhalten und einige Bahncurven zeichnen. Wenn der Punkt A sich beim Beginn der Parallelbewegung von $G'_0 G_0$ im Punkte 0 befindet, die Phasendifferenz also gleich Null ist, so wird die entsprechende Bahncurve α_0, welche in diesem Falle, wie sich leicht beweisen lässt, ein Parabelbogen ist, durch die betreffenden Schnittpunkte der von 0 nach $2, 4, 6, 8, \ldots$ und von 0 nach $I, II, III, IV, \ldots$ auf einander folgenden Parallelen bestimmt. Beim Ausgange von dem Punkte 3, also für die Phasendifferenz $\frac{1}{8}$, ergiebt sich die Bahncurve α_1, welche durch die betreffenden Schnittpunkte der von 3 nach $5, 7, 9 \ldots$ und von 0 nach $I, II, III, \ldots$ auf einander folgenden Parallelen geht. In analoger Weise ist noch für den Ausgang vom Punkte 6, resp. für die Phasendifferenz $\frac{2}{8}$ die zugehörige Bahncurve α_2 gezeichnet; dieselbe geht durch den Mittelpunkt des Quadrats und wird von beiden Mittellinien des Quadrats symmetrisch getheilt.

Den Phasendifferenzen $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$ entsprechen die Bahncurven, die resp. denen für die Phasendifferenzen $\frac{1}{8}$, 0 bezüglich $M_0 M_z$ symmetrisch sind. Durch Construction der affinen Gebilde erhalten wir die entsprechenden allgemeineren Gestalten dieser Lissajous'schen Curven. Vermittelst grösserer Anzahl von Parallelen können ebenso für andere Verhältnisse der Schwingungszeiten die betreffenden Bahncurven, die den verschiedenen Phasendifferenzen entsprechen, gezeichnet werden.

Wenn wir in Fig. **773**, Taf. LII, das Quadrat $G_0 G'_0 G'_z G_z$ als die Aufrissprojection eines auf dem Grundriss stehenden geraden Kreiscylinders betrachten, dessen Grundrissprojection der mit $\varkappa$

bezeichnete Kreis ist, so können wir jede Lissajous'sche Curve, z. B. die Bahncurve α_1, als die Aufrissprojection einer auf dem Kreiscylinder liegenden Raumcurve ansehen. Der abgewickelte Mantel $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}'_0 \mathfrak{G}'_z \mathfrak{G}_z$ dieses Kreiscylinders ist ein Rechteck, dessen Seite $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}'_0$ gleich der Höhe $G_0 G'_0$ des Kreiscylinders und dessen Seite $\mathfrak{G}_0 \mathfrak{G}_z$ gleich dem Umfange des Basiskreises $\varkappa$ ist. Die auf dem Mantel befindliche mit abgewickelte Curve $\mathfrak{a}$, welche durch die entsprechenden Theilpunkte bestimmt wird, ist eine Sinoide. Gemäss dem angenommenen Verhältnisse 2 : 1 der Schwingungszeiten jener beiden harmonischen Bewegungen enthält der Mantel zwei Wellenzüge der Sinoide $\mathfrak{a}$; und es treten n Wellenzüge auf, wenn dieses Verhältniss $n : 1$ ist. Jeder Phasendifferenz entspricht eine Verschiebung der Sinoide $\mathfrak{a}$ in der Längsrichtung; und demnach sind die Lissajous'schen Curven, welche bei einem bestimmten Verhältnisse der Schwingungszeiten für verschiedene Phasendifferenzen sich ergeben, die Projectionen von einer auf den Kreiscylinder gewickelten Sinoide, wenn derselbe um seine Axe in entsprechende Lagen gedreht auf eine zu dieser Axe parallele Ebene projicirt wird.

Die Lissajous'schen Curven, welche durch physikalische Apparate in mannigfacher Weise erzeugt werden, kann man auch durch Mechanismen aufgezeichnet erhalten. In Fig. **774** ist ein solcher von Stöhrer construirter Mechanismus schematisch dargestellt[1]). Die drei in einander greifenden Zahnräder R, Z, R' sind in dem Gestell $\Phi \Xi \Phi' \Xi'$ gelagert. An den beiden Rädern R, R' sind die Kurbelzapfen F, F' befestigt, und diese befinden sich beziehlich in den rechtwinkeligen Querschlitzen der Schubstangen s, s', die in den senkrecht zu einander gestellten festen Hülsen Ξ, Ξ' gleiten. Die Schubstange s' trägt eine berusste Platte P, und an der Schubstange s ist ein Stift A befestigt, welcher auf derselben die betreffende Lissajous'sche Curve α aufzeichnet, wenn die Räder in Bewegung gesetzt werden. Haben die beiden Räder R, R' gleiche Zähnezahlen, wie im dargestellten Falle, so beschreibt der Stift A auf der berussten Platte P eine der Phasendifferenz entsprechende Ellipse α. Um aber für andere verschiedene Verhältnisse der Schwingungszeiten die betreffende Lissajous'sche Curve aufzuzeichnen, wird das Rad R' ausgewechselt; und damit der Eingriff in das Zwischenrad Z erhalten

---

[1]) Weinhold, *Physikalische Demonstrationen*. 1881. S. 241. — Ein anderer nach Reuleaux' Angabe ausgeführter Mechanismus befindet sich in dem *Skizzenbuch der angewandten Kinematik vom Verein „Hütte“*. 1880. S. 21.

bleibt, ist die Axe J desselben in einem bogenförmigen Schlitze verstellbar, dessen Mittelpunkt in Φ liegt. Die verschiedenen Phasendifferenzen ergeben sich durch gegenseitige Verstellung der in das Zwischenrad Z eingreifenden Räder R, R'.

Beschleunigungen der Punkte des ebenen Systems.

307. **Allgemeine Beziehungen der Beschleunigungen der Punkte des conplan bewegten ebenen Systems.** Um die Beziehungen der Beschleunigungen der Punkte eines starren ebenen Systems S, welches sich in einem festen ebenen System bewegt, abzuleiten, betrachten wir zunächst in Fig. 775 die Drehung des Systems S um einen Punkt Φ, der im festen System während zweier gleicher Zeitelemente oder dauernd fest ist. Bei dieser Drehung vollziehen die Punkte A, B, .. des Systems S ähnliche Bewegungen im festen System; dem gemäss sind, wenn AA_j, BB_j, .. die Beschleunigungen dieser Punkte darstellen, die Dreiecke ΦAA_j, ΦBB_j, .. ähnlich, und folglich ist auch das Dreieck $\Phi A_j B_j$ dem Dreieck ΦAB ähnlich. Bezeichnen wir das von den Endpunkten A_j, B_j, .. der Beschleunigungen AA_j, BB_j, .. gebildete ebene System mit S_j, so sind auch die Systeme S_j, S ähnlich, und der feste Drehpunkt Φ ist der selbstentsprechende Punkt oder Doppelpunkt derselben. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Die Endpunkte der Beschleunigungen der Punkte eines um einen festen Drehpunkt conplan rotirenden ebenen Systems bilden ein ähnliches ebenes System, und dieser feste Drehpunkt ist der Doppelpunkt dieser beiden ähnlichen ebenen Systeme.

Der Beschleunigungszustand eines um einen festen Punkt rotirenden ebenen Systems ist hiernach bestimmt, wenn die Beschleunigung eines einzigen Systempunktes bekannt ist; denn es kann dann für jeden anderen Punkt des Systems die zugehörige Beschleunigung leicht vermittelst ähnlicher Dreiecke construirt werden. Die Beschleunigung derjenigen Systempunkte, welche von dem festen Drehpunkte Φ um die Längeneinheit entfernt sind, wird die *Drehbeschleunigung* des Systems genannt.

Zerlegen wir in Fig. 775 die Beschleunigungen AA_j, BB_j, .. der Systempunkte A, B, .. resp. in die Normal- und Tangentialbeschleunigungen AA_n, AA_t, ..; BB_n, BB_t, ..; so sind auch die

Systeme $\Phi A_n B_n\,..$, $\Phi A_t B_t\,..$ dem rotirenden System $\Phi AB\,..$ ähnlich, und der feste Drehpunkt Φ ist der zugehörige Doppelpunkt.

Repräsentiren in Fig. **776** die Strecken AA_j, BB_j, CC_j die Beschleunigungen der Punkte A, B, C eines ebenen Systems S, welches sich beliebig in einem festen System bewegt, und denken wir uns dem bewegten System S gleichzeitig noch eine Parallelbewegung ertheilt, so dass alle Punkte desselben dadurch eine hinzutretende Geschwindigkeit und Beschleunigung erhalten, die beziehlich der Geschwindigkeit und der Beschleunigung eines Systempunktes, z. B. des Punktes A, entgegengesetzt gleich ist; dann wird dieser Systempunkt A während zweier gleicher Zeitelemente im Bezug auf das feste System in Ruhe versetzt, und das System S dreht sich während dieser beiden gleichen Zeitelemente um den festen Punkt A. Durch die Parallelbewegung kommen die Beschleunigungen AA'_j, BB'_j, CC'_j hinzu, die der Beschleunigung AA_j entgegengesetzt gleich sind; und für den Punkt A resultirt aus den Beschleunigungen AA_j, AA'_j die Beschleunigung Null. Ferner ergiebt sich aus der Zusammensetzung der Beschleunigungen BB_j, BB'_j, indem wir $B_jB''_j \# BB'_j$ oder A_jA ziehen, die resultirende Beschleunigung BB''_j vom Punkte B des um A rotirenden Systems S; und ebenso erhalten wir, indem wir $C_jC''_j \# CC'_j$ oder A_jA ziehen, die resultirende Beschleunigung CC''_j vom Punkte C des um A rotirenden Systems S. Dieser Construction gemäss sind die Dreiecke $A_jB_jC_j$, $AB''_jC''_j$ congruent. Da ferner nach dem obigen Satze die Dreiecke $AB''_jC''_j$, ABC ähnlich sind, so folgt hieraus auch die Aehnlichkeit der Dreiecke $A_jB_jC_j$, ABC; und es ist das von den Punkten A_j, B_j, C_j gebildete ebene System S_j dem bewegten System S ähnlich. Demnach erhalten wir den wichtigen Satz:

Die Endpunkte der Beschleunigungen der Punkte eines conplan bewegten ebenen Systems bilden ein ähnliches ebenes System[1]).

Sind in Fig. **776** die Beschleunigungen AA_j, BB_j zweier Punkte A, B des bewegten ebenen Systems S bekannt, so ist da-

---

[1]) Dieser Satz ist ein Speciallfall eines allgemeineren Satzes. Siehe Burmester, „Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme". *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* 1878. B. 23. S. 116. Vergl. ferner die Abhandlungen von Rittershaus im *Civilingenieur.* 1878. B. 24. S. 1, von Burmester, *daselbst.* S. 145 und von Mohr, *daselbst.* 1879. B. 25. S. 613.

durch der Beschleunigungszustand dieses Systems bestimmt; denn wir erhalten die zu einem beliebigen Systempunkte C gehörende Beschleunigung CC_j, wenn wir zu dem Dreieck ABC in gleichem Sinne das ähnliche Dreieck $A_jB_jC_j$ construiren. Zwei ähnliche ebene Systeme S, S_j haben nur einen einzigen reellen selbstentsprechenden Punkt oder Doppelpunkt; denn gäbe es zwei, so würden diese Systeme identisch sein. Es ist daher der mit diesem Doppelpunkte coincidirende Punkt des Systems S der einzige Punkt desselben, dessen Beschleunigung im betrachteten Momente gleich Null ist, und deshalb wird dieser Doppelpunkt der **Beschleunigungspol** genannt. Eine Ausnahme tritt ein, wenn in einem Momente die Beschleunigungen AA_j, BB_j gleich und gleichgerichtet sind; denn das System S vollzieht dann momentan eine Parallelbewegung, und alle Systempunkte bewegen sich mit gleichen und gleichgerichteten Beschleunigungen. Wenn insbesondere die beiden Punkte A_j, B_j in einem Punkte coincidiren, schrumpft das System S_j in diesen Punkt zusammen, und die Endpunkte aller Beschleunigungen vereinen sich in demselben.

Machen wir in Fig. **776** die Strecke $AB_\iota \# BB_j$, ebenso die Strecke $AC_\iota \# CC_j$, so folgt, weil dem gemäss das Dreieck $A_jB_jB_\iota \simeq B_j''AB$ und das Dreieck $A_jC_jC_\iota \simeq C_j''AC$ ist, die Aehnlichkeit der Dreiecke $A_jB_jB_\iota$, $A_jC_jC_\iota$; demnach ist auch das Dreieck $A_jB_\iota C_\iota$ dem Dreieck $A_jB_jC_j$ und dem Dreieck ABC ähnlich. Ziehen wir nun in Fig. **777** von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}$ aus die Strecken $\mathfrak{O}A_\iota$, $\mathfrak{O}B_\iota$, $\mathfrak{O}C_\iota$, .. gleich und gleichgerichtet den Beschleunigungen AA_j, BB_j, CC_j, .. der Punkte A, B, C, .. eines bewegten ebenen Systems S, so bilden die Punkte A_ι, B_ι, C_ι, .. ein ebenes System S_ι, welches dem System S ähnlich ist, und somit ergiebt sich der Satz:

Die Endpunkte der von einem angenommenen Punkte aus gezogenen Strecken, die den Beschleunigungen der Punkte eines conplan bewegten ebenen Systems gleich und gleichgerichtet sind, bilden ein ebenes System, welches dem bewegten ebenen System ähnlich ist[1]).

Nach diesem Satze erhalten wir in Fig. **777** den Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$ des Systems S, wenn wir von einem Punkte $\mathfrak{O}$ aus die Strecken $\mathfrak{O}A_\iota$, $\mathfrak{O}B_\iota$ ziehen, die den Beschleunigungen zweier

[1]) Dieser Satz wurde zuerst mit Hülfe der Grassmann'schen Ausdehnungslehre von Mehmke abgeleitet. *Civilingenieur*. 1883. B. 29. S. 487.

Punkte A, B des Systems S gleich und gleichgerichtet sind, und ferner das Dreieck $AB\mathfrak{J}$ construiren, welches dem Dreieck $A_t B_t \mathfrak{O}$ ähnlich ist.

Um in Fig. **778** noch auf andere Weise den Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$ resp. den Doppelpunkt der ähnlichen Systeme S, S_j zu construiren, welche durch die entsprechenden Strecken AB, $A_j B_j$ bestimmt sind, bezeichnen wir mit G den Schnittpunkt der Beschleunigungsrichtungen AA_j, BB_j und mit H den Schnittpunkt der Geraden AB, $A_j B_j$, beschreiben die Kreise ABG und $A_j B_j G$, welche sich ausser im Punkte G im Doppelpunkte $\mathfrak{J}$ der beiden ähnlichen Systeme S, S_j schneiden; denn die Dreiecke $AB\mathfrak{J}$, $A_j B_j \mathfrak{J}$ sind ähnlich, weil die Winkel $AB\mathfrak{J}$, $A_j B_j \mathfrak{J}$ gleich dem Winkel $AG\mathfrak{J}$ und die Winkel $A\mathfrak{J}B$, $A_j \mathfrak{J} B_j$ gleich dem Winkel AGB sind. Infolge dieser ähnlichen Dreiecke sind ferner die Dreiecke $AA_j\mathfrak{J}$, $BB_j\mathfrak{J}$ ähnlich; demnach müssen auch die durch A, A_j, H und B, B_j, H gezogenen Kreise sich in dem Doppelpunkte $\mathfrak{J}$ schneiden, und derselbe ist nach S. 614 der Brennpunkt der Parabel, welche die vier Geraden AB, $A_j B_j$, AA_j, BB_j berührt. Es kann also der Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$ vermittelst zweier der vier gezeichneten Kreise construirt werden.

Aus den Beziehungen der ähnlichen Systeme S, S_j ergeben sich für das conplan bewegte ebene System S die Sätze:

Die Richtungen der Beschleunigungen der Punkte eines ebenen Systems bilden mit den von diesen Punkten nach dem Beschleunigungspol gehenden Geraden gleiche Winkel.

Die Richtungen der Beschleunigungen der Punkte eines ebenen Systems, die auf einem durch den Beschleunigungspol gehenden Kreise liegen, gehen durch einen Punkt dieses Kreises.

Die Richtungen der Beschleunigungen der Punkte eines ebenen Systems, die auf einer durch den Beschleunigungspol gehenden Geraden liegen, sind parallel.

Die Beschleunigungen aller Punkte eines ebenen Systems, welche auf einem um den Beschleunigungspol beschriebenen Kreise liegen, sind von gleicher Grösse und dem Radius dieses Kreises proportional.

Sind in Fig. **779** die Richtungen a, b, c der Beschleunigungen dreier Punkte A, B, C eines conplan bewegten ebenen Systems S gegeben und bezeichnen wir die Schnittpunkte dieser Richtungen resp. mit $a.b$, $b.c$, $c.a$, so schneiden sich die drei Kreise $ABa.b$, $BCb.c$, $CAc.a$ in dem Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$, und derselbe ist demnach durch zwei dieser Kreise bestimmt. Ist ferner noch für einen Systempunkt, z. B. für A, die Grösse AA_j der Beschleunigung gegeben, so ist durch die homologen Punkte A, A_j und den Doppelpunkt $\mathfrak{J}$ das zu S ähnliche System S_j und damit auch der Beschleunigungszustand des Systems S bestimmt.

308. **Besondere Beziehungen der Beschleunigungen der Punkte des conplan bewegten ebenen Systems.** Ist in Fig. 780 der Pol $\mathfrak{P}$ eines bewegten ebenen Systems S, der Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$ desselben, die Geschwindigkeit AA_v und die Beschleunigung AA_j eines Systempunktes A gegeben; dann erhalten wir die auf $\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ senkrechte Geschwindigkeit $\mathfrak{J}\mathfrak{J}_v$ des als Systempunkt betrachteten Beschleunigungspols $\mathfrak{J}$, indem wir zu dem rechtwinkeligen Dreieck $\mathfrak{P}AA_v$ das ähnliche Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{J}\mathfrak{J}_v$ construiren oder das Dreieck $\mathfrak{P}A_v\mathfrak{J}_v \sim \mathfrak{P}A\mathfrak{J}$ machen. Da der Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$ momentan keine Beschleunigung besitzt, so bewegt sich derselbe während zweier auf einander folgender Zeitelemente mit derselben Geschwindigkeit $\mathfrak{J}\mathfrak{J}_v$ in gleicher Richtung. Die Beschleunigung $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j$ des als Systempunkt betrachteten Pols $\mathfrak{P}$, der während eines Zeitelementes ruht und in dem folgenden Zeitelemente seine Bewegung beginnt, ergiebt sich, wenn wir entweder das Dreieck $\mathfrak{J}\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j \sim \mathfrak{J}AA_j$ oder das Dreieck $\mathfrak{J}A_j\mathfrak{P}_j \sim \mathfrak{J}A\mathfrak{P}$ machen.

Bezeichnen wir den Winkel $\mathfrak{J}AA_j$, den die Beschleunigung AA_j eines Systempunktes A mit der Geraden $A\mathfrak{J}$ bildet, mit θ, den Winkel A_vAA_j, welchen die Beschleunigung AA_j und die Geschwindigkeit AA_v einschliessen, mit λ; setzen wir ferner den Winkel $\mathfrak{P}A\mathfrak{J} = \sigma$, den rechten Winkel $\mathfrak{P}AA_v = R$, so ist

$$\lambda = R - \theta - \sigma.$$

Hieraus folgt, dass der Winkel λ für alle Systempunkte A constant ist, die auf einem durch den Pol $\mathfrak{P}$ und den Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$ gehenden Kreise k^λ liegen, der den auf der Sehne $\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ stehenden Winkel $\sigma = R - \theta - \lambda$ als Peripheriewinkel enthält. Demnach ergiebt sich der Satz:

Der geometrische Ort der Punkte eines ebenen Systems, deren Geschwindigkeit und Beschleunigung einen constanten Winkel λ bilden, ist ein durch den Pol $\mathfrak{P}$ und den Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$ gehender Kreis.

Jedem Winkel λ entspricht ein so bestimmter Kreis k^λ, und die Gesamtheit dieser Kreise bilden ein Kreisbüschel, dessen

Grundpunkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{J}$ sind. Je zwei dieser Kreise, die zwei beliebigen Winkeln λ', λ'' entsprechen, schneiden sich unter einem Winkel, der gleich der Differenz $\lambda' - \lambda''$ ist. Die Richtungen der Beschleunigungen, sowie die Richtungen der Geschwindigkeiten der Systempunkte eines solchen Kreises k^λ treffen sich auf demselben resp. in den Punkten J^λ und V^λ, von denen der erste in der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j$ liegt, die mit $\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ den Winkel θ bildet, und der zweite sich in der auf $\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ senkrechten Geraden $\mathfrak{J}\mathfrak{J}_v$ befindet.

Für $\lambda = 0$ oder 180^0 liegen Geschwindigkeit und Beschleunigung eines jeden Systempunktes des betreffenden Kreises k^0 in je einer Geraden; demnach ist die Normalbeschleunigung der Systempunkte dieses Kreises gleich Null und dieselben durchschreiten momentan Wendepunkte ihrer Bahncurven. Folglich ist der Kreis k^0 der Wendekreis des bewegten ebenen Systems S, und wir erhalten den Satz:

Der Wendekreis enthält die Punkte eines ebenen Systems, die momentan keine Normalbeschleunigung besitzen.

Die Punkte J^0, V^0, durch welche resp. die Richtungen der Beschleunigungen und der Geschwindigkeiten der Punkte des Wendekreises gehen, coincidiren in diesem Falle in dem Punkte $\mathfrak{W}$ des Wendekreises, der dem Pol $\mathfrak{P}$ diametral gegenüberliegt und S. 121 der Wendepol genannt wird. Da der Wendekreis die Polbahn berührt, so ist die Beschleunigung $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j$ des Pols $\mathfrak{P}$, die in der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ liegt, senkrecht zur Polbahn. Für den auf der Geraden $\mathfrak{P}A$ befindlichen Punkt B des Wendekreises k^0 sind die Geschwindigkeit BB_v und die Beschleunigung BB_j, die beide in der Geraden $B\mathfrak{W}$ liegen, construirt.

Für $\lambda = 90^0 = R$ stehen Geschwindigkeit und Beschleunigung eines jeden Systempunktes des betreffenden Kreises k^R auf einander senkrecht. Den Pol $\mathfrak{P}$ müssen wir hier aber als Systempunkt ausgeschlossen betrachten; denn dieser besitzt als solcher während eines Zeitelements keine Geschwindigkeit, und seine Beschleunigung $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j$ fällt mit seiner im folgenden Zeitelemente erhaltenen Bewegungsrichtung zusammen. Der Kreis k^R enthält also die Systempunkte, deren Tangentialbeschleunigung momentan gleich Null ist; jeder dieser Systempunkte durchschreitet demnach in zwei auf einander folgenden gleichen Zeitelementen zwei gleiche Wegelemente, und wegen dieser Weggleichen wollen wir diesen Kreis k^R, der gemäss der obigen Erörterung den Wendekreis k^0 rechtwinkelig schneidet, den **Gleichenkreis** nennen[1]). Dem zufolge ergiebt sich der Satz:

Der Gleichenkreis enthält die Punkte eines ebenen Systems, die momentan keine Tangentialbeschleunigung besitzen.

Der Punkt J^R, durch den die Beschleunigungsrichtungen der Punkte des Gleichenkreises k^R gehen, fällt mit dem Pol $\mathfrak{P}$ zusammen, und der Punkt V^R, in dem sich die Geschwindigkeitsrichtungen dieser Punkte treffen, liegt diesem Pol diametral gegenüber. Der Durchmesser $\mathfrak{P}V^R$ des Gleichenkreises steht auf dem Durchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ des Wendekreises senkrecht und liegt also in der Tangente $\mathfrak{P}t$ der Polbahn. Für den auf der Geraden $\mathfrak{P}A$ befindlichen Punkt C des Gleichenkreises ist die Geschwindigkeit CC_v sowie die Beschleunigung CC_j construirt; und da die Punkte A, B, $\mathfrak{P}$, C auf einer Geraden des Systems S liegen, so befinden sich die Endpunkte A_v, B_v, $\mathfrak{P}$, C_v der Geschwindigkeiten und die Endpunkte A_j, B_j, $\mathfrak{P}_j$, C_j der Beschleunigungen dieser Punkte auf je einer Geraden, und es ist $A_vB_v\mathfrak{P}C_v$ sowie $A_jB_j\mathfrak{P}_jC_j$ ähnlich $AB\mathfrak{P}C$.

Wir betrachten in Fig. **781** bei einem bewegten ebenen System S den Krümmungsmittelpunkt A für die von einem Systempunkte A beschriebene Bahncurve α und den Pol $\mathfrak{P}$ nebst der Polbahntangente $\mathfrak{P}t$ als gegeben; dann erhalten wir hierdurch nach dem Satze S. 98 ein Aequivalent für drei unendlich nahe Lagen des Systems S, und es ist die Bewegung desselben während zweier Zeitelemente bestimmt. Der auf der Geraden $A\mathfrak{P}$ liegende Punkt B des Wendekreises k^0 wird, wie in Art. 49 gelehrt wurde, so construirt, dass $AB = \overline{A\mathfrak{P}}^2 : A\mathsf{A}$ ist. Die in B auf dieser Geraden errichtete Senkrechte schneidet die Polbahnnormale $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ in dem Wendepol $\mathfrak{W}$, und der über $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ als Durchmesser beschriebene Kreis k^0, der den Punkt B enthält, ist der Wendekreis. Zu jedem Systempunkte kann in bekannter Weise mit Hülfe des Wendekreises der entsprechende Krümmungsmittelpunkt seiner Bahncurve construirt werden.

Ist nun noch die Beschleunigung AA_j des Systempunktes A gegeben, so können wir für jeden Systempunkt die Geschwindigkeit und Beschleunigung ermitteln. Die von A_j auf $A\mathfrak{P}$ gefällte Senkrechte A_jA_n liefert durch ihren Fusspunkt A_n die Normal-

---

1) Der Gleichenkreis und der Beschleunigungspol als zweiter Schnittpunkt desselben mit dem Wendekreise wurde zuerst von Bresse erkannt. „Mémoire sur un théorème nouveau concernant les mouvements plans etc.“ *Journal de l'Ecole polytechnique.* 1853. Cah. 35. p. 89.

beschleunigung AA_n des Systempunktes A, und hiernach kann die zu demselben gehörende Geschwindigkeit $AA_v = \sqrt{AA_n \,.\, A\mathsf{A}}$ leicht in bekannter Weise construirt werden.

Die Beschleunigung BB_j des Punktes B des Wendekreises k^0 liegt, weil alle Punkte dieses Kreises nur Tangentialbeschleunigung besitzen, in der Geraden $B\mathfrak{W}$, und die Beschleunigung $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j$ des mit dem Pol $\mathfrak{P}$ coincidirenden Systempunktes befindet sich in der Polbahnnormalen $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$; folglich ergeben sich die Endpunkte dieser Beschleunigungen, indem wir durch A_j die Gerade $A_jB_j\mathfrak{P}_j$ so ziehen, dass $A_jB_j\mathfrak{P}_j \backsim AB\mathfrak{P}$ ist. Zu diesem Zwecke machen wir auf A_nA_j, welche $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ in n trifft, die Strecke $n\mathfrak{a} = A\mathfrak{P}$ und auf $\mathfrak{W}B$ die Strecke $\mathfrak{W}\mathfrak{b} = B\mathfrak{P}$, dann schneidet die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ die Polbahnnormale $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ in dem Endpunkte $\mathfrak{P}_j$ der Beschleunigung $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j$; denn auf der Geraden $A_j\mathfrak{P}_j$, die $\mathfrak{W}B$ in B_j trifft, ist nach dieser Construction $A_jB_j\mathfrak{P}_j \backsim AB\mathfrak{P}$. Die Bestimmung des Punktes $\mathfrak{P}_j$ ist also unabhängig von der Lage des Punktes A_j auf der Geraden A_nn, welche, weil $AA_n = \overline{AA_v}^2 : A\mathsf{A}$ ist, bei gegebenem Krümmungsmittelpunkte A durch die Geschwindigkeit AA_v bestimmt wird. Aus dieser Darlegung ergiebt sich demnach der Satz:

Die in der Polbahnnormale liegende Beschleunigung des mit dem Pol coincidirenden Systempunktes eines bewegten ebenen Systems ist unabhängig von der Tangentialbeschleunigung der Systempunkte und durch die Geschwindigkeit eines dieser Punkte bestimmt.

Wird die Normalbeschleunigung AA_n verändert, also die auf $A\mathfrak{P}$ senkrechte Gerade A_nn parallel verschoben, dann bewegt sich, weil $n\mathfrak{a} = A\mathfrak{P}$ ist, der Punkt $\mathfrak{a}$ auf einer zu $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ parallelen Geraden, und die Gerade $\mathfrak{a}\mathfrak{P}_j$ dreht sich um den festbleibenden Punkt $\mathfrak{b}$; demnach entspricht einer auf $A\mathfrak{P}$ liegenden Reihe von Endpunkten A_n der Normalbeschleunigungen eine ähnliche Reihe von Endpunkten $\mathfrak{P}_j$ der Beschleunigungen $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j$. Wenn A_n mit A zusammenfällt, dann coincidirt $\mathfrak{P}_j$ mit $\mathfrak{P}$; und wenn A_n nach B gelangt, dann befindet sich $\mathfrak{P}_j$ im Wendepol $\mathfrak{W}$. Demnach besteht die Proportion

$$\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j : \mathfrak{P}\mathfrak{W} = AA_n : AB,$$

nach welcher auch der Punkt $\mathfrak{P}_j$ leicht construirt werden kann. Hieraus folgt, wenn wir

$$AA_n = \frac{\overline{AA_v}^2}{A\mathsf{A}}, \qquad AB = \frac{\overline{A\mathfrak{P}}^2}{A\mathsf{A}}$$

setzen,

$$\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j : \mathfrak{P}\mathfrak{W} = \overline{AA_v}^2 : \overline{A\mathfrak{P}}^2.$$

Bezeichnen wir mit ω die momentane Drehgeschwindigkeit des Systems S um den Pol $\mathfrak{P}$ und mit u die Geschwindigkeit des Pols auf der Polbahn, so ergiebt sich, weil die Geschwindigkeit $AA_v = A\mathfrak{P} \,.\, \omega$ und nach S. 124 der Wendekreisdurchmesser $\mathfrak{P}\mathfrak{W} = u : \omega$ ist,

$$\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j = \mathfrak{P}\mathfrak{W} \,.\, \omega^2 = u \,.\, \omega.$$

Somit erhalten wir den Satz:

Die Beschleunigung des mit dem Pol coincidirenden Punktes eines ebenen Systems ist gleich dem Producte aus der Polgeschwindigkeit und der Drehgeschwindigkeit des Systems.

Der durch $\mathfrak{P}$, A und den Schnittpunkt J^λ der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j$, AA_j bestimmte Kreis k^λ schneidet den Wendekreis k^0 in dem Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$. Die auf $\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ senkrechte Gerade $\mathfrak{W}\mathfrak{J}$ bestimmt auf der Polbahntangente $\mathfrak{P}t$ den Durchmesser $\mathfrak{P}V^R$ des Gleichenkreises k^R. Für verschiedene Richtungen der Beschleunigung AA_j erhalten wir verschiedene zugehörige Schnittpunkte J^λ derselben auf $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$; jeder solchen Richtung entspricht demnach ein bestimmter durch J^λ und die festen Punkte $\mathfrak{P}$, A gehender Kreis k^λ, der den Wendekreis k^0 in dem betreffenden Beschleunigungspol schneidet. Hieraus folgt der Satz:

Die Lage des Beschleunigungspols auf dem Wendekreise, sowie die Grösse des Gleichenkreises ist nur von der Lage der Geraden abhängig, welche die Richtung der Beschleunigung eines Systempunktes enthält.

Die Grösse der Beschleunigung AA_j hat also keinen Einfluss auf diese Lage des Beschleunigungspols und auf die Grösse des Gleichenkreises.

Ist die Beschleunigung AA_j senkrecht auf $A\mathfrak{P}$, dann liegt der entsprechende Beschleunigungspol in dem Pol $\mathfrak{P}$, der betreffende Gleichenkreis schrumpft in den Pol $\mathfrak{P}$ zu einem Punkte zusammen, und die Normalbeschleunigungen sind nicht nur für die Punkte des Wendekreises, sondern für alle Systempunkte Null. Dieser besondere Fall tritt nur dann ein, wenn das System aus Ruhe in Bewegung übergeht und umgekehrt; denn nur dann kann bei einer krummlinigen Bewegung eines Punktes die Beschleunigung desselben in der Tangente seiner Bahncurve liegen.

Geht die Gerade AA_j durch den Wendepol $\mathfrak{W}$, so ist dieser zugleich der Beschleunigungspol, und die Richtungsgeraden der

Beschleunigungen aller Systempunkte gehen durch den Wendepol. In diesem Falle befindet sich das System S_j der Endpunkte der Beschleunigungen, welches dem bewegten System S ähnlich ist, mit diesem in ähnlicher Lage, für welche der Wendepol der Aehnlichkeitspunkt ist. Der zugehörige Gleichenkreis wird dann unendlich gross und geht also in die Polbahnnormale über. Liegt insbesondere der Endpunkt A_j der Beschleunigung AA_j in dem Wendepol $\mathfrak{W}$, dann schrumpft das System S_j in den Wendepol $\mathfrak{W}$ zusammen. Demnach ergiebt sich der Satz:

Befindet sich der Endpunkt der Beschleunigung eines Systempunktes in dem Wendepol, dann liegen die Endpunkte der Beschleunigungen aller Systempunkte in dem Wendepol.

Nehmen wir an, dass die Endpunkte der Beschleunigungen zweier Systempunkte in einem Punkte coincidiren, dann befinden sich die Endpunkte aller anderen Beschleunigungen ebenfalls in diesem Punkte, der zugleich der Beschleunigungspol ist und als solcher auf dem Wendekreise liegt. Demnach ist auch die in der Polbahnnormale enthaltene Beschleunigung, die der momentan mit dem Pol zusammenliegende Systempunkt besitzt, gleich dem Durchmesser des Wendekreises, und wir erhalten den Satz:

Fallen die Endpunkte der Beschleunigungen zweier Systempunkte in einem Punkte zusammen, so ist dieser Punkt, in welchem dann die Endpunkte aller Beschleunigungen coincidiren, der Wendepol des bewegten Systems.

Wenn die Endpunkte der Beschleunigungen im Wendepol coincidiren, befinden sich die Endpunkte der Normalbeschleunigungen aller Systempunkte auf dem Wendekreise. Die Geschwindigkeit eines Systempunktes A in Fig. **781** ist, weil $A\mathfrak{P} = \sqrt{AB \,.\, A\mathrm{A}}$ und AB die Normalbeschleunigung desselben darstellt, gleich $A\mathfrak{P}$, dem Abstande des Systempunktes von dem Pol, und demnach liegen in diesem Falle die Endpunkte der lothrechten Geschwindigkeiten aller Systempunkte in dem Pol $\mathfrak{P}$. Liegt der Endpunkt der lothrechten Geschwindigkeit eines einzigen Systempunktes in dem Pol, dann gilt dasselbe für alle Systempunkte, und die Endpunkte der zugehörigen Normalbeschleunigungen liegen auf dem Wendekreise.

Fällt die Beschleunigung AA_j in die Gerade $A\mathfrak{P}$, dann coincidirt der betreffende Schnittpunkt J^λ der Geraden AA_j, $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$ mit dem Pol $\mathfrak{P}$ und der entsprechende durch A, $\mathfrak{P}$, J^λ gehende Kreis k^λ

berührt in $\mathfrak{P}$ die Polbahnnormale; demnach ist dieser Kreis, weil A in diesem Falle keine Tangentialbeschleunigung besitzt, der Gleichenkreis.

Wird die Beschleunigung AA_j parallel $\mathfrak{W}\mathfrak{P}$, resp. senkrecht zur Polbahntangente genommen, so liegt der Schnittpunkt J^λ im Unendlichen, der Kreis k^λ ist dann unendlich gross und geht in die Gerade $A\mathfrak{P}$ über; dem zufolge ist der Schnittpunkt B, den $A\mathfrak{P}$ mit dem Wendekreise bildet, für diese Richtung der Beschleunigung AA_j der Beschleunigungspol. Rotirt das bewegte ebene System während zweier Zeitelemente um einen festen Punkt, dann ist dieser zugleich der Beschleunigungspol und der Wendekreis sowie der Gleichenkreis schrumpfen in diesen festen Punkte zu einem Punkte zusammen.

Constructive Bestimmungen der Beschleunigungen bei einfachen Mechanismen.

309. **Construction der Beschleunigung bei einem geführten Gelenke.** Die Bestimmung der Beschleunigung bei einem geführten einfachen Gelenke, welches wir zunächst betrachten, bildet die Grundlage für die Constructionen der Beschleunigungen, die bei den einfachen Mechanismen auftreten. In Fig. 782 sind durch die Strecken FL, NL zwei im Punkte L gelenkig verbundene ebene Systeme S_I, S_{II} gegeben, die sich in einem festen ebenen System bewegen, und diese Strecken vertreten also die Glieder eines Gelenkes. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes F sowie des Punktes N sind resp. durch die Strecken FF_v, FF_j und NN_v, NN_j dargestellt. Hierdurch ist während zweier Zeitelemente die Bewegung der beiden Punkte F, N gegeben, und damit ist auch die entsprechende Bewegung des Gelenkpunktes L und der beiden ebenen Systeme S_I, S_{II} bestimmt.

Die Geschwindigkeit des Gelenkpunktes L ergiebt sich nach Art. 29 vermittelst der lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte F, N. Wir drehen die Geschwindigkeiten FF_v, NN_v in gleichem Sinne um einen rechten Winkel resp. nach $FF_{\mathfrak{v}}$, $NN_{\mathfrak{v}}$, ziehen $F_{\mathfrak{v}}L_{\mathfrak{v}} \parallel FL$ und $N_{\mathfrak{v}}L_{\mathfrak{v}} \parallel NL$, dann ist der Schnittpunkt $L_{\mathfrak{v}}$ dieser beiden Parallelen der Endpunkt der lothrechten Geschwindigkeit $LL_{\mathfrak{v}}$ des Gelenkpunktes L, die in entsprechender Weise um einen rechten Winkel gedreht die Geschwindigkeit LL_v dieses Punktes liefert. Da FF_v, NN_v, LL_v beziehlich die Normalen der Bahncurven der Punkte F, N, L sind, so sind die Schnittpunkte $\mathfrak{P}_I$, $\mathfrak{P}_{II}$, welche resp. die beiden ersten Normalen mit der letzten bilden, die Pole der Systeme S_I, S_{II}.

Um eine Construction der Beschleunigung LL_j des Punktes L abzuleiten, denken wir uns den beiden bewegten Systemen S_I, S_{II} des Gelenkes noch eine Parallelbewegung ertheilt, so dass alle Punkte dieser Systeme eine FF_v entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeit FF_v' und eine FF_j entgegengesetzt gleiche Beschleunigung FF_j' erhalten; dann bleibt der Punkt F während zweier Zeitelemente in Ruhe und der Punkt L rotirt gleichzeitig um F mit der Geschwindigkeit $L\mathfrak{L}_v$, welche sich als Resultante aus der ursprünglichen Geschwindigkeit LL_v und der hinzugetretenen mit FF_v' gleichen und gleichgerichteten Geschwindigkeit LL_v' ergiebt. Machen wir nun auf LF die Strecke $LL_I = \overline{L\mathfrak{L}_v}^2 : LF$, so muss die in L_I auf FL errichtete Senkrechte $L_I\mathfrak{L}_j$ den Endpunkt $\mathfrak{L}_j$ der Beschleunigung $L\mathfrak{L}_j$ enthalten, mit welcher L um F rotirt. Um diese Strecke constructiv in einfacher zweckmässiger Weise zu bestimmen, ziehen wir zu L_vL die Parallele F_vZ_I bis an die Gerade FL und zu $\mathfrak{P}_IZ_I$ die Parallele $F_v\Theta_I$ ebenfalls bis an FL, so ist $\Theta_IF = LL_I$; denn aus den congruenten Dreiecken F_vFZ_I, $L_v\mathfrak{L}_vL$ folgt $Z_IF = L\mathfrak{L}_v$ und aus den ähnlichen Punktgruppen $LZ_IF\mathfrak{P}_I$, $Z_I\Theta_IFF_v$ ergiebt sich die Proportion

$$LF : Z_IF = Z_IF : \Theta_IF,$$

$$\Theta_IF = \frac{\overline{Z_IF}^2}{FL} = \frac{\overline{L\mathfrak{L}_v}^2}{FL} = LL_I.$$

Denken wir uns die unbekannte ursprüngliche Beschleunigung LL_j des Punktes L mit der durch jene Parallelbewegung hinzugekommenen Beschleunigung LL_j', welche der Strecke FF_j' gleich und gleichgerichtet ist, zusammengesetzt, so muss, wie schon erwähnt, der Endpunkt $\mathfrak{L}_j$ der resultirenden Beschleunigung $L\mathfrak{L}_j$ sich in jener durch L_I auf FL senkrecht gezogenen Geraden befinden. Bezeichnen wir mit G_I, H_I resp. die Fusspunkte der von L_j, F_j auf FL gefällten Senkrechten, so folgt, weil $\mathfrak{L}_jL_j \# FF_j$ ist, $L_IG_I = FH_I$; und demnach ist

$$LG_I = \Theta_IH_I, \quad H_IG_I = \Theta_IL.$$

Die analogen Beziehungen treten auf, wenn wir den beiden bewegten Systemen S_I, S_{II} des Gelenkes eine Parallelbewegung ertheilt denken, so dass der Punkt N während zweier Zeitelemente in Ruhe bleibt. Wir ziehen dem gemäss zu $L_{\mathfrak{v}}L$ die Parallele $N_{\mathfrak{v}}Z_{II}$ bis an die Gerade NL und zu $\mathfrak{P}_{II}Z_{II}$ die Parallele $N_{\mathfrak{v}}\Theta_{II}$ ebenfalls bis an NL; dann ergiebt sich

$$\Theta_{II}N = \frac{\overline{Z_{II}N}^2}{LN};$$

und ferner folgt, wenn H_{II}, G_{II} die Fusspunkte der von N_j und L_j auf NL gefällten Senkrechten bezeichnen,

$$LG_{II} = \Theta_{II}H_{II}, \quad H_{II}G_{II} = \Theta_{II}L.$$

Nach diesen Darlegungen erhalten wir also, wenn für jeden der Punkte F, N in Fig. **782** die lothrechte Geschwindigkeit und die Beschleunigung resp. durch $FF_{\mathfrak{v}}$, FF_j und $NN_{\mathfrak{v}}$, NN_j gegeben sind, die folgende wichtige Construction der Beschleunigung LL_j des Gelenkpunktes L. Wir fällen von F_j, N_j resp. auf FL, NL die Senkrechten F_jH_I, N_jH_{II}, ziehen zu FL, NL die entsprechenden Parallelen $F_{\mathfrak{v}}L_{\mathfrak{v}}$, $N_{\mathfrak{v}}L_{\mathfrak{v}}$, welche durch ihren Schnittpunkt $L_{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit $LL_{\mathfrak{v}}$ bestimmen. Alsdann führen wir zu $L_{\mathfrak{v}}L$ die beiden Parallelen $F_{\mathfrak{v}}Z_I$, $N_{\mathfrak{v}}Z_{II}$ beziehlich bis an die Geraden FL, NL, ferner zu $\mathfrak{P}_IZ_I$ die Parallele $F_{\mathfrak{v}}\Theta_I$ bis an FL und zu $\mathfrak{P}_{II}Z_{II}$ die Parallele $N_{\mathfrak{v}}\Theta_{II}$ bis an NL. Hierauf machen wir $LG_I = \Theta_IH_I$, $LG_{II} = \Theta_{II}H_{II}$; dann ist der Schnittpunkt L_j, den die in G_I auf FL errichtete Senkrechte und die in G_{II} auf NL errichtete Senkrechte bilden, der Endpunkt der Beschleunigung LL_j des Gelenkpunktes L. Da nun die Beschleunigung der beiden Punkte F, L des Systems S_I und der beiden Punkte N, L des Systems S_{II} bekannt sind, so kann die Beschleunigung für jeden anderen Punkt dieser Systeme, wie in Art. 307 gelehrt wurde, leicht construirt werden.

Ist der Pol $\mathfrak{P}_I$ nicht zugänglich, so erhalten wir auch den Punkt Θ_I, indem wir zu $LF_{\mathfrak{v}}$ die Parallele $Z_I\Xi_I$ bis an $FF_{\mathfrak{v}}$ und zu $F_{\mathfrak{v}}Z_I$ oder $LL_{\mathfrak{v}}$ die Parallele $\Xi_I\Theta_I$ bis an FL ziehen; denn es besteht wegen der ähnlichen Punktgruppen $LZ_IFF_{\mathfrak{v}}$, $Z_I\Theta_IF\Xi_I$ die obige Proportion

$$LF : Z_IF = Z_IF : \Theta_IF.$$

In analoger Weise ergiebt sich, wenn der Pol $\mathfrak{P}_{II}$ nicht zugänglich ist, der Punkt Θ_{II}, indem wir zu $LN_{\mathfrak{v}}$ die Parallele $Z_{II}\Xi_{II}$ bis an $NN_{\mathfrak{v}}$ und zu $N_{\mathfrak{v}}Z_{II}$ oder $LL_{\mathfrak{v}}$ die Parallele $\Xi_{II}\Theta_{II}$ ziehen.

Wenn der Fall eintritt, dass $F_{\mathfrak{v}}$ in der Geraden FL oder $N_{\mathfrak{v}}$ in der Geraden NL liegt, dann können wir die Strecken Θ_IF und $\Theta_{II}N$, weil dann beziehlich $Z_IF = LL_{\mathfrak{v}} - FF_{\mathfrak{v}}$ und $Z_{II}N = LL_{\mathfrak{v}} - NN_{\mathfrak{v}}$ ist, nach den Formeln

$$\Theta_I F = \frac{\overline{Z_I F}^2}{FL}, \quad \Theta_{II} N = \frac{\overline{Z_{II} N}^2}{NL}$$

leicht in anderer Weise construiren.

Durch die Geschwindigkeit und Normalbeschleunigung eines Punktes ist der Krümmungsmittelpunkt der Bahncurve desselben bestimmt. Sind in Fig. **782** die Punkte F_n, N_n, L_n resp. die senkrechten Projectionen von F_j, N_j, L_j auf die Bahnnormalen FF_v, NN_v, LL_v, und machen wir auf denselben die Strecken

$$F\Phi = \frac{\overline{FF_v}^2}{FF_n}, \quad N\mathsf{N} = \frac{\overline{NN_v}^2}{NN_n}, \quad L\Lambda = \frac{\overline{LL_v}^2}{LL_n},$$

so sind Φ, N, Λ die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte der Bahncurven.

Bei vielen in der Praxis vorkommenden Fällen werden die Krümmungsmittelpunkte Φ, N und die Normalbeschleunigungen FF_n, NN_n bekannt sein, dann sind die Geschwindigkeiten FF_v, NN_v durch die Formeln

$$FF_v = \sqrt{F\Phi \,.\, FF_n}, \quad NN_v = \sqrt{N\mathsf{N} \,.\, NN_n}$$

bestimmt und könnnen leicht in bekannter Weise construirt werden; aber der Richtungssinn von diesen beziehlich auf $F\Phi$, $N\mathsf{N}$ senkrechten Geschwindigkeiten muss noch gegeben sein.

310. **Construction der Beschleunigung bei einem conplan bewegten ebenen System.** Wir nehmen in Fig. **783** an, dass die Punkte F, L einer starren Strecke FL, durch welche ein ebenes System S bestimmt ist, sich resp. auf den in einem festen System gegebenen Curven φ, λ bewegen, deren zugehörige Krümmungsmittelpunkte Φ, Λ sind, und dass die Beschleunigung FF_j des Punktes F bekannt sei. Demnach können wir $FL\Lambda$ als ein Gelenk betrachten, bei welchem der Punkt F auf einer Curve φ geführt wird und der Punkt Λ während zweier Zeitelemente in Ruhe ist. In diesem wichtigen Specialfalle des bewegten Gelenkes $FL\Lambda$ ergiebt sich aus der obigen allgemeinen Construction die folgende modificirte Construction der entsprechenden Beschleunigung LL_j des Punktes L.

Um zunächst die erforderliche Geschwindigkeit FF_v des Punktes F zu erhalten, machen wir auf ΦF die Strecke FF_v gleich der Normalbeschleunigung FF_n, welche durch die auf ΦF gefällte Senkrechte F_jF_n bestimmt wird; ferner beschreiben wir über ΦF_v als Durchmesser einen Halbkreis, der die Tangente der Bahncurve φ in dem Endpunkte F_v der Geschwindigkeit FF_v schneidet, deren

Richtungssinn wir als gegeben annehmen. Wenn der Punkt F_n innerhalb des Krümmungsradius ΦF liegt, können wir über ΦF als Durchmesser einen Halbkreis beschreiben, der $F_j F_n$ im Punkte U trifft; dann ist auch FU gleich der Geschwindigkeit FF_v. Ziehen wir nun durch den Endpunkt $F_\mathfrak{v}$ der zugehörigen lothrechten Geschwindigkeit $FF_\mathfrak{v} = FF_v$ zu FL die Parallele $F_\mathfrak{v} L_\mathfrak{v}$ bis an ΛL, so ist $LL_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes L. Die zugehörige Normalbeschleunigung $LL_n = \overline{LL}_\mathfrak{v}^2 : \Lambda L$ kann entweder durch die auf ΛL_v senkrechte Gerade $L_v L_\nu$, welche auf ΛL die Strecke $L_\nu L = LL_n$ bestimmt, oder auch zweckmässig vermittelst eines wechselnden Parallelenzuges construirt werden. Wir ziehen deshalb durch L eine beliebige Gerade LX und durch $L_\mathfrak{v}$ eine auf ΛL senkrechte Gerade, die LX im Punkte X trifft; wir ziehen ferner zu ΛX die Parallele $L_\mathfrak{v} Y$ bis an LX und zu $XL_\mathfrak{v}$ die auf ΛL senkrechte Parallele YL_n, welche den noch zu bestimmenden Endpunkt L_j der Beschleunigung LL_j enthält. Gemäss jener allgemeinen Construction ziehen wir $F_\mathfrak{v} Z$ parallel ΛL bis an FL, dann $Z\Xi$ parallel $F_\mathfrak{v} L$ bis an ΦF und $\Xi\Theta$ parallel ΛL bis an FL. Hierauf zeichnen wir die auf FL senkrechte Projection H des Punktes F_j, machen auf der Geraden FL die Strecke $LG = \Theta H$ und errichten auf derselben in G die Senkrechte GL_j, welche YL_n im Punkte L_j schneidet und somit die Beschleunigung LL_j bestimmt.

Wenn der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der Normalen $F\Phi$, $L\Lambda$ der Bahncurven φ, λ, der Pol des Systems S, zugänglich ist, erhalten wir den Punkt Θ einfacher, indem wir $F_\mathfrak{v} Z$ parallel ΛL und $F_\mathfrak{v}\Theta$ parallel $\mathfrak{P}Z$ ziehen. Da nun für die Systempunkte F, L die Beschleunigungen FF_j, LL_j bekannt sind, so kann für jeden anderen Punkt des bewegten Systems S die zugehörige Beschleunigung leicht in der oben angegebenen Weise bestimmt werden. Liegt insbesondere der Endpunkt F_j der gegebenen Beschleunigung auf der im Krümmungsmittelpunkte Φ auf ΦF senkrechten Geraden, dann repräsentirt $F\Phi$ die zugehörige Normalbeschleunigung und die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes F; und wir erhalten somit die entsprechende lothrechte Geschwindigkeit $LL_\mathfrak{v}$ des Punktes L einfach durch die zu FL Parallele $\Phi L_\mathfrak{v}$.

Nach der ausgeführten Construction entspricht einem Endpunkte F_j einer beliebig angenommenen Beschleunigung FF_j des Punktes F eindeutig ein Endpunkt L_j der Beschleunigung LL_j des Punktes L. Ist bei dem System S, dessen Punkte F, L sich auf den Curven φ, λ bewegen, in einer auf ΦF senkrechten Geraden

$F_n F_j$ eine Punktreihe $F_j F'_j$ .. gegeben, deren Punkte F_j, F'_j, .. wir als Endpunkte verschiedener angenommener Beschleunigungen des Punktes F betrachten, und construiren wir die entsprechenden Punkte L_j, L'_j, .. in der auf ΛL senkrechten Geraden $L_n L_j$, so sind der Construction gemäss die Punktreihen $F_j F'_j$ .. und $L_j L'_j$ .. ähnlich. Wenn wir ferner, wie in Art. 55 gelehrt wurde, den Wendepol $\mathfrak{W}$ des Systems S construiren, indem wir die Schnittpunkte, welche FL mit der Geraden $\Phi\Lambda$ und der zu ihr Parallelen $\mathfrak{P}\mathfrak{U}$ bildet, mit $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{U}$ bezeichnen, und durch $\mathfrak{U}$ zu $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ die Parallele $\mathfrak{U}F_{\mathfrak{w}}$ ziehen, die ΦF, ΛL in den Punkten $F_{\mathfrak{w}}$, $L_{\mathfrak{w}}$ trifft, so schneiden sich die in $F_{\mathfrak{w}}$ auf ΦF und die in $L_{\mathfrak{w}}$ auf ΛL errichteten Senkrechten in dem Wendepol $\mathfrak{W}$. Nehmen wir nun $F\mathfrak{W}$ als Beschleunigung des Punktes F, dann ist nach dem Satze auf S. 812 auch $L\mathfrak{W}$ die entsprechende Beschleunigung des Punktes L. Einer Punktreihe auf der Geraden $F\mathfrak{W}$ entspricht eine ähnliche Punktreihe auf der Geraden $L\mathfrak{W}$; denn es liegen je zwei entsprechende Punkte dieser Geraden in Parallelen zu FL. Infolge dieser Beziehungen sind die von den Punkten F_j, F'_j, .. und von den entsprechenden Punkten L_j, L'_j, .. gebildeten ebenen Systeme affin. Bei diesem affinen System ist der Wendepol $\mathfrak{W}$ der im Allgemeinen im Endlichen liegende Doppelpunkt, und ferner sind F, L entsprechende Punkte. Betrachten wir noch eine in der Tangente der Bahncurve φ liegende Strecke FF_v als Beschleunigung von F, so folgt nach der angegebenen Construction in diesem besonderen Falle, der beim Beginn oder beim Aufhören der Bewegung eintritt, dass die Beschleunigung von L in der Tangente der Bahncurve λ liegt und gleich LL_v ist. Demnach sind auch die Endpunkte F_v, L_v der betreffenden Geschwindigkeiten FF_v, LL_v entsprechende Punkte der affinen Systeme. Wir erhalten somit den Satz:

Die Endpunkte F_j, L_j der Beschleunigungen zweier Punkte F, L eines conplan bewegten ebenen Systems sind entsprechende Punkte zweier affiner ebener Systeme, in denen die Punkte F, L, sowie die Endpunkte F_v, L_v ihrer Geschwindigkeiten entsprechende Punkte sind und in denen der momentane Wendepol der Doppelpunkt ist.

Als Endpunkt einer Beschleunigung von F kann aber nicht jeder beliebige Punkt, sondern nur ein solcher Punkt angenommen werden, dessen auf $F\Phi$ senkrechte Projection auf der in F begrenzten durch Φ bis ins Unendliche gehenden Geraden liegt;

denn die zugehörige Normalbeschleunigung muss stets auf der concaven Seite der Bahncurve φ liegen. Dasselbe gilt, wenn wir die Beschleunigung von L annehmen, und die entsprechende Beschleunigung von F bestimmen.

311. **Darstellung der Beschleunigung bei dem Kurbelgetriebe.** Die abgeleitete Construction der Beschleunigung bei dem conplan bewegten ebenen System können wir auch bei dem Kurbelgetriebe anwenden. Denn nehmen wir an, dass in Fig. **784** die Punkte F, L der starren Strecke FL sich resp. auf den Kreisen φ, λ bewegen, deren Mittelpunkte Φ, Λ sind, so wird durch $\Phi F L \Lambda$ ein Kurbelgetriebe dargestellt, dessen Steg $\Phi\Lambda$ und dessen Koppel FL ist. Betrachten wir die Beschleunigung FF_j des Gelenkpunktes F und den Richtungssinn der Bewegung als gegeben, so ist zunächst mit der Normalbeschleunigung FF_n die Geschwindigkeit FF_v, ferner die Geschwindigkeit LL_v und die Beschleunigung LL_j des Gelenkpunktes L bestimmt. Wegen ihrer Wichtigkeit wollen wir den Gang der angegebenen Construction der Beschleunigung LL_j nochmals beschreiben.

Wir construiren zuerst vermittelst Kreisziehung die lothrechte Geschwindigkeit $FF_v = \sqrt{F\Phi \,.\, FF_n}$, ziehen $F_v L_v \parallel FL$ und bestimmen vermittelst eines wechselnden Parallelenzuges $XL_v YL_n$, bei dem $L_v Y \parallel \Lambda X$ ist und XL_v, YL_n senkrecht auf ΛL sind, oder in anderer Weise die Strecke $LL_n = \overline{LL_v}^2 : L\Lambda$; ferner fällen wir auf FL die Senkrechte $F_j H$, ziehen den wechselnden Parallelenzug $F_v Z \Xi \Theta$, bei welchem $F_v Z \parallel \Lambda L$, $Z\Xi \parallel LF_v$ und $\Xi\Theta \parallel \Lambda L$ ist; dann machen wir $LG = \Theta H$ und errichten in G auf FL die Senkrechte GL_j, welche $L_n Y$ in dem Endpunkte L_j der Beschleunigung LL_j des Punktes L trifft. Falls der Pol $\mathfrak{P}$ zugänglich ist, liefert die zu $\mathfrak{P}Z$ Parallele $F_v\Theta$ den Punkt Θ in einfacherer Weise.

In Fig. **785** ist bei dem Kurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$ für den wichtigen besonderen Fall, wenn die Beschleunigung von F durch $F\Phi$ dargestellt und als constant betrachtet wird, die Beschleunigung LL_j von L construirt. Hier tritt eine wesentliche Vereinfachung ein, weil $F\Phi$ zugleich die Normalbeschleunigung und die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes F repräsentirt. In diesem besonderen Falle ist es oft vortheilhaft, die Beschleunigung LL_j parallel nach $l\Phi$ zu verlegen und die Strecke $l\Phi$ direct zu construiren. Wir machen zu diesem Zwecke auf $Z\Phi$ die Strecke $l_n\Phi = LL_n$, errichten in l_n auf $Z\Phi$ die Senkrechte $l_n l$ und in Θ auf FL die Senkrechte Θl, dann treffen sich diese beiden Senkrechten in dem Punkte l; denn, weil auf FL die Projection ΘH von $l\Phi$ gleich der Projection LG von LL_j ist, folgt dieser Construction gemäss, dass $l\Phi \# LL_j$ ist.

Ziehen wir zu $\Phi\Lambda$ die Parallele $Z\xi$ bis an ΛL, ferner durch den Punkt ξ und den von $\Phi\Lambda$, FL gebildeten Schnittpunkt Ω die Gerade $\Omega\xi$, so bestimmt dieselbe auf ΦZ den Punkt l_n; denn nach dieser Construction ist

$$l_n\Phi : \xi\Lambda = Z\Phi : L\Lambda,$$

und, weil $\xi\Lambda = Z\Phi = LL_v$, folgt

$$l_n\Phi = \frac{\overline{LL_v}^2}{L\Lambda} = LL_n.$$

Ist der Punkt Ω aber nicht zugänglich, dann kann man diese Strecke $l_n\Phi$, welche die Normalbeschleunigung ist, auch leicht in anderer Weise construiren. Wenn wir ferner noch $l_t\Phi \# ll_n$ ziehen, so repräsentirt $l_t\Phi$ die Tangentialbeschleunigung[1]).

In diesem betrachteten speciellen Falle, bei welchem in Fig. 786 die Beschleunigung des Punktes F constant und gleich $F\Phi$ ist, können wir, weil $F\Phi$ zugleich die constante Geschwindigkeit desselben darstellt, die ausgeführte Construction der Beschleunigung $l\Phi$ des Punktes L auch auf andere Weise ableiten. Durch die Strecke $Z\Phi \# LL_v$ wird die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes L repräsentirt, und folglich ist die vom Punkte Z erzeugte Curve $\mathfrak{h}$ der um einen rechten Winkel gedrehte Hodograph erster Ordnung für die Bewegung des Punktes L. Da die Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt Z sich auf diesem Hodographen $\mathfrak{h}$ bewegt, gleich der Beschleunigung des Punktes L ist, so brauchen wir nur diese Geschwindigkeit zu bestimmen.

Bezeichnen wir mit Z_v' den Schnittpunkt, den $Z\mathfrak{P}$ mit der zu FL Parallelen ΦL_v bildet, dann repräsentirt ZZ_v' die lothrechte Geschwindigkeit des mit Z coincidirenden Punktes der Koppel FL. Beachten wir, dass die beiden Parallelen ΛL, ΦZ gleiche Drehgeschwindigkeit besitzen, so ergiebt sich die lothrechte Geschwindigkeit ZZ_v'' des mit Z zusammenliegenden Punktes der um Φ rotirenden Geraden ΦZ nach der Proportion

$$ZZ_v'' : Z\Phi = LL_v : L\Lambda$$

durch die Gerade ΩL_v, die $Z\Phi$ in Z_v'' trifft. Ziehen wir nun $Z_v'Z_v$ senkrecht FL und $Z_v''Z_v$ senkrecht ΦZ, so ist ZZ_v nach

[1]) Diese Construction der Beschleunigung hat Mohr zuerst angegeben. *Civilingenieur*. 1879. B. 25. S. 613.

Art. 28 die lothrechte Geschwindigkeit, welche der Punkt Z auf dem um einen rechten Winkel gedrehten Hodographen $\mathfrak{H}$ besitzt, und stellt somit auch die Beschleunigung des Punktes L nach Grösse und Richtung dar[1]. Ferner ist in diesem besonderen Falle die lothrechte Geschwindigkeit $ZZ''_{\mathfrak{v}}$ des mit Z coincidirenden Punktes der um Φ rotirenden Geraden gleich der Normalbeschleunigung des Punktes L.

Aus dieser Construction der Beschleunigung von L lässt sich die vorhergehende leicht ableiten. Ziehen wir $\Phi\Theta$ parallel $\mathfrak{P}Z$, ferner Θl senkrecht FL und $l_n l$ senkrecht ΦZ, so muss, weil $\Phi\Theta \# Z'_{\mathfrak{v}}Z$ und $l_n\Phi = ZZ''_{\mathfrak{v}}$ ist, die Strecke $l\Phi \# ZZ_{\mathfrak{v}}$ sein, also auch die Beschleunigung von L darstellen.

Von der Veränderung der Beschleunigung des Punktes L, die der gleichförmigen Drehung des Punktes F entspricht, gewinnen wir eine bildliche Darstellung, wenn wir diese Beschleunigung in Fig. **787**, Taf. LIII, für verschiedene Lagen von L construiren und in die Normal- und Tangentialbeschleunigung zerlegen. Um diese Construction in Erinnerung zu behalten, wollen wir den Weg derselben noch einmal durchschreiten. Wir ziehen zu ΛL die Parallele ΦZ, zu $\mathfrak{P}Z$ die Parallele $\Phi\Theta$, ferner zu $\Phi\Lambda$ die Parallele $Z\xi$ bis an ΛL und die Gerade $\mathfrak{Q}\xi$, die ΦZ in l_n trifft. Hierauf ziehen wir Θl senkrecht FL, ferner $l_n l$ senkrecht ΦZ und machen $l_t\Phi \# l l_n$. Durch Wiederholung dieser Construction liefern die Punkte l_n die Curve n, welche ein polares Diagramm der Normalbeschleunigung des Punktes L darstellt; und die Punkte l_t die Curve t, welche ein polares Diagramm der Tangentialbeschleunigung dieses Punktes repräsentirt. Ausser diesen beiden Curven ist noch der vom Punkte Z beschriebene Hodograph $\mathfrak{H}$ strichpunktirt gezeichnet, der uns ein Bild giebt von der Veränderung der Geschwindigkeit des Punktes L.

Gelangt der auf dem Kreise λ rotirende Punkt L nach L' in die Gerade $\Phi\Lambda$ und der Punkt F auf dem Kreise φ nach F', dann fällt der Construction gemäss Z' sowie Θ' mit L' zusammen, und der Punkt l'_n muss für diese Lage, weil $l'_n\Phi$ die zugehörige Normalbeschleunigung ist, auf $L\Lambda$ so bestimmt werden, dass

$$l'_n\Phi = \frac{\overline{L'\Phi}^2}{L'\Lambda}$$

---

[1] Diese vermittelst des Hodographen unter Voraussetzung gleichförmiger Drehung abgeleitete Construction hat Rittershaus mitgetheilt im *Civilingenieur*. 1880. B. 26. S. 244.

ist. Wird nun $l'_n l'$ senkrecht $\Phi\Lambda$, ferner $L'l'$ senkrecht $F'L'$ gezogen, dann repräsentirt $l'\Phi$ die Beschleunigung und $l'l'_n$ oder die gleiche und parallele Strecke $l'_t\Phi$ die Tangentialbeschleunigung des bewegten Punktes L an der Stelle L'.

In dieser besonderen Lage erkennen wir, dass die Beschleunigung $l'\Phi$ sowie die Tangentialbeschleunigung $l'l'_n$ beständig wächst, wenn die Koppel $F'L'$ des Kurbelgetriebes sich der Länge der Strecke F^0L' nähert, welche die beiden Kreise φ, λ auf der Geraden $\Phi\Lambda$ abschneiden, und dass beide in je ein Minimum übergehen, wenn die Koppel $F'L'$, wie in unserer Figur, gleich der von L' an den Kreis φ gezogenen Tangente ist. Demnach wird im Allgemeinen, je mehr die Koppel sich der Länge der Strecke F^0L' nähert, desto mehr die Ungleichförmigkeit der Bewegung des Punktes L vergrössert.

Bezeichnet man einige Lagen von L in Fig. 787 mit $1, 2, 3, ..$ und die entsprechenden Punkte auf den Curven $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{t}$ beziehlich mit 1_n, 2_n, 3_n, .. und 1_t, 2_t, 3_t, .., so kann man umgekehrt, wenn die Lage des Punktes L beliebig angenommen wird, auf der zu $L\Lambda$ Parallelen $l_n\Phi$ und Senkrechten $l_t\Phi$ resp. die Normal- und Tangentialbeschleunigung $l_n\Phi$, $l_t\Phi$ eindeutig erhalten und aus diesen die entsprechende Beschleunigung $l\Phi$ als Resultante leicht bilden.

312. **Darstellung der Beschleunigung bei dem Zwillingskurbelgetriebe.** In Fig. 788 ist bei dem Zwillingskurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$, dessen Gelenkpunkt F mit der constanten Beschleunigung $F\Phi$ rotirt, die Construction der von $\Phi\Lambda$ symmetrisch getheilten, polaren Diagramme $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{t}$ der Normalbeschleunigung und der Tangentialbeschleunigung des Gelenkpunktes L in der angegebenen Weise ausgeführt. Die zu ΛL Parallele ΦZ liefert durch ihren mit FL gebildeten Schnittpunkt Z den Hodographen $\mathfrak{h}$, die zu $Z\mathfrak{P}$ Parallele $\Phi\Theta$ bestimmt auf FL den Punkt Θ, die zu $\Phi\Lambda$ Parallele $Z\xi$ giebt auf ΛL den Schnittpunkt ξ, und durch die Gerade $\xi\mathfrak{Q}$ erhalten wir auf ΦZ den Punkt l_n; dann ergiebt sich durch den Schnittpunkt l der in Θ auf FL und der in l_n auf ΦZ errichteten Senkrechten die Beschleunigung $l\Phi$ des Gelenkpunktes L mit der zugehörigen Normalbeschleunigung $l_n\Phi$ und Tangentialbeschleunigung $l_t\Phi$. Wenn die Koppel FL sich in den Lagen F^0L^0, $F^\tau L^\tau$ auf der Geraden $\Phi\Lambda$ befindet, versagt diese Construction; dann können wir aber, wie aus Art. 135 erkannt wird, die entsprechenden lothrechten Geschwindigkeiten $Z^0\Phi$, $Z^\tau\Phi$ des Punktes L ebenfalls leicht bestimmen.

Aus der symmetrischen Gestalt des Hodographen $\mathfrak{h}$ und aus dem stetigen Uebergange der Koppel FL über die Gerade $\Phi\Lambda$ ersehen wir, dass die Tangenten an demselben in den beiden Punkten Z^0, Z^τ auf der Geraden $\Phi\Lambda$ senkrecht stehen; folglich liegen für die in der Geraden $\Phi\Lambda$ befindlichen Lagen L^0, L^τ des Punktes L die entsprechenden Beschleunigungen desselben in dieser Geraden, und demnach sind an diesen Stellen die Tangentialbeschleunigungen gleich Null. Die zugehörigen Normalbeschleunigungen $l_n^0\Phi$, $l_n^\tau\Phi$ können wir nach den bekannten Formeln

$$l_n^0\Phi = \frac{\overline{Z^0\Phi}^2}{L\Lambda}, \qquad l_n^\tau\Phi = \frac{\overline{Z^\tau\Phi}^2}{L\Lambda}$$

construiren; und die betreffenden Punkte Θ^0, Θ^τ, welche durch die Formeln

$$\Theta^0 F^0 = \frac{\overline{Z^0 F^0}^2}{FL}, \qquad \Theta^\tau F^\tau = \frac{\overline{Z^\tau \Phi^\tau}^2}{FL}$$

bestimmt sind, müssen beziehlich mit den Punkten l_n^0, l_n^τ zusammenfallen.

313. **Darstellung der Beschleunigung bei dem Schubkurbelgetriebe.** Betrachten wir bei dem in Fig. 789 dargestellten excentrischen Schubkurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda^\infty$ die Beschleunigung FF_j des rotirenden Gelenkpunktes F als gegeben, und führen wir jene für das Kurbelgetriebe abgeleitete Construction der Beschleunigung LL_j des geradlinig bewegten Gelenkpunktes L aus, so vereinfacht sich diese Construction, weil die Beschleunigung LL_j in der Bahngeraden λ desselben liegt. Wir construiren zunächst die lothrechte Geschwindigkeit $FF_\mathfrak{v}$ von F, indem wir auf ΦF die Senkrechte F_jF_n fällen, ferner, falls F_n innerhalb ΦF liegt, über ΦF als Durchmesser einen Halbkreis beschreiben, der F_jF_n im Punkte U trifft und $FF_\mathfrak{v} = FU$ machen. Hierauf ziehen wir $F_\mathfrak{v}Z$ senkrecht λ, ferner $Z\Xi$ parallel $F_\mathfrak{v}L$, dann $\Xi\Theta$ senkrecht λ und errichten auf FL die Senkrechte $\Theta\theta$, welche auf der zu λ Parallelen $F_j\theta$ die Beschleunigung θF_j des Punktes L bestimmt. Denn fällen wir auf FL die Senkrechte F_jH und machen wir $LG = \Theta H$, so erhalten wir durch die auf FL errichtete Senkrechte GL_j in der Geraden λ die Beschleunigung $LL_j = \theta F_j$. Ziehen wir auch durch Φ zu λ die Parallele hl, welche die auf FL senkrechten Geraden HF_j, $\Theta\theta$ resp. in den Punkten h, l schneidet, so ist auch $lh = LL_j$. Wenn der Pol $\mathfrak{P}$, der Schnittpunkt der Geraden ΦF, $\Lambda^\infty L$ zugänglich ist, wird der Punkt Θ einfacher durch die zu $Z\mathfrak{P}$ Parallele $F_\mathfrak{v}\Theta$ bestimmt.

Ist umgekehrt die Beschleunigung LL_j des Punktes L nebst der lothrechten Geschwindigkeit $LL_{\mathfrak{v}}$ desselben gegeben, so können wir hiernach auch leicht die entsprechende Beschleunigung FF_j des Punktes F ermitteln. Wir ziehen $L_{\mathfrak{v}}F_{\mathfrak{v}}$ parallel LF, beschreiben, wenn $F_{\mathfrak{v}}$ innerhalb ΦF liegt, über ΦF einen Halbkreis, bestimmen auf demselben den Punkt U so, dass $FU = FF_{\mathfrak{v}}$ ist, und fällen auf ΦF die Senkrechte UF_n, oder wir machen in anderer Weise $FF_n = \overline{FF}_{\mathfrak{v}}^2 : F\Phi$. Hierauf construiren wir wie vorhin den Punkt Θ, machen dann $\Theta H = LG$ und errichten auf FL die Senkrechte HF_j, welche UF_n im Punkte F_j schneidet und die Beschleunigung FF_j des Punktes F bestimmt.

In Fig. **790** ist für den besonderen Fall, wenn der Endpunkt F_j der gegebenen Beschleunigung FF_j des Punktes F in der auf ΦF senkrechten Geraden ΦF_j liegt, die entsprechende Beschleunigung $\theta F_j = LL_j$ des Punktes L in der angegebenen Weise construirt. In diesem besonderen Falle tritt eine Vereinfachung ein, weil jene Punkte $F_{\mathfrak{v}}$, F_n mit dem festen Axenpunkte Φ zusammenfallen.

Vermittelst dieser speciellen Construction erhalten wir auch, wenn allgemein in Fig. **790** für den Punkt F die Beschleunigung FF_j', welche auf ΦF_j den Punkt F_j bestimmt, gegeben ist, die entsprechende Beschleunigung LL_j' des Punktes L, indem wir zu $F\theta$ die Parallele $F_j'f$ bis an $F_j\theta$ ziehen. Nach dieser Construction ergiebt sich $\theta f = LL_j'$, weil $FF_j'F_j \sim \theta f F_j \sim LL_j'L_j$ ist.

Um in Fig. **791** für das Kurbelgetriebe aus der betrachteten Construction noch eine andere Construction der Beschleunigung LL_j abzuleiten, wenn der Endpunkt F_j der gegebenen Beschleunigung FF_j in der auf ΦF senkrechten Geraden ΦF_j liegt, ziehen wir auf FL die Senkrechte ZR bis an λ, ferner zu FR die Parallele $Z\Pi$ bis an λ und auf FL die Senkrechte $\Pi\Psi$. Nach jener Construction besteht wegen der ähnlichen Punktgruppen $\Xi\Theta FZ$ und ΦZFL die Proportion

$$Z\Theta : LZ = ZF : LF,$$

und nach dieser letzteren Construction besteht wegen der ähnlichen Punktgruppen $\Pi\Psi ZL$ und $RZFL$ die Proportion

$$\Psi Z : LZ = ZF : LF;$$

folglich ergiebt sich

$$\Psi Z = Z\Theta.$$

Bezeichnen wir mit ζ den Schnittpunkt, welchen ZR mit der zu λ Parallelen $F_j\theta$ bildet, so ist $R\Pi = \theta\zeta$ und ferner die Beschleunigung

$$LL_j = \theta F_j = \theta\zeta - F_j\zeta$$

oder $$LL_j = R\Pi - F_j\zeta.$$

Demnach erhalten wir die Beschleunigung LL_j durch die folgende Construction. Wir ziehen auf FL die Senkrechte ZR bis an λ, ferner zu FR die Parallele $Z\Pi$ bis an λ und zu λ die Parallele $F_j\zeta$ bis an ZR, dann ist die Beschleunigung $LL_j = R\Pi - F_j\zeta$ [1]).

Nehmen wir an, es rotire bei dem in Fig. **792** dargestellten excentrischen Schubkurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda^{\infty}$ der Kurbelpunkt F mit constanter Geschwindigkeit, deren Grösse gleich $F\Phi$ ist, dann repräsentirt auch $F\Phi$ die constante Beschleunigung FF_j dieses Punktes. In diesem speciellen Falle erhalten wir, wenn wir $\Phi\Theta$ parallel $Z\mathfrak{P}$ und $\Theta\theta$ senkrecht FL ziehen, die Beschleunigung $\theta\Phi = LL_j$ für den Punkt L; oder falls der Pol $\mathfrak{P}$ nicht zugänglich ist, ziehen wir $Z\Xi$ parallel ΦL, ferner $\Xi\Theta$ senkrecht λ und $\Theta\theta$ senkrecht FL. Machen wir ferner auf $L\Lambda^{\infty}$ die Strecke $LL_{\mathfrak{j}}$ gleich der Beschleunigung $\theta\Phi$ des Punktes L, und wiederholen wir diese Construction für verschiedene Lagen, die der Punkt L während einer Umdrehung der Kurbel ΦF einnimmt, dann bilden die erhaltenen Punkte $L_{\mathfrak{j}}$ das örtliche Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$ des Punktes L. Wenn die Kurbel ΦF sich im Sinne des Pfeiles φ dreht, ist in der betrachteten Lage die Beschleunigung des Punktes L mit der Geschwindigkeit desselben gleichgerichtet. Vermittelst der zu FL Parallelen $\Phi L_{\mathfrak{v}}$ wird die zugehörige lothrechte Geschwindigkeit $LL_{\mathfrak{v}}$ und damit auch das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ des Punktes L construirt.

Für die Grenzlagen L^o, L^τ des Punktes L versagt diese Construction der Beschleunigung, weil die entsprechenden Kurbellagen ΦF^o, ΦF^τ mit der Schubstange FL in je eine Gerade gelangen; und es ist dann die zu diesen beiden Lagen gehörende Strecke ZF gleich ΦF. Um für die Grenzlagen L^o, L^τ die entsprechenden Beschleunigungen $L^oL^o_{\mathfrak{j}}$, $L^\tau L^\tau_{\mathfrak{j}}$ zu bestimmen, haben wir nur zu beachten, dass wegen der ähnlichen Punktgruppen $ZF\Theta$, LFZ die Proportion

$$F\Theta : ZF = ZF : FL$$

besteht und sich für diese Grenzlagen die Strecke

$$F\Theta = \frac{\overline{\Phi F}^2}{FL}$$

---

[1]) Diese Construction wurde in dem specielleren Falle, wenn F_j mit Φ coincidirt, für das centrische Schubkurbelgetriebe zuerst von Rittershaus angegeben. *Civilingenieur.* 1879. B. 25. S. 461 und *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure.* 1883. B. 27. S. 283.

ergiebt, deren Endpunkt Θ bei der Grenzlage L^0 auf der Verlängerung von ΦF^0 und bei der Grenzlage L^τ innerhalb ΦF^τ liegt. Wenn die constante Geschwindigkeit des Punktes F nicht speciell gleich $F\Phi$, sondern allgemein gleich $n \,.\, F\Phi$ genommen wird, wo n eine beliebige Zahl bezeichnet, so ist die constante Beschleunigung des Punktes F gleich $n^2 \,.\, F\Phi$ und die zugehörige Beschleunigung des Punktes L steht zu jener Beschleunigung $L L_j$ in dem Verhältnisse $n^2 : 1$.

Die Beschleunigung $L L_j$ ist nach dem Satze S. 747 die betreffende Subnormale des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$; und folglich ist $L_\mathfrak{v} L_j$ die Normale an demselben im Punkte $L_\mathfrak{v}$. Das gezeichnete örtliche Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$ schneidet die Bahngerade λ in den zwei Punkten L^I, L^{II}; und diese geben die Lagen des Punktes L, in denen die Beschleunigung desselben gleich Null ist und die Geschwindigkeit ein Maximum erreicht. Demnach repräsentirt die Ordinate $L^I L^I_\mathfrak{v}$ des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ die grösste Geschwindigkeit von L, während der Punkt F sich auf dem durch die Todtlagen F^0, F^τ begrenzten Bogentheil $F^0 \varphi F^\tau$ bewegt, und ebenso stellt die Ordinate $L^{II} L^{II}_\mathfrak{v}$ die grösste Geschwindigkeit dar, während F den anderen Bogentheil durchläuft. Das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ ist nach Art. 142 auch die Polbahn eines entsprechenden Schubkurbelgetriebes, und an derselben kann in bekannter Weise die Tangente construirt werden. Damit ist dann auch die zugehörige Subnormale $L L_j$ bestimmt, welche die Beschleunigung des Punktes L darstellt[1].

Im betrachteten besonderen Falle, wenn in Fig. **792** die Geschwindigkeit des Kurbelpunktes F constant gleich $F\Phi$ ist, können wir die Construction der Beschleunigung des Punktes L bei dem Schubkurbelgetriebe auch vermittelst des Hodographen leicht direct ableiten. Da die Strecke ΦZ gleich und parallel der lothrechten Geschwindigkeit $L L_\mathfrak{v}$ des Punktes L ist, so beschreibt der Punkt Z auf der Geraden $\Phi \mathfrak{h}$ den um einen rechten Winkel gedrehten Hodographen $\mathfrak{h}$ erster Ordnung für die Bewegung des Punktes L; folglich repräsentirt die lothrechte Geschwindigkeit $Z Z_\mathfrak{v}$, mit welcher der Punkt Z sich auf der Geraden $\mathfrak{h}$ bewegt, die Beschleunigung von L. Um die Strecke $Z Z_\mathfrak{v}$ zu construiren, ziehen wir zu $L F$ die Parallele $\Phi Z'_\mathfrak{v}$ bis an die Gerade $\mathfrak{P} Z$, ferner auf $F L$

[1]) Auf diese Weise hat Taubeles in diesem besonderen Falle die Construction der Beschleunigung bei dem Schubkurbelgetriebe abgeleitet. *Civilingenieur.* 1886. B. 32. S. 635.

die Senkrechte $Z_{\mathfrak{v}}'Z_{\mathfrak{v}}$, welche die auf ΦZ senkrechte Gerade $ZZ_{\mathfrak{v}}$ im Punkte $Z_{\mathfrak{v}}$ trifft. Nach dieser Construction ist $ZZ_{\mathfrak{v}}'$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit Z coincidirenden Punktes der Geraden FL und $ZZ_{\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit von Z, resp. die Beschleunigung von L[1]. Beachten wir, dass die Dreiecke $\Phi\theta\Theta$, $ZZ_{\mathfrak{v}}Z_{\mathfrak{v}}'$ congruent sind, weil $\Phi\Theta \# Z_{\mathfrak{v}}'Z$, $\theta\Theta \parallel Z_{\mathfrak{v}}'Z_{\mathfrak{v}}$ und $\theta\Phi \parallel ZZ_{\mathfrak{v}}$ ist, so folgt $\theta\Phi = ZZ_{\mathfrak{v}}$, und wir gelangen zu der obigen Construction, bei welcher $\Phi\Theta$ parallel $Z\mathfrak{P}$ gezogen wird, oder der Punkt Θ durch die zu ΦL Parallele $Z\Xi$ und durch die auf λ Senkrechte $\Xi\Theta$ bestimmt wird.

In Fig. **793** ist für ein centrisches Schubkurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda^{\infty}$, dessen Kurbelpunkt F sich mit der constanten Geschwindigkeit gleich $F\Phi$ bewegt, in der angegebenen Weise vermittelst der zu λ Parallelen $Z\Xi$, der auf λ Senkrechten $\Xi\Theta$ und der auf FL Senkrechten $\Theta\theta$ die Beschleunigung $\theta\Phi = LL_{\mathfrak{j}} = LL_{\mathfrak{j}}$ des Punktes L bestimmt und dadurch das örtliche Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$ desselben construirt. Die Beschleunigungen $L^0L_{\mathfrak{j}}$, $L^{\tau}L_{\mathfrak{j}}^{\tau}$ für die Todtlagen F^0L^0, $F^{\tau}L^{\tau}$, bei welchen diese Construction versagt, erhalten wir, wenn wir auf $\Phi\lambda$ die Strecke $\Phi\Gamma = FL$ machen, ferner auf $\Phi\lambda$ den senkrechten Radius $\Phi F'$ und auf $F'\Gamma$ die Senkrechte $F'\Delta$ bis an $\Phi\lambda$ ziehen. Dann ist nach jener Formel $F\Theta = \overline{\Phi F}^2 : FL = \Phi\Delta$, und dem zufolge ergiebt sich $L^0L_{\mathfrak{j}}^0 = \Delta F^0$, $L^{\tau}L_{\mathfrak{j}}^{\tau} = \Delta F^{\tau}$. Das örtliche Beschleunigungsdiagramm ist in diesem besonderen Falle eine von den beiden Punkten $L_{\mathfrak{j}}^0$, $L_{\mathfrak{j}}^{\tau}$ begrenzte Curve $\mathfrak{j}$, die von dem Punkte $L_{\mathfrak{j}}$ während eines Hin- und Herganges des Punktes L in dem einen und dem anderen Sinne durchlaufen wird. Wenn der Punkt L sich in dem von $\mathfrak{j}$ und $\Phi\lambda$ gebildeten Schnittpunkte L^I befindet, ist seine Beschleunigung gleich Null. Vermittelst der zu FL Parallelen $\Phi L_{\mathfrak{v}}$ wird auf $L\Lambda^{\infty}$ die lothrechte Geschwindigkeit $LL_{\mathfrak{v}}$ des Punktes L bestimmt und das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ desselben construirt. Die zum Punkte L^I gehörenden beiden gleichen Ordinaten $L^IL_{\mathfrak{v}}^I$, $L^IL_{\mathfrak{v}}^{II}$ repräsentiren die grösste Geschwindigkeit, welche der Punkt L in der Lage L^I auf dem Hin- und Hergange erhält.

314. **Darstellung der Beschleunigung bei einer Dampfmaschine.** Bei der Untersuchung schnellgehender Dampfmaschinen ist es wichtig, die auftretenden Beschleunigungsdrücke in allen Einzel-

---

[1] Diese von Schadwill zuerst abgeleitete Construction war die allererste graphische Bestimmung der Beschleunigung beim Schubkurbelgetriebe. *Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen.* 1876. S. 446.

heiten zu erkennen; und dies wird durch die Bestimmung der Beschleunigungen und die Ermittelung der betreffenden bewegten Massen ermöglicht [1]). Wir haben daher die obigen Constructionen des Beschleunigungsdiagramms und des Geschwindigkeitsdiagramms auch bei der in Fig. **794** schematisch dargestellten Horizontaldampfmaschine beispielsweise ausgeführt. Unter der Annahme, dass der Punkt F der Kurbel ΦF mit der constanten Geschwindigkeit $F\Phi$ rotirt, ist die Beschleunigung $LL_j = \theta\Phi$ der Kolbenstange LK und des Kolbens K vermittelst der zu λ Parallelen $Z\Xi$, der auf λ Senkrechten $\Xi\Theta$ und der auf FL Senkrechten $\Theta\theta$ construirt; und durch das gezeichnete Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$ sind die Beschleunigungen, welche den verschiedenen Lagen entsprechen, dargestellt. Um ferner für die Punkte A, B, C, . . einer Punktreihe ABC . . auf der Pleuelstange FL die zugehörigen Beschleunigungen AA_j, BB_j, CC_j, . . zu erhalten, haben wir nur zu beachten, dass die Punktreihen $\Phi A_j B_j C_j \,..\, L_j$ und $FABC \,..\, L$ ähnlich sind. Wenn wir diese Beschleunigungen zerlegen in je zwei Componenten, die z. B. beziehlich in der Geraden FL liegen und senkrecht auf derselben stehen, oder die resp. parallel und senkrecht ΦL sind, so sind auch die Punktreihen, welche von den Endpunkten dieser Componenten gebildet werden, der Punktreihe $FAB \,..\, L$ ähnlich. Wir erlangen durch diese Beziehungen eine einfache Construction dieser Componenten, welche bei der weiteren Behandlung zur Bestimmung der Beschleunigungsdrücke führt [2]).

315. **Darstellung der Beschleunigung bei dem gleichschenkeligen Schubkurbelgetriebe und bei dem Kreuzkurbelgetriebe.** In Fig. **795** ist ein gleichschenkeliges Schubkurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda^\infty$ gezeichnet, dessen Schubstange FL also gleich der Kurbel ΦF ist. Wir nehmen wieder an, dass der Kurbelpunkt F mit einer constanten Geschwindigkeit gleich $F\Phi$ rotire; dann vollzieht der auf der Geraden λ bewegte Punkt L und der drehbar angeschlos-

[1]) Die Beachtung der Beschleunigungsdrücke stammt von Porter; siehe „The Allen Engine“. *Engineering*. 1868. Vol. V. p. 158. Eine weitere Ausführung gab Radinger, „Ueber Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit“. *Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- u. Architekten-Vereins*. 1869. Jahrg. 21. S. 185. Aber von Radinger wird nur ein angenähertes Beschleunigungsdiagramm construirt, welches von dem richtigen Beschleunigungsdiagramm sehr beträchtlich abweicht und zu ungenauen Resultaten führt.

[2]) Proell, *Versuch einer graphischen Dynamik*. 1874. S. 209, und im *Civilingenieur*. 1872. B. 18. S. 110. — Marcus, „Aufgaben aus der angewandten Kinematik“. *Civilingenieur*. 1884. B. 30. S. 23.

sene Schlitten eine geradlinige harmonische Bewegung. Die Beschleunigung des Punktes L oder des Schlittens ergiebt sich, indem wir $Z\Xi$ parallel λ und $\Xi\Theta$ senkrecht λ ziehen, weil die Punkte L, Θ coincidiren, durch die Strecke $L\Phi$; und demnach erhalten wir, wenn wir auf $L\Lambda^{\infty}$ die Strecke $LL_{\mathfrak{j}} = L\Phi$ machen, für diese geradlinige harmonische Bewegung als örtliches Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$ eine von den Punkten $L^0_{\mathfrak{j}}$, $L^{\tau}_{\mathfrak{j}}$ begrenzte gerade Strecke, welche durch Φ geht und mit der Geraden λ den Winkel von 45° bildet. Das zugehörige örtliche Geschwindigkeitsdiagramm ist ein über den Schwingungsweg L^0L^{τ} als Durchmesser beschriebener Kreis $\mathfrak{v}$. Der stetige Uebergang des Punktes L über die Schwingungsmitte Φ wird, wie in Art. 144 angegeben ist, durch Eingriffspaarung vermittelt. Da die Endpunkte der Beschleunigungen von den Punkten F, L des durch die Strecke FL bestimmten, bewegten ebenen Systems coincidiren, so liegen die Endpunkte aller Punkte dieses Systems in Φ. Demnach bewegen sich die Punkte, welche auf dem über LZ als Durchmesser beschriebenen Systemkreise p liegen, harmonisch auf geraden Strecken, und alle anderen Systempunkte, mit Ausnahme des Punktes F, der sich gleichförmig auf dem Kreise φ bewegt, vollziehen harmonische elliptische Bewegungen. Der Systemkreis p rollt bei dieser Bewegung gleichförmig in dem festen Kreise $\mathfrak{v}$, der zugleich die Polbahn bildet.

Bei dem in Fig. **796** dargestellten rechtwinkeligen Kreuzkurbelgetriebe, dessen Kurbelpunkt F mit der constanten Geschwindigkeit gleich $F\Phi$ rotirt, vollzieht das Schlitzglied mit der Stange λ eine geradlinige harmonische Bewegung; und die Beschleunigung desselben erhalten wir gemäss unserer Construction, weil die Gerade ZFL^{∞} zur Längsrichtung des Schlitzes senkrecht ist, durch den Abstand $\theta\Phi$ der Schlitzmitte θ von Φ. Wenn A^m die Mitte des Schwingungsweges A^0A^{τ} eines Stangenpunktes A bezeichnet, so stellt die Strecke AA^m die Beschleunigung von A dar; und indem wir $AA_{\mathfrak{j}} = AA^m$ machen, ergiebt sich als örtliches Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$ dieses Punktes die gerade Strecke $A^0_{\mathfrak{j}}A^{\tau}_{\mathfrak{j}}$, welche durch A^m geht und mit λ den Winkel von 45° bildet. Der über A^0A^{τ} als Durchmesser beschriebene Kreis $\mathfrak{v}$ ist das zugehörige örtliche Geschwindigkeitsdiagramm. Dieselben Beziehungen treten bei dem in Fig. **797** dargestellten, schrägen Kreuzkurbelgetriebe auf und sind wegen der gleichartigen Bezeichnung ohne weitere Erörterung verständlich. Bei dem Kreuzkurbelgetriebe ergiebt sich auch direct, wenn wir die Beschleunigung $F\Phi$

des Kurbelpunktes F in zwei Componenten parallel zur Geraden λ und parallel zur Schlitzrichtung zerlegen, durch die erste Componente die Beschleunigung des Schlitzgliedes und durch die zweite Componente die Beschleunigung des Schlittens in dem Schlitze.

316. **Construction der Beschleunigungen bei dem Schleifkurbelgetriebe mit gegebener Beschleunigung der Kurbel.** In Fig. 798, Taf. LIV, ist ein excentrisches Schleifkurbelgetriebe $\Phi F L^\infty \Lambda$ gezeichnet, bei welchem die Stange Fs, resp. die Gerade s des bewegten Systems FL^∞, während der Drehung der Kurbel ΦF in einer Hülse an dem um Λ beschriebenen Kreisbogen λ gleitet. Wir wollen zuerst den Fall betrachten, in welchem die Beschleunigung der Kurbel bekannt ist und die Darstellung der Beschleunigungen der beiden Systeme oder Glieder FL^∞, ΛL^∞ ausgeführt werden soll. Für das Glied FL^∞ oder Fs ist die Beschleunigung sowohl im Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda$, welches das Gestell vertritt, als auf das Glied ΛL^∞ zu bestimmen.

Um zunächst für die Bahncurve des mit dem Berührungspunkte coincidirenden Punktes D der Geraden s den Krümmungsmittelpunkt Δ in der auf s senkrechten Geraden ΛL^∞ zu construiren, ist zu beachten, dass dem unendlich fernen Punkte L^∞ der Kreismittelpunkt Λ auch als Krümmungsmittelpunkt entspricht. Wir erhalten dann gemäss den in Art. 49 erörterten Beziehungen, wenn wir auf s die Senkrechte ΦZ fällen, die zu ΛL^∞ parallel ist, ferner den Punkt Z mit dem Pol $\mathfrak{P}$ durch die Gerade $Z\mathfrak{P}$ verbinden, welche $\Phi\Lambda$ im Punkte χ schneidet, durch die Gerade $F\chi$ auf ΛL^∞ den Krümmungsmittelpunkt Δ.

Ist nun die Beschleunigung des Punktes F gegeben, so kann die Beschleunigung des Stangenpunktes D, wie in Art. 310 gelehrt wurde, construirt werden, und es sind damit die Beschleunigungen aller Punkte des Systems FL^∞ bestimmt. Nehmen wir z. B. an, es liege der Endpunkt F_j der gegebenen Beschleunigung von F in der auf ΦF senkrechten Geraden ΦF_j, dann ergiebt sich die entsprechende Beschleunigung DD_j des Punktes D durch die folgende Construction. Wir fällen von F_j und Φ auf s die Senkrechten F_jH, ΦZ, ziehen zu ΦD die Parallele $Z\Xi$ bis an ΦF und $\Xi\Theta$ senkrecht auf s. Ferner ziehen wir zu s die Parallele $\Phi D_\mathfrak{v}$ bis an ΛL^∞, zu $\Phi\Delta$ die Parallele $D_\mathfrak{v} Y$ bis an ΦD und zu s die auf ΛL^∞ senkrechte Parallele YD_n, auf welcher der Punkt D_j durch Antragung der Strecke $D_n D_j = \Theta H$ bestimmt wird. Denn es ist, wenn wir auf s die Strecke DG oder DD_t gleich ΘH machen, diese Strecke die senkrechte Projection von der Beschleunigung DD_j auf s. Es wird demnach durch $DD_n = \overline{DD_\mathfrak{v}}^2 : D\Delta$ die Normalbeschleunigung und durch $DD_t = \Theta H$ die Tangentialbeschleunigung des Punktes D dargestellt. Der Punkt Θ kann auch durch die zu $\mathfrak{P}Z$ parallele Gerade $\Phi\Theta$ construirt werden. Diese Bestimmung der Beschleunigung DD_j gilt auch allgemein für die Bewegung eines ebenen Systems, bei welchem ein Systempunkt F sich auf einer Curve φ bewegt, deren zugehöriger Krümmungsmittelpunkt Φ ist, und eine Systemgerade Fs an einer Curve λ gleitet, deren zugehöriger Krümmungsmittelpunkt Λ ist.

Um bei dem betrachteten Schleifkurbelgetriebe die Beschleunigung für einen Punkt des um Λ rotirenden Systems ΛL^∞, z. B. für den mit F momentan coincidirenden Punkt E dieses Systems zu bestimmen und ferner auch die Beschleunigung zu ermitteln, mit welcher sich die Stange Fs in der Hülse des Gliedes ΛL^∞ verschiebt oder das System FL^∞ im Bezug auf das System ΛL^∞ bewegt, wenden wir den Coriolis'schen Satz an. Angenommen, es sei die Strecke EE_j die Beschleunigung des Punktes E im Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda$, es sei ferner die zu s parallele Strecke E_jN die Beschleunigung des Punktes F im Bezug auf das rotirende System ΛL^∞ und die auf s senkrechte Strecke NF_j die Zusatzbeschleunigung, so ergiebt sich für die Beschleunigung FF_j die geometrische Summe

$$FF_j = \overline{EE_j} + \overline{E_jN} + \overline{NF_j}.$$

Bezeichnen wir die Schnittpunkte, welche die Gerade $E\Lambda$ mit den auf s senkrechten Geraden ΦZ, $\Xi\Theta$ bildet, resp. mit $E_\mathfrak{v}$, E_n, so ist nach Art. 148 die Strecke $EE_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes E im Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda$ und die Strecke $E_\mathfrak{v}\Phi$ gleich der lothrechten Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt F nebst der Geraden s sich in dem Gliede ΛL^∞ bewegt. Ferner folgt, weil $F\Theta = \overline{FZ}^2 : FD$ ist, dass auch $EE_n = \overline{EE_\mathfrak{v}}^2 : E\Lambda$ ist und somit die Normalbeschleunigung des Punktes E darstellt. Demnach muss der Punkt E_j in der auf $E\Lambda$ senkrechten Geraden E_nE_j liegen. Bezeichnet ω die Drehgeschwindigkeit des Systems ΛL^∞ im Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda$, so ist

$$\omega = \frac{EE_\mathfrak{v}}{E\Lambda},$$

und die Zusatzbeschleunigung

$$NF_j = 2\,\frac{E_\mathfrak{v}\Phi\,.\,EE_\mathfrak{v}}{E\Lambda}.$$

Hiernach ergiebt sich infolge der Proportionen

$$E_n\Xi : E_\mathfrak{v}\Phi = \Theta\Xi : Z\Phi = EZ : ED = EE_\mathfrak{v} : E\Lambda$$

$$E_n\Xi = \frac{E_\mathfrak{v}\Phi \,.\, EE_\mathfrak{v}}{E\Lambda},$$

und ferner

$$NF_j = 2 \,.\, E_n\Xi.$$

Tragen wir nun auf die zu s senkrechte Geraade F_jH die Zusatzbeschleunigung $NF_j = 2 \,.\, E_n\Xi$ in dem durch die Drehrichtung des Punktes F bestimmten Sinne ab, und ziehen wir durch N zu s die Parallele NE_j bis an E_nE_j, dann ist EE_j die Beschleunigung des zum System ΛL^∞ gehörenden Punktes E im Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda$, und ferner ist E_jN die Beschleunigung, mit welcher sich der Punkt F nebst der Geraden s in dem System ΛL^∞ bewegt.

Bei diesen Constructionen der Beschleunigungen haben wir die gegebene Beschleunigung FF_j des Punktes F so angenommen, dass der Endpunkt der zugehörigen Normalbeschleunigung in dem festen Axenpunkte Φ liegt und damit auch der Endpunkt der zugehörigen lothrechten Geschwindigkeit sich in demselben befindet. Wenn wir aber allgemein eine beliebige Beschleunigung des Punktes F annehmen, so können wir stets nach den abgeleiteten Constructionen verfahren und dann durch Proportionalität die entsprechenden Beschleunigungen bestimmen.

Die Constructionen der Beschleunigungen vereinfachen sich sehr bei dem in Fig. **799** gezeichneten centrischen Schleifkurbelgetriebe $\Phi F L^\infty \Lambda$, weil die Stange Fs durch den festen Axenpunkt Λ geht. Wir wollen den für die Praxis wichtigen Fall betrachten, in welchem die Kurbel ΦF sich gleichförmig dreht, und annehmen, dass die constante lothrechte Geschwindigkeit des Kurbelpunktes F gleich $F\Phi$ ist; dann ist auch die constante Beschleunigung desselben gleich ΦF. Behufs der Construction der Tangentialbeschleunigung DD_t des momentan mit Λ coincidirenden Punktes D der Stange Fs im Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda$ ziehen wir auf s die Senkrechte ΦZ, zu $\Phi\Lambda$ die Parallele $Z\Xi$ bis an ΦF, auf s die Senkrechte $\Xi\Theta$ und machen $DD_t = \Theta Z$. Um ferner die zugehörige Normalbeschleunigung DD_n zu erhalten, beachten wir, dass der Krümmungsmittelpunkt Δ der vom Punkte D beschriebenen Curve in der Mitte von $\mathfrak{P}D$ liegt, weil in dem vollständigen Viereck $\Phi FZ\chi$, dessen Seite $F\chi$ den Krümmungsmittelpunkt Δ auf $\mathfrak{P}D$ bestimmt, die Seite ΦZ parallel $\mathfrak{P}D$ ist. Da nun die Normalbeschleunigung

$$DD_n = 2\,\frac{\overline{DD_\mathfrak{v}}^2}{D\mathfrak{P}} = 2\,\frac{\overline{Z\Phi}^2}{D\mathfrak{P}}$$

ist, und aus der Proportion

$$\Theta\Xi : Z\Phi = Z\Phi : D\mathfrak{P},$$

$$\Theta\Xi = \frac{\overline{Z\Phi}^2}{D\mathfrak{P}}$$

folgt, so ergiebt sich:

$$DD_n = 2 . \Theta\Xi.$$

Aus den beiden so erhaltenen Componenten DD_t, DD_n bilden wir dann als Resultante die Beschleunigung DD_j des Punktes D; und durch die Beschleunigungen $F\Phi$, DD_j der Punkte F, D des Systems FL^x sind die Beschleunigungen aller Punkte desselben im Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda$ bestimmt.

Die Tangentialbeschleunigung $DD_t = \Theta Z$ des Stangenpunktes D repräsentirt, weil dieser Punkt D momentan mit dem festen Axenpunkte Λ coincidirt, auch zugleich die Beschleunigung, mit welcher die Stange Fs sich in der Hülse des Systems ΛL^x verschiebt oder der Punkt F sich im Bezug auf dieses System bewegt.

Um die Beschleunigung EE_j des mit F coincidirenden Punktes E des Systems ΛL^x zu construiren, deren Endpunkt E_j bei dem centrischen Schleifkurbelgetriebe in der auf $F\Lambda$ senkrechten Geraden $\Theta\Xi$ liegt, beachten wir, dass in diesem besonderen Falle die Zusatzbeschleunigung

$$N\Phi = 2 . \Theta\Xi = DD_n$$

ist. Wir tragen auf ΦZ die Zusatzbeschleunigung $N\Phi = 2 . \Theta\Xi$ oder gleich der Normalbeschleunigung DD_n in dem durch die Drehrichtung des Punktes F bestimmten Sinne ab und ziehen durch N zu s die Parallele NE_j bis an $\Theta\Xi$. Hiernach ist die Strecke $E_j\Phi \# DD_j$; und diese Beziehung erhalten wir auch, wenn wir uns dem ganzen Mechanismus eine momentane Parallelbewegung ertheilt denken, durch welche der Stangenpunkt D in Ruhe versetzt wird und allen Punkten eine DD_j entgegengesetzt gleiche Beschleunigung hinzugefügt wird.

Diese ausgeführte Construction ergiebt sich auch ohne Ableitung aus der allgemeinen Beziehung, wenn wir beachten, dass bei dem centrischen Schleifkurbelgrtriebe die Strecke EZ die lothrechte Geschwindigkeit von E im Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda$ und $Z\Phi$ die lothrechte Geschwindigkeit von F im Bezug auf das Glied ΛL^x darstellt. Demnach ist die Zusatzbeschleunigung

$$N\Phi = 2\frac{Z\Phi . EZ}{E\Lambda};$$

und ferner ergiebt sich infolge der Proportion

$$\Theta\Xi : Z\Phi = EZ : E\Lambda,$$

$$N\Phi = 2 \,.\, \Theta\Xi.$$

Wenn nun die Beschleunigung EE_j des Punktes E des um den festen Axenpunkt Λ drehbaren Systems ΛL^x bestimmt ist, so erhalten wir zu jedem Punkte dieses Systems die zugehörige Beschleunigung in bekannter Weise.

317. **Darstellung der Beschleunigungen bei der Dampfmaschine mit schwingendem Cylinder und bei der Morey'schen Dampfmaschine mit rotirendem Cylinder.** In Fig. **800** ist eine Dampfmaschine mit schwingendem Cylinder schematisch gezeichnet, die aus einem centrischen schwingenden Schleifkurbelgetriebe besteht. Der Dampfcylinder, in welchem der Kolben K nebst der Schubstange s gleitet, schwingt um die feste Axe Λ, und vermittelst der Schubstange s wird die Kurbel ΦF um die feste Axe Φ gedreht[1]). Behufs der Darstellung der Beschleunigungen nehmen wir an, dass der Kurbelpunkt F gleichförmig mit der constanten lothrechten Geschwindigkeit $F\Phi$ rotirt und dem gemäss auch die constante Beschleunigung $F\Phi$ besitzt. Um zunächst den Beschleunigungszustand für die Schubstange s und den Kolben K in der gezeichneten Lage zu bestimmen, construiren wir die Beschleunigung DD_j des mit Λ coincidirenden Punktes D des Systems FK, indem wir ΦZ senkrecht auf s, ferner $Z\Xi$ parallel zu $\Phi\Lambda$ und $\Xi\Theta$ senkrecht auf s ziehen; dann erhalten wir in der Geraden s die Tangentialbeschleunigung $DD_t = \Theta Z$ und senkrecht auf s die Normalbeschleunigung $DD_n = 2 \,.\, \Theta\Xi$, aus welchen die Beschleunigung DD_j resultirt. Durch die Beschleunigungen $F\Phi$, DD_j der Punkte F, D des Systems oder Gliedes FK sind die Beschleunigungen aller Punkte desselben bestimmt.

Für mehrere Lagen, in welche das Glied FK gelangt, wenn der Kurbelpunkt F den Halbkreis $F^0 F^l F^\tau$ durchläuft, sind die entsprechenden Componenten der Beschleunigung des jeweilig mit Λ coincidirenden Punktes D des Systems FK construirt. Dadurch erhalten wir die entsprechenden Hälften des polaren Diagramms t für die Tangentialbeschleunigung und des polaren Diagramms n für die Normalbeschleunigung des Punktes D, weil diese beiden Diagramme von der Geraden $\Phi\Lambda$ symmetrisch getheilt werden.

[1]) Diese Dampfmaschine mit schwingendem Cylinder wurde zuerst von Murdock im Jahre 1785 ausgeführt. Muirhead, *Mechanical Inventions of James Watt*. 1855. Vol. III. Plate 34.

Befindet sich der Kurbelpunkt F in den Berührungspunkten F^I, F^{II} der von Λ an den Kurbelkreis φ gehenden Tangenten, dann fallen die Punkte F, Z zusammen; dem zufolge ist für diese Lagen sowohl die Tangential- als die Normalbeschleunigung des mit Λ coincidirenden Punktes D gleich Null. Die Gerade Fs schneidet den Kreis φ in dem zweiten Punkte F'; und wenn der Kurbelpunkt F sich in F' befindet, erhalten wir, indem wir zu $\Phi\Lambda$ die Parallele $Z\Xi'$ bis an $\Phi F'$ und $\Xi'\Theta'$ senkrecht auf s ziehen, die entsprechende Tangentialbeschleunigung $DD'_t = \Theta'Z$ und die Normalbeschleunigung $DD'_n = 2 \,.\, \Theta'\Xi'$, aus denen die Beschleunigung DD'_j resultirt. Dieser Construction gemäss liegen die beiden Beschleunigungen DD_j, DD'_j in einer Geraden.

In den Todtlagen des Gliedes FK, denen die auf $\Phi\Lambda$ befindlichen Lagen F^0, F^τ des Kurbelpunktes F entsprechen, sind die zugehörigen Normalbeschleunigungen des Punktes D gleich Null; und die in der Geraden $\Phi\Lambda$ liegenden zugehörigen Tangentialbeschleunigungen DD^0_t, DD^τ_t können, weil jene Construction in diesen Todtlagen versagt, nach der Proportion

$$F\Theta : FZ = FZ : F\Lambda$$

bestimmt werden. Hieraus ergiebt sich, weil dann $FZ = \Phi F$ und $F\Lambda$ resp. gleich $F^0\Lambda$, $F^\tau\Lambda$ ist,

$$DD^0_t = \Phi F + \frac{\overline{\Phi F}^2}{F^0\Lambda} = \frac{\Phi F \,.\, \Phi\Lambda}{F^0\Lambda},$$

$$DD^\tau_t = \Phi F - \frac{\overline{\Phi F}^2}{F^\tau\Lambda} = \frac{\Phi F \,.\, \Phi\Lambda}{F^\tau\Lambda}.$$

Die Tangentialbeschleunigung DD_t repräsentirt auch die Beschleunigung, mit welcher das Glied FK sich in dem schwingenden Cylinder bewegt; und demnach ist die Curve t auch ein polares Beschleunigungsdiagramm für die Bewegung des Kolbens und der Kolbenstange im Bezug auf den Cylinder. Um aber das für diese Bewegung anschaulichere, örtliche Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$ zu erhalten, ziehen wir zum Cylinder eine Parallele o, welche wir uns mit demselben verbunden denken, und tragen auf die durch den Kolbenmittelpunkt K zu o senkrecht gezogene Gerade KO die Strecke $OK_{\mathfrak{j}} = \Theta Z = DD_t$ ab. Den Todtlagen des Gliedes FK entsprechen die Punkte $K^0_{\mathfrak{j}}$, $K^\tau_{\mathfrak{j}}$, welche durch Antragung der auf o senkrechten Strecken $O^0K^0_{\mathfrak{j}} = DD^0_t$, $O^\tau K^\tau_{\mathfrak{j}} = DD^\tau_t$ bestimmt werden. Auf diese Weise ergiebt sich das mit dem Cylinder verbunden gedachte, örtliche Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$, welches aus einer durch die Punkte K_1^0, K_1^τ begrenzten Curve besteht. Den Lagen des Punktes F in den Berührungspunkten F^I, F^{II} der von Λ an den Kurbelkreis φ gehenden Tangenten entspricht der Schnittpunkt, den dieses Beschleunigungsdiagramm mit der Geraden o bildet. Ferner ist auch das zugehörige örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ construirt, indem wir auf der Geraden KO die Strecke $OK_\mathfrak{v}$ gleich der auf s gefällten Senkrechten ΦZ machen, welche die lothrechte Geschwindigkeit des Gliedes FK im Bezug auf den Cylinder ist. Diese Geschwindigkeit wird am grössten gleich der Kurbel ΦF, wenn der Punkt F sich in jenen Berührungspunkten F^I, F^{II} befindet. Die Fusspunkte Z der von Φ auf s gefällten Senkrechten liegen auf dem Kreisbogen $F^I \Phi F^{II}$, für welchen $\Phi \Lambda$ ein Durchmesser ist.

Behufs der Construction der Beschleunigung EE_j des mit F coincidirenden und mit dem Cylinder verbunden gedachten Punktes E, machen wir auf ΦZ die Strecke $N\Phi = 2 . \Theta \Xi$ und ziehen zu s die Parallele NE_j bis an $\Theta \Xi$; und als Controle zeigt sich, dass $E_j \Phi \# DD_j$ ist. In gleicher Weise ergiebt sich die Beschleunigung $E'E_j'$ des mit F' coincidirenden und mit dem Cylinder verbunden gedachten Punktes E', wenn wir auf ΦZ die Strecke $N' \Phi = 2 . \Theta' \Xi'$ machen und zu s die Parallele $N'E_j'$ bis an $\Theta' \Xi'$ ziehen; und als Controle beachten wir, dass $E_j' \Phi \# DD_j'$ ist. Wenn der Kurbelpunkt F sich in den Berührungspunkten F^I, F^{II} befindet, wird die entsprechende Beschleunigung beziehlich durch die Radien $F^I \Phi$, $F^{II} \Phi$ dargestellt.

Bei den Todtlagen befinden sich die zugehörigen Beschleunigungen $E^0 E_j^0$, $E^\tau E_j^\tau$ in der Geraden $\Phi \Lambda$, und infolge der Proportion

$$F\Theta : FZ = FZ : F\Lambda$$

ergeben sich

$$E^0 E_j^0 = \frac{\overline{\Phi F}^2}{F^0 \Lambda}, \quad E^\tau E_j^\tau = \frac{\overline{\Phi F}^2}{F^\tau \Lambda}.$$

Soll nun in der gezeichneten Lage des Cylinders, bei welcher sich die Kurbel in ΦF befindet, für einen bestimmten Punkt A des Cylinders, der beispielsweise auf der geometrischen Cylinderaxe liegt, die Beschleunigung AA_j bestimmt werden, so ziehen wir zu EE_j die Parallele AA_j bis an die Gerade $E_j \Lambda$. In gleicher Weise erhalten wir die entsprechende Beschleunigung AA_j' des Punktes A, wenn die Kurbel nach $\Phi F'$ gelangt und der Cylinder dieselbe Lage einnimmt. Dieselben Constructionen der Beschleunigungen, welche wir hier ausgeführt haben, können auch bei dem

Schmid'schen Motor angewendet werden, der in Art. 150 betrachtet wurde.

In Fig. **801** ist die Morey'sche Dampfmaschine mit rotirendem Cylinder schematisch gezeichnet, welche ein centrisches rotirendes Schleifkurbelgetriebe bildet[1]). Dieselbe unterscheidet sich von der vorhergehenden Dampfmaschine, bei welcher der feste Axenpunkt A des Cylinders ausserhalb des Kurbelkreises φ liegt, in geometrischer Beziehung nur dadurch, dass dieser Axenpunkt A innerhalb des Kurbelkreises φ liegt. Die Construction der Beschleunigungen DD_j, DD'_j, welche den Lagen ΦF, $\Phi F'$ der Kurbel entsprechen, sind in der angegebenen Weise, wie durch die übereinstimmende Bezeichnung erkenntlich ist, vermittelst der Tangential- und Normalbeschleunigungen DD_t, DD_n und DD'_t, DD'_n construirt. Von dem polaren Diagramm $\mathfrak{t}$ der Tangentialbeschleunigung, sowie von dem polaren Diagramm $\mathfrak{n}$ der Normalbeschleunigung ist der besseren Uebersichtlichkeit wegen die eine Hälfte ausgezogen und die andere Hälfte punktirt. Ferner ist auch ebenso wie vorhin das örtliche Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$ und das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ für die Bewegung des Gliedes FK im Bezug auf den rotirenden Cylinder gezeichnet. Wenn die Kurbel sich in den Lagen ΦF^I, ΦF^{II} befindet, bei welchen die Kolbenstange s senkrecht auf ΦA steht, dann fällt der Fusspunkt Z der von Φ auf s gefällten Senkrechten ΦZ mit A zusammen; folglich wird für diese Lagen, da ΦZ gleich der Geschwindigkeit des Gliedes FK im Bezug auf den Cylinder ist, diese Geschwindigkeit am grössten gleich ΦA und die zugehörige Beschleunigung gleich Null. Für einen Cylinderpunkt A, der beispielsweise in der geometrischen Axe des Cylinders liegt, sind auch in bekannter Weise durch die Beschleunigungen EE_j, $E'E'_j$ die entsprechenden Beschleunigungen AA_j, AA'_j construirt.

318. **Construction der Beschleunigungen bei dem Schleifkurbelgetriebe mit gegebener Beschleunigung des festaxigen Schleifgliedes.** In Fig. **802** ist ein excentrisches Schleifkurbelgetriebe $\Phi F^x L A$ gezeichnet, bei dem wir das um die feste Axe Φ rotirende Glied ΦF^x das festaxige Schleifglied nennen wollen. In dem gerad-

[1]) Diese Dampfmaschine mit rotirendem Cylinder stammt von Morey aus dem Jahre 1819. *Abhandlungen der Königlichen Technischen Deputation für Gewerbe.* 1826. I. Thl. S. 110. Dieselbe wurde später von Ward, *Polytechnisches Journal.* 1822. B. 9. S. 291, und mit drei Cylindern auch von Cramer ausgeführt. *London Journal of Arts and Sciences.* Conjoined Series. 1842. Vol. XX. p. 454.

linigen Schlitze dieses Gliedes gleitet ein Schlitten, der das Glied LF^∞ vertritt, und der Gelenkpunkt L der um die feste Axe Φ rotirenden Kurbel ΦL bewegt sich auf der Mittellinie g des Schlitzes. Wir nehmen an, dass für den mit L momentan coincidirenden Punkt J des festaxigen Schleifgliedes oder Systems ΦF^∞ die Beschleunigung JJ_j im Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda$ gegeben ist und dass der Punkt J_j in der auf $J\Phi$ senkrechten Geraden ΦJ_j liegt. Um die Beschleunigung LL_j, mit welcher sich der Punkt L auf seinem Bahnkreise λ bewegt, und die Beschleunigung, welche der Punkt L auf der Geraden g besitzt, zu bestimmen, benutzen wir wieder den Coriolis'schen Satz. Angenommen, es sei die auf g senkrechte Strecke NJ_j die Zusatzbeschleunigung und die zu g parallele Strecke NL_j die Beschleunigung des Punktes L auf der Geraden g, so ergiebt sich für LL_j die geometrische Summe

$$LL_j = \overline{JJ_j} + \overline{J_jN} + \overline{NL_j}.$$

Der Punkt J besitzt im Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda$ die lothrechte Geschwindigkeit $J\Phi$, und demnach ist die Drehgeschwindigkeit des Systems Φg gleich der Einheit. Die zu LF^∞ parallele oder auf g senkrechte Gerade $\Phi\mathfrak{P}$ bestimmt auf $L\Lambda$ die lothrechte Geschwindigkeit $L\mathfrak{P}$, mit welcher sich der Punkt L im Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda$ bewegt. Ferner ist $\Phi\mathfrak{P}$ gleich der lothrechten Geschwindigkeit des Punktes L auf der Geraden g; und da die Drehgeschwindigkeit des Systems Φg gleich der Einheit ist, so ist die Zusatzbeschleunigung $J_jN = 2 \,.\, \Phi\mathfrak{P}$. Ziehen wir auf ΛL die Senkrechte $\mathfrak{P}X$ bis g, ferner zu ΛX die Parallele $\mathfrak{P}Y$ bis an g und auf ΛL die Senkrechte YL_n, so ist $LL_n = \overline{L\mathfrak{P}}^2 : L\Lambda$ die Normalbeschleunigung für den Punkt L, und die Senkrechte YL_n enthält den Punkt L_j. Machen wir nun auf der zu g Senkrechten J_jN in dem durch die Drehrichtung des Gliedes Φg bestimmten Sinne die Zusatzbeschleunigung $J_jN = 2 \,.\, \Phi\mathfrak{P}$, und ziehen wir zu g die Parallele NJ_j bis an YL_n, dann repräsentirt die Strecke LL_j die Beschleunigung des Punktes L, im Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda$ und die Strecke NL_j die Beschleunigung, mit welcher sich der Punkt L auf der Geraden g bewegt.

Um den Beschleunigungszustand des durch den Schlitten vertretenen Systems LF^∞ zu bestimmen, müssen wir ausser der Beschleunigung LL_j des Punktes L noch für einen anderen Punkt dieses Systems, z. B. für den Punkt C desselben, der mit dem Fusspunkte A der auf g gefällten Senkrechten ΦA coincidirt, die Beschleunigung CC_j im Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda$ construiren.

Zu diesem Zwecke ziehen wir auf ΦA die Senkrechte ΦA_j, welche jene auf g senkrechte Gerade $J_j N$ im Punkte A_j trifft; dann sind die Dreiecke $\Phi A A_j$, $\Phi J J_j$ ähnlich, und $A A_j$ ist die Beschleunigung des zum Gliede Φg gehörenden Punktes A. Machen wir nun nach dem Coriolis'schen Satze auf $A_j N$ die Strecke $A_j N_c = 2 . \Phi \mathfrak{P}$ und $N_c C_j \# N L_j$, so erhalten wir die gesuchte Beschleunigung $C C_j$. Die Endpunkte der Beschleunigungen von allen Punkten der mit g zusammenliegenden Geraden des Systems $L F^\infty$ befinden sich hiernach in einer auf g senkrechten Geraden $C_j L_j$. Durch die beiden Beschleunigungen $C C_j$, $L L_j$ ist der Beschleunigungszustand des Systems $L F^\infty$ im Bezug auf das feste Glied ΦL bestimmt. Da der Endpunkt $\mathfrak{P}$ der lothrechten Geschwindigheit $L \mathfrak{P}$ des Punktes L im betrachteten Falle identisch ist mit dem Pol $\mathfrak{P}$ des Systems $L F^\infty$ im Bezug auf das feste Glied $\Phi \Lambda$, so liegen die Endpunkte von allen lothrechten Geschwindigkeiten der Punkte dieses Systems in dem Pol $\mathfrak{P}$, und dem zufolge befinden sich nach S. 812 die Endpunkte ihrer Normalbeschleunigungen auf dem zugehörigen Wendekreise w. Die von den Punkten C_j, L_j, . . resp. auf $C\mathfrak{P}$, $L\mathfrak{P}$, . . gefällten Senkrechten $C_j C_n$, $L_j L_n$, . ., welche die entsprechenden Normalbeschleunigungen $C C_n$, $L L_n$, . . bestimmen, schneiden sich demnach in dem Wendepol $\mathfrak{W}$, und der Wendekreis w geht durch die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{W}$, C_n, L_n.

Ist insbesondere die Beschleunigung $J J_j = J \Phi$, fällt also der Endpunkt J_j dieser Beschleunigung mit dem festen Drehpunkte Φ zusammen, dann befinden sich die Endpunkte von allen Beschleunigungen der Punkte des Systems Φg im Punkte Φ, und die beiden Punkte N, N_c coincidiren in dem Punkte C_n des Wendekreises w. Demnach liegen die Endpunkte C_j, L_j der Beschleunigungen in dem Wendepol $\mathfrak{W}$ und $C_n \mathfrak{W}$ stellt die Beschleunigung dar, mit welcher der Punkt L sich auf der Geraden g oder der Schlitten sich in dem Schlitze des Gliedes Φg bewegt.

Um bei dem betrachteten Schleifkurbelgetriebe in Fig. **803** noch eine andere Construction für die Beschleunigungen abzuleiten, denken wir uns dem ganzen Mechanismus eine momentane Drehung um Φ ertheilt, durch welche das Glied Φg während zweier gleicher Zeitelemente in Ruhe versetzt wird. Zu der gegebenen Beschleunigung $J J_j$ des mit L coincidirenden Punktes J des Gliedes Φg tritt dann die bezüglich der Geraden ΦL symmetrisch gelegene, gleiche Beschleunigung $J J_j'$ hinzu. Dem zufolge ergiebt sich die Beschleunigung $\Lambda \Lambda_j$ des jetzt im Bezug auf das feste

Glied Φg rotirenden Punkt Λ, indem wir zu dem rechtwinkeligen Dreieck $\Phi J J_j'$ das ähnliche Dreieck $\Phi \Lambda \Lambda_j$ construiren, und dann ist die Gerade $J_j' \Lambda_j$ senkrecht auf ΛL. Wir können nun das Glied Φg als Steg eines excentrischen Schubkurbelgetriebes ansehen, bei welchem der Endpunkt Λ_j der Beschleunigung $\Lambda \Lambda_j$ des Kurbelpunktes Λ in der auf $L \Lambda$ senkrechten Geraden $\Lambda \Lambda_j$ liegt. Demnach erhalten wir, wie S. 824 angegeben wurde, die Beschleunigung $\theta \Lambda_j$, mit welcher sich der Punkt L auf der jetzt festen Geraden g bewegt, wenn wir zu $L \Phi$ die Parallele $\mathfrak{P} \Xi$ bis an $\Phi \Lambda$, ferner auf g die Senkrechte $\Xi \Theta$ bis $L \Lambda$ und auf $L \Lambda$ die Senkrechte $\Theta \theta$ ziehen, welche die zu g Parallele $\Lambda_j \theta$ im Punkte θ trifft. Betrachten wir nun wieder das Glied $\Phi \Lambda$ als fest, und versetzen wir wieder das Glied Φg in die ursprüngliche Drehung, so ergiebt sich, indem wir die Strecke $\Phi J_j'$ entgegengesetzt gleich ΦJ_j machen, auf ΛL die Senkrechte $J_j' h$ bis an g ziehen und jenen Linienzug $\mathfrak{P} \Xi \Theta \theta$ ausführen, dessen Gerade $\Theta \theta$ mit g den Schnittpunkt l bildet, die Beschleunigung $lh = \theta \Lambda_j$, mit welcher sich der Punkt L auf der Geraden g bewegt, und die Bestimmung des Punktes Λ_j ist nicht erforderlich. Machen wir ferner in der auf g senkrechten Geraden $J_j N$ die Strecke $J_j N = 2 \,.\, \Phi \mathfrak{P}$ und die zu g parallele Strecke $N L_j = lh$, dann repräsentirt $L L_j$ die Beschleunigung, welche der Kurbelpunkt L im Bezug auf das feste Glied ΛL besitzt. Wenn wir allgemein eine beliebige Beschleunigung des Punktes J annehmen, deren Endpunkt nicht in der auf $L \Phi$ senkrechten Geraden liegt, so können wir stets nach den abgeleiteten Constructionen verfahren und durch Proportionalität die entsprechenden Beschleunigungen bestimmen.

Bei dem in Fig. **804** dargestellten centrischen Schleifkurbelgetriebe wollen wir den für die Praxis wichtigen Fall betrachten, in welchem das festaxige Schleifglied Φg sich gleichförmig dreht, und die Endpunkte der Beschleunigungen desselben in dem festen Axenpunkte Φ coincidiren. Demnach ist $J \Phi$ die Beschleunigung des mit dem Gelenkpunkte L coincidirenden Punktes J des Systems Φg im Bezug auf das feste Glied $\Phi \Lambda$. Gemäss der vorhin abgeleiteten ersten Construction der Beschleunigungen ziehen wir auf g die Senkrechte $\Phi \mathfrak{P}$ bis ΛL, und auf ΛL die Senkrechte $\mathfrak{P} X$ bis an g, ferner zu ΛX die Parallele $\mathfrak{P} Y$ bis an g und auf ΛL die Senkrechte $Y L_n$. Hierauf machen wir $\Phi N = 2 \,.\, \Phi \mathfrak{P}$ und ziehen zu g die Parallele $N L_j$ bis an $Y L_n$; dann repräsentirt $N L_j$ die Beschleunigung, mit welcher sich der Punkt L auf der Geraden g bewegt, und $L L_j$ die Beschleunigung von L im

Bezug auf das feste Glied $\Phi\Lambda$. Der Punkt L_j coincidirt in diesem besonderen Falle mit dem entsprechenden Wendepol $\mathfrak{W}$, und demzufolge fallen die Endpunkte der Beschleunigungen aller Punkte des Systems $LF^{\varphi x}$ in dem jeweiligen Wendepunkte zusammen. Weil $\mathfrak{P}$ in der Mitte von ΦN liegt, ergiebt sich in diesem besonderen Falle, wenn wir auf der Geraden g die Strecke $X\sigma = \Phi X$ machen, dass die Strecke $\sigma Y = NL_j$ ist; und folglich repräsentirt auch die Strecke σY die Beschleunigung, welche der Punkt L auf der Geraden g besitzt. Ziehen wir nun $NL_j \# \sigma Y$, so erhalten wir ohne jene Gerade YL_n die Beschleunigung LL_j. Gemäss der vorhin abgeleiteten zweiten Construction ziehen wir zu g die Parallele $\mathfrak{P}\Xi$ bis an $\Phi\Lambda$, auf g die Senkrechte $\Xi\Theta$ bis an ΛL und auf ΛL die Senkrechte $\Theta\theta$ bis an g; dann ist $\theta\Phi$ die Beschleunigung, mit welcher sich der Punkt L auf der Geraden g bewegt. Machen wir ferner $\Phi N = 2 . \Phi\mathfrak{P}$ und die Strecke $NL_j \# \theta\Phi$, so ergiebt sich die Beschleunigung LL_j oder $L\mathfrak{W}$.

Wenn der Punkt L sich in einer der Durchschlagslagen, z. B. in L^0 auf der Geraden $\Phi\Lambda$ befindet, versagen die ausgeführten Constructionen. Die in der Geraden $\Phi\Lambda$ liegende, entsprechende Beschleunigung $L^0L_j^0$ kann dann, weil $LL_n = \overline{L\mathfrak{P}}^2 : L\Lambda$ ist und $\mathfrak{P}$ mit Φ zusammenfällt, nach der Formel

$$L^0L_j^0 = \frac{\overline{L^0\Phi}^2}{L\Lambda}$$

leicht construirt werden. In gleicher Weise erhalten wir die entsprechende Beschleunigung für die andere Durchschlagslage.

319. **Darstellung der Beschleunigungen bei der Schneider'schen Dampfmaschine mit rotirendem Cylinder.** Die in Fig. **805** schematisch gezeichnete Schneider'sche Dampfmaschine mit rotirendem Cylinder bildet ein centrisches rotirendes Schleifkurbelgetriebe. Der Cylinder ist an dem durch einen Kreis dargestellten Schwungrade S befestigt, welches mit der Triebwelle um die feste Axe Φ rotirt. Die Kolbenstange LK, die in der am Schwungrade S festen Hülse q gleitet, ist im Punkte L drehbar an den um die feste Axe Λ rotirenden Rahmen R geschlossen[1]. Diese Schneider'sche Dampfmaschine stimmt kinematisch mit der Morey'schen Dampfmaschine überein, und ein Unterschied besteht nur darin, dass bei der ersten der Cylinder, bei der letzten die Kurbel mit der Triebwelle einstückig verbunden ist. Nehmen wir nun an, dass das Schwungrad S mit dem Cylinder resp. das Glied ΦS

[1] *Polytechnisches Journal.* 1862. B. 163. S. 401.

gleichförmig um die feste Axe Φ rotirt und dass die Endpunkte aller Beschleunigungen der Punkte desselben in Φ sich befinden, so können wir die Beschleunigung, mit welcher der Kolben K oder die Kolbenstange KL in dem rotirenden Cylinder gleitet, sowie die Beschleunigungen, welche die Punkte des Gliedes KL im Bezug auf das feste Gestell $\Phi\Lambda$ besitzen, in der vorhin angegebenen Weise construiren. Wir ziehen nach jener ersten Construction auf die Gerade ΦL die Senkrechte $\Phi\mathfrak{P}$ bis an die Gerade ΛL, ferner auf ΛL die Senkrechte $\mathfrak{P}X$, die ΦL in X trifft, zu ΛX die Parallele $\mathfrak{P}Y$ bis an die Gerade ΦL und machen in dieser Geraden die Strecke $X\sigma = \Phi X$; dann repräsentirt σY die Beschleunigung des Gliedes LK im Cylinder und $\mathfrak{P}\Phi$ die zugehörige lothrechte Geschwindigkeit. Machen wir ferner auf der Verlängerung von $\Phi\mathfrak{P}$ die Strecke $\mathfrak{P}N = \Phi\mathfrak{P}$ und die auf ΦN Senkrechte $N\mathfrak{W} = \sigma Y$, so coincidiren die Endpunkte aller Beschleunigungen der Punkte des Gliedes KL im Bezug auf $\Phi\Lambda$ in dem zugehörigen Wendepol $\mathfrak{W}$. Es repräsentiren demnach z. B. die Strecken $K\mathfrak{W}$, $L\mathfrak{W}$ die Beschleunigungen der Punkte K, L; und durch die Beschleunigung $L\mathfrak{W}$ sind die Beschleunigungen aller Punkte des um Λ rotirenden Gliedes ΛLR bestimmt.

Um das örtliche Beschleunigungsdiagramm und das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm für die Bewegung des Gliedes KL in dem rotirenden Cylinder zu construiren, denken wir uns den Cylinder in einer Lage, z. B. in der Symmetrallage ΦL^x festgehalten und nehmen an, dass das Glied $\Phi\Lambda$ um den festen Punkt Φ gleichförmig rotire, so dass $\Lambda\Phi$ die constante Beschleunigung des Punktes Λ sei, und bestimmen bei dem so entstandenen Schubkurbelgetriebe in bekannter Weise die Beschleunigung und Geschwindigkeit des Gliedes K^xL^x in dem jetzt ruhenden Cylinder. Wir ziehen demnach für die gezeichnete Lage $\Phi\Lambda^xL^x$, welche beispielsweise jener Lage $\Phi\Lambda L$ entspricht, auf ΦL^x die Senkrechte ΦZ^x bis an Λ^xL^x, zu ΦL^x die Parallele $Z^x\Xi^x$, die $\Phi\Lambda^x$ in Ξ^x trifft; wir ziehen ferner von Ξ^x auf ΦL^x, die Senkrechte $\Xi^x\Theta^x$ bis an Λ^xL^x und auf Λ^xL^x die Senkrechte $\Theta^x\theta^x$ bis an Φ^xL^x; dann ist $\theta^x\Phi$ die Beschleunigung und $Z^x\Phi$ die Geschwindigkeit des Gliedes K^xL^x im Bezug auf den Cylinder. Machen wir nun in der auf ΦK^x errichteten Senkrechten $K^xL_j^x$ die Strecke $K^xL_j^x = \theta^x\Phi$ und $K^xL_{\mathfrak{v}}^x = Z^x\Phi$, so erhalten wir durch Wiederholung dieser Construction das örtliche Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}^x$ und das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}^x$ in der gewählten Lage des Cylinders. Denken wir uns das Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}^x$

mit dem rotirenden Cylinder verbunden und mit diesem in die Lage $\mathfrak{j}$ gelangt, dann repräsentirt die auf KL senkrechte Ordinate $KK_{\mathfrak{j}}$ die Beschleunigung des Gliedes KL in dem rotirenden Cylinder an der betreffenden Stelle.

Durch die Bestimmung der Beschleunigungen aller Glieder einer entworfenen Maschine erlangen wir erst eine tiefere Einsicht in ihre dynamischen Beziehungen und eine klarere Erkenntniss ihres praktischen Werthes. Deshalb wird auch die Anwendung der Kinematik in der theoretischen Maschinenlehre ein fruchtbares Untersuchungsfeld eröffnen und für den Maschinenbau grossen Nutzen bringen.

320. **Darstellung der Beschleunigungen bei dem gleichschenkeligen Schleifkurbelgetriebe.** Bei dem in Fig. **806** gezeichneten gleichschenkeligen Schleifkurbelgetriebe $\Phi F L^{\infty} \Lambda$ ist die Kurbel ΦF gleich dem Steg $\Phi\Lambda$ und der von dem Kurbelpunkte F beschriebene Kreis φ geht demnach durch den Axenpunkt Λ, um welchen das festaxige Schleifglied ΛL^{∞} oder Λg rotirt. Die Stetigkeit der Bewegung bei dem Uebergange des Punktes F über die Axe Λ kann, wie in Art. 152 (Fig. **408**) angegeben wurde, durch Eingriffspaarung bewirkt werden. In diesem besonderen Falle sind die Bewegungsvorgänge sehr einfach; denn bei gleichförmiger Drehung der Kurbel ΦF dreht sich auch das festaxige Schleifglied Λg gleichförmig und macht eine halbe Umdrehung, wenn die Kurbel eine ganze vollendet hat. Dem zufolge vollzieht der Schlitten, welcher das Glied FL^{∞} vertritt, in dem rotirenden festaxigen Schleifgliede Λg eine harmonische Bewegung. Wir nehmen nun zunächst an, dass die constante Beschleunigung des gleichförmig rotirenden Kurbelpunktes F gleich $F\Phi$ ist, und bestimmen nach den S. 832 für das centrische Schleifkurbelgetriebe abgeleiteten Constructionen die Beschleunigungen. Wir ziehen also ΦZ senkrecht ΛF, ferner $Z\Xi$ parallel $\Phi\Lambda$ und $\Xi\Theta$ senkrecht ΛF. Dem gemäss ergiebt sich für den mit Λ momentan coincidirenden Punkt D des Gliedes FL^{∞} die auf FD senkrechte Normalbeschleunigung $DD_n = 2 \,.\, \Theta\Xi = Z\Phi$, und der Endpunkt D_j der Beschleunigung DD_j des Punktes D im Bezug auf $\Phi\Lambda$ liegt in der zu $F\Lambda$ Parallelen ΦD_j. Es ist hiernach das polare Diagramm dieser Normalbeschleunigung ein über $\Phi\Lambda$ als Durchmesser beschriebener Kreis $\mathfrak{n}$. Nach dieser Construction ist die zugehörige in der Geraden g liegende Tangentialbeschleunigung $DD_t = \Theta Z = F\Theta = \frac{1}{4} F\Lambda$, und das polare Diagramm derselben ist ein über $\Lambda D_t^{\tau} = \frac{1}{4} \Lambda F^{\tau}$ als Durchmesser beschriebener Kreis $\mathfrak{t}$. Die aus

den Componenten DD_n, DD_t resultirende Beschleunigung DD_j ist gleich und parallel der Strecke $\Theta\Phi$; und da der geometrische Ort des Punktes Θ ein Kreis ist, so befindet sich der Punkt D_j auf einem über ΦD_t^τ als Durchmesser beschriebenen Kreise. Die Beschleunigungen aller Punkte des kardioidisch bewegten Gliedes FL^∞ sind durch die Beschleunigungen $F\Phi$, DD_j der Punkte F, D desselben bestimmt; und da die Gerade ΦD_j zu FD parallel ist, so sind alle diese Beschleunigungen nach dem zugehörigen Wendepol $\mathfrak{W}$ gerichtet, der auf dem um Φ mit dem Radius $3 . \Phi\Lambda$ beschriebenen Kreise liegt und zugleich der Beschleunigungspol ist.

Die Strecke $F\Theta = DD_t = \frac{1}{4} F\Lambda$ stellt auch die Beschleunigung dar, mit welcher sich der Punkt F in dem Schleifgliede Λg bewegt; und demnach erhalten wir, wenn wir zu g die Parallele $O^0 O^\tau$ ziehen, welche den Weg des Punktes F auf der Geraden g vertritt, und in der auf ihr senkrechten Geraden FO die Strecke $OF_{\mathfrak{j}} = \frac{1}{4} F\Lambda$ machen, das geradlinige örtliche Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$ für die harmonische Bewegung des Schlittens in dem Gliede Λg. Die grössten Beschleunigungen $O^0 F_{\mathfrak{j}}^0$, $O^\tau F_{\mathfrak{j}}^\tau$, welche in den Grenzlagen des Punktes F auftreten, sind gleich $\frac{1}{2}\Phi\Lambda$. Die Strecke $Z\Phi$ repräsentirt die entsprechende lothrechte Geschwindigkeit, welche der Punkt F oder das Glied FL^∞ in dem Gliede Λg besitzt, und indem wir auf jener Geraden FO die Ordinate $OF_{\mathfrak{v}} = Z\Phi$ machen, erhalten wir einen Punkt $F_{\mathfrak{v}}$ des zugehörigen örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$, welches eine Ellipse ist, deren Halbaxen beziehlich gleich dem Durchmesser und dem Radius des Kreises φ sind.

Nehmen wir noch an, dass für das gleichförmig rotirende Schleifglied Λg die Endpunkte der Beschleunigungen aller Punkte desselben in dem Punkte Λ coincidiren, so sind alle Beschleunigungen viermal grösser als vorhin. In diesem Falle bildet das entsprechende geradlinige Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$ mit der Geraden $O^0 O^\tau$ einen Winkel von 45°, das Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ wird dann durch einen über $O^0 O^\tau$ als Durchmesser beschriebenen Kreis vertreten und die Endpunkte der Beschleunigungen aller Punkte des kardioidisch bewegten Gliedes FL^∞ vereinigen sich in dem Wendepol $\mathfrak{W}$.

321. **Construction der Beschleunigungen bei dreigliederigen einfachen Mechanismen mit zwei niederen Paarungen und einer höheren Paarung.** Bei dem in Fig. **807** schematisch dargestellten dreigliederigen einfachen Mechanismus drehen sich die beiden Glieder ΦF, ΛL resp. um die festen Axen Φ, Λ und sind also mit dem

Steg $\Phi\Lambda$ durch je eine Drehpaarung verbunden. Ferner sind die beiden Glieder ΦF, ΛL unter sich durch eine höhere Paarung zwangläufig verbunden, welches durch die ihnen beziehlich angehörenden Rollcurven p, π geometrisch vertreten wird. Für diese Rollcurven p, π, die sich in dem auf der Geraden $\Phi\Lambda$ liegenden, momentanen Pol $\mathfrak{Q}$ der beiden Glieder ΦF, ΛL berühren, sei $\mathfrak{Q}g$ die gemeinsame Normale und $\mathfrak{Q}\mathrm{t}$ die gemeinsame Tangente. Wir nehmen nun an, dass die Beschleunigung FF_j eines Punktes F des Gliedes ΦF im Bezug auf den Steg $\Phi\Lambda$ gegeben sei, und wollen die entsprechende Beschleunigung LL_j eines Punktes L des anderen Gliedes ΛL im Bezug auf den Steg $\Phi\Lambda$ bestimmen. Für den mit dem Pol $\mathfrak{Q}$ momentan coincidirenden Punkt des Gliedes oder Systems ΦF ergiebt sich die Beschleunigung $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^h$, indem wir das Dreieck $\Phi\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^h$ ähnlich dem Dreieck ΦFF_j machen; und die auf $\Phi\Lambda$ gefällte Senkrechte $\mathfrak{Q}_j^h\mathfrak{Q}_n^h$ bestimmt die zugehörige Normalbeschleunigung $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_n^h$. Da der mit dem Pol $\mathfrak{Q}$ momentan coincidirende Punkt des Gliedes oder Systems ΛL in dem anderen System ΦF während eines Zeitelementes ruht, so ist seine Geschwindigkeit v_g in demselben gleich Null, und seine Beschleunigung in diesem System, die durch $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^g$ dargestellt sein möge, liegt in der gemeinsamen Normalen $\mathfrak{Q}g$ der Rollcurven oder steht senkrecht auf der gemeinsamen Tangente $\mathfrak{Q}\mathrm{t}$ derselben. Nach dem Coriolis'schen Satze ergiebt sich dann die Beschleunigung $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^a$ des mit $\mathfrak{Q}$ momentan coincidirenden Punktes des Systems ΛL im Bezug auf den Steg $\Phi\Lambda$ als Resultante der beiden Beschleunigungen $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^h$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^g$, weil die betreffende Zusatzbeschleunigung gleich Null ist. Die beiden mit $\mathfrak{Q}$ momentan zusammenliegenden Punkte der Systeme ΦF, ΛL haben im Bezug auf den Steg $\Phi\Lambda$ dieselbe in $\mathfrak{Q}$ auf $\Phi\Lambda$ senkrechte Geschwindigkeit v_h; demnach sind die zugehörigen Normalbeschleunigungen

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_n^h = \frac{v_h^2}{\Phi\mathfrak{Q}}, \qquad \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_n^a = \frac{v_h^2}{\Lambda\mathfrak{Q}}$$

und stehen also in dem Verhältnisse

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_n^h : \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_n^a = \Lambda\mathfrak{Q} : \Phi\mathfrak{Q},$$

nach welchem die Normalbeschleunigung $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_n^a$ leicht construirt werden kann. Ziehen wir durch den Punkt $\mathfrak{Q}$ eine beliebige Gerade $\mathfrak{Q}x$, welche auch mit einer Geraden $\mathfrak{Q}g$, $\mathfrak{Q}\mathrm{t}$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^h$ zusammenfallen kann, und die Gerade $\mathfrak{Q}_j^h\mathfrak{Q}_n^h$ im Punkte x schneidet, ziehen wir ferner zu Λx die Parallele Φy bis an $\mathfrak{Q}x$ und auf $\Phi\Lambda$ die Senkrechte $y\mathfrak{Q}_n^a$; dann erhalten wir die Normalbeschleunigung $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_n^\alpha$, und durch die zu $\mathfrak{Q}t$ senkrechte, oder zu $\mathfrak{Q}g$ parallele Gerade $\mathfrak{Q}_j^h\mathfrak{Q}_j^\alpha$, welche $\mathfrak{Q}_n^\alpha y$ in dem Punkte $\mathfrak{Q}_j^\alpha$ trifft, ergiebt sich die Beschleunigung $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^\alpha$. Wird nun zu dem Dreieck $\Lambda\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^\alpha$ das ähnliche Dreieck $\Lambda L L_j$ construirt, so repräsentirt $L L_j$ die Beschleunigung, die der Punkt L des Gliedes ΛL im Bezug auf den Steg $\Phi\Lambda$ besitzt. Die auf $\Phi\Lambda$ senkrechte Gerade $y\mathfrak{Q}_n^\alpha$ wird, falls die Gerade $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^h$ günstig liegt, am einfachsten bestimmt, indem wir zu $\Lambda\mathfrak{Q}_j^h$ die Parallele Φz ziehen, welche $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^h$ in dem Punkte z der Geraden $y\mathfrak{Q}_n^\alpha$ trifft. Nehmen wir insbesondere an, dass die Bewegung erst beginnt, dann liegt die Beschleunigung des momentan mit $\mathfrak{Q}$ coincidirenden Punktes des Systems ΦF, die durch $\mathfrak{Q}\, Q_j^h$ gegeben sein möge, in der auf $\Phi\Lambda$ senkrechten Geraden $\mathfrak{Q}v_h$; und die entsprechende Beschleunigung $\mathfrak{Q}\, Q_j^\alpha$ des momentan mit $\mathfrak{Q}$ coincidirenden Punktes des Systems ΛL ist mit $\mathfrak{Q}\, Q_j^h$ identisch, weil die zugehörigen Normalbeschleunigungen beide gleich Null sind. Wenn wir verschiedene Punkte $\mathfrak{Q}_j^h$, Q_j^h, . . annehmen und die entsprechenden Punkte $\mathfrak{Q}_j^\alpha$, Q_j^α, . . construiren, so folgt aus dieser Construction, dass die Punkte $\mathfrak{Q}_j^h$, Q_j^h, . . und $\mathfrak{Q}_j^\alpha$, Q_j^α, . . affine Systeme bilden, deren entsprechende Punkte in Parallelen zur Normale g der Rollcurven liegen und deren Affinitätsaxe die in $\mathfrak{Q}$ auf $\Phi\Lambda$ senkrechte Gerade $\mathfrak{Q}v_h$ ist. Ferner entsprechen sich in den beiden affinen Systemen $\mathfrak{Q}_j^h\, Q_j^h$ . . und $\mathfrak{Q}_j^\alpha\, Q_j^\alpha$ . . die auf $\Phi\Lambda$ senkrechten Geraden $\mathfrak{Q}_j^h\mathfrak{Q}_n^h$, $\mathfrak{Q}_j^\alpha$, $\mathfrak{Q}_n^\alpha$, und die auf $\Phi\Lambda$ resp. in Λ, Φ senkrechten Geraden. Es sind somit auch die von den entsprechenden Punkten F_j, . . und L_j, . . gebildeten Systeme affin.

Ist die Beschleunigung $L L_j$ gegeben, so erhalten wir umgekehrt die entsprechende Beschleunigung $F F_j$, indem wir jenen Constructionsweg in umgewendeter Richtung verfolgen. Der betrachtete dreigliederige Mechanismus tritt insbesondere bei dem unrunden Räderpaar auf; und die Construction der Beschleunigungen ist bei demselben ausführbar, wenn die Normalen oder Tangenten an den zugehörigen Rollcurven bestimmt werden können. Aber auch in vielen anderen wichtigen Fällen kann die abgeleitete Construction der Beschleunigungen angewendet werden.

In Fig. **808** sind bei dem betrachteten dreigliederigen einfachen Mechanismus die beiden Glieder Φf, Λl durch Drehpaarungen in Φ, Λ mit dem Steg $\Phi\Lambda$ und unter sich durch eine höhere Paarung zwangläufig verbunden, welches durch die beiden Gleitcurven f, l vertreten wird. Für diese Gleitcurven f, l sind die zu ihrem Berührungspunkte gehörenden Krümmungsmittelpunkte F, L auf der gemeinsamen Normalen gegeben. Dieser Mechanismus kann dann während zweier Zeitelemente durch ein Gelenkviereck $\Phi FL\Lambda$ ersetzt werden; und der Schnittpunkt $\mathfrak{Q}$ der Geraden $\Phi\Lambda$, FL ist der momentane Pol der beiden Glieder Φf, Λl. Demnach ergiebt sich, wie aus Art. 30 bekannt ist, die gemeinsame Tangente der zugehörigen Rollcurven, wenn wir den Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der Geraden ΦF, ΛL mit $\mathfrak{Q}$ verbinden und den Winkel $\Phi\mathfrak{Q}\mathrm{t}$ entgegengesetzt gleich dem Winkel $F\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$ machen. Wir betrachten nun beispielsweise die Beschleunigung FF_j des zum Gliede oder System Φf gehörenden Punktes F als gegeben und wollen für einen Punkt des Gliedes oder Systems Λl, z. B. für L, die entsprechende Beschleunigung LL_j construiren. Wir machen das Dreieck $\Phi\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^h$ ähnlich dem Dreieck ΦFF_j, ziehen auf $\Phi\Lambda$ die Senkrechte $\mathfrak{Q}_j^h\mathfrak{Q}_n^h$, welche eine durch $\mathfrak{Q}$ gehende Gerade, z. B. die Gerade $\mathfrak{Q}L$, im Punkte x schneidet, ferner ziehen wir zu Λx die Parallele Φy bis an $\mathfrak{Q}L$, auf $\Phi\Lambda$ die Senkrechte $y\mathfrak{Q}_n^a$, auf $\mathfrak{Q}\mathrm{t}$ die Senkrechte $\mathfrak{Q}_j^h\mathfrak{Q}_j^a$ bis an $y\mathfrak{Q}_n^a$ und zeichnen zu dem Dreieck $\Lambda\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^a$ das ähnliche Dreieck ΛLL_j.

Bei dem in Fig. **809** gegebenen besonderen Falle des betrachteten Mechanismus ist das Glied $\Lambda^\infty l$ durch eine Richtpaarung mit dem Steg $\Phi\Lambda^\infty$ verbunden; und wir wollen annehmen, dass die Endpunkte aller Beschleunigungen des Gliedes Φf in dem festen Axenpunkte Φ coincidiren. In diesem besonderen Falle vereinfacht sich die Construction der Beschleunigung des geradlinig parallel bewegten Gliedes $\Lambda^\infty l$, welche gleich $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^a$ ist und senkrecht auf $\Phi\Lambda^\infty$ steht oder parallel zur Geraden λ ist; denn wir erhalten diese Beschleunigung gemäss der obigen Construction, wenn wir den Winkel $\Phi\mathfrak{Q}\mathrm{t}$ entgegengesetzt gleich dem Winkel $F\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$ machen und auf $\mathfrak{Q}\mathrm{t}$ die Senkrechte $\Phi\mathfrak{Q}_j^a$ bis an $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^a$ ziehen. Wenn wir hier die Construction des entgegengesetzt gleichen Winkels vermeiden wollen, können wir auch zu FL die Parallele $\Phi\mathfrak{Q}_v$ bis an $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ und auf $\Phi\mathfrak{Q}_v$ die Senkrechte $\mathfrak{Q}_v\mathfrak{Q}_j^a$ ziehen, welche ebenfalls die auf $\Phi\Lambda^\infty$ senkrechte Beschleunigung $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^a$ bestimmt; denn infolge dieser Construction sind die Winkel $\mathfrak{Q}\Phi\mathfrak{Q}_j^a$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_v\mathfrak{Q}_j^a$, $\mathrm{t}\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^a$ gleich, und demnach steht die Verbindungsgerade $\Phi\mathfrak{Q}_j^a$ auf $\mathfrak{Q}\mathrm{t}$ senkrecht. Dieser Mechanismus kann während zweier Zeitelemente durch ein excentrisches Schubkurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda^\infty$ ersetzt werden; und diese letzte Construction der Beschleunigung $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^a$ des Gliedes $L\Lambda^\infty$ ist dieselbe, welche wir S. 826 vermittelst des Hodographen abgeleitet haben. Aus dieser Construction ergiebt sich, wie dort gezeigt wurde, die bekannte

Construction der Beschleunigung $\theta\Phi = \mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^a$, bei welcher $\mathfrak{Q}\,\Xi$ parallel ΦL, $\Xi\Theta$ senkrecht λ und $\Theta\theta$ senkrecht FL gezogen wird.

322. **Construction der Beschleunigungen bei dem Ankergange in einer Uhr.** In Fig. **810**, Taf. LV, ist behufs der Construction der Beschleunigungen bei dem Ankergange in einer Uhr das Steigrad, welches sich um die feste Axe Φ dreht und der Anker, der um die feste Axe Λ schwingt, nach den Angaben der Praxis gezeichnet[1]. Die Zahnspitze F gleitet an der Hebefläche ab; und dieselbe ist durch die Strecke ab einer Geraden l dargestellt, welche den um Λ beschriebenen Kreis λ berührt. Dieser dreigliederige Mechanismus kann als ein excentrisches schwingendes Schleifkurbelgetriebe betrachtet werden, dessen längs der Geraden l gleitendes Glied weggemindert ist.

Wir nehmen zunächst die Beschleunigung FF_j der Zahnspitze F als gegeben an, dann können wir die Beschleunigung AA_j eines Punktes A des Ankers durch die vorhin in Art. 321 abgeleitete Construction bestimmen. Die auf l senkrechte Gerade $F\mathfrak{Q}$ schneidet die Gerade $\Phi\Lambda$ in dem Pol $\mathfrak{Q}$ des Ankers und des Steigrades. Durch den Schnittpunkt $\mathfrak{P}$, den die auf l senkrechte Gerade $\Lambda\mathfrak{P}$ mit der Geraden ΦF bildet, wird die Gerade $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$ bestimmt. Da aber der Punkt $\mathfrak{P}$ im betrachteten Falle nicht zugänglich ist, so erhalten wir diese Gerade, weil $F\mathfrak{Q}$, $\Lambda\mathfrak{P}$ auf l senkrecht stehen und parallel sind, indem wir durch Φ auf l die senkrechte Gerade $\Phi\varepsilon$ bis an ΛF ziehen und in derselben $\Phi\eta = \varepsilon\Phi$ machen; dann ist η ein Punkt der Geraden $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$. Wenn wir nun den Winkel $\Phi\mathfrak{Q}\mathfrak{t}$ entgegengesetzt gleich dem Winkel $F\mathfrak{Q}\eta$ machen, so ergiebt sich die gemeinsame Tangente $\mathfrak{Q}\mathfrak{t}$ an den Rollcurven des Steigrades und des Ankers. Hierauf construiren wir zu dem Dreieck ΦFF_j das ähnliche Dreieck $\Phi\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^h$, ziehen zu $\Lambda\mathfrak{Q}_j^h$ die Parallele $\Phi\mathfrak{z}$ bis an $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^h$, ferner auf $\Phi\Lambda$ die Senkrechte $\mathfrak{z}\mathfrak{Q}_j^a$ und auf $\mathfrak{Q}\mathfrak{t}$ die Senkrechte $\mathfrak{Q}_j^h\mathfrak{Q}_j^a$, welche sich im Punkte $\mathfrak{Q}_j^a$ schneiden; dann ergiebt sich, indem wir das Dreieck ΛAA_j ähnlich dem Dreieck $\Lambda\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^a$ machen, die Beschleunigung AA_j des Ankerpunktes A. Wenn bei ungünstigen Lagenverhältnissen der Punkt $\mathfrak{Q}_j^a$ als Schnitt der Geraden $\mathfrak{z}\mathfrak{Q}_j^a$, $\mathfrak{Q}_j^h\mathfrak{Q}_j^a$ nicht hinreichend genau bestimmt wird, so kann man denselben durch die S. 846 erkannte Affinität sicherer ermitteln. Ist FF_v die gegebene Geschwindigkeit der Zahnspitze F, und ziehen wir zu l die Parallele F_vE_v bis an die auf ΛF Senkrechte FE_v, so repräsentirt

[1] **Martens**, *Hemmungen der höheren Uhrmacherkunst.* 1858. S. 11.

FE_v die Geschwindigkeit des mit F momentan coincidirenden Ankerpunktes; und demnach kann die Geschwindigkeit eines beliebigen Ankerpunktes A leicht bestimmt werden.

Wir haben im betrachteten Momente die Zahnspitze F in der Mitte der Hebefläche ab liegend angenommen. Um aber eine Vorstellung von der Veränderung der Beschleunigung eines Ankerpunktes A zu erlangen, muss die Beschleunigung desselben für verschiedene Lagen der Zahnspitze F an der Hebefläche ab construirt werden. Da aber die Bewegung der Zahnspitze F an der Kante a der Hebefläche beginnt und sich längs derselben mit veränderlicher Beschleunigung FF_j vollzieht, so muss diese Beschleunigung für die verschiedenen Lagen der Zahnspitze F bestimmt werden. Durch das Gesetz der Veränderung der treibenden Beschleunigung des Uhrwerkes ist die Tangentialbeschleunigung FF_t und die Geschwindigkeit FF_v der Zahnspitze bestimmbar. Durch diese Geschwindigkeit erhalten wir die zugehörige Normalbeschleunigung $FF_n = \overline{FF_v}^2 : \Phi F$; und somit ergiebt sich die resultirende Beschleunigung FF_j. Wenn so für verschiedene Lagen von F die Beschleunigungen FF_j ermittelt sind, können wir die entsprechenden Beschleunigungen AA_j eines Ankerpunktes A in der angegebenen Weise construiren. Ebenso erhalten wir auch anderseits beim Gleiten der betreffenden Zahnspitze an der Hebefläche $a'b'$ die Beschleunigungen.

Ohne Kenntniss der Uebertragung der Beschleunigung von dem Steigrade auf den Anker sind die Hemmungen bei den Uhrwerken in mannigfaltigen Gestalten nach praktischem Ermessen ausgeführt worden[1]). Durch die gegebene Bestimmung der Beschleunigungen wird aber bei diesen Hemmungen eine tiefere theoretische Einsicht gewonnen, welche zu wissenschaftlich strengeren Constructionen dieser Mechanismen führt. Es würde daher eine interessante Aufgabe sein, wenn man nach dem Gesetze der Veränderung der treibenden Beschleunigung bei den verschiedenen Hemmungen, welche sich in der Praxis bewährt haben, die Beschleunigungen in der angegebenen Weise construirte, und auf dieser wissenschaftlichen Grundlage untersuchte.

---

[1]) M. Grossmann, *Der freie Ankergang für Uhren.* 1866.

Constructive Bestimmung der Beschleunigungen bei zusammengesetzten Mechanismen.

323. **Allgemeine Ausführungen der Constructionen der Beschleunigungen bei zusammengesetzten Mechanismen.** Bei den zusammengesetzten Mechanismen sind die Constructionen der Beschleunigungen meist sehr umständlich und in vielen Fällen noch unausführbar. Wenn bei dem in Fig. **811** dargestellten Watt'schen Mechanismus die Beschleunigung FF_j des Gelenkpunktes F im Bezug auf den Steg $\Phi\Lambda$ gegeben ist, so können wir, wie in Art. 311 gelehrt wurde, an dem Gelenkviereck $\Phi FL\Lambda$ die Beschleunigung LL_j des Gelenkpunktes L im Bezug auf den Steg $\Phi\Lambda$ construiren. Damit sind für die Gelenkpunkte A, C die Beschleunigungen AA_j, CC_j gegeben; und wir können weiter nach Art. 310 die Beschleunigung BB_j des Gelenkpunktes B construiren. Wir erhalten demnach die Beschleunigungen der Punkte aller Glieder im Bezug auf den Steg $\Phi\Lambda$. In analoger Weise sind die Beschleunigungen der Punkte aller Glieder des Watt'schen Mechanismus bestimmbar, wenn ein anderes Glied desselben als Steg betrachtet wird.

Bei dem in Fig. **812** dargestellten Stephenson'schen Mechanismus, dessen Glied $\Phi\Lambda$ der Steg sein möge, verfahren wir ebenso. Wenn die Beschleunigung FF_j des Gelenkpunktes F gegeben ist, construiren wir die Beschleunigung LL_j des Gelenkpunktes L; und ferner erhalten wir vermittelst der hierdurch bestimmten Beschleunigungen AA_j, CC_j der Gelenkpunkte A, C die Beschleunigung BB_j für den Gelenkpunkt B. Wird aber bei dem Stephenson'schen Mechanismus eines der Glieder AB, BC als Steg genommen, so sind die Constructionen der Beschleunigungen sehr schwierig und für die praktische Ausführung zu umständlich; denn sie werden theoretisch erst ermöglicht, wenn wir eines von den Gliedern des Gelenkvierecks $\Phi FL\Lambda$ durch Hinzufügung einer Bewegung des gesamten Mechanismus in Ruhe versetzen.

324. **Construction der Beschleunigungen bei einem speciellen Watt'schen Mechanismus mit einer Richtpaarung.** Der in Fig. **813** dargestellte specielle Watt'sche Mechanismus besteht aus dem Kurbelgetriebe $\Phi FL\Lambda$ mit dem Steg oder Gestell $\Phi\Lambda$ und aus den gelenkig angeschlossenen Gliedern AB, Bb, von denen das Glied Bb in der festen Hülse β des Steges gleitet. Wenn wir annehmen, dass der Gelenkpunkt F der Kurbel ΦF mit der con-

stanten lothrechten Geschwindigkeit $F\Phi$, also auch mit der constanten Beschleunigung $F\Phi$ rotirt, so können wir in diesem besonderen, aber wichtigen Falle die Beschleunigung des geradlinig parallel bewegten Gliedes Bb vermittelst des Hodographen bestimmen.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden FL, $\Phi\Lambda$ mit $\mathfrak{Q}$, ferner den Schnittpunkt der auf Bb Senkrechten ΛC^∞ und der Geraden AB mit $\mathfrak{R}$, und ziehen wir die Gerade $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$, welche die auf Bb Senkrechte $\Phi\mathfrak{h}$ in dem Punkte $\mathfrak{H}$ schneidet, so ist nach Art. 186 der Punkt $\mathfrak{H}$ der Pol der Glieder Bb, ΦF und die Strecke $\mathfrak{H}\Phi$ repräsentirt die lothrechte Geschwindigkeit des parallel bewegten Gliedes Bb im Bezug auf das Gestell $\Phi\Lambda$. Demnach wird während der gleichförmigen Drehung der Kurbel ΦF von dem Punkte $\mathfrak{H}$ auf der Geraden $\Phi\mathfrak{h}$ der Hodograph für die Bewegung des Gliedes Bb beschrieben, und die zu bestimmende Geschwindigkeit $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_v$ des Punktes $\mathfrak{H}$ repräsentirt im entgegengesetzten Sinne genommen um einen rechten Winkel gedreht die Beschleunigung dieses Gliedes Bb.

Um auf dem Hodographen $\Phi\mathfrak{h}$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_v$ zu construiren, müssen wir zunächst die Geschwindigkeiten bestimmen, mit denen sich die Schnittpunkte $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ resp. auf den festen Geraden $\Phi\Lambda$, ΛC^∞ bewegen. Wir verbinden den Pol $\mathfrak{P}$, welchen das Glied FL im Bezug auf das Gestell besitzt, mit dem Punkte $\mathfrak{Q}$, ziehen zu FL die Parallele $\Phi Q_\mathfrak{v}$ bis an $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$ und drehen die Strecke $\mathfrak{Q}Q_\mathfrak{v}$ in dem Sinne, welcher der Richtung der Geschwindigkeit FF_v des Kurbelpunktes F entspricht, um einen rechten Winkel in die Lage $\mathfrak{Q}Q_v$; dann repräsentirt $\mathfrak{Q}Q_v$ die Geschwindigkeit des mit $\mathfrak{Q}$ momentan coincidirenden Punktes des Gliedes FL, und die zu FL Parallele $Q_v\mathfrak{Q}_v$ bestimmt auf der festen Geraden $\Phi\Lambda$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_v$, die der Schnittpunkt $\mathfrak{Q}$ auf dieser Geraden besitzt. Ferner machen wir in der auf Bb senkrechten Geraden BC^∞, welche ΛA in dem auf das Gestell bezogenen Pol $\mathfrak{P}'$ des Gliedes AB trifft, die Strecke $BB_\mathfrak{v}$ gleich der lothrechten Geschwindigkeit $\mathfrak{H}\Phi$ des Punktes B, ziehen zu BA die Parallele $B_\mathfrak{v}R_\mathfrak{v}$ bis an die Gerade $\mathfrak{P}'\mathfrak{R}$ und drehen die Strecke $\mathfrak{R}R_\mathfrak{v}$ im entsprechenden Sinne um einen rechten Winkel in die Lage $\mathfrak{R}R_v$; dann repräsentirt $\mathfrak{R}R_v$ die Geschwindigkeit des mit $\mathfrak{R}$ momentan coincidirenden Punktes des Gliedes AB, und die zu BA Parallele $R_v\mathfrak{R}_v$ bestimmt auf der festen Geraden ΛC^∞ die Geschwindigkeit $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_v$ des Schnittpunktes $\mathfrak{R}$ auf dieser Geraden. Diese Geschwindigkeit $\mathfrak{R}\mathfrak{R}_v$ ergiebt sich auch, indem wir senkrecht auf ΛC^∞ die Strecke

$\mathfrak{R}\mathfrak{X} = \mathfrak{H}\Phi$ machen, zu AB die Senkrechte $\mathfrak{X}R_v$ ziehen, welche die auf $\mathfrak{P}'\mathfrak{R}$ errichtete Senkrechte $\mathfrak{R}R_v$ im Punkte R_v trifft, und dann zu BA die Parallele $R_v\mathfrak{R}_v$ bis an ΛC^∞ führen. Ziehen wir nun zu $\Phi\mathfrak{h}$, $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ resp. die Parallelen $\mathfrak{Q}\mathfrak{U}$, $\mathfrak{Q}_v\mathfrak{U}$, die sich in dem Punkte $\mathfrak{U}$ schneiden, und dann die Gerade $\mathfrak{R}_v\mathfrak{U}$, welche mit $\Phi\mathfrak{h}$ den Schnittpunkt $\mathfrak{H}_v$ bildet, so wird gemäss den Darlegungen in Art. 33, b) durch die Strecke $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_v$ die Geschwindigkeit des Punktes $\mathfrak{H}$ auf dem Hodographen $\Phi\mathfrak{h}$ und als solche zugleich die Beschleunigung des Gliedes Bb dargestellt. Da aber $\mathfrak{H}\Phi$ die lothrechte Geschwindigkeit dieses Gliedes in zugehöriger Richtung darstellt, so wird durch $\mathfrak{H}_v\mathfrak{H}$ die entsprechende lothrechte Beschleunigung repräsentirt.

Machen wir in der auf Bb senkrechten Geraden BC^∞, welche schon die lothrechte Geschwindigkeit $BB_\mathfrak{v}$ des Punktes B enthält, die Strecke $BB_\mathfrak{i} = \mathfrak{H}_v\mathfrak{H}$, also gleich der Beschleunigung dieses Punktes, und wiederholen wir diese Construction für verschiedene Lagen des Punktes B, dann erhalten wir durch die Punkte $B_\mathfrak{i}$ das örtliche Beschleunigungsdiagramm und durch die Punkte $B_\mathfrak{v}$ das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm des Punktes B oder des Gliedes Bb. Wenn bei der abgeleiteten Construction der Beschleunigung der Fall eintritt, dass die Pole $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ nicht zugänglich sind, so kann man jene Punkte $\mathfrak{Q}_\mathfrak{v}$, $R_\mathfrak{v}$ auch leicht durch Proportionalität bestimmen, indem man z. B. auf der zu FL Parallelen $\Phi L_\mathfrak{v}$ die zur Punktgruppe $F\mathfrak{Q}L$ ähnliche Punktgruppe $\Phi Q_\mathfrak{v} L_\mathfrak{v}$ bildet. Im Folgenden wollen wir diese Construction auf speciellere Mechanismen dieser Art anwenden.

325. **Darstellung der Beschleunigungen bei der Watt'schen Dampfmaschine.** Der Mechanismus der in Fig. **814** schematisch gezeichneten Watt'schen Dampfmaschine unterscheidet sich von dem vorher betrachteten Mechanismus nur dadurch, dass die Gelenkpunkte L, Λ, A in einer Geraden liegen, die den Balancier vertritt. Um die Beschleunigung für den Kolben K nebst Kolbenstange Bb in der angegebenen Weise zu construiren, nehmen wir an, dass der Kurbelpunkt F mit der constanten lothrechten Geschwindigkeit $F\Phi$ im Sinne des Pfeiles φ rotirt. Wir ziehen demgemäss die Gerade $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$, die auf $\Phi\mathfrak{h}$ die lothrechte Geschwindigkeit $\mathfrak{H}\Phi$ des Gliedes BK bestimmt, ferner zu FL die Parallele $\Phi Q_\mathfrak{v}$ bis an $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$ und drehen $\mathfrak{Q}Q_\mathfrak{v}$ im entsprechenden Sinne um einen rechten Winkel in die Lage $\mathfrak{Q}Q_v$. Hierauf ziehen wir zu FL die Parallele $Q_v\mathfrak{Q}_v$ bis an $\Phi\Lambda$, zu $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ die Parallele $\mathfrak{Q}_v\mathfrak{U}$, welche die zu $\Phi\mathfrak{h}$ parallele oder auf Bb senkrechte Gerade $\mathfrak{Q}\mathfrak{U}$

im Punkte $\mathfrak{U}$ trifft. Wir machen dann senkrecht auf ΛC^∞ die Strecke $\mathfrak{R}\mathfrak{X} = \mathfrak{H}\Phi$, ziehen auf AB die Senkrechte $\mathfrak{X}R_v$ bis an die auf $\mathfrak{P}'\mathfrak{R}$ errichtete Senkrechte $\mathfrak{R}R_v$, zu AB die Parallele $R_v\mathfrak{R}_v$ bis an ΛC^∞ und schliesslich die Gerade $\mathfrak{R}_v\mathfrak{U}$, welche auf $\Phi\mathfrak{h}$ die Beschleunigung $\mathfrak{H}_v\mathfrak{H}$ des Gliedes BK bestimmt. Machen wir nun in der auf Bb senkrechten Geraden BC^∞ die Strecke $BB_{\mathfrak{j}} = \mathfrak{H}_v\mathfrak{H}$, ferner die Strecke $BB_{\mathfrak{v}} = \mathfrak{H}_v\Phi$, und wiederholen wir diese Construction für verschiedene Lagen des Gliedes BK, so ergiebt sich durch die Punkte $B_{\mathfrak{j}}$ das örtliche Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$ und durch die Punkte $B_{\mathfrak{v}}$ das örtliche Geschwindigkeitsdiagramm $\mathfrak{v}$ für die Bewegung des Gliedes BK.

Bei der unteren Grenzlage B^0 des Punktes B gelangen die Punkte A, L resp. in die Lagen A^0, L^0 und der Punkt F in die Lage F^0, welche sich mit Φ, L^0 in einer Geraden befindet. In diesem Momente ruht der Schnittpunkt $\mathfrak{R}^0$ der Geraden A^0B^0, ΛC^∞, und der mit Φ coincidirende Schnittpunkt $\mathfrak{Q}^0$ der Geraden F^0L^0, $\Phi\Lambda$ bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{Q}^0\mathfrak{Q}^0_v$ auf der Geraden $\Phi\Lambda$. Um diese Geschwindigkeit zu construiren, machen wir im Sinne der Drehung von F senkrecht auf ΦF^0 die Strecke $F^0F^0_v = F^0\Phi$, ziehen die Gerade $L^0F^0_v$, welche die auf ΦL^0 errichtete Senkrechte ΦQ^0_v im Punkte Q^0_v schneidet; dann ist $\mathfrak{Q}^0 Q^0_v$ die Geschwindigkeit des mit $\mathfrak{Q}^0$ oder Φ coincidirenden Punktes der Geraden L^0F^0, und die zu L^0F^0 parallel gezogene Gerade $Q^0_v\mathfrak{Q}^0_v$ bestimmt auf $\Phi\Lambda$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{Q}^0\mathfrak{Q}^0_v$. Die Gerade $\mathfrak{R}^0\mathfrak{Q}^0$ schneidet die Gerade $\Phi\mathfrak{h}$ in dem mit Φ coincidirenden Punkte $\mathfrak{H}^0$, und auch hieraus ergiebt sich, dass die Geschwindigkeit des Gliedes BK gleich Null ist. Wir erhalten nun die entsprechende Geschwindigkeit $\mathfrak{H}^0\mathfrak{H}^0_v$ des Schnittpunktes $\mathfrak{H}^0$ auf dem Hodographen $\Phi\mathfrak{h}$, weil der Punkt $\mathfrak{R}^0$ ruht, einfach, indem wir zu $\mathfrak{Q}^0\mathfrak{R}^0$ die Parallele $\mathfrak{Q}^0_v\mathfrak{H}^0_v$ bis an $\Phi\mathfrak{h}$ ziehen. Die Strecke $\mathfrak{H}^0_v\mathfrak{H}^0$ oder $\mathfrak{H}^0_v\Phi$ repräsentirt demnach die Beschleunigung des Punktes B in der Grenzlage B^0 oder die Beschleunigung des Gliedes BK in seiner tiefsten Lage. Machen wir senkrecht auf Bb die Strecke $B^0B^0_{\mathfrak{j}} = \mathfrak{H}^0_v\Phi$, so ist $B^0_{\mathfrak{j}}$ der entsprechende Punkt des örtlichen Beschleunigungsdiagramms $\mathfrak{j}$; und in gleicher Weise erhalten wir für die obere Grenzlage B^τ des Punktes B die zugehörige Beschleunigung $B^\tau B^\tau_{\mathfrak{j}}$. Dem Aufgange des Gliedes BK entspricht der eine Curventheil $B^0_{\mathfrak{j}}B^{I}_{\mathfrak{j}}B^\tau_{\mathfrak{j}}$ und dem Niedergange der andere Curventheil $B^\tau_{\mathfrak{j}}B^{II}_{\mathfrak{j}}B^0_{\mathfrak{j}}$ des Beschleunigungsdiagramms $\mathfrak{j}$. In den beiden Schnittpunkten B^{I}, B^{II}, welche das Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$ mit der Geraden b bildet, ist die Beschleunigung des Punktes B oder des

Gliedes BK gleich Null; und in diesen Punkten sind die entsprechenden Geschwindigkeiten $B^I B^I_\mathfrak{v}$, $B^{II} B^{II}_\mathfrak{v}$ am grössten.

Um die Beschleunigungen der Pleuelstange FL und des Balancier $L\Lambda A$ zu construiren, können wir, wie beim Kurbelgetriebe in Art. 311 angegeben wurde, verfahren; und damit erhalten wir auch die Beschleunigungen des Gliedes AB. Wenn aber die Beschleunigung des Punktes B noch nicht wie vorhin construirt ist, so ergiebt sich dieselbe auch vermittelst der in Art. 313 beim Schubkurbelgetriebe ausgeführten Construction.

326. **Darstellung der Beschleunigungen bei der Whitworth-schen Metallhobelmaschine mit angenähert gleichförmigem Kurbelschub und raschem Rückgang.** Die in Fig. **815** gezeichnete Whitworth'sche Metallhobelmaschine oder Stanzmaschine besteht aus dem rotirenden Schleifkurbelgetriebe $\Phi F L^\infty \Lambda$ mit dem auf ΛF rechtwinkelig an dem Schleifgliede ΛL^∞ befestigten Kurbelarme ΦA, durch welchen vermittelst der Schubstange AB der Schlitten s bewegt wird. Die beispielsweise aus der Praxis entnommenen Verhältnisse der Dimensionen dieses Mechanismus [1]) sind nicht so günstig, wie sie nach der Angabe in Art. 187 b) behufs Erzeugung eines angenähert gleichförmigen Kurbelschubes ermittelt werden können. Dieser Mechanismus ist ein specieller Watt'scher Mechanismus mit zwei Richtpaarungen und geht durch Specialisirung aus dem vorhin betrachteten Mechanismus der Watt'schen Dampfmaschine hervor, wenn wir dort die Drehpaarung der beiden Glieder FL, ΛL durch eine Richtpaarung ersetzen und die beiden festen Axen Φ, Λ in die Schubgerade b legen. Die Construction der Beschleunigung des Punktes B oder des Schlittens s kann daher, wenn wir annehmen, dass die Kurbel ΦF mit der constanten lothrechten Geschwindigkeit $F\Phi$ rotirt, ebenso wie bei der Watt'schen Dampfmaschine ausgeführt werden, und wir wollen diese Construction der Einübung wegen mit gleicher Bezeichnung nochmal wiederholen.

Wir ziehen auf ΛF die Senkrechte $L^\infty F$, welche die Gerade $\Phi\Lambda$ oder b im Punkte $\mathfrak{L}$ trifft, verlängern BA bis zum Schnittpunkte $\mathfrak{R}$ der auf b senkrechten Geraden ΛC^∞ und ziehen die Gerade $\mathfrak{L}\mathfrak{R}$, welche die auf b senkrechte Gerade ΦC^∞ oder $\Phi\mathfrak{h}$ im Punkte $\mathfrak{H}$ trifft; dann repräsentirt $\mathfrak{H}\Phi$ die Geschwindigkeit des Punktes B, und indem wir in der auf b Senkrechten BC^∞ die Strecke $BB_\mathfrak{v} = \mathfrak{H}\Phi$ machen, erhalten wir einen Punkt $B_\mathfrak{v}$

[1]) Hart, *Werkzeugmaschinen.* 1864. S. 161.

des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ des Punktes B oder des Schlittens s. Den Pol $\mathfrak{P}$ des Gliedes FL^∞, der sich als Schnittpunkt der Geraden ΦF, ΛA ergiebt, verbinden wir mit $\mathfrak{Q}$. Hierauf ziehen wir zu $L^\infty F$ die Parallele $\Phi Q_\mathfrak{v}$ bis an $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$, machen senkrecht auf $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ die Strecke $\mathfrak{Q}Q_v = \mathfrak{Q}Q_\mathfrak{v}$, ziehen ferner zu FL^∞ die Parallele $Q_v\mathfrak{Q}_v$ bis an $\Phi\Lambda$ und zu $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ die Parallele $\mathfrak{Q}_v\mathfrak{U}$, welche die auf b Senkrechte $\mathfrak{Q}\mathfrak{U}$ im Punkte $\mathfrak{U}$ schneidet. Wir machen senkrecht auf ΛC^∞ die Strecke $\mathfrak{R}\mathfrak{X} = \mathfrak{H}\Phi$, ziehen die Gerade $\mathfrak{X}R_v$ senkrecht auf AB bis an die Gerade $\mathfrak{R}R_v$, welche auf der von $\mathfrak{R}$ nach dem Schnittpunkte $\mathfrak{P}'$ von ΛA, BC^∞ gezogenen Geraden $\mathfrak{R}\mathfrak{P}'$ senkrecht steht, ferner zu AB die Parallele $R_v\mathfrak{R}_v$ bis an ΛC^∞ und schliesslich die Gerade $\mathfrak{R}_v\mathfrak{U}$, die $\Phi\mathfrak{h}$ im Punkte $\mathfrak{H}_v$ trifft; dann repräsentirt die Strecke $\mathfrak{H}_v\mathfrak{H}$ die Beschleunigung des Punktes B, und indem wir auf BC^∞ die Strecke $BB_\mathfrak{j} = \mathfrak{H}_v\mathfrak{H}$ machen, erhalten wir einen Punkt $B_\mathfrak{j}$ des örtlichen Beschleunigungsdiagramms $\mathfrak{j}$ für die Bewegung des Punktes B oder des Schlittens s.

Wenn sich der Punkt B in der Grenzlage B^0 befindet, ist der Punkt F nach F^0, der Punkt A nach A^0 in die Gerade $\Phi\Lambda$ gelangt. Der entsprechende Punkt $\mathfrak{Q}^0$ liegt demnach im Unendlichen auf der Geraden $\Phi\Lambda$, der entsprechende Punkt $\mathfrak{R}^0$ coincidirt mit Λ, und die auf $A^0\Lambda$ senkrechte Geschwindigkeit $A^0A^0_v$ des in der Lage A^0 befindlichen Punktes A ist gleich $A^0\Lambda$. Ziehen wir nun die Gerade $A^0_vB^0$, welche die Gerade ΛC^∞ im Punkte $\mathfrak{R}^0_v$ trifft, so ist $\mathfrak{R}^0\mathfrak{R}^0_v$ die Geschwindigkeit des in der Lage $\mathfrak{R}^0$ befindlichen Punktes $\mathfrak{R}$ auf der Geraden ΛC^∞, und diese Geschwindigkeit im Sinne $\mathfrak{R}^0_v\mathfrak{R}^0$ repräsentirt zugleich die Beschleunigung des Punktes B in der Grenzlage B^0; denn gemäss jener Construction des Punktes $\mathfrak{U}$ liegt hier der zugehörige Punkt $\mathfrak{U}^0$ auf der Geraden $\Phi\Lambda$ im Unendlichen. Hiernach erhalten wir, indem wir senkrecht auf b die Strecke $B^0B^0_\mathfrak{j} = \mathfrak{R}^0_v\mathfrak{R}^0$ machen, den der Grenzlage B^0 entsprechenden Punkt $B^0_\mathfrak{j}$ des Beschleunigungsdiagramms $\mathfrak{j}$; und in gleicher einfacher Weise ergiebt sich für die andere Grenzlage B^τ des Punktes B die zugehörige Beschleunigung $B^\tau B^\tau_\mathfrak{j}$. Die Construction der Beschleunigung des Punktes B vereinfacht sich auch für die beiden Lagen, bei denen der Punkt F sich in der Geraden $\Phi\Lambda$ befindet, weil dann der entsprechende Punkt $\mathfrak{Q}$ mit F coincidirt und momentan in Ruhe ist.

Den Schnittpunkten B^I, B^{II}, welche das Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$ mit der Geraden b bildet, entsprechen die grössten Geschwindigkeiten $B^IB^I_\mathfrak{v}$, $B^{II}B^{II}_\mathfrak{v}$. Die angenähert gleichförmige Bewegung des Schlittens s erfolgt bei diesem Mechanismus, wenn die Kurbel ΦF sich im Sinne des Pfeiles φ dreht, in der Richtung von B^τ nach B^0, und dieser Bewegung entspricht der Curventheil $B^\tau_{\mathfrak{j}} B_{\mathfrak{j}} B^0_{\mathfrak{j}}$ des Beschleunigungsdiagramms $\mathfrak{j}$. Dieser Curventheil würde bei vollkommen gleichförmiger Bewegung mit der geraden Strecke $B^\tau B^0$ identisch sein, und durch diese Abweichung von dieser Strecke wird wie durch den Curventheil $B^\tau B^l_{\mathfrak{v}} B^0$ des Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ die Abweichung dieser Bewegung von der Gleichförmigkeit veranschaulicht.

327. **Darstellung der Beschleunigung bei dem Kreuzkurbelgetriebe mit focalaxigen elliptischen Rädern.** Bei dem in Fig. **816** gezeichneten rechtwinkeligen Kreuzkurbelgetriebe ΛAK mit den elliptischen Rädern ΦF, ΛL, welche sich um die in den Brennpunkten Φ, Λ befindlichen festen Axen drehen, können die beiden elliptischen Räder nach Art. 219 durch das Zwillingskurbelgetriebe $\Phi F L \Lambda$ ersetzt werden, dessen Koppel FL die beiden anderen Brennpunkte F, L verbindet. Dann ist der Mechanismus ein specieller Watt'scher Mechanismus mit zwei Richtpaarungen, und die Beschleunigung des Schlitzgliedes kann, wenn wir annehmen, dass die Endpunkte der Beschleunigungen aller Punkte des gleichförmig rotirenden elliptischen Rades ΦF im Punkte Φ coincidiren, in der angegebenen Weise mit Beachtung der vereinfachenden speciellen Beziehungen construirt werden. Die auf dem Schlitz senkrechte, oder zur Schubstange b parallele Gerade AB^∞ schneidet die auf b Senkrechte ΛC^∞ im Punkte $\mathfrak{R}$. Der Schnittpunkt $\mathfrak{Q}$, welchen die Gerade FL mit $\Phi\Lambda$ bildet, ist auch der Berührungspunkt der Ellipsen; und die Gerade $\mathfrak{R}\mathfrak{Q}$ bestimmt in der auf b Senkrechten $\Phi\mathfrak{H}$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{H}\Phi$ des Schlitzgliedes, welche senkrecht auf b nach $KK_{\mathfrak{v}}$ übertragen einen Punkt $K_{\mathfrak{v}}$ des örtlichen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ des Punktes K oder des Schlitzgliedes liefert. Durch die Geschwindigkeit des Punktes $\mathfrak{H}$ auf $\Phi\mathfrak{H}$ würde sich die entsprechende Beschleunigung des Schlitzgliedes ergeben. Wir wollen hier aber beispielsweise die Art. 321 abgeleitete Construction behufs der Bestimmung dieser Beschleunigung anwenden. Es ist im betrachteten Falle die Strecke $\mathfrak{Q}\Phi$ die Beschleunigung des mit $\mathfrak{Q}$ coincidirenden Punktes des elliptischen Rades ΦF. Wir ziehen demnach durch $\mathfrak{Q}$ eine beliebige Gerade, z. B. die Gerade FL, welche die auf $\Phi\Lambda$ Senkrechte $\Phi\mathfrak{H}$ im Punkte x schneidet, ferner zu $x\Lambda$ die Parallele Φy bis an FL und die Gerade $y\mathfrak{Q}^a_j$ senkrecht auf $\Phi\Lambda$ bis an die Gerade ΦL, die zu der gemeinsamen Normale der sich in $\mathfrak{Q}$ berührenden Ellipsen

parallel ist; hierauf zeichnen wir zu dem Dreieck $\Lambda\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_j^a$ das ähnliche Dreieck $\Lambda A A_j$, und dann ist AA_j die Beschleunigung des Kurbelpunktes A. Da das Schlitzglied sich geradlinig parallel bewegt, so ergiebt sich, indem wir die Beschleunigung AA_j zerlegen, also auf AB^∞ die Senkrechte A_jA_j' fällen, durch die auf dem Schlitze senkrechte Componente AA_j' die Beschleunigung des Schlitzgliedes. Machen wir nun senkrecht auf b die Strecke $KK_\mathfrak{j} = AA_j'$, dann erhalten wir einen Punkt $K_\mathfrak{j}$ des örtlichen Beschleunigungsdiagramms $\mathfrak{j}$ des Punktes K oder des Schlitzgliedes. Bei der Drehung des elliptischen Rades ΦF im Sinne des Pfeiles φ bewegt sich der Punkt K von K^0 bis K^τ angenähert gleichförmig und ungleichförmig rasch zurück. Den Grenzlagen K^0, K^τ dieses Punktes entsprechen die gleichen Beschleunigungen $K^0K_\mathfrak{j}^0$, $K^\tau K_\mathfrak{j}^\tau$. Das centrisch symmetrische Beschleunigungsdiagramm $\mathfrak{j}$ schneidet die Gerade b in den drei Punkten K^I, K^{II}, K^{III}, denen im oberen Theile des symmetrischen Geschwindigkeitsdiagramms $\mathfrak{v}$ während der angenähert gleichförmigen Bewegung die gleichen grössten Geschwindigkeiten $K^IK_\mathfrak{v}^I$, $K^{II}K_\mathfrak{v}^{II}$ und die in der Wegmitte auftretende kleinste Geschwindigkeit $K^{III}K_\mathfrak{v}^{III}$ entsprechen.

328. **Construction der Beschleunigungen bei einem Umlaufgetriebe.** In Fig. **817** ist ein aus dem festen Rade Φr_1, dem Doppelrade $Er_2'r_2$ und dem Rade Fr_3' bestehendes Umlaufgetriebe gezeichnet, bei welchem das Glied ΦEF gleichförmig um die feste Axe Φ rotirt; und wir nehmen an, dass $F\Phi$ die constante Beschleunigung des Axenpunktes F sei. Behufs der Construction der Beschleunigung AA_j^a eines Punktes A des Rades Fr_3' im Bezug auf das feste Rad Φr_1 bestimmen wir zunächst den auf der Geraden ΦF liegenden Pol $\mathfrak{P}_{13}$ der Räder Φr_1, Fr_3' vermittelst der durch die Pole $\mathfrak{P}_{12}$, $\mathfrak{P}_{23}$ gezogenen Geraden; dann sind die resp. um Φ, F beschriebenen Kreise π, p, welche sich im Pol $\mathfrak{P}_{13}$ berühren, die zu diesen beiden Rädern gehörenden Rollkreise oder Polkreise. Wir ziehen nun gemäss der in Art. 299 abgeleiteten Construction zu FA die Parallele $\Phi\mathfrak{P}'$, welche die Gerade $\mathfrak{P}_{13}A$ im Punkte $\mathfrak{P}'$ trifft, machen auf $\Phi\mathfrak{P}'$ die Strecke $\Phi A_a = 2 . \Phi\mathfrak{P}'$, welche die Zusatzbeschleunigung darstellt, und machen ferner, weil das Glied ΦEF und das Rad Fr_3' sich entgegengesetzt drehen, auch in entgegengesetzter Richtung auf $\Phi\mathfrak{P}'$ die Strecke $A_aA_j^a = \overline{\Phi\mathfrak{P}'}^2 : FA$ gleich der Beschleunigung des Punktes A im Bezug auf das Glied ΦEF; dann repräsentirt AA_j^a die Beschleunigung des Punktes A im Bezug auf das feste Rad Φr_1. Durch die Beschleunigungen $F\Phi$, AA_j^a der Punkte F, A des umlaufenden

Rades Fr'_3 sind die Beschleunigungen aller Punkte desselben bestimmt; und da die entsprechenden Strecken FA, ΦA_j^α parallel sind, so gehen die Richtungen aller dieser Beschleunigungen durch den zu den Rädern Fr'_3, Φr_1 gehörenden momentanen Wendepol 𝔚, der hier auch zugleich der Beschleunigungspol ist. In gleicher Weise ergeben sich die Beschleunigungen für das umlaufende Doppelrad $Er'_2 r_2$.

Wir haben hier nur an wenigen Beispielen die Construction der Beschleunigungen eines Gliedes bei zusammengesetzten Mechanismen gezeigt; und der weiteren Forschung ist die Aufgabe zugewiesen, auch in schwierigeren Fällen die constructive Bestimmung der Beschleunigungen aller Glieder bei zusammengesetzten Mechanismen in praktisch zweckmässiger Weise auszuführen. Denn durch die Erkenntniss der Beschleunigungen aller Glieder eines zusammengesetzten Mechanismus erlangen wir erst, wenn Massendrücke in Betracht kommen, ein Urtheil über den Gang und den praktischen Werth desselben.

ZWÖLFTER ABSCHNITT.

Bewegung gesetzmässig-veränderlicher ebener Systeme.

Allgemeine Betrachtungen gesetzmässig-veränderlicher ebener Systeme.

329. **Definitionen.** Die Untersuchung gesetzmässig-veränderlicher Systeme hat in den letzten Jahrzehnten zu einer ungeahnten Fülle fruchtbarer Ergebnisse geführt, sie bildet eine wunderbar ergiebige Quelle mannigfaltiger geometrischer Beziehungen, aus der die Forschung regsam schöpfen kann; und wir können hier nur in enger Umgrenzung die Grundzüge darlegen, um dadurch die Directive der weiteren mächtigen Entwickelung zu geben. Ein in einer festen Ebene bewegtes veränderliches ebenes System, bei welchem die Veränderlichkeit mit der Bewegung nach einem bestimmten Gesetze stetig erfolgt, nennen wir ein conplan bewegtes gesetzmässig-veränderliches ebenes System. Ein gesetzmässig-veränderliches ebenes System S geht während einer bestimmten Bewegung in einer festen Ebene oder einem festen ebenen System Σ in verschiedene Zustände S_1, S_2, .. über, die wir die Phasen des Systems S oder auch die Systemphasen desselben nennen. Jeder Systempunkt des Systems S bewegt sich auf einer bestimmten Bahn in dem festen System Σ; und es entspricht jedem Punkte in einer Systemphase eindeutig auf der zugehörigen Bahn ein Punkt in jeder anderen Systemphase. Wenn nun das Gesetz dieses Entsprechens als eine geometrische Verwandtschaft der Systemphasen bekannt ist, so ist die Veränderlichkeit und der Bewegungsvorgang des Systems S durch die Bewegung einer bestimmenden Anzahl Systempunkte und durch deren in jedem Zeitmomente auftretende Constellation gegeben. Wir wollen hier nach kurzer Erörterung der allgemeinen Beziehun-

gen bei der Bewegung gesetzmässig-veränderlicher ebener Systeme nur die einfachsten, praktisch und theoretisch wichtigen, gesetzmässig-veränderlichen Systeme einleitend behandeln, welche die Grundlage für die höhere Entwickelung bilden; und deshalb wird sich unsere Darlegung nur auf die drei folgenden gesetzmässig-veränderlichen ebenen Systeme erstrecken: das ähnlich-veränderliche ebene System, dessen Phasen ähnlich sind, das affin-veränderliche ebene System, dessen Phasen affin sind, und das bifocal-veränderliche ebene System, in dessen Phasen die Abstände jedes Systempunktes von zwei bestimmten, bewegten Punkten unverändert bleiben.

330. **Zweifache Erzeugung der Hüllbahncurven.** Wir betrachten in Fig. **818**, Taf. LVI, ein conplan bewegtes gesetzmässig-veränderliches ebenes System S mit einer Systemcurve k, der in den Systemphasen $S_1, S_2, S_3, \ldots$ die Curven $k_1, k_2, k_3, \ldots$ entsprechen. Die Einhüllcurve $\varkappa$, welche von den Curven $k_1, k_2, k_3, \ldots$ im Allgemeinen berührt wird, heisst die Hüllbahncurve der Systemcurve k. Es ist üblich zu sagen, die Curven $k_1, k_2, k_3, \ldots$ umhüllen die Einhüllcurve $\varkappa$, und ferner die Einhüllcurve $\varkappa$ hüllt die Curven $k_1, k_2, k_3, \ldots$ ein. Die Systempunkte $A, B, C, \ldots$ der Curve k durchschreiten beziehlich die Bahncurven $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, und die zu $A, B, C, \ldots$ gehörenden entsprechenden Punkte $A_1, B_1, C_1, \ldots; A_2, B_2, C_2, \ldots; A_3, B_3, C_3, \ldots$ liegen resp. auf den Curven $k_1, k_2, k_3, \ldots$ Befindet sich z. B. der Punkt A_2 momentan in dem Berührungspunkte, den die Curve k_2 mit der Hüllbahncurve $\varkappa$ bildet, so liegt die momentane Bewegungsrichtung des nach A_2 gelangten Systempunktes in der gemeinsamen Tangente $A_2 a$ der beiden Curven $k_2, \varkappa$; und folglich muss auch die Bahncurve α die Hüllbahncurve $\varkappa$ im Punkte A_2 berühren. Diese Beziehung ergiebt sich auch anschaulich, wenn wir die in der festen Ebene Σ liegenden Curven $k_1, k_2, k_3, \ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als die Projectionen von betreffenden Curven einer Fläche betrachten, die senkrecht auf die Ebene Σ projicirt ist; denn es ist demnach die Hüllbahncurve $\varkappa$ die Contour der Projection dieser Fläche und wird als solche von den Curven $k_1, k_2, k_3, \ldots$ so wie von den Bahncurven $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ im Allgemeinen berührt. Hiernach erhalten wir den Satz [1]):

---

[1]) Für diesen Satz hat Geisenheimer bei ebener Bewegung und P. Somoff bei räumlicher Bewegung einen analytischen Beweis gegeben. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 1879. B. 24. S. 145 u. 1885. B. 30. S. 228. Vergl. ferner die ursprüngliche Mittheilung von Burmester, daselbst 1874. B. 19. S. 162 und 1875. B. 20. S. 397.

Die von einer Systemcurve eines conplan bewegten gesetzmässig-veränderlichen ebenen Systems erzeugte Hüllbahncurve, welche die Phasen dieser Systemcurve einhüllt, hüllt auch die Bahncurven der Punkte dieser Systemcurve ein.

Es kann jedoch der Fall eintreten, dass nicht alle Phasen der Systemcurve und nicht alle Bahncurven bei der Berührung mit der Hüllbahncurve zur Geltung kommen, und dass somit theilweis imaginäre Berührungen stattfinden. Wenn wir die Phasen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ jeder Systemcurve k erstarrt als Bahncurven betrachten, und wenn wir die Bahncurven $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als Phasen einer Systemcurve in einem gesetzmässig-veränderlichen ebenen System Σ ansehen können, so dass die Punkte dieser Systemcurve sich auf den Curven $k_1, k_2, k_3, \ldots$ bewegen; dann ist die Bewegung vertauschbar, und wir nennen die Bewegung des Systems Σ die Vertauschung der Bewegung des Systems S. Die Hüllbahncurve $\varkappa$ wird bei der Bewegung des Systems S von den Curvenphasen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ und bei der Bewegung des Systems Σ von den Curvenphasen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ umhüllt, also durch beide Bewegungen erzeugt.

331. **Die Polbahn und die Polcurve bei der Bewegung eines gesetzmässig-veränderlichen ebenen Systems.** Ist durch eine gegebene Verwandtschaft das eindeutige Entsprechen zweier Systemphasen S_1, S_2 eines conplan bewegten gesetzmässig-veränderlichen ebenen Systems S bestimmt, so giebt es einen oder mehrere selbstentsprechende Punkte dieser Systemphasen. Diese selbstentsprechenden Punkte, die auch theils imaginär sein können, nennen wir die Verwandtschaftspole der beiden Systemphasen S_1, S_2. Wenn die Systemphasen S_1, S_2 unendlich nahe liegen, also gegen endliche Beziehungen als eine Systemphase betrachtet werden können, nennen wir die selbstentsprechenden Punkte die Verwandtschaftspole dieser Systemphase, und dieselben bleiben während der Bewegung des Systems S aus dieser Systemphase in eine unendlich nahe benachbarte Systemphase in Ruhe.

Wir wollen bei der folgenden Darlegung wegen der besseren Anschaulichkeit unbeschadet der Allgemeinheit ein ähnlich-veränderliches ebenes System als Repräsentanten eines gesetzmässig-veränderlichen ebenen Systems betrachten. Zwei in einer Ebene liegende ähnliche ebene Systeme haben stets einen reellen selbstentsprechenden Punkt, den wir den Aehnlichkeitspol nennen, und ferner sind auch die beiden festen, unendlich fernen imaginären

Kreispunkte selbstentsprechende Punkte derselben, die aber zunächst unbeachtet bleiben. Die Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S in einem festen System Σ ist in Fig. 819 durch die Bahncurven α, β zweier Systempunkte A, B und durch die Hüllbahncurve ε der Systemgeraden AB bestimmt. Durch die entsprechenden Strecken $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, .. sind die Phasen S_1, S_2, S_3, .. des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S gegeben.

Wenn wir nun annehmen, dass für die Systemphase S_1 der Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}_1$ durch eine Construction ermittelt ist, die wir in Art. 333 ableiten werden, so bleibt dieser Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}_1$ während einer Bewegung des Systems S aus der Systemphase S_1 in eine unendlich nahe Systemphase fest. In gleicher Weise denken wir uns für die anderen Systemphasen S_2, S_3, .. die zugehörigen Aehnlichkeitspole $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, .. ermittelt; und dann bilden die Aehnlichkeitspole $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, .. eine Curve π in dem festen System Σ, die wir die **Polbahn** des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S nennen. Bestimmen wir ferner die Punkte $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$, $\mathfrak{P}'_3$, .. so, dass

$$A_1 B_1 \mathfrak{P}'_1 \sim A_1 B_1 \mathfrak{P}_1$$
$$A_1 B_1 \mathfrak{P}'_2 \sim A_2 B_2 \mathfrak{P}_2$$
$$A_1 B_1 \mathfrak{P}'_3 \sim A_3 B_3 \mathfrak{P}_3$$

ist, dann liefern diese Punkte in der Systemphase S_1 eine Curve p_1, die Phase einer zum System S gehörenden Curve p, welche wir die **Polcurve** des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S nennen, und der Punkt $\mathfrak{P}'_1$ ist identisch mit dem Punkte $\mathfrak{P}_1$. Wir denken uns ferner die Geraden $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ unendlich nahe auf einander folgend zusammengebracht, damit auch die Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, .. auf der Polbahn π und die Punkte $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$, $\mathfrak{P}'_3$ auf der Polcurve p resp. auf deren Phase p_1 unendlich nahe liegen. Und nun betrachten wir auch hier die Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S in analoger Weise wie bei der Bewegung des starren ebenen Systems in Art. 16. Während der unendlich kleinen Bewegung der Systemstrecke AB von $A_1 B_1$ nach $A_2 B_2$ bleibt der Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}_1$ fest, und das Element $\mathfrak{P}'_1 \mathfrak{P}'_2$ der ähnlich-veränderlichen Polcurve p, deren Punkt $\mathfrak{P}'_1$ mit $\mathfrak{P}_1$ vereint ist, gelangt mit dem Elemente $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ der festen Polbahn π zur Deckung, weil das ähnlich-veränderliche Dreieck $A_1 B_1 \mathfrak{P}'_2$ in das Dreieck $A_2 B_2 \mathfrak{P}_2$ übergeht. Ebenso gelangt auch das Element $\mathfrak{P}'_2 \mathfrak{P}'_3$ der ähnlich-veränderlichen Polcurve p während der Bewegung der Systemstrecke AB von $A_2 B_2$ nach $A_3 B_3$ mit dem Elemente $\mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$

der festen Polbahn π zur Deckung, und so fort. Dieses auf einander folgende Decken der Elemente der veränderlichen Polcurve mit den entsprechenden Elementen der festen Polbahn definiren wir als Rollen der Polcurve p auf der Polbahn π. Die hier bei dem betrachteten speciellen Fall befolgte Ableitung können wir in gleicher Weise auch bei einem allgemeinen, gesetzmässig-veränderlichen ebenen System anwenden, wo mehrere Verwandtschaftspole auftreten; und wir erhalten somit den Satz:

Bei der conplanen Bewegung eines gesetzmässig-veränderlichen ebenen Systems rollt die veränderliche Polcurve auf der Polbahn in dem festen System, und die jeweiligen Berührungspunkte, von denen in besonderen Fällen nur einer reell ist, sind die zugehörigen Verwandtschaftspole der betreffenden Systemphase.

Die Polbahn ist demnach auch die Hüllbahncurve der Polcurve eines gesetzmässig-veränderlichen ebenen Systems. Wenn insbesondere alle Systemphasen eines gesetzmässig-veränderlichen ebenen Systems S dieselben Verwandtschaftspole in dem festen ebenen System Σ besitzen, dann wird die Polbahn durch diese Verwandtschaftspole vertreten, und dasselbe gilt von der Polcurve. In diesem Falle sind die mit den Verwandtschaftspolen identischen Systempunkte bei der Bewegung des Systems S feste Punkte in Σ.

332. **Umkehrung der Bewegung gesetzmässig-veränderlicher ebener Systeme.** Der besseren Anschaulichkeit wegen betrachten wir wieder in Fig. **819** anstatt eines gesetzmässig-veränderlichen ebenen Systems als Repräsentanten desselben ein ähnlich-veränderliches ebenes System S, welches sich in einem festen System Σ bewegt. Die Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S ist durch die Bahncurven α, β zweier Systempunkte A, B und durch die Hüllbahncurve ε der Systemgeraden AB bestimmt. Durch die entsprechenden Systemstrecken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, .. sind die Systemphasen S_1, S_2, S_3, .. gegeben, denen beziehlich die auf der Polbahn π liegenden Aehnlichkeitspole $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, .. angehören; und zu diesen sind in der vorhin angegebenen Weise die entsprechenden Punkte $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_2'$, $\mathfrak{P}_3'$, .. construirt, welche in S_1 die Phase p_1 der Polcurve p bilden. Ferner sind die zu einer Systemcurve k gehörenden Phasen k_1, k_2, k_3, .. nebst der erzeugten Hüllbahncurve $\varkappa$ gezeichnet.

Behufs der Umkehrung der Bewegung nehmen wir an, es sei die Systemphase S_1 mit den Punkten A_1, B_1, .. und den Curven

k_1, p_1 fest, und betrachten das vorhin feste ebene System Σ als ein ähnlich-veränderliches System mit den Curven $\alpha, \beta, \varkappa, \pi$. Demnach erhalten wir mehrere Systemphasen $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$ dieses ähnlich-veränderlichen ebenen Systems Σ, wenn Σ_1 durch die Curven $\alpha, \beta, \varkappa, \pi$ gegeben ist, die wir dann entsprechend auch mit $\alpha_1, \beta_1, \varkappa_1, \pi_1$ bezeichnen, vermittelst der Beziehungen:

$$A_1 B_1 k_1 \mathfrak{P}_1 \alpha_1 \beta_1 \varkappa_1 \backsim A_1 B_1 k_1 \mathfrak{P}_1' \alpha_1 \beta_1 \varkappa_1$$
$$A_1 B_1 k_1 \mathfrak{P}_2 \alpha_2 \beta_2 \varkappa_2 \backsim A_2 B_2 k_2 \mathfrak{P}_2' \alpha_1 \beta_1 \varkappa_1$$
$$A_1 B_1 k_1 \mathfrak{P}_3 \alpha_3 \beta_3 \varkappa_3 \backsim A_3 B_3 k_3 \mathfrak{P}_3' \alpha_1 \beta_1 \varkappa_1.$$

Hierbei fallen die beiden ersten Gebilde zusammen. Die Curvenphasen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ umhüllen resp. die festen Punkte A_1, B_1, und die Curvenphasen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ umhüllen die feste Curve k_1. Die Curve π, zu welcher auch die nicht gezeichneten Phasen $\pi_2, \pi_3, \ldots$ gehören, rollt auf der festen Curve p_1, weil bei unendlich nahen Phasen die Strecken $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3, \ldots$ und $\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2'$, $\mathfrak{P}_2'\mathfrak{P}_3'$ in Curvenelemente übergehen und successive $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ mit $\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2'$, ferner $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ mit $\mathfrak{P}_2'\mathfrak{P}_3'$ u. s. w. zusammenfällt. Die Punkte des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems Σ bewegen sich in der festen Systemphase S_1 auf Bahncurven, welche als Systemcurven von S betrachtet bei jener Bewegung von S in Σ feste Punkte umhüllen. Diese durch unsere Darlegung erhaltenen Beziehungen bewahren ihre Geltung, wenn wir statt der Aehnlichkeit in analoger Weise allgemein eine andere Verwandtschaft der Systemphasen betrachten, auch für gesetzmässig-veränderliche ebene Systeme S und Σ, die sich beide gemäss dieser Verwandtschaft, also gleichartig verändern. Somit folgt aus diesen Darlegungen das Ergebniss:

Bewegt sich ein gesetzmässig-veränderliches System S in einem festen ebenen System Σ und erzeugt eine Systemcurve k von S eine Hüllbahncurve $\varkappa$ in Σ, so wird, wenn wir eine Systemphase S_1 mit der entsprechenden Curvenphase k_1 als fest betrachten, durch umgekehrte Bewegung, bei welcher sich das System Σ in ein gleichartig gesetzmässig-veränderliches verwandelt, die Curve k_1 in S_1 als Hüllbahncurve von der zum System Σ gehörenden Curve $\varkappa$ erzeugt; dabei bewegen sich die Punkte des Systems Σ auf solchen Bahncurven in S_1, die bei der ersten Bewegung als Systemcurven von S Punkte in Σ umhüllen, und die Phase p_1 der bei der ersten Bewegung auf der Polbahn π in Σ rollenden Polcurve p vertritt bei der umgekehrten, zweiten Bewegung die Polbahn in S_1, auf welcher die Curve π des veränderlichen Systems Σ als Polcurve rollt.

Diese wichtige Umkehrung der Bewegung, deren einfachste Art wir bei starren ebenen Systemen erkannt haben, führt bei der Bewegung specieller gesetzmässig-veränderlicher Systeme zu einer Fülle interessanter Beziehungen.

Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme.

333. **Constructionen des Aehnlichkeitspols bei ähnlich-veränderlichen ebenen Systemen.** Durch die Bewegung und die gleichzeitigen Lagen zweier Punkte eines conplan bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen Systems ist die Bewegung desselben bestimmt [1]). Sind in Fig. **820** die entsprechenden Strecken A_1B_1, A_2B_2 zweier Systemphasen S_1, S_2 eines ähnlich-veränderlichen ebenen System S in einer festen Ebene gegeben, so erhalten wir zu einem beliebigen Punkte C_1 in S_1 den entsprechenden oder homologen Punkt C_2 in S_2, indem wir zu dem Dreieck $A_1B_1C_1$ das gleichwendige ähnliche Dreieck $A_2B_2C_2$ construiren. Der selbstentsprechende Punkt oder Doppelpunkt $\mathfrak{P}$ der beiden ähnlichen Systemphasen S_1, S_2 ist der Aehnlichkeitspol derselben. Dieser Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ ergiebt sich nach S. 805, wenn wir $A_1B' \# B_1B_2$ ziehen und zu dem Dreieck $A_2B'A_1$ das ähnliche Dreieck $A_1B_1\mathfrak{P}$ oder $A_2B_2\mathfrak{P}$ construiren. Diese Construction ist aber nicht anwendbar, wenn die Strecken A_1B_1, A_2B_2 unendlich nahe liegen. Eine zweite auch für eine unendlich nahe Lage dieser Strecken geltende Construction des Aehnlichkeitspols $\mathfrak{P}$ erhalten wir in Fig. **821**, wenn G den Schnittpunkt der Geraden A_1A_2, B_1B_2 und H den Schnittpunkt der Geraden A_1B_1, A_2B_2 bezeichnet, nach S. 806 vermittelst zweier der vier Kreise k_1, k_2, k_a, k_b,

---

[1]) Die Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems in einer Ebene ist vielseitig behandelt worden. Schönemann, *Jahresbericht über das Gymnasium zu Brandenburg a. H.* 1862. — Grouard, *Bulletin de la Société philomatique* 1865. T. 2. p. 68; *L'Institut, Journal universel.* 1865. p. 159, 179; 1870—1871. p. 27. 84, 124, 171. — Burmester, *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* 1874. B. 19. S. 154; 1878. B. 23. S. 108; *Civilingenieur* 1878. B. 24. S. 145. — Geisenheimer, *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* 1879. B. 24. S. 129 u. 345; 1880. B. 25. S. 300. — Schumann, *daselbst.* 1881. B. 26. S. 157. — Mehmke, *Civilingenieur.* 1883. B. 29. S. 487. — P. Somoff, *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* 1885. B. 30. S. 193.

welche den vier Dreiecken $A_1 B_1 G$, $A_2 B_2 G$, $A_1 A_2 H$, $B_1 B_2 H$ umschrieben sind und sich in dem Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ der beiden Systemphasen S_1, S_2 schneiden; und derselbe ist, weil auch die Dreiecke $\mathfrak{P} A_1 A_2$, $\mathfrak{P} B_1 B_2$ ähnlich sind, zugleich der Aehnlichkeitspol für die beiden, durch die entsprechenden Strecken $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ bestimmten ähnlichen ebenen Systeme. Die von den Punkten A_1, B_1 .. einer Geraden nach dem Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden bilden gleiche Winkel mit den Verbindungsgeraden $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, .. der homologen Punkte. Bezeichnen wir die Mittelpunkte der Kreise k_1, k_2, k_a, k_b resp. mit m_1, m_2, m_a, m_b, so ist der Winkel $\mathfrak{P} m_1 m_2 = \frac{1}{2} \mathfrak{P} m_1 G = \mathfrak{P} B_1 G$ und der Winkel $\mathfrak{P} m_a m_2 = \frac{1}{2} \mathfrak{P} m_a A_2 = \mathfrak{P} A_1 A_2 = \mathfrak{P} B_1 G$; folglich sind die Winkel $\mathfrak{P} m_1 m_2$, $\mathfrak{P} m_a m_2$ gleich, und in analoger Weise ergiebt sich, dass auch der Winkel $\mathfrak{P} m_b m_2$ diesen beiden Winkeln gleich ist. Demnach liegen die Mittelpunkte m_1, m_2, m_a, m_b der vier Kreise k_1, k_2, k_a, k_b auf einem durch den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ gehenden Kreise[1]). Denken wir uns die Gerade $A_2 B_2$ um H gedreht und unendlich nahe an $A_1 B_1$ gebracht, dann berühren die Kreise k_a, k_b resp. die Gerade $A_1 G$ in A_1, die Gerade $B_1 G$ in B_1, und der Kreis k_2 geht in den Kreis k_1 über.

Nehmen wir in Fig. **822** an, dass die Systempunkte A, B eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S sich auf den Bahncurven α, β bewegen, deren Tangenten a, b sich im Punkte G schneiden, und dass die Systemgerade AB an einer Hüllbahncurve ε entlang gleitet, welche sie im Punkte H berührt, so erhalten wir für die durch AB gegebene Systemphase den zugehörigen Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ als Schnittpunkt der durch H gehenden Kreise k_a, k_b, welche resp. die Tangente AG in A und die Tangente BG in B berühren; und ferner geht auch der um das Dreieck ABG beschriebene Kreis k, dessen Mittelpunkt m ist, durch den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$. Die im Berührungspunkte H auf AB errichtete Senkrechte bestimmt auf den Normalen AN_a, BN_b der Bahncurven α, β beziehlich die Durchmesser AN_a, BN_b der Kreise k_a, k_b, deren Mittelpunkte m_a, m_b mit dem Mittelpunkte m und dem Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ auf einem Kreise liegen. Wenn wir von H auf die Gerade $m_a m_b$ die Senkrechte HE ziehen und dieselbe um ihre eigene Länge verlängern, dann erhalten wir auch den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$. Aus dieser Construction des Aehnlichkeitspols ergiebt sich der Satz:

[1]) Diese Beziehung hat Ehlert gefunden. *Archiv für Mathematik und Physik.* 1883. Theil 69. S. 332. Vergl. auch die Mittheilungen von Sporer, *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* 1886. B. 31. S. 44.

Die von den Punkten einer Systemphase eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems nach dem zugehörigen Aehnlichkeitspol gehenden Geraden bilden gleiche Winkel mit den entsprechenden Tangenten der Bahncurven oder mit den momentanen Bewegungsrichtungen dieser Punkte.

Soll nun die Tangente Cc an der von einem Systempunkte C beschriebenen Bahncurve γ bestimmt werden, so machen wir den Winkel $\mathfrak{P}Cc$ in gleichem Sinne gleich dem Winkel $\mathfrak{P}Aa$ oder $\mathfrak{P}Bb$. Die Tangente an der Bahncurve, welche der momentan mit dem Berührungspunkte oder Gleitpunkte H coincidirende Systempunkt beschreibt, liegt in der Geraden AB. Die momentanen Bewegungsrichtungen aller Punkte einer Systemgeraden, welche nicht durch den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ geht, umhüllen hiernach eine Parabel, die diese Systemgerade in ihrem Gleitpunkte berührt und den Aehnlichkeitspol als Brennpunkt besitzt; und die momentanen Bewegungsrichtungen aller Punkte eines durch den Aehnlichkeitspol gehenden Systemkreises schneiden sich in einem Punkte der betreffenden Phase desselben.

Befinden sich in Fig. **823** die drei Punkte A, B, C einer Systemphase eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S resp. auf den Bahncurven α, β, γ, deren Tangenten Aa, Bb, Cc sich beziehlich in den Punkten G_{ab}, G_{bc}, G_{ca} schneiden, so enthält jeder der Kreise, welche den Dreiecken ABG_{ab}, BCG_{bc}, CAG_{ca} umschrieben sind, den zugehörigen Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ dieser Systemphase; und folglich schneiden sich diese drei Kreise in dem Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$, der also durch zwei dieser Kreise bestimmt ist.

334. **Einförmige Bewegungen eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems.** Die Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems, bei welchem ein Systempunkt als Aehnlichkeitspol in dem angenommenen festen ebenen System ruht, nennen wir eine einförmige Bewegung. Wenn in Fig. **824** der Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ fest ist, so wird die einförmige Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems S in dem festen System Σ durch die Bewegung eines Systempunktes A auf einer Bahncurve α bestimmt. Betrachten wir zwei Lagen A_1, A_2 des Systempunktes A und construiren wir die ähnlichen Dreiecke $\mathfrak{P}A_1B_1$, $\mathfrak{P}A_2B_2$, dann sind B_1, B_2 die entsprechenden Lagen eines Systempunktes B, dessen Bahncurve β ist. Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt, dass auch die Dreiecke $\mathfrak{P}A_1A_2$, $\mathfrak{P}B_1B_2$ ähnlich sind; dem gemäss sind auch die Bahncurven α, β ähnliche Curven in ähnlichen Syste-

men, deren selbstentsprechender Punkt der feste Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ ist, und wir nennen daher $\mathfrak{P}$ auch den Aehnlichkeitspol dieser ähnlichen Curven. Somit erhalten wir den Satz:

Bei einer einförmigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems vollziehen alle Systempunkte mit Ausnahme des festen Aehnlichkeitspols ähnliche Bewegungen und erzeugen ähnliche Punktreihen auf ähnlichen Bahncurven, welche denselben Aehnlichkeitspol besitzen.

Betrachten wir in Fig. **824** die ähnlichen Bahncurven α, β, welche den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ besitzen, als gegeben, und bewegen sich zwei Punkte A, B eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S derart auf diesen Bahncurven, dass sie auf denselben in gleichem Sinne die ähnlichen Punktreihen $A_1, A_2, ..$ und $B_1, B_2, ..$ erzeugen, so sind wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $\mathfrak{P}A_1A_2$, $\mathfrak{P}B_1B_2$ auch die Dreiecke $\mathfrak{P}A_1B_1$, $\mathfrak{P}A_2B_2$ ähnlich; folglich ist $\mathfrak{P}$ auch der feste Aehnlichkeitspol für alle durch A_1B_1, $A_2B_2, ..$ bestimmten Systemphasen des ähnlich-veränderlichen Systems S. Hiernach ergiebt sich der Satz:

Vollziehen zwei Systempunkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems gleichsinnige ähnliche Bewegungen, so gilt dasselbe von allen beweglichen Systempunkten; die Bewegung ist einförmig, und die Systemphasen sowie die Bahncurven besitzen denselben festen Aehnlichkeitspol.

Wir können in Fig. **824** die Punkte $A_1, B_1, ..$ und $A_2, B_2, ..$ als homologe Punkte der Curvenphasen k_1, k_2 einer Systemcurve k des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S betrachten und uns diese Curvenphasen in der festen Ebene erstarrt denken; ferner können wir die Bahncurven $\alpha, \beta, ..$ als Curvenphasen von einer Curve eines anderen ähnlich-veränderlichen ebenen Systems Σ ansehen, auf denen beziehlich $A_1, A_2 ..$ und $B_1, B_2 ..$ homologe Punkte bilden; dann sind jene erstarrt gedachten Curvenphasen k_1, k_2 die Bahncurven der betreffenden Punkte des Systems Σ. Jene einförmige Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems S und diese durch Vertauschung erhaltene einförmige Bewegung des anderen ähnlich-veränderlichen Systems Σ besitzen demnach in der festen Ebene denselben Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$. Wir gelangen somit zu dem Ergebniss:

Eine einförmige Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S in einer festen Ebene kann mit einer anderen einförmigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems Σ mit demselben Aehnlichkeitspol derart vertauscht werden, dass die Curvenphasen $k_1, k_2, .$, einer Systemcurve von S in der festen Ebene erstarrt die Bahncurven der Punkte einer im System Σ befindlichen Systemcurve bilden, und dass die zu den betreffenden Curvenpunkten des Systems S gehörenden Bahncurven $\alpha, \beta, ..$ die Phasen dieser Systemcurve bilden.

Bei der Vertauschung einer einförmigen Bewegung umhüllen die Curvenphasen $k_1, k_2, ..$ der ersten Bewegung und die Curvenphasen $\alpha, \beta, ..$ der zweiten Bewegung dieselbe Hüllbahncurve in der festen Ebene. Diese hier bei der einförmigen Bewegung ausführbare Vertauschung der Bewegung ist aber wohl zu unterscheiden von der in Art. 332 abgeleiteten allgemein geltenden Umkehrung der Bewegung, die auf eine beliebige erstarrt gedachte Systemphase von S bezogen wird.

Wir nehmen in Fig. **825** die homologen Punkte $A_1, B_1, C_1, ..$ und $A_2, B_2, C_2, ..$ zweier ähnlicher ebener Systeme S_1, S_2, deren Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ ist, in einer Ebene an und bestimmen die Punkte $A_3, B_3, C_3, ..$ so dass die Dreiecke $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3, ..$ ähnlich sind; dann bilden die Punkte $A_3, B_3, C_3, ..$ der abgeleiteten Beziehung gemäss ein mit S_1, S_2 ähnliches ebenes System S_3, und diese ähnlichen ebenen Systeme S_1, S_2, S_3, sowie die durch $A_1A_2A_3, B_1B_2B_3, C_1C_2C_3, ..$ bestimmten ähnlichen ebenen Systeme besitzen denselben Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$. Hiernach ergiebt sich der Satz:

Die dritten Ecken der ähnlichen Dreiecke, welche an den Verbindungsstrecken homologer Punkte zweier in einer Ebene liegender ähnlicher ebener Systeme S_1, S_2 in gleichem Sinne construirt sind, bilden ein ähnliches ebenes System S_3, und diese drei ähnlichen ebenen Systeme sowie die durch die ähnlichen Dreiecke bestimmten ähnlichen ebenen Systeme besitzen denselben Aehnlichkeitspol.

Hieraus folgt ferner der specielle Satz:

Die Punkte, welche die Verbindungsstrecken der homologen Punkte zweier in einer Ebene liegender ähnlicher ebener Systeme S_1, S_2 nach gleichen Verhältnissen theilen, bilden ein ähnliches ebenes System S_3, und diese drei ähnlichen ebenen Systeme sowie die durch die Verbindungsstrecken bestimmten ähnlichen ebenen Systeme besitzen denselben Aehnlichkeitspol.

335. **Kreislinige Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems und Vertauschung derselben.** Bewegt sich in Fig. **826** ein Systempunkt A eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S, welches den festen Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ besitzt, auf einem Bahnkreise α, dessen Mittelpunkt A ist, so vollziehen alle anderen beweglichen Systempunkte $B, C, \ldots$ ähnliche Bewegungen auf entsprechenden Bahnkreisen $\beta, \gamma, \ldots$, deren Mittelpunkte resp. mit B, $\Gamma, \ldots$ bezeichnet sind[1]. Diese specielle einförmige Bewegung nennen wir eine kreislinige Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S. Das System der Mittelpunkte A, B, $\Gamma, \ldots$ ist dem System der Punkte $A, B, C, \ldots$ ähnlich, und der Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ ist auch der Doppelpunkt dieser beiden Systeme. Sind in einer Systemphase die Lagen A_1, B_1, C_1, der Systempunkte A, B, C, gegeben, und ist der Mittelpunkt A des Bahnkreises α bekannt, dann erhalten wir die entsprechenden Mittelpunkte B, Γ der durch B_1, C_1 gehenden Bahnkreise β, γ, indem wir das Dreieck $\mathfrak{P}$AB $\sim \mathfrak{P} A_1 B_1$ und das Dreieck $\mathfrak{P}$A$\Gamma \sim \mathfrak{P} A_1 C_1$ machen. Geht insbesondere der Kreis α durch den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$, so gilt dasselbe von allen Bahnkreisen, und alle Systemgeraden umhüllen bei dieser speciellen kreislinigen Bewegung Punkte[2].

Nehmen wir in Fig. **826** bei der kreislinigen Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S in demselben eine Systemcurve k an, deren Phasen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ sind, so bilden die Mittelpunkte A, B, $\Gamma \ldots$ der Bahnkreise $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, auf denen die Punkte $A, B, C, \ldots$ der Systemcurve k sich bewegen, eine zu k ähnliche Curve μ'; und die von der Systemcurve k erzeugte, resp. von ihren Phasen $k_1, k_2, \ldots$ umhüllte Hüllbahncurve wird auch von den Bahnkreisen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ umhüllt. Die Endpunkte $A_k, B^k, C_k, \ldots$ der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Durchmesser der Bahnkreise bestimmen die

[1]) Die erste Andeutung dieser Beziehungen findet sich in „Apollonius von Pergen ebene Oerter“. Wiederhergestellt von R. Simson, Deutsch von Camerer. 1796. S. 44. — *Daselbst.* S. 69 hat Simson auch zuerst auf das Princip der reciproken Radien hingewiesen.

[2]) Nachdem Mannheim, *Nouvelles Annales de Mathématiques.* 1857. T. 16. p. 322 auf diese specielle kreislinige Bewegung zuerst hingewiesen hatte, wurde dieselbe von Durand, *daselbst.* 1867. Sér. 2. T. 6. p. 80. sehr kurz, von Ch. Wiener, *Annali di Matematica.* 1868. Ser. 2. T. 1. p. 139, und von Affolter, *Archiv für Mathematik und Physik.* 1873. Theil 55. S. 175 ausführlicher behandelt.

kleinste Curvenphase k_k, und die anderen Endpunkte $A_g, B_g, C_g, \ldots$ bestimmen die grösste Curvenphase k_g. Betrachten wir die Curvenphasen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ als erstarrte Bahncurven und die Kreise $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als Phasen eines zu einem ähnlich-veränderlichen ebenen System Σ gehörenden Systemkreises, dann erfolgt die Vertauschung der Bewegung. Wir erhalten somit, falls jene Curve k kein Kreis ist, eine allgemeine einförmige Bewegung des Systems Σ mit demselben Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$, und der in diesem System Σ befindliche Systemkreis, dessen Phasen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sind, erzeugt dieselbe Hüllbahncurve, die bei der ersten Bewegung auftritt.

In Fig. **827** ist ein Systemkreis k in einem ähnlich-veränderlichen ebenen System S gegeben, welches den festen Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ besitzt und eine kreislinige Bewegung vollzieht. Der Mittelpunkt M des Systemkreises k bewegt sich auf dem Kreise μ, dessen Mittelpunkt mit M bezeichnet ist. Durch das constante Verhältniss des Radius des Systemkreises k zum Abstande seines Mittelpunktes vom Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ sind die verschiedenen Kreisphasen bestimmt; und es ist für eine Kreisphase k_1 mit dem Mittelpunkte M_1, welche die zugehörige zweitheilige Hüllbahncurve $\varkappa$ in den beiden Punkten C_1, D_1 berührt, nach dem gegebenen Verhältnisse $\mathfrak{P} M_1 : M_1 D_1 = 1 : n$ construirt. Um auf dieser Kreisphase k_1 die Berührungspunkte C_1, D_1 zu erhalten, beachten wir, dass z. B. für den Berührungspunkt D_1 die gemeinsame Tangente $D_1 G$ an k_1 und $\varkappa$ auch die Bewegungsrichtung des mit D_1 momentan coincidirenden Systempunktes enthält, und dass also der Winkel $\mathfrak{P} D_1 G$ gleich dem Winkel $\mathfrak{P} M_1 G$ ist, den die in M_1 an den Kreise μ gelegte Tangente $M_1 G$ mit $M_1 \mathfrak{P}$ einschliesst. Demnach ergeben sich, wenn wir auf $\mathfrak{P} M_1$ die Senkrechte $\mathfrak{P} G$ bis an $M_1 G$ errichten und über $M_1 G$ als Durchmesser den durch $\mathfrak{P}$ gehenden Kreis i beschreiben, die Berührungspunkte C_1, D_1 als Schnittpunkte der Kreise k_1, i; und die Geraden $G C_1, G D_1$ sind die Tangenten an der Hüllbahncurve $\varkappa$.

Auf diese Construction der Berührungspunkte C_1, D_1 gestützt können wir leicht nachweisen, dass die erzeugte Hüllbahncurve $\varkappa$ ein Cartesisches Oval ist. Der durch den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ gehende Kreis i, welcher auf der Kreisphase k_1 die Berührungspunkte bestimmt, schneidet den Kreis μ rechtwinkelig und die Gerade $\mathfrak{P}\mathsf{M}$ in einem zweiten Punkt $\mathfrak{P}'$; folglich ist $\overline{\mathsf{M} M_1}^2 = \mathsf{M}\mathfrak{P} . \mathsf{M}\mathfrak{P}'$, und es bilden die Kreise i, welche auf den verschiedenen Kreisphasen $k_1, k_2, \ldots$ die Berührungspunkte bestimmen, ein Kreisbüschel, dessen Grundpunkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ zu dem durch $\mathfrak{P}$ gehenden Durchmesser des Kreises μ harmonisch sind. Demnach ist das Verhältniss $\mathfrak{P}M_1 : \mathfrak{P}' M_1 = 1 : \nu$ constant; und der Kreis k, der die Hüllbahncurve $\varkappa$ erzeugt, kann also auch als ein Systemkreis eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems betrachtet werden, für welches der Punkt $\mathfrak{P}'$ der Aehnlichkeitspol ist. Bestimmen wir auf der Geraden $\mathfrak{P}'D_1$ den Punkt E so, dass $\mathfrak{P}\mathfrak{P}' : \mathfrak{P}'E = \mathfrak{P}M_1 : M_1 D_1$ ist; dann ist die Strecke $\mathfrak{P}'E = n \,.\, \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ constant, und der Punkt E liegt auf einem um $\mathfrak{P}'$ mit dem Radius $n \,.\, \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ beschriebenen Kreise e. Hiernach sind wegen der gleichen Winkel $\mathfrak{P}M_1 D_1$, $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'D_1$ die Dreiecke $\mathfrak{P}M_1 D_1$, $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'E$ ähnlich und somit auch die Dreiecke $\mathfrak{P}M_1\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}D_1 E$ ähnlich. Es ist also das Verhältniss

$$\mathfrak{P}D_1 : ED_1 = \mathfrak{P}M_1 : \mathfrak{P}'M_1 = 1 : \nu;$$

demnach ergiebt sich, weil $ED_1 = \mathfrak{P}'D_1 - \mathfrak{P}'E = \mathfrak{P}'D_1 - n \,.\, \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ ist, die Beziehung

$$\mathfrak{P}'D_1 - \nu \,.\, \mathfrak{P}D_1 = n \,.\, \mathfrak{P}\mathfrak{P}',$$

durch welche nach S. 69 das Cartesische Oval definirt wird; und die Punkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ sind zwei Brennpunkte desselben. Wir erhalten auch, wie dort gelehrt wurde, die Tangente $D_1 G$ an dem Cartesischen Oval, indem wir in $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{P}D_1$ und in E auf $\mathfrak{P}'D_1$ Senkrechte errichten, die sich in einem Punkte dieser Tangente schneiden. Wenn der erzeugende Systemkreis k durch den Punkt $\mathfrak{P}'$ geht, also $n = \nu$ ist, dann umhüllen die Kreisphasen einerseits diesen Punkt $\mathfrak{P}'$ und andererseits eine Pascal'sche Curve, welche der zu $\mathfrak{P}'$ als Lothpunkt gehörenden Fusspunktencurve des Kreises μ im Verhältnisse $2:1$ homothetisch ähnlich ist. Das innere Oval der Hüllbahncurve $\varkappa$ schrumpft demnach in den Punkt $\mathfrak{P}'$ zusammen und das äussere Oval geht in diese Pascal'sche Curve über. Wenn ferner der erzeugende Systemkreis k durch den Punkt $\mathfrak{P}$ geht, also $n = 1$ ist, dann umhüllen die Kreisphasen eine Pascal'sche Curve, welche der zu $\mathfrak{P}$ als Lothpunkt gehörenden Fusspunktencurve des Kreises μ im Verhältnisse $2:1$ homothetisch ähnlich ist. Aus dieser Darlegung folgt somit der Satz:

Bei der kreislinigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems ist die durch einen Systemkreis erzeugte Hüllbahncurve ein Cartesisches Oval, welches in besonderen Fällen in eine Pascal'sche Curve übergeht[1]).

[1]) Diese Erzeugungsweise des Cartesischen Ovals hat Quetelet angegeben in Herschel, *Traité de la lumière*. 1833. T. 2. Supplement, p. 400. Ein reichhaltiges Literatur-Verzeichniss des viel behandelten Cartesischen Ovals giebt Liguine, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*. 1882. Sér. 2. T. 6. p. 40.

Bei der Bewegung, für welche $\mathfrak{P}$ der Aehnlichkeitspol ist, liegen die Mittelpunkte $\mathsf{A}, \mathsf{B}, ..$ der Bahnkreise $\alpha, \beta, ..$, die den Punkten A_1, B_1, .. der Kreisphase k_1 oder den Punkten A_2, B_2, .. der Kreisphase k_2 entsprechen, auf dem um M beschriebenen Kreise μ'; und es sind die Gebilde $\mathfrak{P}\mathsf{AB}..\mathsf{M}$ und $\mathfrak{P}A_1B_1..M_1$ ähnlich. Bei der Bewegung, für welche $\mathfrak{P}'$ der Aehnlichkeitspol ist, befinden sich die Mittelpunkte der betreffenden Bahnkreise auf dem um M beschriebenen Kreise μ'', für den die analoge Beziehung gilt. Vertauschen wir nun jene erste Bewegung, indem wir die Kreisphasen k_1, k_2, .. als erstarrt und die Bahnkreise $\alpha, \beta, ..$ als Kreisphasen eines Systemkreises in einem ähnlich-veränderlichen ebenen System betrachten, welches den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ besitzt, so wird das Cartesische Oval $\varkappa$ auch als Hüllbahncurve dieses Systemkreises erzeugt, dessen Mittelpunkt sich auf dem Kreise μ' bewegt. Die Berührungspunkte, welche die Kreise $\alpha, \beta, ..$ mit dem Cartesischen Oval $\varkappa$ bilden, werden wie vorhin durch entsprechende Kreise bestimmt, die durch den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ und durch einen zweiten auf $\mathfrak{P}\mathsf{M}$ liegenden Punkt $\mathfrak{P}''$ gehen; und diese Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}''$ sind harmonisch zu den Endpunkten des durch $\mathfrak{P}$ gehenden Durchmessers des Kreises μ'.

Die durch die Berührungspunkte D_1, C_1 gehende Gerade D_1C_1, welche $\mathfrak{P}M_1$ in dem Punkte $\mathfrak{q}$ schneidet, geht durch den festen Punkt $\mathfrak{P}''$. Denn diese Gerade D_1C_1 ist die Polare des Punktes G im Bezug auf den Kreis k_1; folglich ist auch die Gerade $\mathfrak{P}G$ die Polare des Punktes $\mathfrak{q}$, und somit sind die Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{q}$ harmonisch zu den Endpunkten des durch $\mathfrak{P}$ gehenden Durchmessers des Kreises k_1; und da D_1C_1 parallel $M_1\mathsf{M}$ ist, so geht die Gerade D_1C_1 durch den Punkt $\mathfrak{P}''$, der mit $\mathfrak{P}$ zum entsprechenden Durchmesser des Kreises μ' haurmonisch liegt. Hiernach ergeben sich die Berührungspunkte C_1, D_1 einfacher als Schnittpunkte, die der Kreis k_1 mit der durch $\mathfrak{P}''$ zu $\mathsf{M}M_1$ parallel gezogenen Geraden $\mathfrak{P}''\mathfrak{q}$ bildet; und die Normale D_1M_1 an einem Punkt D_1 des Cartesischen Ovals $\varkappa$ wird erhalten, indem wir den zu $\mathfrak{P}''D_1$ parallelen Radius $\mathsf{M}M_1$ des Kreises μ' ziehen und D_1 mit M_1 verbinden. Es ist hiernach das Product $\mathfrak{P}''C_1 . \mathfrak{P}''D_1 = \mathfrak{P}''\mathfrak{P}' . \mathfrak{P}''\mathfrak{P}$ constant, und dem zufolge wird das Cartesische Oval durch Inversion im Bezug auf $\mathfrak{P}''$ als Inversionscentrum in sich selbst übergeführt. Die drei Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ stehen nach dieser Erkenntniss in gleichartiger Beziehung zu dem Cartesischen Oval und bilden die drei Brennpunkte desselben. Die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte, welche die Kreise $\alpha, \beta, ..$ mit dem Cartesischen Oval $\varkappa$ bilden, gehen dem gemäss durch den Brennpunkt $\mathfrak{P}'$. Es wird hiernach das Cartesische Oval noch in dritter Weise durch einen Systemkreis eines ähnlich-veränderlichen Systems erzeugt, für welches $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{P}''$ der Aehnlichkeitspol ist, wenn der Mittelpunkt dieses Systemkreises sich auf dem Kreise μ'' bewegt, und hierbei gehen die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte durch den Punkt $\mathfrak{P}$. Bei der ersten Erzeugungsweise berührt das kleine und das grosse Oval die Kreisphasen ausserhalb, bei der zweiten berührt das kleine Oval die Kreisphasen innerhalb, das grosse Oval ausserhalb, und bei der dritten werden die Kreisphasen von den beiden Ovalen nicht gleichzeitig berührt, sondern etwa erst von dem kleinen Oval innerhalb und dann von dem grossen Oval ausserhalb.

In Fig. **828** vollzieht das ähnlich-veränderliche System S eine specielle kreislinige Bewegung, bei welcher sich der Mittelpunkt M eines Systemkreises k auf dem durch den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ gehenden Bahnkreis μ bewegt, dessen Mittelpunkt M ist; demnach gehen auch alle Bahnkreise $\alpha, \beta, ..$ durch $\mathfrak{P}$, und ihre Mittelpunkte $\mathsf{A}, \mathsf{B}, ..$ liegen auf dem um M beschriebenen Kreise μ', der durch die ähnlichen Gebilde $\mathfrak{P}\mathsf{MAB}..$, $\mathfrak{P}M_1A_1B_1..$ bestimmt ist. Vertauschen wir diese specielle kreislinige Bewegung, indem wir die Kreisphasen $k_1, k_2, ..$ als Bahnkreise und die Bahnkreise $\alpha, \beta, ..$ als Kreisphasen betrachten, so erhalten wir eine allgemeine kreislinige Bewegung, bei welcher die durch $\mathfrak{P}$ gehenden Kreisphasen $\alpha, \beta, ..$ eine Pascal'sche Curve $\varkappa$ als Hüllbahncurve erzeugen. Ziehen wir zu dem Radius MA die parallele Sehne $\mathfrak{P}X$ des Kreises α, so ist der Punkt X der Berührungspunkt, den derselbe mit $\varkappa$ bildet. Um die bekannte einfachste Construction der Pascal'schen Curve $\varkappa$ auszuführen, machen wir auf einer beliebigen durch $\mathfrak{P}$ gezogenen Geraden $\mathfrak{P}M_x$, welche den Kreis μ im Punkte M_x trifft, die constanten Strecken M_xX, M_xX' gleich dem Radius der grössten Phase des Systemkreises k. Die kleinste Phase dieses Systemkreises k schrumpft in den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ zusammen, welcher zugleich der Doppelpunkt der Pascal'schen Curve ist, wenn er sich ausserhalb des Systemkreises befindet. Gehen insbesondere die Phasen des Systemkreises k durch den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$, dann geht auch der Kreis μ' durch denselben, und die Pascal'sche Curve geht dann in eine Kardioide über. Hiernach erhalten wir den Satz:

Bei einer speciellen kreislinigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems erzeugt ein Systemkreis eine Pascal'sche Curve, die in eine Kardioide übergeht, wenn der Systemkreis durch den Aehnlichkeitspol geht.

Die Verbindungsgerade der Berührungspunkte D_1, C_1 einer Phase k_1 des Systemkreises k geht durch den Brennpunkt $\mathfrak{P}'$, welcher der zu dem Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ und den beiden Endpunkten des Durchmessers des Kreises μ' gehörende, vierte harmonische Punkt ist. In diesem Brennpunkte $\mathfrak{P}'$ vereinen sich bei der Pascal'schen Curve jene beiden Brennpunkte $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ des Cartesischen Ovals; und bei der Kardioide fallen dieselben mit dem Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ zusammen, der die Spitze der Kardioide bildet.

336. **Geradlinige Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems nebst Vertauschung und Umkehrung desselben in kreislinige Bewegung.** Bewegt sich in Fig. **829** ein Systempunkt A eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S, welches den festen Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ besitzt, auf einer Bahngeraden α, so vollziehen alle anderen beweglichen Systempunkte $B, C, ..$ ähnliche Bewegungen auf entsprechenden Bahngeraden $\beta, \gamma, ..$ Diese specielle einförmige Bewegung nennen wir eine geradlinige Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S; und dieselbe geht als Specialfall aus der kreislinigen Bewegung hervor, wenn die Bahnkreise unendlich gross sind. Die von den gleichzeitigen Lagen der Systempunkte $A, B, C, ..$ auf den Bahngeraden $\alpha, \beta, \gamma, ..$ gebildeten Punktreihen sind ähnlich und besitzen denselben Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$. Die Lagen einer Systemgeraden umhüllen eine Parabel, deren Brennpunkt der Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ ist; dieselbe ist also die Hüllbahncurve dieser Systemgeraden. Die von den Punkten $A_1, B_1, C_1 ..$ einer Systemphase S_1 nach dem Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden $A_1\mathfrak{P}, B_1\mathfrak{P}, C_1\mathfrak{P}_1, ..$ bilden gleiche Winkel mit den entsprechenden Bahngeraden $\alpha, \beta, \gamma, ..$; und umgekehrt bestimmen die von dem Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ nach den Bahngeraden $\alpha, \beta, \gamma, ..$ unter gleichem Winkel in gleichem Sinne gezogenen Geraden die Punkte $A_1, B_1, C_1, ..$ einer Systemphase S_1 von S. Fällen wir von dem Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ Senkrechte auf die Bahngeraden $\alpha, \beta, \gamma, ..$, dann bilden die Fusspunkte $A_k, B_k, C_k, ..$ die kleinste Systemphase S_k des ähnlich-veränderlichen Systems S. Ist der feste Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ und die Bahngerade α des in A_1 befindlichen Systempunktes A gegeben, so erhalten wir zu beliebigen Punkten $B_1, C_1, ..$ der durch $\mathfrak{P}A_1$ bestimmten Systemphase die entsprechenden Bahngeraden $\beta, \gamma ..$, indem wir die Winkel $\mathfrak{P}B_1\beta$, $\mathfrak{P}C_1\gamma, ..$ gleich dem Winkel $\mathfrak{P}A_1\alpha$ machen.

Vollzieht das betrachtete ähnlich-veränderliches ebenes System S mit dem Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ eine geradlinige Bewegung, bei welcher die Bahngeraden α, β, γ .. eine Curve $\varkappa$ umhüllen, dann erhalten wir auf diesen Bahngeraden die Punkte A_1, B_1, C_1, .. einer Curvenphase k_1, indem wir die Geraden $\mathfrak{P}A_1$, $\mathfrak{P}B_1$, $\mathfrak{P}C_1$, .. unter gleichen Winkeln in gleichem Sinne an die Bahngeraden α, β, γ, .. ziehen. In gleicher Weise ergeben sich die Punkte A_2, B_2, C_2, .. einer anderen Curvenphase k_2; und ferner bilden die Fusspunkte A_k, B_k, C_k, .. der von $\mathfrak{P}$ auf α, β, γ, .. gefällten Senkrechten die kleinste Curvenphase k_k. Die Systemcurve k, der die Curvenphasen k_1, k_2, k_k, .. entsprechen, ist also der zu $\mathfrak{P}$ als Lothpunkt gehörenden Fusspunktencurve k_k von $\varkappa$ ähnlich. Die Systemcurve k erzeugt demnach die Curve $\varkappa$ als Hüllbahncurve, die von den Curvenphasen k_1, k_2, k_k, .. umhüllt wird. Wenn wir die einförmige Bewegung vertauschen, uns also die Curvenphasen k_1, k_2, .. erstarrt denken und annehmen, dass z. B. zwei Systempunkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems Σ, für welches $\mathfrak{P}$ der Aehnlichkeitspol ist, sich beziehlich auf den Bahncurven k_1, k_2 in die Lagen A_1, B_1, C_1 .. und A_2, B_2, C_2 bewegen, so umhüllen die Geraden α, β, γ, als Lagen einer Systemgeraden des Systems Σ die Curve $\varkappa$, und dieselbe wird demnach auch als Hüllbahncurve dieser Systemgeraden erzeugt.

Wenn in Fig. **830** zwei Systempunkte A, B auf den Bahngeraden α, β, welche sich in $G_{\alpha\beta}$ schneiden, ähnliche Bewegungen vollziehen, so gilt dasselbe von allen Systempunkten mit Ausnahme des fest bleibenden Aehnlichkeitspols $\mathfrak{P}$; und derselbe wird, wenn zwei Lagen A_1B_1, A_2B_2 der Systemstrecke AB gegeben sind, als zweiter Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der Kreise k_1, k_2 bestimmt, welche resp. durch $A_1\,B_1\,G_{\alpha\beta}$ und $A_2B_2G_{\alpha\beta}$ gehen. Diese Kreise k_1, k_2 können wir als Phasen eines Systemkreises k betrachten. Die Gesammtheit aller Phasen desselben bilden demnach ein Kreisbüschel, dessen Grundpunkte $\mathfrak{P}$, $G_{\alpha\beta}$ sind; und die Punkte dieses Systemkreises bewegen sich auf Bahngeraden, die durch den Punkt $G_{\alpha\beta}$ gehen.

Nehmen wir in Fig. **830** an, dass drei Punkte A, B, C eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S gezwungen sind sich auf drei, resp. in den Punkten $G_{\alpha\beta}$, $G_{\beta\gamma}$, $G_{\gamma\alpha}$ sich schneidenden Bahngeraden α, β, γ zu bewegen, so erhalten wir den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ einer durch die Punkte A_1, B_1, C_1 gegebenen Systemphase als Schnittpunkt von je zweien, den Dreiecken $A_1B_1G_{\alpha\beta}$, $B_1C_1G_{\beta\gamma}$, $C_1A_1G_{\gamma\alpha}$ umschriebenen Kreisen; und die Geraden $A_1\mathfrak{P}$, $B_1\mathfrak{P}$, $C_1\mathfrak{P}$ bilden beziehlich gleiche Winkel mit den Bahngeraden α, β, γ. Demnach ist diese Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S identisch mit der Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems, dessen fester Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ ist und dessen Systempunkt A auf der Bahngeraden α geführt wird. Somit ergiebt sich der Satz:

Sind drei Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems gezwungen, sich auf je einer Bahngeraden in einer Ebene zu bewegen, so ist die Bewegung dieses Systems eine geradlinige; alle Systempunkte mit Ausnahme des festen Aehnlichkeitspols vollziehen ähnliche Bewegungen auf Bahngeraden[1]).

In Fig. **831** ist der besondere Fall dargestellt, bei welchem in einem geradlinig bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen System S mit dem festen Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ ein Systemkreis k gegeben ist, dessen Mittelpunkt M sich auf der Bahngeraden μ bewegt. Es sei der Kreis k_1, dessen auf μ liegender Mittelpunkt mit M_1 bezeichnet ist, eine Phase eines Systemkreises k. Die zu den Punkten $A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots$ des Kreises k_1 gehörenden Bahngeraden $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ bilden mit den von diesen Punkten nach dem Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden gleiche Winkel, die dem Winkel $\mu M_1 \mathfrak{P}$ gleich sind. Dem zufolge umhüllen diese Bahngeraden nach Art. 56 b) einen Kegelschnitt $\varkappa$, dessen einer Brennpunkt der Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ ist und dessen Mittelpunkt M_k der Fusspunkt der von $\mathfrak{P}$ auf μ gefällten Senkrechten ist. Dieser Kegelschnitt $\varkappa$, der in Fig. **831** eine Hyperbel ist, wird demnach auch als Hüllbahncurve des Systemkreises k erzeugt, und wird also von den Phasen desselben umhüllt[2]). Wir erhalten somit den Satz:

Bei einer geradlinigen Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems ist die von einem Systemkreise erzeugte Hüllbahncurve ein Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt der Aehnlichkeitspol ist und dessen Nebenaxe in der Bahngeraden des Mittelpunktes dieses Systemkreises liegt.

Die Bahngeraden α, γ, welche den Endpunkten A_1, C_1 des durch $\mathfrak{P}$ gehenden Durchmessers des Kreises k_1 entsprechen, sind

---

[1]) Vergl. die Notiz von De Lafitte, *Nouvelles Annales de Mathématiques*. 1858. T. 17. p. 49.

[2]) Auf diese Erzeugungsweise hat Quetelet zuerst hingewiesen in Herschel, *Traité de la lumière*. 1833. T. 2. Supplement. p. 390; und dieselbe wurde später auch von Küpper angegeben im *Archiv für Mathematik und Physik*. 1857. Theil 28. S. 100.

der Bahngeraden μ parallel und bilden somit die Scheiteltangenten des Kegelschnitts $\varkappa$. Um eine andere Phase k_2 des Systemkreises k zu erhalten, nehmen wir auf μ einen beliebigen Punkt M_2 an, ziehen die Gerade $M_2\mathfrak{P}$, welche α im Punkt A_2 schneidet, und beschreiben um M_2 den durch A_2 gehenden Kreis k_2. Auf diese Weise können wir den Kegelschnitt $\varkappa$ auch leicht als die Einhüllcurve der Kreise $k_1, k_2, \ldots$ zeichnen. Wenn insbesondere der Systemkreis k durch den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ geht, dann bilden die Kreisphasen ein Kreisbüschel, für welches dieser Aehnlichkeitspol der eine Grundpunkt und der gemeinsame Schnittpunkt der zu den Punkten dieses Systemkreises gehörenden Bahngeraden der andere Grundpunkt ist. Der Kegelschnitt $\varkappa$ wird dann durch diese beiden Grundpunkte vertreten.

Um die Berührungspunkte B_1, D_1 zu bestimmen, die eine Kreisphase k_1 mit dem Kegelschnitt $\varkappa$ bildet, errichten wir nach der S. 871 abgeleiteten Construction auf $\mathfrak{P}M_1$ die Senkrechte $\mathfrak{P}G$ bis an die Bahngerade μ und beschreiben über M_1G als Durchmesser den Kreis i, der den Kreis k_1 in den Berührungspunkten B_1, D_1 schneidet. Die gemeinsamen Tangenten B_1G, D_1G von k_1 und $\varkappa$ sind die Bahngeraden β, δ der momentan in diesen Berührungspunkten befindlichen Systempunkte. Hieraus folgt, dass jeder durch die Brennpunkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ eines Kegelschnitts gehende Kreis denselben in zwei Punktpaaren schneidet, deren Tangenten sich in je einem Punkte dieses Kreises auf der Nebenaxe des Kegelschnitts treffen.

Vertauschen wir die Bewegung, indem wir die Kreisphasen k_1, k_2 als Bahnkreise betrachten, so erhalten wir eine kreislinige Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems Σ', bei welchem $\mathfrak{P}$ der Aehnlichkeitspol ist. Zweien auf den Bahnkreisen k_1, k_2 bewegten Systempunkten entsprechen beziehlich die Lagen $A_1, B_1, C_1 \ldots$ und $A_2, B_2, C_2, \ldots$, welche die Lagen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ einer Systemgeraden von Σ' bestimmen. Demnach erzeugt diese Systemgerade den Kegelschnitt $\varkappa$ auch als Hüllbahncurve; und somit ergiebt sich der Satz:

Bei einer kreislinigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems ist die durch eine Systemgerade erzeugte Hüllbahncurve ein Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt der Aehnlichkeitspol ist, und die Lagen dieser Systemgeraden in der kleinsten und in der grössten Systemphase bilden die Scheiteltangenten dieses Kegelschnitts.

Da bei der geradlinigen Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S in Fig. **831** die Kreisphasen der durch den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ gehenden Systemkreise Punkte umhüllen, so werden, wenn wir die Bewegung umkehren, diese Kreisphasen nach dem Satze auf S. 864 Bahnkreise der Punkte eines anderen ähnlich-veränderlichen ebenen Systems Σ, welches den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ besitzt; und wir erhalten eine specielle kreislinige Bewegung des Systems Σ im Bezug auf eine erstarrt gedachte Systemphase von S, z. B. auf die Systemphase S_2, zu welcher die Kreisphase k_2 gehört. Die Geraden α, β, γ . . als Systemgeraden von Σ umhüllen je einen Punkt in der Systemphase S_2, und der zu Σ gehörende Systemkegelschnitt $\varkappa$ erzeugt als Hüllbahncurve in S_2 den Kreis k_2. Wir erhalten also durch diese Umkehrung der Bewegung den Satz:

Bei der speciellen kreislinigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems erzeugt ein Systemkegelschnitt, dessen einer Brennpunkt der Aehnlichkeitspol ist, einen Kreis als Hüllbahncurve.

Der durch die Punkte $D_1, D_2, \mathfrak{P}$ beschriebene Kreis d ist der Bahnkreis des zum Kegelschnitt $\varkappa$ gehörenden Punktes des Systems Σ, der beziehlich in die Lagen D_1, D_2, gelangt, wenn dieser Kegelschnitt in die Phase $\varkappa$ und in die punktirte Phase $\varkappa'$ übergeht. Im Punkte D_2 wird der Kreis k_2 einerseits von der Kegelschnittphase $\varkappa'$ berührt, und der Tangente $D_1 G$ an $\varkappa$ entspricht die Tangente $D_2 G'$ an $\varkappa'$. Anderseits berührt die Kegelschnittphase $\varkappa'$ den Kreis k_2 in dem Punkt B_2, der dem Berührungspunkt B_1 entspricht.

Der Kreis k_2 als Hüllbahncurve des Kegelschnitts $\varkappa$ wird auch von den durch $\mathfrak{P}$ gehenden Bahnkreisen berührt, auf denen sich die Punkte dieses Kegelschnitts bewegen. Die grösste Kegelschnittphase tritt auf, wenn der auf dem Bahnkreise d bewegte Systempunkt sich in D_g dem Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ diametral gegenüber befindet, und diese grösste Kegelschnittphase berührt dann den Kreis k_2 in den beiden Endpunkten seines durch $\mathfrak{P}$ gehenden Durchmessers. Hieraus folgt der Satz:

Die über den Brennstrahlen eines Kegelschnitts als Durchmesser beschriebenen Kreise umhüllen den Kreis, der den Kegelschnitt in den beiden Scheiteln der Hauptaxe berührt.

In analoger Weise gelangt man durch weitere Untersuchungen der geradlinigen und der durch Umkehrung sich ergebenden Bewegung zu immer neuen Ergebnissen[1]; und je mehr sich die Untersuchung auf besondere Fälle erstreckt, um so grösser wird, wie die folgenden Darlegungen zeigen, der bewunderungswürdige Reichthum der speciellen Beziehungen, die sich als Folgerungen ergeben.

337. **Beziehungen zum Brocard'schen Kreise als Folgerungen aus der geradlinigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems.** Wir betrachten in Fig. **832** ein zu einem ähnlich-veränderlichen ebenen System S gehörendes Dreieck ABC, dessen Ecken sich beziehlich auf den Bahngeraden α, β, γ bewegen. Diese Bahngeraden bilden ein Dreieck $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma$, so dass die Ecken $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ beziehlich den Geraden α, β, γ gegenüberliegen.

Die drei nicht gezeichneten Kreise, welche durch die Ecken der Deiecke $AB\Gamma$, $BC\mathsf{A}$, $CA\mathsf{B}$ gehen, schneiden sich nach S. 867 in dem festen Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ des ähnlich-veränderlichen Dreiecks ABC; und die Fusspunkte A_k, B_k, C_k der von $\mathfrak{P}$ auf die Bahngeraden α, β, γ gefällten Senkrechten bilden die kleinste Phase dieses Dreiecks. Der dem Dreieck ABC umschriebene veränderliche Kreis k erzeugt als Hüllbahncurve einen in Fig. **832** nicht gezeichneten Kegelschnitt $\varkappa$, dessen einer Brennpunkt der Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ ist und der die Seiten des Dreiecks $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma$ berührt. Der um das Dreieck $A_k B_k C_k$ beschriebene Kreis k_k berührt als kleinste Kreisphase den Kegelschnitt $\varkappa$ in den Scheiteln auf der Hauptaxe desselben. Der Mittelpunkt M_k des Kreises k_k ist auch der Mittelpunkt des Kegelschnitts $\varkappa$, und die Fusspunkte A_k', B_k', C_k' der von dem zweiten Brennpunkte $\mathfrak{P}'$ auf α, β, γ gefällten Senkrechten liegen auch auf dem Kreise k_k. Der veränderliche Kreis k schneidet ferner die Geraden α, β, γ, resp. die Seiten des festen Dreiecks $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma$ in den Punkten A', B', C', welche auch ein ähnlich-veränderliches Dreieck bilden, dessen Ecken A', B', C' sich auf den Bahngeraden α, β, γ bewegen; denn für die Winkel, die wir ebenso wie die Ecken der Dreiecke ABC, $A'B'C'$, $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma$ bezeichnen, gelten, wie sich leicht ergiebt, die Beziehungen:

$$A + A' = \mathsf{B} + \Gamma, \quad B + B' = \Gamma + \mathsf{A}, \quad C + C' = \mathsf{A} + \mathsf{B}.$$

Wenn nun der Kreis k in die kleinste Phase k_k übergeht, gelangt das ähnlich-veränderliche Dreieck $A'B'C'$ gleichfalls mit diesem in die kleinste Phase A_k', B_k', C_k'; folglich ist der zweite Brennpunkt $\mathfrak{P}'$ der feste Aehnlichkeitspol für das ähnlich-verän-

[1] Vergl. Burmester „Kinematisch-geometrische Untersuchungen gesetzmässig-veränderlicher Systeme“, *Zeitschrift für Mathematik und Physik.* 1875. B. 20. S. 393.

derliche Dreieck $A'B'C'$, und der dem Dreieck $A'B'C'$ umschriebene Kreis k erzeugt somit auch bei der Bewegung dieses Dreiecks den Kegelschnitt $\varkappa$ als Hüllbahncurve. Der Mittelpunkt M des veränderlichen Kreises k bewegt sich auf der Nebenaxe dieses Kegelschnitts, die in der Mitte M_k auf $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ senkrecht steht, und dem gemäss vollziehen ebenso wie die Geraden $\mathfrak{P}M$, $\mathfrak{P}'M$ auch die ähnlich-veränderlichen Dreiecke ABC, $A'B'C'$ entgegengesetzt gleiche Drehungen um die festen Aehnlichkeitspole $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ [1]). Aus den ähnlichen Punktreihen, welche die betreffenden Ecken auf den Geraden α, β, γ erzeugen, gehen mannigfaltige projective Beziehungen hervor. Die selbstentsprechenden Punkte dieser ähnlichen Punktreihen sind die Berührungspunkte, welche der Kegelschnitt $\varkappa$ mit den Seiten des Dreiecks $\mathsf{AB\Gamma}$ bildet. Bei einem dem Dreieck $\mathsf{AB\Gamma}$ eingeschriebenen Kegelschnitt $\varkappa$, dessen Brennpunkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ sind, gilt nach S. 604 die Beziehung der Winkel $\mathfrak{P}\mathsf{AB} = -\mathfrak{P}'\mathsf{A\Gamma}$, $\mathfrak{P}\mathsf{B\Gamma} = -\mathfrak{P}'\mathsf{BA}$, $\mathfrak{P}\mathsf{\Gamma A} = -\mathfrak{P}'\mathsf{\Gamma B}$.

Nehmen wir insbesondere an, dass

$$A = \mathsf{\Gamma}, \quad B = \mathsf{A}, \quad C = \mathsf{B}$$

ist, so ergiebt sich infolge der Gleichheiten jener obigen Winkelsummen $\quad A' = \mathsf{B}, \quad B' = \mathsf{\Gamma}, \quad C' = \mathsf{A};$

und es sind demnach die Dreiecke $\mathsf{AB\Gamma}$, BCA, $C'A'B'$ ähnlich. Bei dieser Anordnung gelangen also die beiden Dreiecke BCA, $C'A'B'$ mit dem festen Dreieck $\mathsf{AB\Gamma}$ gleichzeitig zur Deckung, wenn zwei der homologen Ecken der beiden veränderlichen Dreiecke sich in der zugehörigen homologen Ecke des festen Dreiecks vereinen. Das feste Dreieck $\mathsf{AB\Gamma}$ ist also eine gemeinsame Phase der beiden ähnlich-veränderlichen Dreiecke BCA, $C'A'B'$; folglich sind die Winkel $\mathfrak{P}\mathsf{AB}$, $\mathfrak{P}\mathsf{B\Gamma}$, $\mathfrak{P}\mathsf{\Gamma A}$ so wie die Winkel $\mathfrak{P}'\mathsf{A\Gamma}$, $\mathfrak{P}'\mathsf{\Gamma B}$, $\mathfrak{P}'\mathsf{BA}$ gleich, und somit haben alle diese sechs Winkel gleiche Grösse. Die beiden durch diese Winkelgleichheit definirten Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ nennen wir die Jacobi'schen Punkte des Dreiecks $\mathsf{AB\Gamma}$, die auch die Segmentärpunkte desselben heissen [2]). Die Jacobi'schen Punkte sind hiernach zwei ausgezeichnete Punkte der in Art. 249 behandelten quadratischen Verwandtschaft. Wenn das Dreieck BCA mit dem Dreieck $\mathsf{AB\Gamma}$ zur Deckung

[1]) Diese Bewegungen wurden zuerst von Neuberg behandelt, *Proceedings of the London Mathematical Society*. 1884—1885. Vol. 16. p. 184.

[2]) Diese Punkte, welche auch nach Brocard benannt werden, stammen von C. F. A. Jacobi und sind mitgetheilt in dessen Uebersetzung der J. H. van Swinden's *Elemente der Geometrie*. 1834. S. 239, 339; aber durch Brocard's anregende Abhandlungen haben diese Punkte erst vielseitige Beachtung gefunden.

gelangt, ergiebt sich der zugehörige Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ als gemeinsamer Schnittpunkt der drei Kreise $\mathsf{A}\mathsf{B}\mathfrak{P}$, $\mathsf{B}\Gamma\mathfrak{P}$, $\Gamma\mathsf{A}\mathfrak{P}$, welche beziehlich $\Gamma\mathsf{A}$ in A, $\mathsf{A}\mathsf{B}$ in B, $\mathsf{B}\Gamma$ in Γ berühren. Ebenso erhalten wir, wenn das Dreieck $C'A'B'$ mit dem Dreieck $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma$ zur Deckung gelangt, den zugehörigen Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}'$ als den gemeinsamen Schnittpunkt der drei Kreise $\Gamma\mathsf{B}\mathfrak{P}'$, $\mathsf{B}\mathsf{A}\mathfrak{P}'$, $\mathsf{A}\Gamma\mathfrak{P}'$, welche beziehlich $\mathsf{A}\Gamma$ in Γ, $\Gamma\mathsf{B}$ in B, $\mathsf{A}\mathsf{B}$ in A berühren. Es werden demnach die beiden Jacobi'schen Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ insbesondere auch durch diese Kreise bestimmt.

Der dem Dreieck $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma$ umschriebene Kreis k_0 ist eine Phase des Kreises k und, der Mittelpunkt M_0 von k_0 liegt demnach auf der Geraden $M_k M$, die in der Mitte auf $\mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ senkrecht steht. Der durch die Punkte $M_0, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ gezogene Kreis i, der die Gerade $M_0 M_k$ in dem zweiten M_0 diametral gegenüberliegenden Punkte G schneidet, ist der Brocard'sche Kreis[1]), an den sich eine unübersehbare Fülle geometrischer Beziehungen knüpft[2]), und der Punkt G ist der L'Huilier'sche Punkt für das Dreieck $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma$[3]), der dadurch bestimmt wird, dass seine Abstände von den Seiten des Dreiecks $\mathsf{A}\mathsf{B}\Gamma$ sich wie diese Seiten verhalten. Der Brocard'sche Kreis i schneidet den Kreis k_0 in den beiden Berührungspunkten, welche dieser Kreis k_0 mit jenem Kegelschnitt $\varkappa$ bildet, und die im betrachteten Falle imaginär sind. Die Tangenten in diesen Berührungspunkten an dem Kreise k_0 oder an dem Kegelschnitt $\varkappa$ schneiden sich in dem L'Huilier'schen Punkt G, zu dem also die gemeinsame Secante der Kreise k_0, i als Polare im Bezug auf den Kreis k_0 gehört.

Da die beiden Dreiecke ABC, $A'B'C'$ entgegengesetzt gleiche Drehungen vollziehen und die Eckenpaare AB', BC', CA' gleich-

---

[1]) Brocard, *Nouvelle Correspondance mathématique.* 1877. T. III p. 65, 106, 187. *Association Française pour l'avancement des sciences. Congrès d'Alger.* 1881; ferner *Congrés de Rouen.* 1883, und *Mémoires de l'Académie de Montpellier.* 1886.

[2]) *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* alle Bände 1881—1887 im Aufgaben-Verzeichniss „Segmentärpunkte", „Brocard'scher Kreis". Viele mannigfaltige Beziehungen zum Brocard'schen Kreise hat Artzt aus veränderlichen Gebilden erfolgreich abgeleitet in dem *Programm* 1883—1884 *des Gymnasiums zu Recklinghausen.*

[3]) Die ursprüngliche Definition dieses Punktes gab L'Huilier in seinen *Éléments d'analyse géometrique et d'analyse algébrique* 1809. p. 296. Später haben auch Grebe im *Archiv für Mathematik und Physik.* 1847. Theil 9. S. 520 Hossard in *Nouvelles Annales de Mathématiques.* 1848. T. 7. p. 407, 454 und Lemoine daselbst 1873. Sér. 2. T. 12. S. 364 auf diesen Punkt hingewissen, der unstatthaft nach Grebe oder Lemoine benannt wird. Vergleiche ferner die reichhaltige Literatur-Angabe von Lemoine in *Association Française pour l'avancement des sciences. Congrés de Grenoble* 1885.

zeitig beziehlich mit den Ecken Γ, A, B coincidiren, so sind auch die Bogen $\widehat{AB'}$, $\widehat{BC'}$, $\widehat{CA'}$ gleich, welche die Seiten des festen Dreiecks ABΓ auf dem veränderlichen Kreis k bestimmen; und folglich sind die Verbindungsgeraden AC', BA', CB' resp. den Dreiecksseiten ΓA, AB, BΓ parallel. Diese Verbindungsgeraden bilden ein ähnlich-veränderliches Dreieck $\mathfrak{abc}$, welches dem Dreieck ABΓ homothetisch ähnlich ist; und der L'Huilier'sche Punkt G ist, wie man leicht erkennt, der Aehnlichkeitspunkt dieser beiden Dreiecke.

Um noch einige Beziehungen kurz zu erwähnen, zeichnen wir in Fig. **833** die Kreisphase k_i, die den gemeinsamen Mittelpunkt M_i mit dem Brocard'schen Kreise i hat, also demselben concentrisch ist; dann gehen die Verbindungsgeraden $A_i C'_i$, $B_i A'_i$, $C_i B'_i$ der Ecken der betreffenden Dreiecke $A_i B_i C_i$, $A'_i B'_i C'_i$ durch den L'Huilier'schen Punkt G. Auf die Beziehung dieses ausgezeichneten Kreises k_i, der von Lemoine[1]) stammt, haben Tucker[2]) und Stoll[3]) gleichzeitig hingewiesen. Jenes Dreieck $\mathfrak{abc}$ schrumpft bei diesem Kreise in den L'Huilier'schen Punkt G zusammen, und die durch denselben gehenden Verbindungsgeraden $C_i B'_i$, $A_i C'_i$, $B_i A'_i$ bestimmen auf dem Brocard'schen Kreise i ein Dreieck abc, welches dem Dreieck ABΓ gegenwendig ähnlich ist. Ferner schneiden sich die drei Geraden Ab, Bc, Γa im Punkte $\mathfrak{P}$ und die drei Geraden Γb, Ba, Ac in dem Punkte $\mathfrak{P}'$. Die Geraden Ab, Bc, Γa sind beziehlich parallel zu $A_i B_i$, $B_i C_i$, $C_i A_i$, und die Geraden Γb, Ba, Ac sind resp. parallel $C'_i B'_i$, $B'_i A'_i$, $A'_i C'_i$. Der Punkt $\mathfrak{P}'$ als zu der Dreiecksphase ABΓ gehörend betrachtet wandert bei der Bewegung jenes Dreiecks BCA auf der Geraden $\mathfrak{P}' G$ und gelangt als Punkt der Dreiecksphase $B_i C_i A_i$ nach G. Das Analoge bezüglich der Dreiecksphase $C'_i A'_i B'_i$ gilt von dem Punkte $\mathfrak{P}$ bei der Bewegung jenes Dreiecks $C'A'B'$; und demnach sind $\mathfrak{P}$, G und $\mathfrak{P}'$, G die Jacobi'schen Punkte der Dreiecke $B_i C_i A_i$, $C'_i A'_i B'_i$.

Wenn wir die Bewegung umkehren, also in Fig. **832** das Dreieck BCA als starr und das Dreieck ABΓ als ähnlich-veränderlich betrachten, erhalten wir eine specielle kreislinige Bewegung, für welche $\mathfrak{P}$ der Aehnlichkeitspol ist. Die Ecken A, B, Γ bewegen sich auf Kreisen, die beziehlich den Dreiecken $\mathfrak{P}BC$, $\mathfrak{P}CA$, $\mathfrak{P}AB$

---

[1]) Lemoine, *Nouvelles Annales de Mathématiques.* 1873. Sér. 2. T. 12. p. 366.

[2]) Tucker, *Quarterly Journal of Mathematics.* 1883. Vol. 19. p. 342.

[3]) Stoll, *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.* 1883. Jahrg. 14. S. 598. Aufg. 332, 338, 339; und *daselbst.* 1884. Jahrg. 15. S. 195.

umschrieben sind, und die Geraden AB, $\mathsf{B\Gamma}$, $\mathsf{\Gamma A}$ drehen sich um die festen Ecken C, A, B. In gleicher Weise erhalten wir eine specielle kreislinige Bewegung des ähnlich-veränderlichen Dreiecks $\mathsf{AB\Gamma}$ mit dem Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}'$, wenn wir das Dreieck $C'A'B'$ als starr ansehen. Aus diesen Bewegungen, die Artzt[1]) untersucht hat, folgt wieder eine Fülle neuer Beziehungen zum Brocard'schen Kreise.

338. **Logarithmisch-spirallinige Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems.** Bewegt sich in Fig. **834** ein Systempunkt A_1 eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S, welches den festen Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ besitzt, auf einer logarithmischen Spirale α, deren Ursprung der Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ ist, so vollziehen alle beweglichen Systempunkte ähnliche Bewegungen auf logarithmischen Spiralen, welche den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ als gemeinsamen Ursprung haben und welche die von ihm ausgehenden Fahrstrahlen unter demselben Winkel ϑ schneiden. Diese specielle einförmige Bewegung, bei welcher also alle Bahncurven gleichartig congruente logarithmische Spiralen sind, nennen wir eine logarithmisch-spirallinige Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S. Denken wir uns in dem ähnlich-veränderlichen System S eine Systemcurve angenommen, so erzeugt dieselbe eine Hüllbahncurve, die aus denjenigen congruenten logarithmischen Spiralen besteht, welche diese Systemcurve berühren; und diese logarithmischen Spiralen sind auch die Bahncurven der als Systempunkte betrachteten Berührungspunkte. Es kommen demnach bei der Erzeugung einer Hüllbahncurve hier nur diese auf der erzeugenden Systemcurve befindlichen Systempunkte zur Geltung.

Bewegt sich in Fig. **834** ein Systempunkt A_1 auf einer logarithmischen Spirale α, und betrachten wir dieselbe zugleich als eine Phase einer Systemcurve k des ähnlich-veränderlichen Systems S, so decken sich alle Phasen von k mit α; und es ist demnach die logarithmische Spirale α auch die Hüllbahncurve $\varkappa$ von k. Die logarithmische Spirale k als Systemcurve von S bewegt sich also in sich selbst, und daher nennen wir diese logarithmische Spirale k eine Selbsthüllcurve des logarithmisch-spirallinig bewegten, ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S[2]). Ist A_1E_1

---

[1]) Artzt, *Jahresbericht des Gymnasiums zu Recklinghausen.* 1885—1886.

[2]) Die Selbsthüllcurven wurden bei verschiedenen Systemen zuerst von F. Klein und S. Lie allgemein behandelt und als W-Curven bezeichnet. *Mathematische Annalen.* 1871. B. 4. S. 50.

die Normale im Punkte A_1 an der logarithmischen Spirale α, und errichten wir auf $\mathfrak{P}A_1$ die Senkrechte $\mathfrak{P}E_1$, welche demnach mit A_1E_1 den Winkel $\mathfrak{P}E_1A_1 = \vartheta$ bildet, dann ist E der entsprechende Krümmungsmittelpunkt von α. Dieser bewegt sich als Systempunkt auf einer congruenten logarithmischen Spirale ε, welche die Evolute von α ist und bekanntlich für den Winkel $\vartheta = 74^0\, 39'\, 18'', 53$ mit α zusammenfällt. Ziehen wir die Fahrstrahlen $\mathfrak{P}A_1$, $\mathfrak{P}A_2$, $\mathfrak{P}A_3$, $\mathfrak{P}A_4$, . ., welche gleiche Winkel bilden, so sind die Dreiecke $\mathfrak{P}A_1A_2$, $\mathfrak{P}A_2A_3$, $\mathfrak{P}A_3A_4$, . . ähnlich; und bei der Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems S gelangt demnach das Dreieck $\mathfrak{P}A_1A_2$, als dem System S angehörend betrachtet, successive mit den folgenden Dreiecken zur Deckung. Wenn insbesondere ein Systempunkt sich auf einer durch den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden bewegt, also jener Winkel $\vartheta = 0$ ist, so gilt dasselbe von allen beweglichen Systempunkten und es entsteht eine radiale Bewegung, bei welcher alle durch den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden sich in sich selbst bewegen. Wenn insbesondere ein Systempunkt sich auf einem um den Aehnlichkeispol beschriebenen Kreise bewegt, also der Winkel $\vartheta = 90^0$ ist, dann geht das ähnlich-veränderliche ebene System S in ein rotirendes starres ebenes System über.

Denken wir uns zu der logarithmisch-spirallinigen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems die Inversion gebildet, dann erhalten wir eine einförmige Bewegung eines kreisverwandt-veränderlichen ebenen Systems mit zwei festen Verwandtschaftspolen, bei welchem jenen logarithmischen Spiralen in sich selbst bewegte logarithmische Doppelspiralen entsprechen. Denken wir uns ferner zu jener radialen Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems die Inversion erzeugt, so entsteht eine specielle kreislinige Bewegung eines kreisverwandt-veränderlichen ebenen Systems, in welchem jenen radialen Bahngeraden die in sich selbst bewegten Kreise eines Kreisbüschels entsprechen. Diese Kreise können auch als die Kraftlinien betrachtet werden, die bei zwei in einer leitenden Ebene befindlichen, gleich stark geladenen electrischen oder magnetischen Punkten auftreten. Den um den Aehnlichkeitspol beschriebenen Systemkreisen dieses ähnlich-veränderlichen Systems entsprechen bei der Inversion Kreise eines Kreisbüschels, die jene Kreise rechtwinkelig schneiden und in diesem physikalischen Vorgange die Niveaulinien bilden[1]).

[1]) Maxwell, *Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus.* Deutsch von Weinstein. 1883. B. I. Cap. VII.

Wir können in gleicher Weise zu jeder Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems durch Inversion eine Bewegung eines kreisverwandt-veränderlichen ebenen Systems erzeugen, und es ergiebt sich somit eine Bewegung eines veränderlichen ebenen Systems, dessen Phasen in einer speciellen isogonalen Verwandtschaft stehen. Die Untersuchung der Bewegung der veränderlichen ebenen Systeme, deren Veränderung durch isogonale Verwandtschaft bestimmt wird, führt zu vielen interessanten Ergebnissen [1]).

339. **Affine Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems.** Wir nehmen in Fig. **835** drei beliebige Strecken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 im Raum oder in einer Ebene liegend an und construiren in gleichem Sinne die Parallelogramme $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, durch deren vierte Eckpunkte A_4, B_4 die vierte Strecke A_4B_4 bestimmt wird. Ziehen wir nun $A_4\mathfrak{a} \# B_2A_2$ und $B_1\mathfrak{b} \# A_3B_3$, so ist wegen der congruenten Dreiecke $A_4\mathfrak{a}A_1$, $A_2B_2A_3$ und $B_1\mathfrak{b}B_4$, $B_3A_3B_2$ auch $\mathfrak{a}A_1 \# A_3B_2 \# B_4\mathfrak{b}$, und folglich $\mathfrak{a}B_4 \# A_1\mathfrak{b}$; hiernach ist die geometrische Summe $\overline{A_1B_1} + \overline{A_3B_3} = \overline{A_2B_2} + \overline{A_4B_4}$, und es ergiebt sich somit der folgenreiche Satz:

Bei drei beliebigen Strecken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, durch deren Endpunkte die Parallelogramme $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ und die vierte Strecke A_4B_4 bestimmt werden, sind die geometrischen Summen $\overline{A_1B_1} + \overline{A_3B_3}$ und $\overline{A_2B_2} + \overline{A_4B_4}$ gleich.

Nehmen wir an, dass die Strecken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 homologe Strecken dreier ähnlicher Punktreihen sind, so bilden nach diesem Satze die vierten Eckpunkte der durch je drei homologe Punkte derselben bestimmten Parallelogramme eine vierte ähnliche Punktreihe auf A_4B_4. Setzen wir nun voraus, dass die Strecken A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 in einer Ebene liegen und denken wir uns denselben in dieser Ebene gleiche Drehungen in gleichem Sinne ertheilt, dann erfolgt auch eine gleichsinnige Drehung der vierten Strecke A_4B_4. Betrachten wir in Fig. **836** drei in einer Ebene liegende, ähnliche ebene Systeme S_1, S_2, S_3, in denen sich die entsprechenden ähnlichen Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ befinden, und construiren wir die durch je drei homologe Punkte bestimmten Parallelogramme $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$, so bilden nach dieser Darlegung auch die vierten Ecken derselben ein viertes ähnliches Dreieck $A_4B_4C_4$. Demnach erhalten wir den Satz:

---

[1]) Holzmüller, *Theorie der isogonalen Verwandtschaften.* 1882.

Die vierten Eckpunkte der Parallelogramme, welche in gleichem Sinne durch je drei homologe Punkte von dreien in einer Ebene liegenden, ähnlichen ebenen Systemen S_1, S_2, S_3 bestimmt sind, bilden ein viertes ähnliches ebenes System S_4.

Wir nehmen an, ein ähnlich-veränderliches ebenes System S bewege sich in Fig. **836** auf den Seiten der Parallelogramme von der Systemphase S_1 aus in die Systemphasen S_2, S_3, S_4; dann sind die zu den Systempunkten A_1, B_1, C_1, .. gehörenden Bahnen $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$, .. affine Bahnen in affinen ebenen Systemen, und diese sind durch je drei entsprechende Punkte z. B. $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ bestimmt. Zwei affine ebene Systeme besitzen im Allgemeinen einen im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Punkt, den wir den Affinitätspol derselben nennen. Denken wir uns nun zwei Systempunkte des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S in den Affinitätspol der beiden affinen ebenen Systeme $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ bewegt; dann schrumpft die betreffende Systemphase von S in diesen Affinitätspol zusammen, und dem zufolge besitzen alle affinen ebenen Systeme, in denen sich jene affine Bahnen entsprechen, denselben Affinitätspol, den wir auch als Affinitätspol dieser affinen Bahnen bezeichnen. Die Bewegungen zweier Punkte, welche affine Bahnen resp. affine Bahncurven in der Weise durchlaufen, dass je zwei gleichzeitige Lagen entsprechende Punkte sind, heissen affine Bewegungen dieser Punkte. Aus dieser Darlegung folgt somit der Satz:

Vollziehen zwei Systempunkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems affine Bewegungen, so gilt dasselbe von allen Systempunkten, und alle affine Bahnen besitzen denselben Affinitätspol.

Eine derartige Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems nennen wir eine affine Bewegung desselben. Sind in Fig. **837** für zwei Punkte A, B eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S die affinen Bahncurven α, β mit ihrem Affinitätspol $\mathfrak{Q}$ und mit den entsprechenden Punkten A_1, B_1 so wie A_2, B_2 gegeben, dann sind die affinen Bahncurven aller Systempunkte bestimmt; denn wir erhalten für einen dritten Systempunkt C, der die entsprechenden Lagen C_1, C_2 annimmt, die Bahncurve γ als affine Curve zu α oder β, wobei den Punkten $\mathfrak{Q}$, A_1, A_2 oder $\mathfrak{Q}$, B_1, B_2 die Punkte $\mathfrak{Q}$, C_1, C_2 entsprechen. Liegen insbesondere in zwei z. B. durch A_1B_1, A_2B_2 bestimmten Systemphasen

S_1, S_2 zwei entsprechende Punkte R_1, R_2 auf einer durch den Affinitätspol $\mathfrak{Q}$ gehenden Geraden ϱ, so schrumpft das durch die Punkte $\mathfrak{Q}$, R_1, R_2 bestimmte affine System in diese Gerade ϱ zusammen, welche demnach die Bahn des Systempunktes R ist. Alle bei der affinen Bewegung auftretenden Bahngeraden gehen dem zufolge durch den Affinitätspol $\mathfrak{Q}$, und alle Systempunkte, die sich auf Geraden bewegen, liegen auf einem Systemkreise w_1, dessen Phasen beständig durch den Affinitätspol $\mathfrak{Q}$ und durch den entsprechenden jeweiligen Aehnlichkeitspol gehen. Wenn wir ebenso wie bei dem starren ebenen System auch hier den Kreis, dessen Punkte momentan Wendepunkte ihrer Bahncurve durchschreiten, den Wendekreis nennen, so ist bei der affinen Bewegung der Wendekreis ein Systemkreis des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S.

Construiren wir den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}_{12}$ der beiden Systemphasen S_1, S_2 und beschreiben wir über $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_{12}$ als Sehne den Kreis w_1, dessen zugehöriger Peripheriewinkel gleich dem Winkel $\mathfrak{P}_{12}A_1A_2$ ist, dann ist der Kreis w_1 die in S_1 befindliche Phase desjenigen Systemkreises w, dessen Punkte sich auf Geraden bewegen. Den Schnittpunkten R_1, T_1, welche die Gerade A_1B_1 mit dem Kreise w_1 bildet, entsprechen die durch $\mathfrak{Q}$ gehenden Bahngeraden ϱ, τ; und die Schnittpunkte R_2, T_2 dieser Bahngeraden mit der Geraden A_2B_2 sind die in S_2 entsprechenden Punkte, welche auf der durch $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}_{12}$ gehenden Kreisphase w_2 liegen. Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte M_1, M_2 der Kreise w_1, w_2 steht auf $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}_{12}$ in der Mitte senkrecht. Denken wir uns die Punkte A_2, B_2 auf den Bahncurven α, β unendlich nahe an A_1, B_1 gebracht, dann fällt der Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}_{12}$ von S_1, S_2 mit dem auf w_1 liegenden Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}_1$ der Systemphase S_1 zusammen, und die Gerade M_1M_2 geht in die Tangente der zu dem Kreismittelpunkte M_1 gehörenden Bahncurve μ über. Bei der affinen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems ist demnach der beständig durch den Affinitätspol $\mathfrak{Q}$ gehende Wendekreis w die Polcurve; und die nicht gezeichnete Polbahn π ergiebt sich, wenn wir von dem Affinitätspol $\mathfrak{Q}$ auf die Tangenten der vom Mittelpunkte M des Wendekreises w beschriebenen Bahncurve μ Senkrechte fällen und dieselben um ihre eigene Länge verlängern. Wir erhalten somit den Satz:

Bei der affinen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems wird die Polcurve durch den Wendekreis vertreten; und die Polbahn ist der Fusspunktencurve im Verhältnisse 2:1 homothetisch ähnlich, welche der vom Mittelpunkte des Wendekreises beschriebenen Bahncurve im Bezug auf den Affinitätspol angehört.

Die Verbindungsgeraden der homologen Punkte der ähnlichen Punktreihen $R_1 B_1 A_1 T_1$.. und $R_2 B_2 A_2 T_2$.. umhüllen eine Parabel, und diese Parabel wird auch von den Verbindungsgeraden der homologen Punkte der ähnlichen Punktreihen $A_1 A_2$.., $B_1 B_2$.. umhüllt, die den affinen Systemen $\Omega A_1 A_2$, $\Omega B_1 B_2$ angehören; demnach sind die Geraden $\Omega\varrho$, $\Omega\tau$ die beiden selbstentsprechenden Geraden dieser beiden affinen Systeme. Ebenso erhalten wir durch die Schnittpunkte, welche die Gerade $B_1 C_1$ mit dem Kreise w_1 bildet, die durch Ω gehenden beiden selbstentsprechenden Geraden der affinen Systeme $\Omega B_1 B_2$, $\Omega C_1 C_2$. Diese selbstentsprechenden Geraden werden aber imaginär, wenn die Gerade $B_1 C_1$ den Kreis w_1 nicht schneidet. Hieraus folgt auch, wenn zwei Systempunkte R_1, T_1 eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems sich beliebig auf zwei Geraden $\Omega\varrho$, $\Omega\tau$ bewegen, so vollziehen alle Systempunkte affine Bewegungen und ihr Schnittpunkt Ω ist der gemeinsame Affinitätspol für alle affinen Bahnen. Durch Umkehrung der affinen Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems S im Bezug auf die als erstarrt angenommene Systemphase S_1 erhalten wir die Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems Σ, dessen Systempunkt Ω sich auf dem jetzt als Polbahn auftretenden Kreise w_1 bewegt und dessen durch Ω gehenden Systemgeraden sich um feste Punkte dieses Kreises drehen. Alle anderen Systemgeraden erzeugen, wie man leicht erkennt, ähnliche Hüllbahncurven; und jeder Systempunkt bewegt sich demzufolge nach S. 876 auf einer Bahncurve, die zu einer Fusspunktencurve einer beliebigen dieser Hüllbahncurven ähnlich ist [1]).

Nehmen wir an, dass zwei Systempunkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems affine Bewegungen auf Ellipsen vollziehen, so gilt dasselbe von allen Systempunkten; und für alle diejenigen Systempunkte, welche auf dem Wendekreise liegen, gehen die entsprechenden Ellipsen in gerade Strecken über, die wir als Ellipsen mit einer gleich Null gewordenen Axe betrachten. Diese Bewegung nennen wir eine affine elliptische Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems. Wenn insbe-

---

[1]) Vergl. Geisenheimer, *Zeitschrift für Mathematik u. Physik.* 1880, B. 25. S. 302.

sondere zwei Systempunkte sich harmonisch auf Ellipsen bewegen, so gilt dasselbe von allen Systempunkten, und diese Bewegung nennen wir eine harmonische elliptische Bewegung des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems.

340. **Beziehungen der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen eines conplan bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen Systems.** Wir nehmen in Fig. **838** an, dass die Systempunkte A_1, B_1, C_1 eines in einer Ebene bewegten, ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S, die einer Systemphase S_1 angehören, sich auf den Bahncurven α, β, γ während eines Zeitelementes dt beziehlich in die Lagen A_2, B_2, C_2 bewegen, denen die Systemphase S_2 entspricht. Ferner sei $\mathfrak{P}$ der Aehnlichkeitspol der Systemphase S_1 resp. der beiden unendlich nahen Systemphasen S_1, S_2, der nach S. 867 durch die betreffenden Tangenten an den Bahncurven α, β, γ bestimmt wird. Es ergeben sich dann für diese Systempunkte die in den Tangenten liegenden Geschwindigkeiten

$$A_1 A_v = \frac{A_1 A_2}{dt}, \quad B_1 B_v = \frac{B_1 B_2}{dt}, \quad C_1 C_v = \frac{C_1 C_2}{dt};$$

folglich sind wegen der ähnlichen Punktgruppen $A_1 A_2 A_v$, $B_1 B_2 B_v$, $C_1 C_2 C_v$ die Dreiecke $A_1 B_1 C_1$, $A_v B_v C_v$ nach dem letzten Satze S. 869 ähnlich und besitzen den Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$. Demnach bilden die Endpunkte A_v, B_v, C_v, .. der Geschwindigkeiten ein zu S ähnliches ebenes System S_v, und wir erhalten somit den Satz:

Die Endpunkte der Geschwindigkeiten der Systempunkte einer Systemphase eines conplan bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen Systems bilden ein ähnliches ebenes System.

Der Geschwindigkeitszustand einer Systemphase S_1 eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems ist hiernach bestimmt, wenn in Fig. **838** die Grösse und Richtung der Geschwindigkeiten $A_1 A_v$, $B_1 B_v$ von zwei Punkten A_1, B_1 der Systemphase S_1 gegeben sind; denn zu jedem dritten Punkte C_1 in S_1 erhalten wir die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit $C_1 C_v$, wenn wir in dem ähnlichen System S_v den entsprechenden Punkt C_v construiren. Die Gerade $C_1 C_v$ ist dann auch die Tangente an der Bahncurve γ des Punktes C_1. Das System S_v der Endpunkte der Geschwindigkeiten nennen wir die Geschwindigkeitsphase, und jeder Systemphase des ähnlich-veränderlichen Systems S entspricht also eine Geschwindigkeitsphase. Der Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ von S_1, S_v, der mit dem Aehnlichkeitspol der Systemphase S_1 identisch ist, besitzt als Systempunkt betrachtet momentan keine Geschwindigkeit und wird deshalb auch der Geschwindigkeitspol genannt. Wenn wir von einem Punkte aus zu den Geschwindigkeiten gleichgerichtete gleich lange parallele Strecken ziehen, so bilden die Endpunkte dieser Strecken nach S. 805 ein zu S ähnliches ebenes System, dessen Systempunkte sich auf den Hodographen erster Ordnung der entsprechenden zu S gehörenden Systempunkte bewegen.

Wir betrachten wieder in Fig. **839** drei Punkte A_1, B_1, C_1 eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S, die sich auf den Bahncurven α, β, γ bewegen, und nehmen an, dass dieselben in zwei auf einander folgenden gleichen Zeitelementen dt in die Lagen A_2, B_2, C_2 und A_3, B_3, C_3 gelangen. Ferner denken wir uns die durch je drei homologe Punkte bestimmten, unendlich kleinen Parallelogramme $A_1A_2A_3A_{II}$, $B_1B_2B_3B_{II}$, $C_1C_2C_3C_{II}$ gebildet, dann sind nach dem ersten Satze S. 887 die Dreiecke $A_2B_2C_2$, $A_{II}B_{II}C_{II}$ ähnlich; und die Diagonalen A_2A_{II}, B_2B_{II}, C_2A_{II} dieser unendlich kleinen Parallelogramme sind die Deviationen der bewegten Systempunkte. Hiernach ergeben sich die in den Richtungen dieser Deviationen wirkenden Beschleunigungen

$$A_2A_j = \frac{A_2A_{II}}{dt^2}, \quad B_2B_j = \frac{B_2B_{II}}{dt^2}, \quad C_2C_j = \frac{C_2C_{II}}{dt^2};$$

folglich sind wegen der ähnlichen Punktgruppen $A_2A_{II}A_j$, $B_2B_{II}B_j$, $C_2C_{II}C_j$ die Dreiecke $A_2B_2C_2$, $A_jB_jC_j$ nach dem letzten Satze S. 869 ähnlich. Demnach bilden die Endpunkte A_j, B_j, C_j, . . der Beschleunigungen ein zu S ähnliches ebenes System S_j und wir erhalten somit den Satz:

Die Endpunkte der Beschleunigungen der Systempunkte einer Systemphase eines conplan bewegten ähnlich-veränderlichen ebenen Systems bilden ein ähnliches ebenes System.

Die Beschleunigungen der Punkte einer Systemphase eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S sind hiernach durch die nach Grösse und Richtung gegebenen Beschleunigungen zweier Punkte bestimmt. Das System S_j der Endpunkte der Beschleunigungen nennen wir die Beschleunigungsphase. Der selbstentsprechende Punkt einer Systemphase und der zugehörigen Beschleunigungsphase besitzt als Systempunkt momentan keine Beschleunigung und heisst deshalb der Beschleunigungspol. Wenn wir von einem Punkte aus zu den Beschleunigungen gleichgerichtete gleich lange parallele Strecken ziehen, so bilden die

Endpunkte dieser Strecken ein zu S ähnliches ebenes System, dessen Systempunkte sich auf den Hodographen zweiter Ordnung der entsprechenden zu S gehörenden Systempunkte bewegen. Die Beziehungen zwischen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen erster Ordnung sind dieselben wie zwischen Beschleunigungen erster und zweiter Ordnung u. s. f. Demnach gelten alle Beziehungen, welche bei den Beschleunigungen erster Ordnung bestehen, auch bei den Beschleunigungen zweiter und höherer Ordnungen.

In Fig. **840** sind für die Systempunkte A, B eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S die Geschwindigkeiten AA_v, BB_v und die Beschleunigungen AA_j, BB_j gegeben. Damit ist durch die Punkte A_v, B_v die zugehörige Geschwindigskeitsphase S_v und durch die Punkte A_j, B_j die zugehörige Beschleunigungsphase S_j bestimmt. Zu einem dritten Systempunkte C von S erhalten wir die entsprechende Geschwindigkeit CC_v sowie die entsprechende Beschleunigung CC_j, indem wir zu dem Dreieck ABC die ähnlichen Dreiecke $A_vB_vC_v$, $A_jB_jC_j$ construiren. In bekannter Weise ergiebt sich der Geschwindigkeitspol $\mathfrak{P}$ als der Doppelpunkt der beiden ähnlichen Systeme S, S_v, und ebenso der Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$ als der Doppelpunkt der beiden ähnlichen Systeme S, S_j. Den constanten Winkel ψ, den in einer Systemphase die Geschwindigkeiten AA_v, BB_v, .. beziehlich mit den Geraden $A\mathfrak{P}$, $B\mathfrak{P}$, .. bilden, nennen wir den Geschwindigkeitswinkel; und den constanten Winkel θ, den in einer Systemphase die Beschleunigungen AA_j, BB_j, .. beziehlich mit den Geraden $A\mathfrak{J}$, $B\mathfrak{J}$, .. bilden, nennen wir den Beschleunigungswinkel. Bezeichnen wir ferner mit λ den Winkel A_vAA und mit σ den Winkel $\mathfrak{J}A\mathfrak{P}$, dann ist

$$\lambda = \psi - \theta - \sigma, \quad \sigma = \psi - \theta - \lambda.$$

Hieraus folgt, weil die Winkel ψ, θ für eine Systemphase constant sind, dass auch der Winkel λ für alle Punkte A in dieser Systemphase constant ist, die auf einem durch $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{J}$ gehenden Kreise liegen, der den auf der Sehne $\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ stehenden Peripheriewinkel σ enthält; und die Richtungen der Geschwindigkeiten, sowie die Richtungen der Beschleunigungen aller Systempunkte dieses Kreises treffen sich in je einem Punkte desselben. Es ergeben sich aus diesen bei dem ähnlich-veränderlichen ebenen System auftretenden Beziehungen in allgemeinerer Geltung dieselben Sätze, welche wir in Art. 307 und 308 bei dem starren ebenen System abgeleitet haben. Für $\lambda = 0$ oder 180^0 erhalten wir den durch

$\mathfrak{P}$, $\mathfrak{J}$ gehenden Kreis k^0, der den auf der Sehne $\mathfrak{P}\mathfrak{J}$ stehenden Peripheriewinkel $\sigma = \psi - \theta$ besitzt. Dieser Kreis k^0 enthält alle diejenigen Systempunkte, deren Geschwindigkeit und Beschleunigung momentan in je einer Geraden sich befinden, und diese Geraden gehen durch einen Punkt $\mathfrak{W}$ desselben. Demnach ist die Normalbeschleunigung für diese Systempunkte gleich Null und dieselben durchschreiten momentan Wendepunkte ihrer Bahncurven; folglich ist der Kreis k^0 der Wendekreis des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S, und es ergiebt sich der Satz:

Der Wendekreis enthält die Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems, die momentan keine Normalbeschleunigung besitzen.

Für $\lambda = 90^0$ sind Geschwindigkeit und Beschleunigung der Systempunkte des betreffenden durch $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{J}$ gehenden Kreises k^{II} senkrecht. Dieser Kreis k^{II}, der den Wendekreis k^0 rechtwinkelig schneidet, enthält also diejenigen Systempunkte, deren Tangentialbeschleunigung momentan gleich Null ist. Diese Systempunkte durchschreiten demnach in zwei auf einander folgenden gleichen Zeitelementen gleiche Wegelemente, und wegen dieser Weggleichen wollen wir den Kreis k^{II}, ebenso wie bei dem starren ebenen System, den Gleichenkreis des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems nennen. Hieraus folgt somit der Satz:

Der Gleichenkreis enthält die Punkte eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems, die momentan keine Tangentialbeschleunigung besitzen.

Die Systempunkte auf einem um den Geschwindigkeitspol $\mathfrak{P}$ beschriebenen Kreise haben gleiche Geschwindigkeiten, und die Systempunkte auf einem um den Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$ beschriebenen Kreise besitzen gleiche Beschleunigungen. Den Systempunkten D, E, in welchen die Gerade $\mathfrak{P}A$ den Wendekreis k^0 und den Gleichenkreis k^{II} schneidet, entsprechen die Beschleunigungen DD_j, EE_j. Für den mit $\mathfrak{P}$ coincidirenden Systempunkt liegt die zugehörige Beschleunigung $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j$ in der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{W}$, und die Punkte A_j, D_j, $\mathfrak{P}_j$, E_j.. bilden eine zu A, D, $\mathfrak{P}$, E, .. ähnliche Punktreihe. Aus dieser Beziehung ergiebt sich durch die auf S. 810 befolgte Ableitung, dass die Beschleunigung des mit dem Geschwindigskeitspol momentan coincidirenden Systempunktes von der Tangentialbeschleunigung der Systempunkte des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems nicht abhängt.

341. Beziehungen der Beschleunigungen bei der harmonischen elliptischen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems.

Als ein interessantes Beispiel wollen wir in Fig. **841** noch die harmonische elliptische Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S betrachten. Wenn zwei Systempunkte A, B des ähnlich-veränderlichen ebenen Systems S sich harmonisch auf elliptischen Bahnen α, β bewegen, so vollziehen alle Systempunkte harmonische Bewegungen auf elliptischen Bahnen. Der gegebene Affinitätspol $\mathfrak{Q}$ der beiden Bahnellipsen α, β, dessen Construction in Art. 342 gelehrt wird, ist der gemeinsame Affinitätspol aller Bahnellipsen. Nehmen wir an, dass die Endpunkte A_j, B_j der zu den Punkten A, B gehörenden Beschleunigungen AA_j, BB_j resp. in den Mittelpunkten der Bahnellipsen α, β liegen, dann ist die durch A_jB_j bestimmte ähnliche Beschleunigungsphase S_j unveränderlich und die Endpunkte der Beschleunigungen aller Systempunkte sind die Mittelpunkte der zugehörigen Bahnellipsen. Der Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$ ist der Doppelpunkt der Systemphase S und der zugehörigen, unveränderlichen Beschleunigungsphase S_j. Die Geschwindigkeit eines jeden Systempunktes ist gleich dem der Bewegungsrichtung entsprechenden parallelen Halbmesser seiner elliptischen Bahn; und der Geschwindigkeitspol $\mathfrak{P}$ ergiebt sich als der Doppelpunkt der Systemphase und der entsprechenden Geschwindigkeitsphase. Der durch die Punkte $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ gezogene Systemkreis k^0 ist der Wendekreis, der zugleich die Polcurve des Systems S vertritt. Alle Systempunkte des Wendekreises k^0 vollziehen harmonische Bewegungen auf Geraden, die durch den Affinitätspol $\mathfrak{Q}$ gehen; denn für diese Punkte degeneriren die elliptischen Bahnen zu geraden Strecken. Dem Wendekreise k^0 entspricht demnach als Beschleunigungsphase der feste Kreis k_j^0 in S_j, der durch die Punkte $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{Q}$ geht, und sein Mittelpunkt M_j entspricht dem Mittelpunkte M des Wendekreises k^0. Der feste Kreis k_j^0 enthält somit als entsprechende Beschleunigungsphase des Wendekreises k^0 die Endpunkte der Beschleunigungen aller geradlinig bewegten Systempunkte von k^0; und diese Endpunkte sind die Mitten der geraden Bahnstrecken. Da der Wendekreis in jeder Systemphase den jeweiligen Beschleunigungspol enthält, so liegt für jede Systemphase der Beschleunigungspol auf dem festen Kreise k_j^0, der also bei dieser harmonischen Bewegung der geometrische Ort aller Beschleunigungspole ist. Beachten wir, dass der Aehnlichkeitspol der festen Strecke A_jB_j und der bewegten Strecke AB der jeweilige Beschleunigungspol ist, und dass die entsprechenden ähnlichen Punktreihen $A_jA\,..$, $B_jB\,..$ in den affinen Systemen $\mathfrak{Q}A_jA$, $\mathfrak{Q}B_jB$, sowie die Verbindungsstrecken A_jB_j, AB, .. der entsprechenden Punkte dieser ähnlichen Punktreihen denselben jeweiligen Beschleunigungspol als gemeinsamen Aehnlichkeitspol besitzen, so ergiebt sich nebenher der allgemeine Satz:

Die Aehnlichkeitspole von je zwei ähnlichen ebenen Systemen, welche durch eine angenommene feste Verbindungsstrecke und durch je eine andere Verbindungsstrecke entsprechender Punkte zweier affiner ebener Systeme bestimmt werden, liegen auf einem Kreise, der durch den Affinitätspol geht.

Ein durch die Punkte $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{P}$ gehender Systemkreis enthält diejenigen Systempunkte, für welche die Geschwindigkeit und die Beschleunigung einen constanten Winkel λ bilden. Ein solcher Kreis ist demnach auch in einer Systemphase der geometrische Ort aller Systempunkte, welche momentan auf ihren elliptischen Bahnen Punkte durchschreiten, deren Halbmesser mit den conjugirten Halbmesser den constanten Winkel λ einschliessen. Und da dem Systemkreise in der Beschleunigungsphase ein durch $\mathfrak{J}$ gehender Kreis entspricht, so liegen die Mittelpunkte dieser elliptischen Bahnen auf diesem entsprechenden Kreise.

In Fig. **841** ist zu dem durch die Punkte $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{P}$ gehenden Gleichenkreis k^R, der den Wendekreis k^0 rechtwinkelig schneidet, der entsprechende Kreis k_j^R in der Beschleunigungsphase S_j gezeichnet. Der Gleichenkreis enthält diejenigen Systempunkte, für welche die Geschwindigkeit und die Beschleunigung rechtwinkelig sind, und ist demnach in einer Systemphase der geometrische Ort aller Systempunkte, die momentan Scheitel ihrer Bahnellipsen durchschreiten. Dem Gleichenkreise k^R entspricht in der Beschleunigungsphase S_j der durch $\mathfrak{J}$ gehende Kreis k_j^R, welcher die Mittelpunkte dieser Bahnellipsen enthält und jenen festen Kreis k_j^0 rechtwinkelig schneidet. Die zu diesen Scheiteln gehörenden Ellipsenaxen gehen durch den Schnittpunkt J^R, welchen der Kreis k_j^R anderseits mit dem Kreise k^R bildet. Wenn nun die Systempunkte des ähnlichveränderlichen ebenen Systems S sich auch nicht speciell harmonisch auf elliptischen Bahnen bewegen, sondern affine elliptische Bewegungen vollziehen, so gilt auch für diese allgemeinere Bewegung der Satz:

Bei der affinen elliptischen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems liegen die Systempunkte, welche momentan Scheitel ihrer Bahnellipsen durchschreiten, auf dem Gleichenkreise, und die Mittelpunkte dieser Bahnellipsen befinden sich auf einem entsprechenden Kreise.

Auf den zu den Punkten des Wendekreises gehörenden Bahnellipsen, die zu geraden Strecken degeneriren, werden die Scheitel durch die Endpunkte und durch die Mitten dieser Strecken vertreten. Für die Schwingungen der Systempunkte auf diesen Strecken giebt es keinen Umlaufssinn, und daher bildet der Wendekreis k^0 die Grenze der beiden Gebiete, deren Systempunkte ihre Bahnellipsen im entgegengesetzten Sinn umlaufen. Alle Systempunkte innerhalb des Wendekreises bewegen sich auf ihren Bahnellipsen in dem einem Sinne und alle Systempunkte ausserhalb des Wendekreises auf ihren Bahnellipsen in dem anderen Sinne. Der Systempunkt, welcher mit dem Aehnlichkeitspol $\mathfrak{P}$ coincidirt, befindet sich in einem Endpunkte seiner geradlinigen Bahn, und der Endpunkt $\mathfrak{P}_j$ der entsprechenden Beschleunigung, der sich als Schnittpunkt der geradlinigen Bahn $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ und des Kreises k_j^0 ergiebt, liegt in der Mitte dieser Bahn. Der Systempunkt, welcher mit dem Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$ coincidirt, besitzt die Beschleunigung Null und durchschreitet momentan die Mitte seiner geradlinigen in $\mathfrak{J}\mathfrak{Q}$ liegenden Bahn.

Wir nehmen bei der harmonischen elliptischen Bewegung des Systems S auf dem Gleichenkreise k^R einen Systempunkt E an und bestimmen auf dem Kreise k_j^R den entsprechenden Endpunkt E_j seiner Beschleunigung EE_j resp. den Mittelpunkt E_j seiner Bahn ε, auf der E in einem Scheitel liegt. Wir denken uns das System S in eine Phase S' gebracht, bei welcher der mit $\mathfrak{P}$ coincidirende Systempunkt in seine Bahnmitte $\mathfrak{P}_j$ gelangt; dann bewegt sich der mit $\mathfrak{J}$ coincidirende Systempunkt nach dem einen Endpunkte $\mathfrak{J}'$, seiner geradlinigen Bahn und der Systempunkt E nach einem benachbarten Scheitel E' auf der elliptischen Bahn ε, deren Halbaxen E_jE, E_jE' sind. Diese elliptische Bahn geht bei Gleichheit dieser Halbaxen in einen Kreis über. Um die auftretenden kreisförmigen Bahnen zu bestimmen, beachten wir, dass der Punkt $\mathfrak{J}$ der Beschleunigungspol für die Systemphase S und der Punkt $\mathfrak{P}_j$ der Beschleunigungspol für die Systemphase S' ist. Aus den ähnlichen Dreiecken $\mathfrak{J}EE_j$, $\mathfrak{J}\mathfrak{P}\mathfrak{P}_j$ und den ähnlichen Dreiecken $\mathfrak{P}_jE'E_j$, $\mathfrak{P}_j\mathfrak{J}'\mathfrak{J}$ folgt

$$E_jE : E_j\mathfrak{J} = \mathfrak{P}_j\mathfrak{P} : \mathfrak{P}_j\mathfrak{J}, \quad E_jE' : E_j\mathfrak{P}_j = \mathfrak{J}\mathfrak{J}' : \mathfrak{J}\mathfrak{P}_j.$$

Wenn nun $E_jE = E_jE'$ sein soll, so ergiebt sich die Bedingung

$$E_j\mathfrak{J} : E_j\mathfrak{P}_j = \mathfrak{J}\mathfrak{J}' : \mathfrak{P}\mathfrak{P}_j.$$

Denken wir uns die Strecke $\mathfrak{J}\mathfrak{P}_j$ durch einen innerhalb und durch einen ausserhalb liegenden Punkt nach dem constanten Verhältnisse $\mathfrak{J}\mathfrak{J}' : \mathfrak{P}\mathfrak{P}$ getheilt, und denken wir uns ferner über der durch diese Theilpunkte bestimmten Strecke als Durchmesser einen Kreis beschrieben, so schneidet derselbe den Kreis k_j^R in zwei Punkten D_j, E_j, welche die Mittelpunkte kreisförmiger Bahnen sind. Die zu D_j, E_j gehörenden entsprechenden Punkte D, E, von denen der erste innerhalb und der zweite ausserhalb des Wendekreises k^0 liegt, sind in der Systemphase S die Punkte, welche sich auf den um D_j, E_j beschriebenen Kreisen δ, ε entgegengesetzt bewegen. Aus diesen Darlegungen folgt der Satz:

Bei einer affinen elliptischen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems vollziehen zwei Systempunkte entgegengesetzt ähnliche Bewegungen auf Kreisen; und bei einer harmonischen elliptischen Bewegung desselben vollziehen zwei Systempunkte entgegengesetzt gleichförmige Bewegungen auf Kreisen.

Wir erhalten hiernach auch eine harmonische elliptische Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems, wenn sich zwei Systempunkte entgegengesetzt gleichförmig auf Kreisen bewegen. Die Beschleunigungsphasen k_j^R der verschiedenen Gleichenkreise gehen dieser abgeleiteten Beziehung gemäss alle durch die festen Punkte D_j, E_j und schneiden den Kreis k_j^0 rechtwinkelig; folglich liegen die Punkte D_j, E_j auf einem Durchmesser $R_j T_j$ des Kreises k_j^0 harmonisch. Die beiden durch $\mathfrak{Q} D D_j$, $\mathfrak{Q} E E_j$ bestimmten affinen Systeme treten als entgegengesetzt ähnliche Systeme auf, für welche die rechtwinkeligen Geraden $\mathfrak{Q} R_j$, $\mathfrak{Q} T_j$ selbstentsprechende Gerade sind. Die Punkte R_j, T_j sind die Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise δ, ε; und die entsprechenden Systempunkte R, T bewegen sich auf den Geraden $\mathfrak{Q} R_j$, $\mathfrak{Q} T_j$.

Bewegung affin-veränderlicher ebener Systeme.

342. **Beziehungen zweier affiner ebener Systeme.** Bei der Erzeugung der cyclischen Curven durch eine specielle Bewegung eines affin-veränderlichen ebenen Systems haben wir schon erkannt, dass die Untersuchung desselben zu vielen interessanten Ergebnissen führt. Deshalb wollen wir noch die fundamentalen Beziehungen des conplan bewegten affin-veränderlichen ebenen Systems ableiten, um dadurch den Weg der weiteren Forschung zu ebenen. In affinen Systemen entspricht einer Punktreihe des einen Systems eine ähnliche Punktreihe in dem anderen, und parallelen

Geraden in dem einem System entsprechen wieder parallele Gerade in dem anderen. Jedem unendlich fernen Punkt entspricht wieder ein solcher und demnach ist bei zwei in einer Ebene liegenden affinen Systemen die unendlich ferne Gerade stets eine selbstentsprechende Gerade. Wenn in Fig. **842**, Taf. LVII, zu drei Punkten A_1, B_1, C_1 eines affinen ebenen Systems S_1 die entsprechenden Punkte A_2, B_2, C_2 in einem anderen affinen ebenen System S_2 gegeben sind, so erhalten wir in bekannter Weise zu einem Punkte D_1 in S_1 den entsprechenden D_2 in S_2, indem wir durch D_1 und eine Ecke A_1 des Dreiecks $A_1B_1C_1$ die Gerade A_1D_1 ziehen, welche die gegenüberliegende Seite B_1C_1 im Punkte N_1 trifft, dann $B_2C_2N_2 \sim B_1C_1N_1$ und $A_2D_2N_2 \sim A_1D_1N_1$ machen. Ferner ergiebt sich auch zu D_1 der entsprechende Punkt D_2, wenn wir zu dem Parallelogramm $A_1X_1D_1Y_1$ das entsprechende Parallelogramm $A_2X_2D_2Y_2$ so construiren, dass $A_2B_2X_2 \sim A_1B_1X_1$ und $A_2C_2Y_2 \sim A_1C_1Y_1$ ist. Zwei affine ebene Systeme S_1, S_2 sind hiernach durch drei Paar im Endlichen liegende entsprechende Punkte A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2, die zwei entsprechende Dreiecke bilden, bestimmt; wenn aber drei entsprechende Punkte z. B. A_2, B_2, C_2 sich in einer Geraden befinden, dann schrumpft das System S_2 in diese Gerade zusammen. Ferner sind zwei affine ebene Systeme S_1, S_2 in Fig. **842** durch zwei entsprechende Geradenpaare $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ mit ihren entsprechenden Schnittpunkten A_1, A_2 und durch zwei entsprechende Punkte D_1, D_2 bestimmt; denn durch die Construction der Parallelogramme $A_1X_1D_1Y_1$, $A_2X_2D_2Y_2$ erhalten wir noch die entsprechenden Punkte X_1, X_2 und Y_1, Y_2. Die zwei Geraden x_1, y_1 sind durch ihren Schnittpunkt A_1 und durch ihre unendlich fernen Punkte gegeben, ebenso auch die Geraden x_2, y_2. Demnach sind zwei affine ebene Systeme S_1, S_2 durch zwei Paar entsprechende Punkte A_1, A_2 und D_1, D_2 nebst zwei Paar unendlich ferne entsprechende Punkte bestimmt, also in diesem Falle durch vier Paar entsprechende Punkte gegeben.

Wenn die entsprechenden Punkte A_1, A_2 sowie B_1, B_2 zusammenfallen, so sind alle Punkte der durch dieselben gehenden Geraden selbstentsprechende Punkte der affinen ebenen Systeme S_1, S_2, und diese Gerade heisst die Affinitätsaxe. Die beiden affinen ebenen Systeme befinden sich dann in perspectiver Lage, bei welcher entsprechende Gerade sich in der Affinitätsaxe schneiden und entsprechende Punkte auf parallelen Geraden liegen. Decken sich drei Paar entsprechende Punkte A_1, A_2 und B_1, B_2 sowie C_1, C_1, so gilt dasselbe von jedem Paar entsprechender Punkte, und die beiden affinen ebenen Systeme sind dann identisch. Zwei in einer Ebene liegende affine Systeme besitzen demnach im Allgemeinen nur einen im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Punkt, den **Affinitätspol**. Zwei in den affinen Systemen sich entsprechende Strahlenbüschel, für welche der Affinitätspol der gemeinsame Scheitel ist, besitzen als projective Strahlenbüschel zwei reelle oder imaginäre Doppelstrahlen. Diese durch den Affinitätspol gehenden Doppelstrahlen sind demnach selbstentsprechende Gerade, und ihre unendlich fernen Punkte sind selbstentsprechende Punkt der affinen Systeme. In zwei conplanen affinen ebenen Systemen giebt es also drei selbstentsprechende Punkte, von denen der eine im Allgemeinen im Endlichen liegende Punkt stets reell ist, die beiden andern im Unendlichen befindlichen Punkte entweder reell oder imaginär sind. Wenn insbesondere die affinen Systeme in gleichwendige ähnliche Systeme übergehen, dann sind die unendlich fernen imaginären Kreispunkte selbstentsprechende Punkte.

343. **Constructionen des Affinitätspols und der selbstentsprechenden Geraden affiner ebener Systeme.** In Fig. **843** sind zwei in einer Ebene liegende affine ebene Systeme S_1, S_2 durch die entsprechenden Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ gegeben. Behufs der Construction des Affinitätspols dieser beiden affinen Systeme ziehen wir von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}$ aus die Strecken $\mathfrak{O}A_\iota \# A_1A_2$, $\mathfrak{O}B_\iota \# B_1B_2$, $\mathfrak{O}C_\iota \# C_1C_2, \ldots$ so bilden die Punkte A_ι, B_ι, $C_\iota, \ldots$ ein zu S_1 oder S_2 affines ebenes System S_ι; denn nach S. 805 entspricht einer Punktreihe von S_1 oder der homologen Punktreihe von S_2 eine ähnliche Punktreihe in S_ι. Construiren wir nun zu dem Punkte $\mathfrak{O}$ in S_ι den entsprechenden Punkt $\mathfrak{P}$ in S_1 oder S_2, dann ist $\mathfrak{P}$ der Affinitätspol der beiden affinen ebenen Systeme S_1, S_2. Aus dieser Darlegung folgt somit der Satz:

Die Endpunkte der von einem angenommenen Punkte aus gezogenen Strecken, die den Verbindungsstrecken der entsprechenden Punkte zweier conplaner affiner ebener Systeme gleich und gleich gerichtet sind, bilden ein affines ebenes System.

Um in Fig. **844** eine andere Construction des Affinitätspols auszuführen, betrachten wir in den affinen ebenen Systemen S_1, S_2, welche durch die entsprechenden Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ gegeben sind, zwei entsprechende Parallelstrahlenbüschel a_1, $a'_1, \ldots$ und a_2, $a'_2, \ldots$, die beziehlich zu den entsprechenden Geraden B_1C_1, B_2C_2 parallel sind. Diese beiden Parallelstrahlenbüschel erzeugen durch die Schnittpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}', \ldots$ ihrer entsprechenden Strahlen eine Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$. Ebenso erzeugen auch die beiden entsprechenden Parallelstrahlenbüschel $b_1, b_1', \ldots$ und $b_2, b_2', \ldots$ die beziehlich zu den entsprechenden Geraden C_1A_1, C_2A_2 parallel sind, eine Gerade $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$; und der Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ ist dann der Affinitätspol, weil sich in diesem Schnittpunkte zwei Paar entsprechende Strahlen der Parallelstrahlenbüschel treffen. Der Affinitätspol $\mathfrak{P}$ ergiebt sich also, indem wir zu entsprechenden Dreiecksseiten B_1C_1, B_2C_2, welche sich im Punkt $\mathfrak{A}'$ schneiden, durch die gegenüberliegenden Ecken A_1, A_2 die Parallelen a_1, a_2 bis zu ihrem Schnittpunkte $\mathfrak{A}$ ziehen, ebenso zu den entsprechenden Dreiecksseiten C_1A_1, C_2A_2, die sich in $\mathfrak{B}'$ schneiden, durch die gegenüberliegenden Ecken B_1, B_2 die Parallelen b_1, b_2 bis zu ihrem Schnittpunkte $\mathfrak{B}$ ziehen; dann ist der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ der Affinitätspol $\mathfrak{P}$ der beiden affinen ebenen Systeme S_1, S_2.

Die in Fig. 845 durch den Affinitätspol $\mathfrak{P}$ gehenden selbstentsprechenden Geraden $\mathfrak{P}r$, $\mathfrak{P}t$ der beiden affinen Systeme S_1, S_2 erhalten wir in bekannter Weise als die Doppelstrahlen zweier sich in diesen Systemen entsprechender Strahlenbüschel, deren gemeinsamer Scheitel $\mathfrak{P}$ ist. Wir beschreiben einen durch $\mathfrak{P}$ gehenden beliebigen Kreis q, der die Strahlen $\mathfrak{P}A_1$, $\mathfrak{P}B_1$, $\mathfrak{P}C_1$ und die entsprechenden Strahlen $\mathfrak{P}A_2$, $\mathfrak{P}B_2$, $\mathfrak{P}C_2$ beziehlich in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$ schneidet, und ziehen dann die Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1$, sowie die Geraden $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_1$, die sich resp. in den Punkten x und y treffen, ferner ziehen wir durch x, y die Gerade u, welche mit dem Kreise q die Schnittpunkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{t}$ bildet; und durch diese Schnittpunkte gehen beziehlich die Doppelstrahlen $\mathfrak{P}r$, $\mathfrak{P}t$. Je nachdem die Gerade u den Kreis q schneidet oder nicht schneidet, sind die selbstentsprechenden Geraden $\mathfrak{P}r$, $\mathfrak{P}t$ der affinen Systeme S_1, S_2 reell oder imaginär; und sie fallen zusammen, wenn die Gerade u den Kreis q berührt. Anstatt der vom Affinitätspol $\mathfrak{P}$ nach entsprechenden Punkten A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 gehenden Strahlen erhalten wir auch entsprechende Strahlen durch Gerade, die durch $\mathfrak{P}$ zu entsprechenden Geraden parallel gezogen sind; denn diese gehen nach entsprechenden unendlich fernen Punkten.

Jene abgeleiteten Constructionen des Affinitätspols sind aber nicht anwendbar, wenn die affinen Systeme unendlich nahe liegen. Um auch eine in diesem Falle geltende Construction des Affinitätspols $\mathfrak{P}$ der in Fig. 846 durch die entsprechenden Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ gegebenen affinen Systeme S_1, S_2 zu erhalten, bestimmen wir auf den Dreiecksseiten A_1B_1, A_2B_2 die entsprechenden Punkte N_1, N_2, deren Verbindungsgerade n zu der Verbindungsgeraden c der gegenüberliegenden Ecken C_1, C_2 parallel ist. Die Verbindungsgeraden a, b, n, .. der homologen Punkte der entsprechenden ähnlichen Punktreihen A_1, B_1, N_1, .. und A_2, B_2, N_2, .. und die Geraden A_1B_1, A_2B_2 sind Tangenten einer Parabel. An dieser durch die vier Tangenten a, b, A_1B_1, A_2B_2 bestimmten Parabel ergiebt sich vermittelst des Brianchon'schen Sechsseits, dessen eine Seite die unendlich ferne Tangente dieser Parabel ist, die zu c parallele Tangente n. Wir ziehen durch den Schnittpunkt K_{ab} der Geraden A_1B_1, A_2B_2 die zu a Parallele $K_{ab}O$ und durch den Punkt B_2 die zu c Parallele B_2O, welche $K_{ab}O$ in O trifft; wir ziehen ferner die durch den Schnittpunkt G_{ab} der Geraden a, b und den Punkt O gehende Gerade $G_{ab}O$, die auf A_1B_1 den Punkt N_1 bestimmt; dann ist die durch N_1 zu c parallele Gerade n, welche A_2B_2 in N_2 schneidet, die gesuchte Tangente jener Parabel. Die so bestimmten entsprechenden Geraden C_1N_1, C_2N_2 schneiden sich in dem Affinitätspol $\mathfrak{P}$, weil alle Verbindungsgeraden ihrer entsprechenden Punkte parallel sind.

Die conplane Bewegung eines affin-veränderlichen ebenen Systems S ist in Fig. **847** bestimmt, wenn die Bahncurven α, β, γ dreier Systempunkte A, B, C und die Hüllbahncurven $\varkappa_{ab}$, $\varkappa_{bc}$ zweier Systemgeraden AB, BC nebst deren Berührungspunkten K_{ab}, K_{bc} gegeben sind. Nehmen wir an, dass in A, B, C auf den Bahncurven α, β, γ die entsprechenden Punkte A_1, A_2 sowie B_1, B_2 und C_1, C_2 unendlich nahe liegen und dass zu den Bahncurven α, β, γ beziehlich die Tangenten a, b, c gehören, deren Schnittpunkte mit G_{ab}, G_{bc}, G_{ca} bezeichnet sind, so verfahren wir behufs der Bestimmung des Affinitätspols $\mathfrak{P}$ gemäss der vorhergehenden Darlegung in folgender Weise. Wir ziehen zu a die Parallele $K_{ab}O_c$, zu c die Parallele BO_c und ferner die Gerade $G_{ab}O_c$, welche AB im Punkte N_c schneidet; dann enthält die Gerade CN_c den Affinitätspol $\mathfrak{P}$. Ebenso ziehen wir wegen der symmetrischen Anordnung zu c die Parallele $K_{bc}O_a$, zu a die Parallele BO_a und ferner die Gerade $G_{bc}O_a$, welche BC im Punkte N_a trifft; dann enthält auch die Gerade AN_a den Affinitätspol $\mathfrak{P}$. Somit ergiebt sich der Affinitätspol $\mathfrak{P}$ für die durch ABC bestimmte Systemphase als Schnittpunkt der Geraden AN_a, CN_c.

Mit Hülfe des Affinitätspols $\mathfrak{P}$ können wir die Tangente d an der Bahncurve δ eines beliebigen Systempunktes D leicht construiren. Wir ziehen die Gerade $D\mathfrak{P}$, welche AB in N trifft, ferner die Gerade $G_{ab}N$, die mit $K_{ab}O_c$ den Schnittpunkt O bildet; dann ist die zum Punkte D gehörende Tangente d zu der Geraden

BO parallel. Betrachten wir die Gerade d als eine Systemgerade, so ergiebt sich, indem wir den Constructionsweg umgekehrt durchschreiten, auf dieser Geraden der Punkt D als Berührungspunkt, den dieselbe momentan mit ihrer Hüllbahncurve bildet. Auf der Geraden CA erhalten wir auch den Berührungspunkt an der entsprechenden Hüllbahncurve vermittelst der in Art. 44 (Fig. **89**) angegebenen Construction.

344. **Einförmige Bewegung eines affin-veränderlichen ebenen Systems.** Eine conplane Bewegung eines affin-veränderlichen ebenen Systems mit festem Affinitätspol und mit zwei unendlich fernen reellen oder imaginären festen Systempunkten nennen wir eine einförmige Bewegung desselben. In Fig. **848** sind durch die entsprechenden Dreiecke $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ drei Systemphasen S_1, S_2, S_3 eines affin-veränderlichen ebenen Systems S gegeben, dessen Systempunkte A, B, C ähnliche Bewegungen auf den Bahngeraden α, β, γ vollziehen. Wir erhalten den Affinitätspol $\mathfrak{P}$ der beiden Systemphasen S_1, S_2, indem wir, wie S. 900 gezeigt wurde, zu der Bahngeraden β die parallele Gerade ν ziehen, welche die Geraden A_1C_1, A_2C_2 in den entsprechenden Punkten N_1, N_2 trifft, als Schnittpunkt der Geraden B_1N_1, B_2N_2. Die Geraden α, γ, ν, A_1C_1, A_2C_2 sind Tangenten einer Parabel, die auch von den Verbindungsgeraden der homologen Punkte der ähnlichen Punktreihen $A_1A_2A_3$.. und $C_1C_2C_3$.. umhüllt wird. Demnach schneidet die Gerade ν auch die Gerade A_3C_3 in dem Punkte N_3, der den Punkten N_1, N_2 entspricht, und es ergiebt sich der Affinitätspol der beiden Systemphasen S_2, S_3 als Schnittpunkt der Geraden B_2N_2, B_3N_3, der wegen der ähnlichen Punktreihen $B_1B_2B_3$.. und $N_1N_2N_3$.. mit $\mathfrak{P}$ identisch ist. Die beiden vom Affinitätspol $\mathfrak{P}$ an jene Parabel gelegten Tangenten $\mathfrak{P}r$, $\mathfrak{P}t$, welche reell oder imaginär sein können, sind dem gemäss gemeinsame selbstentsprechende Gerade aller Systemphasen S_1, S_2, S_3, .. und aller durch die Punktgruppen $\mathfrak{P}A_1A_2A_3$..., $\mathfrak{P}B_1B_2B_3$..., $\mathfrak{P}C_1C_2C_3$.. bestimmten affinen Systeme; folglich besitzt das betrachtete affin-veränderliche ebene System S einen festen Affinitätspol $\mathfrak{P}$ und zwei durch denselben gehende feste Gerade $\mathfrak{P}r$, $\mathfrak{P}t$, deren unendlich ferne Punkte auch feste Systempunkte sind. Diese beiden festen Geraden sowie diese beiden unendlich fernen festen Systempunkte sind reell oder imaginär, je nachdem der Affinitätspol $\mathfrak{P}$ ausserhalb oder innerhalb jener Parabel liegt. Eine Punktreihe auf den Systemgeraden AB, BC, CA des affin-veränderlichen Systems S ist eine ähnlich-veränderliche Punktreihe; und demnach erzeugen alle Punkte dieser System-

geraden ähnliche Punktreihen auf Geraden. Denken wir uns noch einen beliebigen Systempunkt angenommen und durch denselben eine Systemgerade gelegt, welche zwei von jenen Systemgeraden in zwei Punkten schneidet, so folgt, weil diese Schnittpunkte ähnliche Punktreihen auf Geraden beschreiben, dass nach S. 876 auch der angenommene Systempunkt eine ähnliche Punktreihe auf einer Geraden erzeugt. Aus diesen Darlegungen erhalten wir das Ergebniss:

Vollziehen drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems ähnliche Bewegungen auf Geraden, so bleiben der Affinitätspol und zwei unendlich ferne reelle oder imaginäre Punkte fest; alle beweglichen Systempunkte vollziehen ähnliche Bewegungen auf Geraden; alle beweglichen Systemgeraden umhüllen Parabeln, welche die beiden durch den Affinitätspol nach den unendlich fernen festen Punkten gehenden, reellen oder imaginären Geraden berühren.

Diese specielle einförmige Bewegung wollen wir eine geradlinige einförmige Bewegung des affin-veränderlichen ebenen Systems nennen. Dieselbe ist hiernach auch bestimmt, wenn der Affinitätspol nebst zwei durch ihn gehenden Systemgeraden fest sind, und ein Systempunkt sich auf einer Geraden bewegt. Wenn in Fig. **848** die beiden festen Geraden $\mathfrak{P}r$, $\mathfrak{P}t$ reell sind und die beiden entsprechenden Punkte A_1, A_2 auf der zugehörigen Bahngeraden α angenommen werden, so erhalten wir zu einem Punkte B_1, wie S. 898 dargelegt wurde, den entsprechenden Punkt B_2 und damit die zugehörige Bahngerade β. Wird ferner die Bahngerade β angenommen, dann ergeben sich, wenn wir die Schnittpunkte, welche α, β mit $\mathfrak{P}r$, $\mathfrak{P}t$ bilden, resp. mit A_ϱ, A_τ und B_ϱ, B_τ bezeichnen, auf β die entsprechenden Punkte B_1, B_2, indem wir die Punktgruppe $B_1 B_\varrho B_\tau B_2$ ähnlich $A_1 A_\varrho A_\tau A_2$ machen. Gelangt der Systempunkt A in die Lagen A_ϱ, A_τ, dann gelangen auch die Systempunkte B, C beziehlich in die Lagen B_ϱ, B_τ und C_ϱ, C_τ; demnach schrumpfen die betreffenden Systemphasen des affin-veränderlichen ebenen Systems S in die Geraden $\mathfrak{P}r$, $\mathfrak{P}t$ zusammen.

Um auch, falls die Geraden $\mathfrak{P}r$, $\mathfrak{P}t$ imaginär sind, die Construction entsprechender Punkte auszuführen, nehmen wir an, es seien in Fig. **848** die Geraden $\mathfrak{P}r$, $\mathfrak{P}t$ durch die Schnittpunkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{t}$ bestimmt, welche eine Gerade u mit einen durch $\mathfrak{P}$ gehenden Kreis q bildet. Und diese Schnittpunkte sind reell oder imaginär, je nachdem die Gerade u den Kreis q schneidet oder nicht schneidet. Wir stellen uns vor, dass das betrachtete affin-veränderliche ebene System S von der durch die Punkte $A_3, B_3, C_3, \ldots$ gegebenen Systemphase S_3 aus eine geradlinige Bewegung vollzieht, bei welcher sich der Punkt A von A_3 nach A_4 bewegt. Behufs der Construction des Punktes B_4, der dem Punkte B_3 entspricht, verfahren wir in folgender Weise. Wir ziehen die Strahlen $\mathfrak{P}A_3$, $\mathfrak{P}A_4$, $\mathfrak{P}B_3$, die den Kreis q in den Punkten $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$, $\mathfrak{b}_3$ schneiden, ziehen ferner die Gerade $\mathfrak{a}_4\mathfrak{b}_3$ bis an ihren Schnittpunkt x mit u und die Gerade $x\mathfrak{a}_3$, welche den Kreis q in $\mathfrak{b}_4$ trifft; dann erhalten wir den Strahl $\mathfrak{P}\mathfrak{b}_4$, der den Punkt B_4 enthält. Hierauf ziehen wir zu A_3B_3 den parallelen Strahl $\mathfrak{P}\mathfrak{e}_3$, der den Kreis q in $\mathfrak{e}_3$ schneidet, ferner die Gerade $\mathfrak{a}_4\mathfrak{e}_3$ und durch ihren mit u gebildeten Schnittpunkt y die Gerade $y\mathfrak{a}_3$, die q im Punkte $\mathfrak{e}_4$ trifft; dann bestimmt die zu $\mathfrak{P}\mathfrak{e}_4$ Parallele A_4B_4 den Punkt B_4 auf $\mathfrak{P}\mathfrak{b}_4$. In gleicher Weise ergiebt sich zum Punkte C_3 der entsprechende Punkt C_4; und wir erhalten somit die von den Punkten $A_4, B_4, C_4, \ldots$ gebildete Systemphase S_4. Dieser allgemeineren Construction gemäss sind die Geraden $\mathfrak{P}r$, $\mathfrak{P}t$, die imaginär sein können, die selbstentsprechenden Geraden für die Systemphasen S_3, S_4 und somit auch für alle Systemphasen dieser betrachteten geradlinigen Bewegung. Ferner sind analog wie vorhin die Geraden $\mathfrak{P}r$, $\mathfrak{P}t$ auch die selbstentsprechenden Geraden der durch die Punktgruppen $\mathfrak{P}A_3A_4\ldots$, $\mathfrak{P}B_3B_4\ldots$, $\mathfrak{P}C_3C_4\ldots$, bestimmten affinen ebenen Systeme. Demnach sind die Bahnen $A_1A_2A_3A_4\ldots$, $B_1B_2B_3B_4\ldots$, $C_1C_2C_3C_4\ldots$ entsprechende Bahnen in affinen Systemen, die den gemeinsamen Affinitätspol $\mathfrak{P}$ und die gemeinsamen selbstentsprechenden Geraden $\mathfrak{P}r$, $\mathfrak{P}t$ besitzen. Es sind also der feste Affinitätspol $\mathfrak{P}$ und die beiden unendlich fernen festen Punkte des affinveränderlichen Systems auch selbstentsprechende Punkte dieser affinen Systeme; und wir erhalten hiernach den Satz:

Bei einer einförmigen Bewegung eines affin-veränderlichen ebenen Systems vollziehen alle beweglichen Systempunkte affine Bewegungen auf entsprechenden Bahnen in affinen ebenen Systemen, für welche der feste Affinitätspol und die beiden unendlich fernen festen Punkte selbstentsprechende Punkte sind.

Wenn also bei einer einförmigen Bewegung eines affin-veränderlichen ebenen Systems ein Systempunkt auf einer Bahncurve geführt wird, so vollziehen alle beweglichen Systempunkte affine Bewegungen auf entsprechenden Bahncurven; sind aber die selbstentsprechenden festen Systemgeraden $\mathfrak{P}r$, $\mathfrak{P}t$ reell, so bewegen sich alle in denselben liegenden Systempunkte auf diesen Geraden. Bewegt sich z. B. ein Systempunkt auf einem Kegelschnitt, so vollziehen alle beweglichen Systempunkte affine Bewegungen auf entsprechenden Kegelschnitten. Geht insbesondere der Kegelschnitt durch den Affinitätspol und durch die beiden unendlich fernen festen Punkte, so gilt dasselbe von allen Kegelschnitten. Betrachten wir einen solchen Kegelschnitt als Systemcurve, dann hüllt dieser Kegelschnitt sich selbst ein und derselbe ist eine Selbsthüllcurve in dem affin-veränderlichen ebenen System. Es giebt aber analog den logarithmischen Spiralen bei dem ähnlich-veränderlichen ebenen System auch hier noch andere Selbsthüllcurven, die in ihrer Gestaltung, je nachdem die unendlich fernen festen Punkte als reell oder imaginär auftreten, sehr verschieden sind. Bei einem ähnlich-veränderlichen ebenen System sind die unendlich fernen imaginären Kreispunkte stets feste Systempunkte.

Bei einer geradlinigen einförmigen Bewegung eines affin-veränderlichen ebenen Systems beschreiben alle beweglichen Systempunkte ähnliche Punktreihen auf Geraden; und hieraus folgt der Satz:

Die Punkte, welche die Verbindungsstrecken der homologen Punkte zweier in einer Ebene liegender affiner Systeme in gleichen Verhältnissen theilen, bilden ein zu diesen Systemen affines ebenes System, welches denselben Affinitätspol und dieselben unendlich fernen selbstentsprechenden Punkte mit diesen gemeinsam hat.

Eine einförmige Bewegung eines affin-veränderlichen ebenen Systems S ist vertauschbar; denn wir können die Phasen einer Systemcurve k als die Bahncurven und die Bahncurven der auf k befindlichen Systempunkte als die Phasen einer Systemcurve betrachten, die einem anderen affin-veränderlichen ebenen System Σ angehört. Und beide affin-veränderlichen Systeme S, Σ besitzen denselben festen Affinitätspol und dieselben unendlich fernen festen Punkte. Durch Betrachtung specieller einförmiger Bewegungen eines affin-veränderlichen ebenen Systems gelangt man zu mannigfaltigen interessanten Beziehungen. Sind z. B., Fig. **849**, in einem geradlinig bewegten affin-veränderlichen ebenen System S auf den Phasen k_1, k_2, k_3 einer Systemcurve k die entsprechenden Punkte A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3 in den betreffenden Bahngeraden α, β, γ gegeben, so folgt, wenn wir die beiden Curvenphasen k_1, k_2 als affine Bahncurven der Punkte A_1, A_2 der ähnlich-veränderlichen

Punktreihe $A_1 A_2 A_3$ . . betrachten, dass alle Punkte dieser Reihe affine Bahncurven in affinen Systemen beschreiben, welche einen gemeinsamen Affinitätspol und zwei gemeinsame unendlich ferne selbstentsprechende Punkte besitzen.

Durch Centralprojection eines affin-veränderlichen ebenen Systems auf eine nicht zu demselben parallele Ebene erhalten wir ein veränderliches ebenes System, dessen Phasen collinear sind und welches ein collinear-veränderliches ebenes System genannt wird. Der auf S. 904 abgeleitete Satz wird hierdurch verallgemeinert, und die unendlich fernen festen Punkte werden durch feste Punkte vertreten, die im Endlichen liegen. Es treten demnach bei diesem collinear-veränderlichen ebenen System drei im Allgemeinen im Endlichen liegende feste Punkte auf, die Collineationspole heissen, und wir erhalten eine einförmige Bewegung des collinear-veränderlichen ebenen Systems, bei welchem alle beweglichen Systempunkte collineare Bahnen in collinearen ebenen Systemen beschreiben, welche die drei Collineationspole als selbstentsprechende Punkte besitzen. Aus dieser Beziehung ergeben sich mannigfaltige projective Folgerungen[1]).

345. **Aehnliche Bewegung eines affin-veränderlichen ebenen Systems.** Wir nehmen an, dass in Fig. **850** drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte A, B, C eines affin-veränderlichen ebenen Systems auf ihren Bahncurven α, β, γ ähnlich bewegt werden; dann gilt dasselbe von allen Systempunkten der durch AB, BC, CA bestimmten ähnlich-veränderlichen Punktreihen. Denken wir uns noch einen beliebigen vierten Systempunkt D und eine durch denselben gehende Systemgerade angenommen, so folgt, weil die von derselben mit den Systemgeraden AB, BC, CA gebildeten Schnittpunkte ähnliche Bewegungen machen, dass auch dieser vierte Systempunkt D eine ähnliche Bewegung auf seiner Bahncurve δ vollzieht. Da der Affinitätspol zweier unendlich naher Phasen ruht, so muss derselbe dieser Beziehung gemäss während der ganzen Bewegung des affin-veränderlichen ebenen Systems in Ruhe sein, und dasselbe besitzt somit einen festen Affinitätspol $\mathfrak{P}$. Wir erhalten demnach den Satz:

Vollziehen drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Sy-

---

[1]) Vergleiche die Mittheilungen von Burmester in *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 1875. Bd. 20. S. 381, und *Mathematische Annalen* 1879. Bd. 14. S. 472.

stems ähnliche Bewegungen, so gilt dasselbe von allen beweglichen Systempunkten und das System besitzt einen festen Affinitätspol.

Diese Bewegung, welche wir eine ähnliche Bewegung eines affin-veränderlichen ebenen Systems nennen, geht auch durch Vertauschung aus der in Art. 339 behandelten affinen Bewegung eines ähnlich-veränderlichen ebenen Systems hervor. Ist der feste Affinitätspol $\mathfrak{P}$ in Fig. **850** gegeben und beschreiben die zwei Systempunkte A, B ähnliche Punktreihen auf den ähnlichen Bahncurven α, β; dann ist die entsprechende ähnliche Bewegung des Systempunktes C bestimmt. Behufs der Construction der zu C gehörenden Bahncurve γ nehmen wir noch die entsprechenden Lagen A_1, B_1 auf α, β an, und construiren, weil $\mathfrak{P}ABC$, $\mathfrak{P}A_1B_1C_1$ affine Punktgruppen sind, zum Punkte C den entsprechenden Punkt C_1; demnach ergiebt sich die Bahncurve γ, indem wir $CC_1\gamma$ ähnlich $AA_1\alpha$ oder $BB_1\beta$ machen. Sind insbesondere, wie in Fig. **850**, die Bahncurven α, β Kreise mit den Mittelpunkten A, B, so ist das System der Kreismittelpunkte $\mathfrak{P}\mathsf{AB}\Gamma\Delta$ . . zu dem System $\mathfrak{P}ABCD$ . . affin, und es ergiebt sich z. B. der Mittelpunkt Γ des zum Punkte C gehörenden Kreises γ als der entsprechende Punkt von C.

346. **Affine Bewegung eines affin-veränderlichen ebenen Systems.** Nehmen wir an, dass in Fig. **851** drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte A, B, C eines affin-veränderlichen ebenen Systems auf ihren Bahncurven α, β, γ affine Punktreihen beschreiben, so gilt dasselbe von allen Systempunkten der durch AB, BC, CA bestimmten ähnlich-veränderlichen Punktreihen. Nehmen wir ferner noch einen beliebigen vierten Systempunkt D an, und denken wir uns durch denselben eine beliebige Systemgerade gelegt, so folgt, weil die von derselben mit den Systemgeraden AB, BC, CA gebildeten Schnittpunkte affine Bewegungen ausführen, dass auch der Systempunkt D eine affine Bewegung auf seiner Bahncurve δ vollzieht. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Vollziehen drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems affine Bewegungen, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

Diese Bewegung nennen wir eine affine Bewegung eines affin-veränderlichen ebenen Systems; und durch Vertauschung geht aus derselben eine gleichartige Bewegung hervor. Wenn die drei Systempunkte A, B, C harmonische Bewegungen auf Ellipsen vollziehen, so gilt dasselbe von allen Systempunkten; und in diesem besonderen Falle erhalten wir eine **harmonische elliptische Bewegung** des affin-veränderlichen ebenen Systems.

Denken wir uns in Fig. **851** auf den affinen Bahncurven $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die vier Systemphasen angehörenden homologen Punkte gegeben, so bilden dieselben vier entsprechende affine Vierecke $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$, $D_1D_2D_3D_4$, und hieraus folgt die geometrische Beziehung:

Die vierten Eckpunkte der affinen Vierecke, welche durch je drei homologe Punkte von drei in einer Ebene liegenden affinen ebenen Systemen bestimmt sind, bilden ein viertes affines ebenes System.

Wenn wir anstatt der affinen Vierecke insbesondere, wie in Fig. **852**, in gleichem Sinne die durch je drei homologe Punkte bestimmten Parallelogramme $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$, $D_1D_2D_3D_4$ construiren, so erhalten wir die speciellere geometrische Beziehung, welche sich auch aus dem S. 886 abgeleiteten Satze ergiebt:

Die vierten Eckpunkte der Parallelogramme, welche in gleichem Sinne durch je drei homologe von drei in einer Ebene liegenden affinen ebenen Systemen bestimmt sind, bilden ein viertes affines ebenes System.

347. **Beziehungen der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen eines conplan bewegten affin-veränderlichen ebenen Systems.** In analoger Weise wie bei dem ähnlich-veränderlichen System in Art. 340 gelangen wir auch bei dem affin-veränderlichen System zu den fundamentalen Beziehungen der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Bewegt sich in Fig. **853** ein affin-veränderliches ebenes System S während eines Zeitelementes dt aus einer Systemphase S_2 in eine unendlich nahe Systemphase S_3, und entsprechen den Punkten A_2, B_2, C_2, D_2 in S_2 die Punkte A_3, B_3, C_3, D_3.. auf den zugehörigen Bahncurven $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so ergeben sich die in den Tangenten dieser Bahncurven liegenden Geschwindigkeiten

$$A_2A_v = \frac{A_2A_3}{dt},\quad B_2B_v = \frac{B_2B_3}{dt},\quad C_2C_v = \frac{C_2C_3}{dt},\quad D_2D_v = \frac{D_2D_3}{dt}.$$

Wegen der ähnlichen Punktgruppen $A_2A_3A_v$, $B_2B_3B_v$, $C_2C_3C_v$, $D_2D_3D_v$, sind die Vierecke $A_2B_2C_2D_2$, $A_vB_vC_vD_v$ nach dem Satze S. 905 affin. Demnach bilden die Endpunkte A_v, B_v, C_v, D_v,.. der Geschwindigkeiten ein zu S affines ebenes System S_v, und wir erhalten somit den Satz:

Die Endpunkte der Geschwindigkeiten der Systempunkte einer Systemphase eines conplan bewegten affin-veränderlichen ebenen Systems bilden ein affines ebenes System.

Der Geschwindigkeitszustand einer Systemphase S_2 eines affinveränderlichen ebenen Systems ist hiernach bestimmt, wenn in Fig. 853 die Grösse und Richtung der Geschwindigkeiten A_2A_v, B_2B_v, C_2C_v von drei Punkten A_2, B_2, C_2 der Systemphase S_2 gegeben sind; denn zu einem vierten Punkte D_2 in S_2 erhalten wir die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit D_2D_v, indem wir den entsprechenden Punkt D_v in dem affinen System S_v construiren. Die Gerade D_2D_v ist dann auch die Tangente an der Bahncurve δ des Punktes D_2. Das System S_v der Endpunkte der Geschwindigkeiten heisst die **Geschwindigskeitsphase**, und jeder Systemphase des affin-veränderlichen Systems S entspricht also eine Geschwindigkeitsphase. Der Affinitätspol $\mathfrak{P}$ von S_2, S_v, der mit dem Affinitätspol der Systemphase S_2 identisch ist, besitzt als Systempunkt momentan keine Geschwindigkeit und wird deshalb auch der **Geschwindigkeitspol** genannt. Für die unendlich fernen, momentan festen Punkte der Systemphase ist die Geschwindigkeit auch gleich Null. Wenn wir in Fig. 853 von einem Punkte $\mathfrak{O}$ aus zu den Geschwindigkeiten A_2A_v, B_2B_v, C_2C_v, .. gleichgerichtete gleiche Strecken $\mathfrak{O}A_\varrho$, $\mathfrak{O}B_\varrho$, $\mathfrak{O}C_\varrho$, .. ziehen, so bilden die Endpunkte dieser Strecken nach dem Satze S. 899 ein zu S affines ebenes System S_ϱ, und die Systempunkte derselben bewegen sich auf den Hodographen erster Ordnung der entsprechenden zu S gehörenden Systempunkte.

Wir nehmen an, dass in Fig. 853 ein affin-veränderliches ebenes System S in zwei auf einander folgenden gleichen Zeitelementen dt von einer Systemphase S_1 in die unendlich nahen Systemphasen S_2, S_3 gelangt, und dass in den Systemphasen S_1, S_2, S_3 sich beziehlich die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1; A_2, B_2, C_2, D_2; A_3, B_3, C_3, D_3 auf den zugehörigen Bahncurven α, β, γ, δ entsprechen. Ferner denken wir uns die durch je drei homologe Punkte bestimmten, unendlich kleinen Parallelogramme $A_1A_2A_3A_{II}$, $B_1B_2B_3B_{II}$, $C_1C_2C_3C_{II}$, $D_1D_2D_3D_{II}$ gebildet; dann sind nach dem letzten Satze in Art. 346 die Vierecke $A_2B_2C_2D_2$, $A_{II}B_{II}C_{II}D_{II}$ affin, und die Diagonalen A_2A_{II}, B_2B_{II}, C_2C_{II}, D_2D_{II} dieser unendlich kleinen Parallelogramme sind die Deviationen der bewegten Systempunkte. Hiernach ergeben sich die in den Richtungen dieser Deviationen wirkenden Beschleunigungen

$$A_2A_j = \frac{A_2A_{II}}{dt^2},\ B_2B_j = \frac{B_2B_{II}}{dt^2},\ C_2C = \frac{C_2C_{II}}{dt^2},\ D_2D_j = \frac{D_2D_{II}}{dt^2};$$

folglich sind wegen der ähnlichen Punktgruppen $A_2A_{II}A_j$, $B_2B_{II}B_j$, $C_2C_{II}C_j$, $D_2D_{II}D_j$ die Vierecke $A_2B_2C_2D_2$, $A_jB_jC_jD_j$ nach dem Satze S. 905 affin. Demnach bilden die Endpunkte A_j, B_j, C_j, D_j, .. der Beschleunigungen ein zu S affines ebenes System S_j, und es folgt der Satz:

Die Endpunkte der Beschleunigungen der Systempunkte einer Phase eines conplan bewegten, affin-veränderlichen ebenen Systems bilden ein affines ebenes System.

Der Beschleunigungszustand einer Systemphase S_2 eines affin-veränderlichen ebenen Systems ist also bestimmt, wenn in Fig. **853** die Grösse und Richtung der Beschleunigungen A_2A_j, B_2B_j, C_2C_j von drei Punkten A_2, B_2, C_2 der Systemphase S_2 gegeben sind; denn zu einem vierten Punkte D_2 ergiebt sich die Beschleunigung DD_j, indem wir den entsprechenden Punkt D_j in dem affinen System S_j construiren, welches die Beschleunigungsphase der Systemphase S_2 heisst. Der Affinitätspol $\mathfrak{J}$ von S_2, S_j besitzt als Systempunkt momentan keine Beschleunigung, und denselben nennen wir deshalb den Beschleunigungspol der Systemphase S_2.

Wenn wir in Fig. **853** von jenem beliebigen Punkte $\mathfrak{O}$ aus zu den Beschleunigungen A_2A_j, B_2B_j, C_2C_j, .. gleichgerichtete gleiche Strecken $\mathfrak{O}A_\iota$, $\mathfrak{O}B_\iota$, $\mathfrak{O}C_\iota$, .. ziehen, so bilden die Endpunkte dieser Strecken ein zu S affines ebenes System S_ι, dessen Systempunkte sich auf den Hodographen zweiter Ordnung der entsprechenden zu S gehörenden Systempunkte bewegen. Denken wir uns um den Punkt $\mathfrak{O}$ einen Kreis beschrieben, der sowohl dem System S_ς als dem System S_ι angehört, so entspricht diesem Kreise in der Systemphase S_2 erstens eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Geschwindigkeitspol $\mathfrak{P}$ ist, zweitens eine Ellipse, deren Mittelpunkt der Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$ ist. Demnach erhalten wir den Satz:

In einer Systemphase eines conplan bewegten affin-veränderlichen ebenen Systems liegen diejenigen Punkte, welche gleiche Geschwindigkeit besitzen, auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt der Geschwindigkeitspol ist, und diejenigen Punkte, welche gleiche Beschleunigungen besitzen, auf einer Ellipse, deren Mittelpunkt der Beschleunigungspol ist.

Nehmen wir in Fig. **853** auf einer beliebigen Systemgeraden in einer Systemphase S_2 eine Punktreihe A_2B_2 .. an, so entsprechen derselben in den affinen Systemen S_ς, S_ι die ähnlichen Punktreihen $A_\varsigma B_\varsigma$ . ., $A_\iota B_\iota$ . .; und die Strahlenbüschel $\mathfrak{O}(A_\varsigma B_\varsigma$ . .), $\mathfrak{O}(A_\iota B_\iota$ . .) sind projectiv. Nehmen wir ferner noch ein Strahlbüschel $\mathfrak{O}(A'B'$ . .) an, dessen Strahlen beziehlich mit den Strahlen des Strahlenbüschels $\mathfrak{O}(A_\varsigma B_\varsigma$ . .) gleiche Winkel einschliessen, so sind diese beiden Strahlenbüschel congruent und die beiden auf einer Geraden liegenden Punktreihen $A'B'$ . ., $A_\iota B_\iota$ . . sind projectiv. Diese Punktreihen besitzen demnach zwei reelle oder imaginäre Doppelpunkte, und folglich giebt es auf jener Systemgeraden zwei reelle oder imaginäre Systempunkte, deren Geschwindigkeit und Beschleunigung gleiche gegebene Winkel einschliessen. Da für die momentan ruhenden unendlich fernen Punkte der Systemphase S_2, so wie für den Geschwindigkeitspol $\mathfrak{P}$ die Geschwindigkeit gleich Null ist, und für den Beschleunigungspol $\mathfrak{J}$ die Beschleunigung gleich Null ist, so können wir diese Punkte auch als solche Systempunkte betrachten, bei denen Geschwindigkeit und Beschleunigung gleiche beliebige Winkel einschliessen. Aus dieser Darlegung ergiebt sich der Satz:

In einer Systemphase eines conplan bewegten affin-veränderlichen ebenen Systems liegen diejenigen Punkte, deren Geschwindigkeit und Beschleunigung denselben Winkel bilden, auf einem Kegelschnitt, der durch den Geschwindigkeitspol, den Beschleunigungspol und die momentan festen unendlich fernen Punkte geht.

Je nachdem die momentan festen unendlich fernen Punkte reell oder imaginär sind, ist der Kegelschnitt eine Hyperbel oder Ellipse. Wenn die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Punkte in je einer Geraden liegen, dann besitzen diese Punkte momentan keine Normalbeschleunigung und sie durchschreiten momentan Wendepunkte ihrer Bahncurven. Wenn ferner die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Punkte senkrecht sind, dann besitzen diese Punkte momentan keine Tangentialbeschleunigung.

Um noch ein praktisches Beispiel zu erwähnen, ist in Fig. **854** der Mechanismus eines Watt'schen Parallelogramms $LFGH$ dargestellt, bei dem Φ, Λ resp. die festen Axen des Balancier ΦG und des Lenkers ΛL sind. Dieses Parallelogramm bildet einen Bestandtheil eines speciellen affin-veränderlichen ebenen Systems mit constanten Strecken. Ist die Geschwindigkeit FF_v des Gelenkpunktes F bekannt, so ergeben sich die Geschwindigkeiten GG_v, LL_v der Gelenkpunkte G, L in bekannter Weise; und indem wir das Parallelogramm $L_v F_v G_v H_v$ construiren, erhalten wir die Geschwindigkeit HH_v des angenähert geradgeführten Punktes H. Ist die Beschleunigung FF_j des Punktes F gegeben, so ist die Beschleunigung GG_j von G leicht zu bestimmen, und die Beschleunigung LL_j von L erhalten wir nach der in Art. 311 gegebenen Construction; und somit ergiebt sich durch das Parallelogramm $L_j F_j G_j H_j$ die Beschleunigung HH_j des Punktes H.

Bewegung bifocal-veränderlicher Systeme.

348. **Die bifocale Verwandtschaft zweier Systeme.** Wir wollen noch ein gesetzmässig-veränderliches ebenes System behandeln, welches durch den einfachsten Mechanismus hergestellt werden kann und zu interessanten geometrischen Beziehungen führt. Es ist aber nothwendig, dass wir zuerst die Verwandtschaft erörtern, nach welcher die Veränderung dieses Systems erfolgt. In Fig. 855 betrachten wir in zwei conplanen ebenen Systemen S_1, S_2 beziehlich die Punkte F_1, L_1 und F_2, L_2, welche wir die Focalpunkte nennen, als gegeben; und wir nehmen an, dass zwei entsprechende Punkte A_1, A_2 dieser Systeme S_1, S_2 durch die gleichen Strecken

$$F_1 A_1 = F_2 A_2, \quad L_1 A_1 = L_2 A_2$$

bestimmt sind. Die hierdurch definirten ebenen Systeme S_1, S_2 nennen wir bifocale Systeme und die geometrische Beziehung derselben die bifocale Verwandtschaft derselben. Dieser Definition gemäss entsprechen einem Punkte A_1 in S_1, so wie dem bezüglich der Focalgeraden $F_1 L_1$ symmetrisch liegenden Punkte A_1' zwei zur Focalgeraden $F_2 L_2$ symmetrisch liegende Punkt A_2, A_2' in S_2, und umgekehrt entsprechen jedem der Punkte A_2, A_2' des Systems S_2 die Punkte A_1, A_1' im System S_1. Demnach tritt bei der bifocalen Verwandtschaft ein zwei-zweideutiges Entsprechen der Systempunkte auf; und diese Verwandtschaft wird als eine zwei-zweideutige Verwandtschaft bezeichnet[1]).

Nehmen wir in dem System S_1 eine Curve a_1 an, und ist für einen Punkt A_1 die Tangente $A_1 A_v^1$ an derselben gegeben, so kann

[1]) Auf die bifocale Verwandtschaft hat C. G. J. Jacobi in einem an J. Steiner gerichteten Brief zuerst hingewiesen. *Journal für reine und angewandte Mathematik.* 1834. B. 12. S. 137. Eine andere hierauf bezügliche Mittheilung findet sich in C. G. J. Jacobi's *Mathematische Werke.* 1871. B. 3. S. 402. Vergl. ferner L. Burmester: „Ueber das bifocal-veränderliche System“. *Mathematische Annalen* 1880. B. 16. S. 89, wo das bifocal-veränderliche System zuerst behandelt wurde.

an der entsprechenden Curve a_2 im System S_2 die Tangente $A_2A_v^2$ für den entsprechenden Punkt A_2 durch die folgende Darlegung bestimmt werden. Wir denken uns den Punkt A_1 auf der Curve a_1 mit einer Geschwindigkeit $A_1A_v^1$ bewegt und fällen von A_v^1 auf F_1A_1, L_1A_1 Senkrechte, deren Fusspunkte F_u^1, L_u^1 sind; dann repräsentiren die Strecken $A_1F_u^1$, $A_1L_u^1$ nach Art. 32 die Geschwindigkeiten der Längenänderungen der Fahrstrahlen F_1A_1, L_1A_1. Und da bei der entsprechenden Bewegung des Punktes A_2 auf der Curve a_2 resp. dieselben Längenänderungen der Fahrstrahlen F_2A_2, L_2A_2 auftreten, so machen wir im entsprechenden Sinne auf F_2A_2 die Strecke $A_2F_u^2 = A_1F_u^1$, auf L_2A_2 die Strecke $A_2L_u^2 = A_1L_u^1$, und errichten auf diesen Fahrstrahlen die Senkrechten $F_u^2A_v^2$, $L_u^2A_v^2$, die sich im Punkte A_v^2 schneiden; dann repräsentirt $A_2A_v^2$ die entsprechende Geschwindigkeit des Punktes A_2 auf der Curve a_2 und ist zugleich die Tangente an derselben.[1])

Um die entsprechenden Punkte A_1, A_2 in den beiden bifocalen Systemen S_1, S_2 beziehungsweise durch rechtwinkelige Coordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 zu bestimmen, betrachten wir in Fig. 855 die Mittelpunkte O_1, O_2 der Focalstrecken F_1L_1, F_2L_2, deren Längen wir mit $2q_1$, $2q_2$ bezeichnen, als Coordinatenanfang und die Focalgeraden F_1L_1, F_2L_2 beziehlich als x-Axe in den Systemen S_1, S_2; dann ergeben sich aus der Gleichheit der Strecken

$$F_1A_1 = F_2A_2, \quad L_1A_1 = L_2A_2$$

die Gleichungen der bifocalen Verwandtschaft

$$(q_1 + x_1)^2 + y_1^2 = (q_2 + x_2)^2 + y_2^2 \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

$$(q_1 - x_1)^2 + y_1^2 = (q_2 - x_2)^2 + y_2^2 \quad \ldots\ldots \quad 2).$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir durch Subtraction und Addition die beiden folgenden äquivalenten Gleichungen

$$q_1x_1 = q_2x_2 \quad \ldots\ldots \quad 3)$$

$$x_1^2 + y_1^2 + q_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + q_2^2 \quad \ldots\ldots \quad 4);$$

und weiter ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{q_2}{q_1}\,x_2 \\ y_1 &= \sqrt{x_2^2\left(1 - \frac{q_2^2}{q_1^2}\right) + y_2^2 + q_2^2 - q_1^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{q_1}{q_2}\,x_1 \\ y_2 &= \sqrt{x_1^2\left(1 - \frac{q_1^2}{q_2^2}\right) + y_1^2 + q_1^2 - q_2^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 6).$$

[1]) J. Somoff, *Theoretische Mechanik.* I. Theil, Kinematik, deutsch von Ziwet. 1878. S. 116.

Für die Focalgerade F_1L_1 im System S_1 ist $y_1 = 0$ und derselben entspricht demnach, falls $F_1L_1 < F_2L_2$ oder $q_1 < q_2$ ist, eine Hyperbel im System Σ_2. Für die Focalgerade F_2L_2 im System S_2 ist $y_2 = 0$ und derselben entspricht demnach eine Ellipse in System S_1. Diese Beziehung ergiebt sich ohne Ableitung aus den Gleichungen anschaulich und direct in folgender einfacher Weise. Wir construiren in Fig. **856** die zum System S_1 gehörende Ellipse e_1, deren Brennpunkte die Focalpunkte F_1, L_1 sind und deren Hauptaxe $H_1J_1 = F_2L_2$ ist; dann folgt, dass jedem Punkte der Strecke H_2J_2 im System S_2, die gleich F_1L_1 ist und auf F_2L_2 symmetrisch liegt, zwei zu der Hauptaxe H_1J_1 symmetrisch liegende Punkte der Ellipse e_1 in S_1 entsprechen. Wir construiren ferner die zum System S_2 gehörende Hyperbel h_2, deren Brennpunkte die Focalpunkte F_2, L_2 und deren Hauptaxe $H_2J_2 = F_1L_1$ ist; dann folgt, dass jedem nicht zwischen H_1J_1 liegenden Punkte der Focalgeraden H_1J_1 des Systems S_1 zwei zur Hauptaxe H_2J_2 symmetrisch liegende Punkte der Hyperbel h_2 im System S_2 entsprechen. Die Ellipse e_1 scheidet das System S_1 und die Hyperbel h_2 das System S_2 in zwei Gebietstheile. Wir wollen in beiden Systemen den Gebietstheil, der die Focalpunkte enthält, das imaginäre Gebiet und den anderen das reelle Gebiet nennen; denn es giebt nur zu den im reellen Gebiet des Systems S_1 liegenden Punkten entsprechende reelle Punkte in dem System S_2 und umgekehrt. Desshalb nennen wir die Ellipse e_1 und die Hyperbel h_2 auch die Grenzkegelschnitte der beiden bifocalen Systeme S_1, S_2. Für den in Fig. **856** betrachteten Fall ist $F_1L_1 < F_2L_2$; demnach ist das reelle Gebiet in S_1 elliptisch und in S_2 hyperbolisch begrenzt. Wenn dagegen $F_1L_1 > F_2L_2$ ist, dann ist das reelle Gebiet in S_1 hyperbolisch und in S_2 elliptisch begrenzt. Je kleiner die Differenz der Focalstrecken F_1L_1, F_2L_2 wird, desto kleiner werden die Nebenaxen der Grenzkegelschnitte. Die Focalpunkte als Brennpunkte derselben befinden sich also stets in den betreffenden imaginären Gebieten, und folglich können die Focalpunkte nicht als entsprechende Systempunkte betrachtet werden. Bei dem Entsprechen der Punkte in den bifocalen Systemen ist zu beachten, dass nur den Punkten einer Curve, welche in dem reellen Gebiet des einen Systems liegen, reelle Punkte in dem anderen System entsprechen. Wenn wir daher in der Folge sagen, dass einer Curve in dem einem System eine Curve in dem anderen entspricht, so wollen wir nur den im reellen Gebiet befindlichen Theil der Curve als in Betracht gezogen vor aussetzen. In dieser Hinsicht ergeben sich aus den Gleichungen 3), 4) die Sätze:

Jeder Geraden, welche auf der Focalgeraden in dem einem bifocalen System senkrecht steht, entspricht eine derartige Gerade in dem anderen System, und die Fusspunkte entsprechender Geraden bilden auf den Focalgeraden ähnliche Punktreihen, in denen sich die Mittelpunkte der Focalstrecken entsprechen.

Jedem Kreise, dessen Mittelpunkt die Mitte der Focalstrecke in dem einen bifocalen System ist, entspricht ein derartiger Kreis in dem anderen System.

Jedem Kreise, dessen Mittelpunkt auf der Focalgeraden in dem einen bifocalen System liegt, entspricht ein derartiger Kreis in dem anderen System.

Um die Beziehungen zweier bifocaler Systeme S_1, S_2 in anschaulichster Weise geometrisch darzustellen, nehmen wir in Fig. **856** die Ebene des Systems S_2 als Aufrissebene und construiren in der zugehörigen Grundrissebene ein System S_l, welches dem System S_1 ähnlich ist, so, dass die Ellipsenaxe $H_l J_l$, welche der Ellipsenaxe $H_1 J_1$ entspricht, gleich und parallel der Hyperbelaxe $H_2 J_2$ ist und unter dieser senkrecht liegt. Wir bestimmen die Punkte des Systems S_l durch die rechtwinkeligen Coordinaten x_l, y, für welche $O_l J_l$, $O_l O_2$ beziehlich die Axen in positiver Richtung sind; und ferner bestimmen wir die Punkte des Systems S_2 durch die rechtwinkeligen Coordinaten x, z, für welche $O_2 J_2$, $O_2 Z$ resp. die Axen in positiver Richtung sind. Da $H_1 J_1 = 2 q_2$ und $H_l J_l = 2 q_1$ ist, so verhalten sich die Coordinaten entsprechender Punkte der ähnlichen Systeme S_1, S_l wie $q_2 : q_1$, und demnach ist

$$x_1 = \frac{q_2}{q_1} x_l, \quad y_1 = \frac{q_2}{q_1} y.$$

Setzen wir in eine der beiden Gleichungen 1), 2) z. B. in 1) statt x_2, y_2 beziehlich x, z, so erhalten wir

$$(q_1 + x_1)^2 + y_1^2 = (q_2 + x)^2 + z^2;$$

und in diese Gleichung jene Werthe für x_1, y_1 gesetzt, ergiebt sich:

$$\left(q_1 + \frac{q_2}{q_1} x_l\right)^2 + \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2 y^2 = (q_2 + x)^2 + z^2.$$

Weil $x_l = x$ ist, können wir x_l durch x ersetzen und x, y, z als drei im Raume rechtwinkelige Coordinaten der Raumpunkte betrachten; demnach erhalten wir die Gleichung

$$\frac{x^2}{q_1^2} + \frac{y^2}{\frac{q_1^2}{q_2^2}(q_2^2 - q_1^2)} - \frac{z^2}{q_2^2 - q_1^2} = 1,$$

welche ein einschaliges Hyperboloid repräsentirt, dessen drei Halbaxen resp. die Längen

$$q_1, \quad \frac{q_1}{q_2}\sqrt{q_2^2 - q_1^2}, \quad \sqrt{q_2^2 - q_1^2}$$

besitzen. Dasselbe Resultat wird selbstverständlich auch erhalten, wenn wir statt der Gleichung 1) die Gleichung 2) zur Ableitung verwenden. Hiernach ergiebt sich der fundamentale Satz:

Das System S_I, welches dem System S_1 ähnlich ist, kann als die Grundrissprojection und das System S_2, welches dem System S_1 bifocal ist, als die Aufrissprojection der Punkte eines einschaligen Hyperboloids betrachtet werden, von dem zwei Axen beziehlich auf den Projectionsebenen senkrecht sind.

In demselben Sinne wie die Projectionen von einem Punkte des Hyperboloids zweideutig sind, sind es hiernach auch die entsprechenden Punkte der bifocalen Systeme S_1, S_2. Wenn eine Curve n^{ter} Ordnung in der einen Projectionsebene gegeben ist, so können wir diese Curve als die Directrix einer zu dieser Projectionsebene senkrechten Cylinderfläche betrachten, und diese bildet mit dem Hyperboloid eine Durchdringungscurve, deren andere Projection von $2n^{\text{ter}}$ Ordnung ist und zur betreffenden Focalgeraden symmetrisch liegt. Hieraus folgt der Satz:

Einer Curve n^{ter} Ordnung in dem einen zweier bifocaler Systeme entspricht eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung in dem anderen System, und dieselbe ist symmetrisch zur Focalgeraden.

Und ferner ergiebt sich der specielle Satz:

Einer Geraden in dem einen zweier bifocaler Systeme entspricht in dem anderen System ein Kegelschnitt, dessen eine Axe in der Focalgeraden liegt.

Betrachten wir in einer Projectionsebene eine Tangente des Grenzkegelschnitts als die Spur einer auf dieser Projectionsebene senkrechten Ebene, so schneidet diese Ebene das Hyperboloid in zwei Gerade, deren Projectionen in der anderen Projectionsebene Tangenten an den zugehörigen Grenzkegelschnitt sind und zur Focalgeraden symmetrisch liegen. Der Tangente t_I in Fig. **856** an der Grenzellipse e_I im Grundriss entsprechen die beiden Tangenten t_2, t_2' an der Grenzhyperbel h_2 im Aufriss. Dem Berührungspunkte A_l von t_l und e_l entspricht der auf H_2J_2 liegende Schnittpunkt A_2 der Tangenten t_2, t'_2; und den beiden Berührungspunkten B_2, B'_2 dieser Tangenten entspricht der Schnittpunkt B_l, den die Tangente t_l mit H_lJ_l bildet. Hiernach entsprechen einer Tangente t_1 an dem Grenzkegelschnitt e_1 im System S_1 die beiden Tangenten t_2, t'_2 an dem Grenzkegelschnitt h_2 im System S_2. Dem Berührungspunkte A_1 in S_1 entspricht in S_2 der auf H_2J_2 liegende Punkt A_2 und dem Berührungspunkte B_2 in S_2 entspricht in S_1 der auf H_1J_1 liegende Punkt B_1. Machen wir auf der Geraden L_1A_1 die Strecke $L_1G = F_2L_2 = H_1J_1$ und denken wir uns das System S_2 mit seinen Focalpunkten F_2, L_2 beziehlich nach G, L_1 verlegt, dann fällt, weil $L_1A_1 = L_2A_2$ ist, der Punkt A_2 mit dem Punkte A_1 zusammen. Da ferner $L_1G = H_1J_1$ ist, so ist auch $A_1F_1 = A_1G$; und demnach steht die Ellipsentangente t_1 auf F_1G in der Mitte senkrecht. Bei der Verlegung des Systems S_2 fällt dann auch ein beliebiger auf t_2 angenommener Punkt C_2, dem der Punkt C_1 auf t_1 entspricht, mit diesem Punkte C_1 zusammen; denn es ist $F_2C_2 = F_1C_1 = GC_1$ und $L_2C_2 = L_1C_1$. Hiernach erhalten wir den Satz:

Einer Punktreihe auf einer Tangente an dem Grenzkegelschnitt in dem einen bifocalen Systeme entsprechen im anderen System congruente Punktreihen auf zwei zur Focalgeraden symmetrisch liegenden Tangenten des zugehörigen Grenzkegelschnitts.

Die Gleichung einer Schnittebene, welche der Projectionsaxe parallel ist und mit den beiden Projectionsebenen den Winkel von 45^0 bildet, ist

$$y + z = c.$$

Ferner ist die Gleichung des Hyperboloids, wenn wir der Abkürzung wegen $q_2^2 - q_1^2 = \varepsilon^2$ setzen,

$$\frac{x^2}{q_1^2} + \frac{q_2^2 y^2}{q_1^2\varepsilon^2} - \frac{z^2}{\varepsilon^2} = 1;$$

und durch Elimination von y oder z aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir resp. die Gleichungen

$$x^2 + z^2 - 2\frac{cq_2^2}{\varepsilon^2}z + \frac{c^2q_2^2 - \varepsilon^2 q_1^2}{\varepsilon^2} = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2\frac{cq_1^2}{\varepsilon^2}y - \frac{c^2q_1^2 + \varepsilon^2 q_1^2}{\varepsilon^2} = 0,$$

welche Kreise repräsentiren; und diese Kreise berühren als Projectionen des Schnittes, den die unter 45^0 gegen die Projectionsebenen geneigte, zur Projectionsaxe parallele Ebene mit dem Hyperboloid bildet, beziehlich die Grenzkegelschnitte in zwei reellen oder imaginären Punkten, deren Verbindungssehnen der Projectionsaxe parallel sind. Diese beiden Kreise haben gleiche Radien, und einer Punktreihe auf dem einem entspricht als Projection eine congruente Punktreihe auf dem anderen. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Jedem Kreise, der in dem reellen Gebiet des einen zweier bifocaler Systeme S_1, S_2 liegt und den Grenzkegelschnitt in zwei Punkten berührt, entsprechen in dem anderen System zwei zur Focalgeraden symmetrisch liegende Kreise, welche den zugehörigen Grenzkegelschnitt in zwei Punkten berühren, und die entsprechenden Punktreihen auf den Kreisen sind ähnlich.

Dem in Fig. **856** gezeichneten Kreise k_1 des Systems S_1, der die Grenzellipse e_1 in den Scheiteln H_1, J_1 berührt, entspricht der Kreis k_2 des Systems S_2, der die Grenzhyperbel h_2 in den Scheiteln H_2, J_2 berührt; und zu diesem Kreise gehört als Grundrissprojection der über $H_I J_I$ als Durchmesser beschriebene Kreis k_I.

Wir können, wie in Fig. **857** dargestellt ist, durch die Gelenkaxen A_1, B_1, . . mehrerer Gelenke, die in den Focalpunkten F_1, L_1 vermittelst gemeinsamer Axen verbunden sind, einen Kreis k_1 bilden, dessen Mittelpunkt O_1 die Mitte der Focalstrecke $F_1 L_1$ ist. Wenn wir dann die Focalstrecke $F_1 L_1$ verändern, so verändert sich auch der Radius dieses Kreises und sein Mittelpunkt bleibt in der Mitte der veränderten Focalstrecke. Ein derartiger Mechanismus kann demnach als Expansionsrolle bei Spinnereimaschinen angewendet werden. Die von den Gelenkaxen $A_1, B_1, ..$ auf dem Kreise k_1 gebildete Punktreihe, die in der gezeichneten Anordnung beispielsweise der Zehntheilung dieses Kreises entspricht, verändert sich abweichend von der Zehntheilung. Verändern wir aber insbesondere die Focalstrecke $F_1 L_1$ bis zur Grösse $F_2 L_2$, die gleich dem Durchmesser des Kreises k_1 ist, dann ist der Durchmesser des entsprechenden Kreises k_2 gleich jener Focalstrecke $F_1 L_1$ und die entsprechende Punktreihe $A_2 B_2 ..$ ist jener Punktreihe $A_1 A_2 ..$ ähnlich und bildet somit wieder die Zehntheilung des Kreises k_2, dessen Mittelpunkt O_2 die Mitte von $F_2 L_2$ ist.

349. **Bestimmtheit der Bewegung eines bifocal-veränderlichen Systems.** Ein ebenes System, welches sich derart verändert, dass alle Phasen desselben entsprechende bifocale Systeme sind, nennen wir ein bifocal-veränderliches System. Die Bewegung eines bifocal-veränderlichen Systems in einer festen Ebene ist

durch die Bewegung seiner beiden Focalpunkte bestimmt. Nehmen wir an, dass in Fig. 858 die Focalpunkte F_1, L_1 in der festen Ebene sich resp. auf den Bahncurven φ, λ bewegen und in die Lagen F_2, L_2 gelangt sind, so erhalten wir zu einem Systempunkte A_1 die entsprechende Lage A_2, indem wir $F_2A_2 = F_1A_1$, $L_2A_2 = L_1A_1$ machen; aber so, dass die Punkte A_1, A_2 bezüglich der Focalgeraden F_1L_1, F_2L_2 gleichartig liegen. Damit ist dann auch die Eindeutigkeit des Entsprechens festgestellt, und dem Punkte A_1 entspricht eine Bahncurve α, die demnach eindeutig bestimmt ist. Ferner ist die Bewegung eines bifocal-veränderlichen Systems auch durch die Bewegung zweier Systempunkte bestimmt; denn hierdurch ist in gleicher Weise die Bewegung der Focalpunkte und somit die Bewegung aller Systempunkte gegeben.

Die in den Mitten auf den Verbindungsstrecken F_1F_2, L_1L_2 errichteten Senkrechten schneiden sich in einem selbstentsprechenden Punkte oder Doppelpunkte $\mathfrak{P}$ der beiden durch die Focalstrecken F_1L_1, F_2L_2 bestimmten bifocalen Systeme S_1, S_2; denn es ist $F_1\mathfrak{P} = F_2\mathfrak{P}$, $L_1\mathfrak{P} = L_2\mathfrak{P}$, und dem zufolge entspricht der Punkt $\mathfrak{P}$ sich selbst. Wenn wir annehmen, dass es noch einen zweiten Doppelpunkt gebe, dann sind die Systeme identisch oder sie haben insbesondere gemäss dem Satze auf S. 917 unendlich viele selbstentsprechende Punkte in einer Geraden, und demnach giebt es im Allgemeinen nur einen Doppelpunkt zweier bifocaler Systeme, den wir den Bifocalpol nennen. Bei unendlich nahen Systemphasen gehen jene Senkrechten in die betreffenden Normalen der Bahncurven φ, λ über, und der Schnittpunkt dieser Normalen ist dann der Bifocalpol der betrachteten Systemphase. Wenn der Bifocalpol $\mathfrak{P}$ fest ist, dann ist die Bewegung der beiden Focalpunkte auf je einem Kreise beschränkt, dessen Mittelpunkt in $\mathfrak{P}$ liegt.

350. **Construction der Geschwindigkeit bei einem bifocal-veränderlichen System.** Sind in Fig. 859 für die Focalpunkte F, L eines bifocal-veränderlichen Systems S die Geschwindigkeiten FF_v, LL_v auf den zugehörigen Bahncurven φ, λ gegeben, so erhalten wir in bekannter Weise nach Art. 29 für einen beliebigen Systempunkt A die Geschwindigkeit AA_v auf seiner Bahncurve α am einfachsten durch die Bestimmung seiner lothrechten Geschwindigkeit $AA_{\mathfrak{v}}$. Wir ziehen durch die Endpunkte $F_{\mathfrak{v}}$, $L_{\mathfrak{v}}$ der lothrechten Geschwindigkeiten der Focalpunkte F, L zu FA, LA resp. die Parallelen $F_{\mathfrak{v}}A_{\mathfrak{v}}$, $L_{\mathfrak{v}}A_{\mathfrak{v}}$, die sich im Punkte $A_{\mathfrak{v}}$ schneiden. Aus dieser Construction ergiebt sich auch die Geschwindigkeit AA_v direct, wenn wir die Strecke $AF_v' \# FF_v$, die Strecke $AL_v' \#$

LL_v machen und zu FA, LA beziehlich die Senkrechten $F'_v A_v$, $L'_v A_v$ ziehen, welche sich im Punkte A_v schneiden. Die auf FA senkrechten Projectionen FF_u, AF'_u von FF_v und AA_v sind gleich, ebenso sind auch die auf LA senkrechten Projectionen LL_u, AL'_u von LL_v und AA_v gleich. Und vermittelst dieser Beziehung erhalten wir auch die Geschwindigkeit AA_v, indem wir $AF'_u = FF_u$, $AL'_u = LL_u$ machen und auf FA, LA resp. die Senkrechten $F'_u A_v$, $L'_u A_v$ errichten, die sich im Punkte A_v schneiden. Der Bifocalpol $\mathfrak{P}$ ergiebt sich als der Schnittpunkt der auf FF_v, LL_v senkrechten Geraden $F\mathfrak{F}_v$, $L\mathfrak{L}_v$, welche die Normalen an den Bahncurven φ, λ sind; und für den Bifocalpol $\mathfrak{P}$, der als Systempunkt betrachtet momentan ruht, ist die Geschwindigkeit gleich Null.

Wenden wir diese Construction der Geschwindigkeit auch in Fig. **860** auf die Focalpunkte z. B. auf F an, so ergiebt sich eine Vieldeutigkeit, die wir noch kinematisch interpretiren müssen. Behufs der Ausführung dieser Construction bezeichnen wir in diesem besonderen Falle die auf FL senkrechten Projectionen von F_v, L_v resp. mit F_u^0, L_u^0, machen auf FL die Strecke $F\mathfrak{F} = LL_u^0$ und errichten in $\mathfrak{F}$ auf FL die Senkrechte f_v. Da der Punkt F durch unendlich viele Gerade mit sich selbst verbunden werden kann, so ziehen wir durch ihn eine beliebige Gerade g und fällen auf dieselbe die Senkrechte $F_v F'_u$, welche die Gerade f_v im Punkte F_v^g schneidet. Hiernach liefert jede durch F gehende Gerade g einen zugehörigen Punkt F_v^g auf der Geraden f_v, und somit entsprechen dem Punkt F in geometrischer Hinsicht die Punkte der Geraden f_v. In gleicher Weise folgt, wenn wir auf FL die Strecke $L\mathfrak{L} = FF_u^0$ machen und in $\mathfrak{L}$ auf FL die Senkrechte l_v ziehen, dass dem Punkte L die Punkte der Geraden l_v entsprechen. Wir können aber die Focalpunkte F, L, welche die bestimmten Geschwindigkeiten FF_v, LL_v besitzen, nicht als Punkte der Phase des bifocal-veränderlichen Systems S betrachten, weil sie auch bei unendlich nahen entsprechenden Phasen in dem imaginären Gebiet liegen, welches von einem unendlich schmalen Grenzkegelschnitt begrenzt wird, dessen Brennpunkte diese Focalpunkte sind. Um diese auf geometrischem Wege erhaltenen Beziehungen kinematisch zu interpretiren, denken wir uns um die Focalpunkte F, L unendlich kleine, im reellen Gebiet liegende Halbkreise beschrieben, deren begrenzende Durchmesser auf der Focalgeraden senkrecht stehen, und betrachten die Punkte dieser unendlich kleinen Halbkreise als Systempunkte. Die durch F gehende Gerade g

schneidet dann den um F beschriebenen unendlich kleinen Halbkreis in einem an F unendlich nahe gelegenen Systempunkt F^g, zu dem die mit FF_v^g identische Geschwindigkeit $F^g F_v^g$ gehört. Schneidet der über FF_v als Durchmesser beschriebene Kreis die Gerade f_v in zwei Punkten F_v^I, F_v^{II}, dann liegen die Geschwindigkeiten FF_v^I, FF_v^{II} der durch die Geraden FF_v^I, FF_v^{II} auf dem unendlich kleinen Halbkreise bestimmten Systempunkte beziehlich in diesen Geraden. Für den anderen Focalpunkt L tritt dieser Fall nicht ein, weil der über LL_v als Durchmesser beschriebene Kreis die Gerade l_v nicht schneidet. Hiernach entspricht einem Systempunkte eindeutig ein Endpunkt seiner Geschwindigkeit; und die Gesamtheit der Endpunkte aller Geschwindigkeiten bilden die Geschwindigkeitsphase S_v, welche der betrachteten Phase des bifocal-veränderlichen Systems S entspricht. Wenn die Geschwindigkeiten zweier Systempunkte gegeben sind, dann können wir die Geschwindigkeiten der Focalpunkte construiren, und es sind dadurch die Geschwindigkeiten aller Systempunkte bestimmt. Die Beschleunigung eines Systempunktes kann wie in Art. 309 gelehrt wurde bestimmt werden; aber diese Construction ist nicht einfach, und die Verwandtschaft zwischen dem bifocal-veränderlichen System und der zugehörigen Beschleunigungsphase harrt noch der Untersuchung und soll auch hier nicht erörtert werden.

351. **Die Verwandtschaft des bifocal-veränderlichen Systems und der zugehörigen Geschwindigkeitsphase.** Um die gegenseitigen Beziehungen einer Systemphase S eines bifocal-veränderlichen Systems und der zugehörigen Geschwindigkeitsphase S_v geometrisch zu veranschaulichen, müssen wir zunächst die Gleichungen ableiten, welche die Verwandtschaft der Systeme S, S_v repräsentiren. Wir nehmen in der betrachteten Systemphase S, Fig. **861**, die Focalgerade FL als x-Axe, den Mittelpunkt O der Focalstrecke FL, die gleich $2q$ sein möge, als Coordinatenanfang. Die rechtwinkeligen Coordinaten eines beliebigen Systempunktes A bezeichnen wir mit x, y und die des Endpunktes A_v der zugehörigen Geschwindigkeit AA_v mit x_v, y_v. Wir bezeichnen die Winkel, welche die Geschwindigkeit AA_v und die Geschwindigkeiten FF_v, LL_v der Focalpunkte F, L mit der x-Axe bilden, resp. mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{l}$, ferner die Winkel, welche die Geraden FA, LA mit der x-Axe einschliessen, resp. mit χ, ψ, und setzen

$$AA_v = v,\ FF_v = v_f,\ LL_v = v_l.$$

Dann ist gemäss der in Art. 350 angegebenen Construction der Geschwindigkeit AA_v eines Systempunktes A

$$v_f \cos(\chi - \mathfrak{f}) = v \cos(\chi - \mathfrak{a})$$
$$v_l \cos(\psi - \mathfrak{l}) = v \cos(\psi - \mathfrak{a}),$$

und hieraus folgt:

$$v_f \cos\chi \cos\mathfrak{f} + v_f \sin\chi \sin\mathfrak{f} = v \cos\chi \cos\mathfrak{a} + v \sin\chi \sin\mathfrak{a}$$
$$v_l \cos\psi \cos\mathfrak{l} + v_l \sin\psi \sin\mathfrak{l} = v \cos\psi \cos\mathfrak{a} + v \sin\psi \sin\mathfrak{a}.$$

Es ist ferner

$$\cos\chi = \frac{x+q}{\sqrt{(x+q)^2+y^2}}, \quad \sin\chi = \frac{y}{\sqrt{(x+q)^2+y^2}}$$
$$\cos\psi = \frac{x-q}{\sqrt{(x-q)^2+y^2}}, \quad \sin\psi = \frac{y}{\sqrt{(x-q)^2+y^2}}$$
$$v \cos\mathfrak{a} = x_v - x, \quad v \sin\mathfrak{a} = y_v - y;$$

und der Abkürzung wegen schreiben wir

$$v_f \cos\mathfrak{f} = v_f', \quad v_l \cos\mathfrak{l} = v_l',$$
$$v_f \sin\mathfrak{f} = v_f'', \quad v_l \sin\mathfrak{l} = v_l''.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe erhalten wir die beiden folgenden Gleichungen, welche die Verwandtschaft der Systeme S, S_v repräsentiren,

$$x^2 + y^2 + x(v_f' + q - x_v) + y(v_f'' - y_v) + q(v_f' - x_v) = 0 \quad . . \; 1)$$
$$x^2 + y^2 + x(v_l' - q - x_v) + y(v_l'' - y_v) - q(v_l' - x_v) = 0 \quad . . \; 2).$$

Aus diesen Gleichungen erkennen wir, dass jedem Systempunkte A in der Systemphase S, dessen Coordinaten x, y sind, eindeutig ein Punkt A_v in der Geschwindigkeitsphase S_v entspricht, und dass derselbe der Schnittpunkt der beiden Geraden ist, welche diese Gleichungen repräsentiren, wenn wir x, y als constant und x_v, y_v als veränderlich betrachten. Ferner ersehen wir, dass jedem Punkte A_v in der Geschwindigkeitsphase S_v, dessen Coordinaten x_v, y_v sind, zwei Punkte A, A^1 in der Systemphase S entsprechen, und dass dieselben die Schnittpunkte der beiden Kreise sind, welche die Gleichungen repräsentiren, wenn wir x_v, y_v als constant und x, y als veränderlich ansehen. Demnach folgt:

Eine Systemphase S des bifocal-veränderlichen Systems und die zugehörige Geschwindigkeitsphase S_v stehen in ein-zweideutiger Verwandtschaft.

Jedem Punkte im System S entspricht ein Punkt im System S_v; umgekehrt entsprechen aber jedem Punkte im System S_v zwei Punkte im System S. Diese beiden Punkte sind reell, imaginär oder fallen zusammen, je nachdem die beiden genannten Kreise sich schneiden, nicht schneiden oder sich berühren. Demnach wird das System S_v durch eine Grenzcurve in zwei Gebiete geschieden, von denen das eine Gebiet die Punkte enthält, denen je ein reelles Punktpaar entspricht, das andere die Punkte enthält, denen je ein imaginäres Punktpaar entspricht. Jedem Punkte auf der Grenzcurve entspricht somit ein Punkt, in dem zwei entsprechende Punkte coincidiren.

Bezeichnen wir die Mittelpunktcoordinaten des Kreises, der aus der Gleichung 1) hervorgeht, mit a, b, so folgt aus dieser Gleichung, dass

$$a = -\frac{v_f' + q}{2} + \frac{x_v}{2}, \quad b = -\frac{v_f''}{2} + \frac{y_v}{2}$$

ist; und hieraus ergiebt sich, dass das System S_f der Mittelpunkte der Kreise, die aus der Gleichung 1) hervorgehen, dem System S_v homothetisch ähnlich ist. In gleicher Weise ergiebt sich, dass das System S_l der Mittelpunkte der Kreise, welche die Gleichung 2) repräsentirt, auch dem System S_v homothetisch ähnlich ist; und es stehen die Systeme S_f, S_l zu dem System S_v in dem Verhältnisse $1:2$. Nehmen wir

$$a = x_v = a_0, \quad b = y_v = b_0,$$

so ist

$$a_0 = -(v_f' + q), \quad b_0 = -v_f''.$$

Wenn wir nun in Fig. **861** zu den Geschwindigkeiten der Focalpunkte F, L die entgegengesetzten Strecken $FF_0 = F_v F$, $LL_0 = L_v L$ construiren, dann sind a_0, b_0 die Coordinaten des Punktes F_0, und es ist F_0 der Aehnlichkeitspunkt der ähnlichen Systeme S_f, S_v. In analoger Weise ergiebt sich, dass L_0 der Aehnlichkeitspunkt der ähnlichen Systeme S_l, S_v ist; und dies folgt auch aus der Symmetrie der Beziehungen. Setzen wir in die Gleichung 1) $x = -q$, so ist der eine Werth von $y = 0$, und dem zufolge gehen alle Kreise dieser Gleichung durch den Focalpunkt F. Ebenso ergiebt sich, wenn wir in die Gleichung 2) $x = q$ setzen, dass alle Kreise dieser Gleichung durch den Focalpunkt L gehen. Hiernach können wir in Fig. **861** zu einem beliebigen Punkte A_v im System S_v die beiden entsprechenden Punkte A, A^1 im System S leicht vermittelst zweier Kreise construiren. Wir beschreiben um die Mitte M_f der Verbindungsstrecke $F_0 A_v$ den durch F gehenden Kreis K_f und um die Mitte M_l der Verbindungsstrecke $L_0 A_v$ den durch L gehenden Kreis K_l; dann schneiden sich diese beiden Kreise in den Punkten A, A^1. Da die Gerade $M_f M_l$ parallel $F_0 L_0$ ist, so steht die Gerade AA^1 senkrecht auf der Geraden $F_0 L_0$.

Um in Fig. **861** die Grenzcurve im System S_v zu bestimmen, welche die Punkte enthält, denen zwei coincidirende Punkte im System S entsprechen, beachten wir, dass $A_v F_v \parallel M_f F$, $A_v L_v \parallel M_l L$

und $F_v A_v = 2 . FM_f$, $L_v A_v = 2 . LM_l$, $F_0 L_0 = 2 . M_f M_l$ ist. Die Kreise K_f, K_l berühren sich, wenn

$$FM_f \pm LM_l = M_f M_l$$

und demnach

$$F_v A_v \pm L_v A_v = F_0 L_0$$

ist. Hieraus folgt:

Die Grenzcurve in der Geschwindigkeitsphase des bifocal-veränderlichen Systems ist ein Kegelschnitt, dessen Brennpunkte die Endpunkte F_v, L_v der Geschwindigkeiten der Focalpunkte sind und dessen Hauptaxe gleich der Strecke $F_0 L_0$ ist.

In Fig. **862** ist der Grenzkegelschnitt $\varkappa_v$ in S_v construirt, und derselbe ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem $F_v L_v \lesseqgtr F_0 L_0$ ist. Fallen die Punkte F_v, L_v in einem Punkte zusammen, dann geht der Grenzkegelschnitt in einen Kreis über, dessen Mittelpunkt dieser Punkt ist und dessen Durchmesser gleich $F_0 L_0$ ist; fallen dagegen die Punkte F_0, L_0 zusammen, dann degenerirt der Grenzkegelschnitt zu einer in der Mitte auf $F_v L_v$ senkrechten Geraden. Das Gebiet der Punkte in S_v, denen reelle Punkte in S entsprechen, schrumpft demnach in diese Gerade zusammen, und zu jedem Punkte der Systemphase S gehört eine Geschwindigkeit, deren Endpunkt in dieser Geraden liegt. Ist $F_0 L_0 = F_v L_v$, dann artet der Grenzkegelschnitt in die Gerade $F_v L_v$ aus, von der die Strecke $F_v L_v$ als Ausartung einer Ellipse und der übrige ins Unendliche ausgedehnte Theil als Ausartung einer Hyperbel auftritt. In diesem Falle verschwindet das Gebiet der Punkte in S_v, denen imaginäre Punkte in S entsprechen; und wir können das bifocal-veränderliche System als ein momentan starres System betrachten, welches eine unendlich kleine Drehung um den momentan festen Bifocalpol $\mathfrak{P}$ vollzieht, und die zugehörige Geschwindigkeitsphase ist dann dem System ähnlich.

Wenn wir die Gleichung 1) von der Gleichung 2) abziehen, erhalten wir die Gleichung

$$x\,(v'_f - v'_l + 2\,q) + y\,(v''_f - v''_l) + q\,(v'_f + v'_l) - 2\,q\,x_v = 0,$$

welche für jeden Werth von x_v die auf $F_0 L_0$ senkrechte, gemeinsame Secante der beiden betreffenden Kreise K_f, K_l repräsentirt; und demnach ergiebt sich die Beziehung:

Einer auf $F_0 L_0$ senkrechten Geraden in der Systemphase S entspricht eine auf der Focalgeraden FL senkrechte Gerade in der zugehörigen Geschwindigkeitsphase S_v.

Aus dieser Gleichung ersehen wir ferner, dass die Fusspunkte der auf F_0L_0 Senkrechten und die Fusspunkte der entsprechenden auf FL Senkrechten ähnliche Punktreihen bilden. Die durch diese Senkrechten gebildeten entsprechenden Parallelstrahlenbüschel Π, Π_v erzeugen demnach durch die Schnittpunkte entsprechender Strahlen in Fig. **862** eine Gerade ξ, die durch den Bifocalpol $\mathfrak{P}$ geht, weil derselbe der selbstentsprechende Punkt von S, S_v ist. Ziehen wir durch A_v die auf FL Senkrechte $A_v\Xi$ und die entsprechende auf F_0L_0 Senkrechte AA', welche sich im Punkte Ξ treffen, so wird durch $\mathfrak{P}\Xi$ die Gerade ξ bestimmt. Den Schnittpunkten D_v, E_v, die ΞA_v mit dem Grenzkegelschnitt $\varkappa_v$ bildet, entsprechen auf ΞA resp. die Systempunkte D, E auf der Systemcurve $\varkappa$ in S, welche dem Grenzkegelschnitt $\varkappa_v$ entspricht. Diese Systemcurve $\varkappa$, die, wie wir nachher erkennen werden, ein Kegelschnitt ist, enthält also diejenigen Systempunkte, deren Geschwindigkeitsendpunkte auf dem Grenzkegelschnitt $\varkappa_v$ liegen. Zu jedem Punkte A_v der Geraden ΞA_v gehört ein Kreis K_f oder K_l, von denen jeder auf der entsprechenden Geraden ΞA die entsprechenden Punkte A, A' bestimmt. Betrachten wir nun die Kreise K_f, so bilden diese ein Kreisbüschel; und es sind hiernach je zwei Punkte A, A' conjugirte Punkte einer involutorischen Punktreihe, deren Doppelpunkte jene Systempunkte D, E sind. Wir fällen $F_vF_u^0$, $L_vL_u^0$ senkrecht auf FL, machen $F\mathfrak{F} = LL_u^0$, $L\mathfrak{L} = FF_u^0$ und ziehen die in $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{L}$ auf FL senkrechten Geraden f_v, l_v, welche die Gerade ξ in den Punkten Ξ', Ξ'' schneiden; dann entsprechen in geometrischer Hinsicht nach S. 920 den Punkten F, L in S beziehlich alle Punkte der Geraden f_v, l_v in S_v; und diesen Geraden als Strahlen des auf FL senkrechten Parallelstrahlenbüschels Π_v entsprechen somit die Strahlen $F\Xi'$, $L\Xi''$ des auf F_0L_0 senkrechten Parallelstrahlenbüschels Π. Da nun die Gerade $F\Xi'$ in diesem Falle durch den einen Grundpunkt F jenes Kreisbüschels geht, so fallen die beiden Doppelpunkte der involutorischen Punktreihe auf $F\Xi'$ im Punkte F zusammen, und das Analoge gilt von der involutorischen Punktreihe auf der Geraden $L\Xi''$. Demnach berühren die Geraden $F\Xi'$, $L\Xi''$ die Systemcurve $\varkappa$ in den Focalpunkten, und die Geraden f_v, l_v sind Tangenten an den Grenzkegelschnitt $\varkappa_v$.

Um die Verwandtschaft der Systeme S, S_v in einfachster Weise geometrisch darzustellen und um neue Ergebnisse ohne Rechnung zu erhalten, bringen wir diese Systeme, wie bei den bifocalen Systemen, in räumliche Beziehung. Wir verlegen das System S nach S_I in Fig. **863** in eine Grundrissebene, so dass jenes Parallelstrahlenbüschel Π zur Projectionsaxe ΩX senkrecht ist, und bezeichnen dasselbe mit Π_I. Ferner construiren wir zu dem System S_v ein ähnliches System S_{II} in einer zugehörigen Aufrissebene, so dass jenes Parallelstrahlenbüschel Π_v einem mit Π_I zur Deckung gebrachten Parallelstrahlenbüschel Π_{II} entspricht, welches also ebenfalls auf der Projectionsaxe ΩX senkrecht steht. Wenn wir nun die Projectionsaxe ΩX und die beiden auf derselben Senkrechten ΩY, ΩZ beziehlich als Axen der Coordinaten X, Y der Punkte des Systems S_I und der Coordinaten X, Z der Punkte des Systems S_{II} betrachten, so sind infolge dieser Transformationen die Coordinaten x, y der Punkte von S durch X, Y und die Coordinaten x_v, y_v durch X, Z in linearen Functionen bestimmt. Demnach wird durch Einsetzung dieser Werthe für x, y, x_v, y_v in die Gleichung 1) oder 2) der Grad derselben nicht geändert, und es ergiebt sich in beiden Fällen dieselbe Gleichung zweiten Grades bezüglich der drei Coordinaten X, Y, Z, welche also eine Fläche zweiter Ordnung repräsentirt, deren Grundriss- und Aufrissprojection resp. die Systeme S_I, S_{II} sind. Da jedem Punkte des Systems S_I ein Punkt im System S_{II} entspricht, so muss die Grundrissebene ganz von der Projection der Fläche zweiter Ordnung überdeckt sein; da ferner nach den obigen Darlegungen den Focalpunkten F_I, L_I in S_I alle Punkte je einer Geraden f_{II}, l_{II} entsprechen, so muss die Fläche zweiter Ordnung ein einschaliges Hyperboloid sein, welches zwei in F_I, L_I auf dem Grundriss senkrecht stehende Mantellinien besitzt. Hiernach erhalten wir den fundamentalen Satz:

Das zur Systemphase S congruente System S_I ist als die Grundrissprojection und das zur Geschwindigkeitsphase S_v ähnliche System S_{II} ist als die Aufrissprojection eines einschaligen Hyperboloids zu betrachten, welches so gestellt ist, dass zwei Mantellinien desselben in den Focalpunkten F_I, L_I auf dem Grundriss senkrecht stehen.

Der Grenzkegelschnitt $\varkappa_{II}$ im System S_{II}, welcher der geometrische Ort der Punkte des Systems S_{II} ist, denen zwei coincidirende Punkte im System S_I entsprechen, bildet im Aufriss die Contour der Aufrissprojection des Hyperboloids. Demnach ist der Grenzkegelschnitt $\varkappa_{II}$ die Aufrissprojection von einem auf dem Hyperboloid liegenden Kegelschnitt, und zu diesem gehört als Grundrissprojection ein Kegelschnitt $\varkappa_I$, der dem Grenzkegelschnitt $\varkappa_{II}$ entspricht. Hieraus folgt:

Die Punkte in einer Systemphase S, deren Geschwindigkeitsendpunkte auf dem Grenzkegelschnitt der Geschwindigkeitsphase S_v liegen, bilden einen zu demselben affinen Kegelschnitt, welcher durch die beiden Focalpunkte F, L geht.

Jede durch einen Focalpunkt gehende auf dem Grundriss senkrechte Ebene, deren in Fig. **863** gezeichnete Grundrissspur $F_I E_I$ mit dem Kegelschnitt $\varkappa_I$ den Schnittpunkt E_I bildet, schneidet das Hyperboloid längs der in F_I auf dem Grundriss senkrechten Mantellinie und längs einer anderen Mantellinie, deren Grundrissprojection $F_I E_I$ ist und deren Aufrissprojection den Grenzkegelschnitt $\varkappa_{II}$ in Punkte E_{II} berührt. Demnach ergiebt sich:

Jeder durch einen Focalpunkt gehenden Geraden in einer Systemphase S entspricht in der zugehörigen Geschwindigkeitsphase S_v eine Gerade, die den Grenzkegelschnitt $\varkappa_v$ berührt; und dieser Berührungspunkt entspricht dem Schnittpunkt, welchen die erste Gerade mit dem entsprechenden Kegelschnitt $\varkappa$ bildet.

Eine auf dem Grundriss senkrechte Ebene, die durch keinen Focalpunkt geht und nicht senkrecht zur Projectionsaxe ΩX ist, liefert in dem Hyperboloid einen Kegelschnitt, dessen Aufrissprojection der Grundrissspur dieser Ebene entspricht. Somit folgt:

Einer durch keinen Focalpunkt gehenden Geraden in einer Systemphase S entspricht ein Kegelschnitt in der zugehörigen Geschwindigkeitsphase S_v, der den Grenzkegelschnitt $\varkappa_v$ in einem Punkte, in zwei reellen Punkten oder zwei imaginären Punkten berührt, je nachdem die Gerade den Kegelschnitt $\varkappa$ berührt, in zwei reellen Punkten oder zwei imaginären Punkten schneidet.

Eine auf der Grundrissebene senkrechte Cylinderfläche, deren Directrix ein durch die Focalpunkte F_I, L_I gehender Kegelschnitt ist, schneidet das Hyperboloid längs der beiden in F_I, L_I auf dem Grundriss senkrechten Mantellinien und in einem Kegelschnitt. Hiernach ergiebt sich:

Einem durch die Focalpunkte gehenden Kegelschnitt in einer Systemphase S entspricht ein affiner Kegelschnitt in der zugehörigen Geschwindigkeitsphase S_v, der den Grenzkegelschnitt $\varkappa_v$ in zwei reellen Punkten oder zwei imaginären Punkten berührt, je nachdem der Kegelschnitt in S, ausser in den Focalpunkten, den Kegelschnitt $\varkappa$ in zwei reellen oder imaginären Punkten schneidet.

Bei zwei unendlich nahen Systemphasen eines bifocal-veränderlichen Systems entspricht gemäss der Darlegung auf S. 917 einer Punktreihe auf einem durch die beiden Focalpunkte gehenden Kreis in der einen Systemphase S eine ähnliche Punktreihe auf einem unendlich nahen Kreise in der anderen Systemphase. Demnach kann ein solcher Kreis in S als ähnlich-veränderlich betrachtet werden, und folglich bilden nach dem Satze S. 890 die Endpunkte der Geschwindigkeiten seiner Punkte eine ähnliche Punktreihe auf einem Kreise in der Geschwindigkeitsphase S_v. Wenn also jene Cylinderfläche einen durch die Focalpunkte F_I, L_I gehenden Kreis als Directrix besitzt, dann ist die Aufrissprojection des Kegelschnitts, welchen diese Cylinderfläche mit dem Hyperboloid bildet, ein congruenter Kreis.

Jede auf der Aufrissebene in Fig. **863** senkrechte Ebene, deren Aufrissspur i_{II} den Grenzkegelschnitt $\varkappa_{II}$ in einem Punkte D_{II} berührt, schneidet das Hyperboloid in zwei Mantellinien, deren Grundrissprojectionen $D_1 F_1$, $D_1 L_1$ sich in dem entsprechenden Punkte D_I des Kegelschnitts $\varkappa_I$ treffen und beziehlich durch die Focalpunkte F_I, L_I gehen. Dem zufolge ergiebt sich:

Einer Geraden i_v, welche in der Geschwindigkeitsphase S_v den Grenzkegelschnitt $\varkappa_v$ in einem Punkte D_v berührt, entsprechen in der Systemphase S zwei Gerade i_f, i_l, die beziehlich durch die Focalpunkte F, L gehen und sich in dem entsprechenden Punkt D auf dem Kegelschnitt $\varkappa$ schneiden; und einer Punktreihe auf i_v entsprechen ähnliche Punktreihen auf i_f und i_l.

Eine auf der Aufrissebene senkrechte Ebene, deren Aufrissspur nicht senkrecht zur Projectionsaxe ΩX ist und den Grenzkegelschnitt $\varkappa_{II}$ nicht berührt, schneidet das Hyperboloid in einem Kegelschnitt, dessen Grundrissprojection durch die beiden Focalpunkte F_I, L_I geht. Hieraus folgt:

Einer zur Geschwindigkeitsphase S_v gehörenden Geraden, die nicht ein Strahl jenes Parallelstrahlenbüschels Π_v, nicht eine Tangente des Grenzkegelschnittes $\varkappa_v$ ist, entspricht in der Systemphase S ein durch die Focalpunkte gehender Kegelschnitt.

Die einfache Ableitung dieser Ergebnisse bezeugt genugsam, wie nützlich sich die darstellend-geometrische Auffassung der betrachteten ein-zweideutigen Verwandtschaft erweist.

Alphabetisches Register.

H.

J.

K.

N.

O.

P.

T.

Y.

Z.

BERICHTIGUNGEN

S. 7, Z. 8 lies: Schumacher statt Schuhmacher.
S. 26, Z. 10 lies: $B\mathfrak{P}$ statt $A\mathfrak{P}$.
S. 53, Z. 11 v. u. lies: auf den statt auf der.
S. 53, Z. 10 v. u. lies: A_v^{21} statt A_v^{12} und A_v^{31} statt A_v^{13}.
S. 54, Z. 21 lies: A_v^h statt A_v''.
S. 55, Z. 5 lies: AC statt BC.
S. 55, Z. 12 lies: CA statt $B_v A_v$.
S. 57, Z. 15 lies: $\mathfrak{P}_{12}$ statt $\mathfrak{P}_{21}$.
S. 57, Z. 20 liess: $\mathfrak{P}_{12}, \mathfrak{P}_{13}$ statt $\mathfrak{P}_{21}, \mathfrak{P}_{31}$.
S. 63, Z. 2 v. u. lies: D'Ocagne statt D'Orcagne.
S. 67, Z. 17 lies: $A' A A''$ statt $A_v' A A_v''$.
S. 75, Z. 3 v. u. lies: Eckardt statt Eckart.
S. 77 im zweiten Absatz lies: B statt A.
S. 78, Z. 7 v. u. lies: in den Punkten C, D statt die Punkte C, D.
S. 252, resp. Taf. XVIII Fig. 250: das mit „Burmester" bezeichnete Kapselräderwerk stammt von Pumphrey. Siehe: Specification 5. Febr. 1829, Polyt. Journal 1830. B. 36. S. 195.
S. 423 Art. 183 ist die Bedingung erforderlich, dass in starren Bestandtheilen der Mechanismen keine überzählige Glieder vorkommen.
S. 441 Absatz b) lies: Whitworth statt Witworth.
S. 455. Zur Anmerkung. Das nach Morgan benannte Ruderrad wurde vor E. Galloway von Robert Stevens ausgeführt. Siehe, Thurston, Die Dampfmaschine, deutsch von Uhland 1880. Thl. II. S. 59.
S. 680, Z. 1 lies: Steuerungen statt Steuerung.
S. 755. Die in Art. 291 abgeleiteten Beziehungen bei der schrägen Wurfbewegung stammen von Torricelli, Opera geometrica 1644. „De motu projectorum."

Druck von J. B. Hirschfeld in Leipzig.

BU

Ki